

Φυσική

**Ομάδας
Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Υγείας**

**Γ' τάξη
Γενικού Λυκείου**

ΤΟΜΟΣ 3ος



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Α. ΙΩΑΝΝΟΥ - Γ. ΝΤΑΝΟΣ
Α. ΠΗΤΤΑΣ - Σ. ΡΑΠΤΗΣ

**Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια
του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου**

Φυσική
Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Υγείας

Γ' τάξη
Γενικού Λυκείου

ΤΟΜΟΣ 3ος

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Συγγραφείς:

Αλέκος Ιωάννου, Γιάννης Ντάνος
Άγγελος Πήττας, Σταύρος Ράπτης

Κριτές:

Αντωνίου Νικόλαος, καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών, ως πρόεδρος

Ευθυμιόπουλος Θωμάς, Αν. Καθηγητής Πανεπιστημίου Κρήτης

Αρναουτάκης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος
ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης

Καρανίκας Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος
ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης

Πρίντζας Γεώργιος, Σχολικός Σύμβουλος
ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης

Κοτρόζου Αικατερίνη, Φυσικός, M.Sc. Καθηγήτρια
Δ/θμιας Εκ/σης

Φωτάκης Ιωάννης, Καθηγητής ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης».

Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ.

Υποπρόγραμμα 1: ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

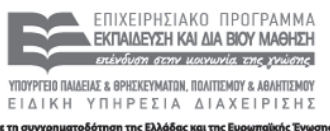
Μέτρο 1.1: ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ενέργεια 1.1α: Προγράμματα – βιβλία

ΕΡΓΟ: ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ**



(3 ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ)



**Αρχή του
Pascal** 8

**Εξίσωση
συνέχειας** 16

**Εξίσωση
Bernoulli** 18

**Τριβή στα
ρευστά** 31

Σύνοψη 34

Ασκήσεις 44

(3.1.) Εισαγωγή

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί αποδίδουν το χαρακτηρισμό «ρευστά» στα υγρά και τα αέρια σώματα, τα οποία -αντίθετα με τα στερεά- δεν έχουν δικό τους σχήμα αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει.

Η διάκριση των ρευστών σε υγρά και αέρια βασίζεται στη σταθερότητα του όγκου τους (για ορισμένη θερμοκρασία). Τα υγρά είναι πρακτικά **ασυμπίεστα**, έχουν δηλαδή σταθερό όγκο, ανεξάρτητο από την πίεση.

Αντίθετα τα αέρια είναι **συμπιεστά**. Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος τους εξαρτάται από την πίεσή τους.

Κινούμεστε μέσα σε ρευστά (στον ατμοσφαιρικό αέρα ή στο νερό της θάλασσας) μεταφέρουμε τεράστιες ποσότητες ρευστών με σωλήνες, εκμεταλλευόμαστε την ενέργεια των ρευστών για να λύσουμε πρακτικά μας προβλήματα

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας στους τομείς αυτούς βασίστηκε στη μελέτη των νόμων που διέπουν την κίνηση των ρευστών.

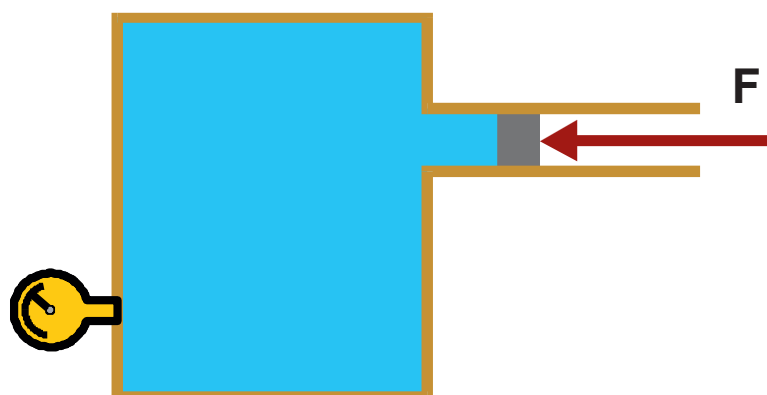
(3.2.) Υγρά Σε Ισορροπία

Η πίεση¹ στα διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει κάποιο υγρό και στα τοιχώματα του δοχείου

¹ Υπενθυμίζεται ότι η πίεση ορίζεται ως το πηλίκο του μέτρου της δύναμης που ασκείται κάθετα σε μία επιφάνεια προς το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής: $p = \frac{dF}{dA}$.

Στο S.I. η πίεση μετριέται σε **Pa (Pascal)**. $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

μέσα στο οποίο περιέχεται οφείλεται ή στο βάρος του υγρού ή σε εξωτερικό αίτιο. Ως εξωτερικό αίτιο μπορούμε να θεωρήσουμε την πίεση που κάποιο έμβολο ασκεί σε μια περιοχή του υγρού. Η πίεση που μετράει το μανόμετρο στο δοχείο του [σχήματος 3.1](#) οφείλεται και στο βάρος του υγρού που περιέχεται στο δοχείο αλλά και στη δράση του εμβόλου.



Η πίεση στα διάφορα σημεία ενός υγρού οφείλεται στο βάρος του και σε εξωτερικά αίτια.
Σχήμα 3-1.

Υδροστατική πίεση

Η πίεση που οφείλεται στο βάρος του υγρού ονομάζεται υδροστατική πίεση.

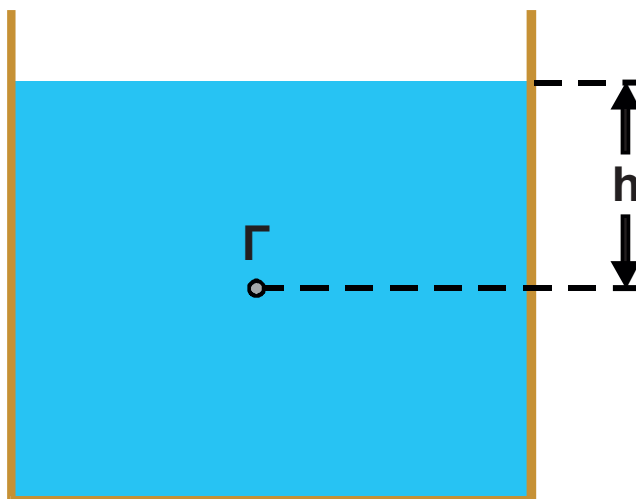
Η υδροστατική πίεση έχει νόημα μόνο εφόσον το υγρό βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας.

Η σχέση που δίνει την υδροστατική πίεση σε κάποιο σημείο **Γ** του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό σε ισορροπία είναι

$$p = \rho gh$$

(Θεμελιώδης νόμος της υδροστατικής)

όπου h : το βάθος του σημείου Γ (η απόσταση από την ανώτερη επιφάνεια του υγρού) και ρ : η πυκνότητα του υγρού.



Η υδροστατική πίεση σε βάθος h είναι ρgh .
Σχήμα 3-2.

Αρχή του Pascal (Πασκάλ)

Όταν ένα υγρό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, σε όλη του την έκταση επικρατεί η ίδια πίεση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι

η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του.

(αρχή του Pascal)

Για παράδειγμα, στο δοχείο του **σχήματος 3.3**, τα μανόμετρα δείχνουν όλα την ίδια πίεση όταν το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας. Αν αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά $\frac{\Delta F}{A}$ (A εμβαδόν του εμβόλου).

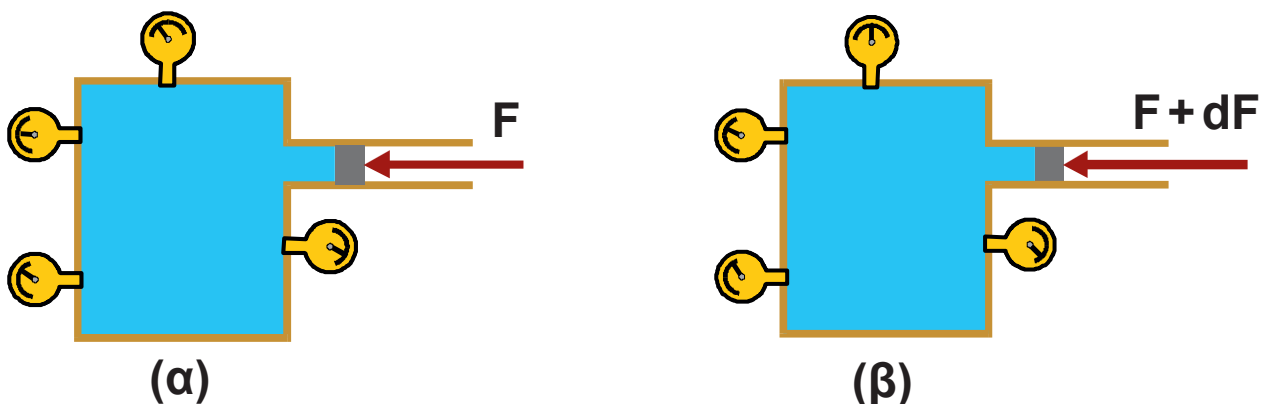
Εάν τώρα το δοχείο βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας, η πίεση που δείχνουν τα μανόμετρα είναι

διαφορετική στο κάθε ένα από αυτά ανάλογα με το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Αν πάλι αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά $\frac{\Delta F}{A}$.

Σημείωση: Αν κάποιο υγρό ισορροπεί σε ανοιχτό δοχείο, στην ελεύθερη επιφάνειά του ασκείται η ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι η πίεση σε βάθος h θα είναι

$$p = p_{at} + \rho gh,$$

ακριβώς επειδή, όπως προβλέπει η αρχή του Pascal, η ατμοσφαιρική πίεση μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού.



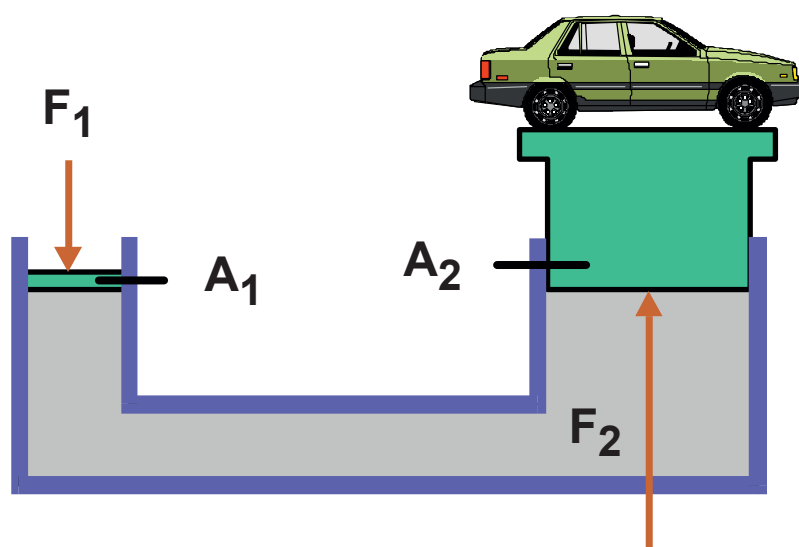
(α) Το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας. Η πίεση που δημιουργεί η δύναμη μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού (β) Αν αυξηθεί η δύναμη, η πίεση στο υγρό αυξάνεται ομοιόμορφα σε όλα τα σημεία του.
Σχήμα 3-3.



Blaise Pascal (1623-1662). Γάλλος επιστήμονας και φιλόσοφος. Ανήσυχο πνεύμα, παλινδρομούσε συνεχώς ανάμεσα στο θρησκευτικό του συναίσθημα και τις επιστημονικές του ανησυχίες, προσπαθώντας να τα συμβιβάσει.
Εικόνα 3-1.

Παράδειγμα 3.1

Υδραυλικός ανυψωτήρας χρησιμοποιείται για την ανύψωση αυτοκινήτου βάρους $w = 18000 \text{ N}$. Πόση δύναμη πρέπει να ασκήσουμε στο μικρής διατομής έμβολο του **σχήματος 3.4** ώστε να πετύχουμε την ανύψωση με το μεγάλης διατομής έμβολο; Τα έμβολα είναι κυλινδρικά και έχουν ακτίνες $r_1 = 4 \text{ cm}$ και $r_2 = 20 \text{ cm}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 3-4.

Απάντηση:

Σύμφωνα με την αρχή του Pascal η επιπλέον πίεση που οφείλεται στη δύναμη που ασκήσαμε στο μικρό έμβολο θα μεταφερθεί και στο μεγάλο.

$$\text{Άρα} \quad \Delta p_1 = \Delta p_2 = p \quad (3.1)$$

$$\text{Όμως} \quad \Delta p_1 = F_1 / A_1 \quad (3.2)$$

$$\text{και} \quad \Delta p_2 = F_2 / A_2 \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.3) και (3.2) στην (3.1) προκύπτει

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{οπότε} \quad F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο της F_2 πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με το μέτρο του βάρους w του αυτοκινήτου, καταλήγουμε

$$F_1 = (18000\text{N}) \frac{\pi (4 \times 10^{-2}\text{m})^2}{\pi (20 \times 10^{-2}\text{m})^2} = 720\text{N}$$



Ρίχνοντας χρώματα μέσα σε ένα ρευστό που κάνει τυρβώδη ροή έχουμε μια εικόνα των δινών που σχηματίζει.

Εικόνα 3-2.

(3.3.) Ρευστά Σε Κίνηση

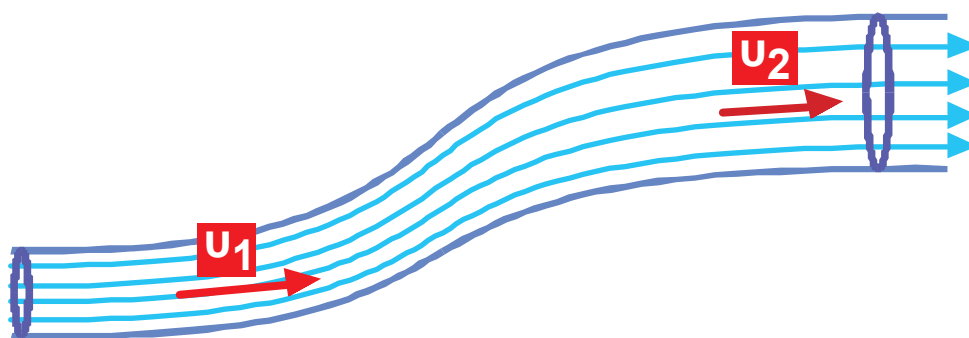
Κατά την κίνηση των ρευστών αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων τους (εσωτερική τριβή) αλλά και μεταξύ των μορίων τους και των τοιχωμάτων του σωλήνα μέσα στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση (δυνάμεις συναφείας). Αν οι δυνάμεις που προαναφέραμε υπερβούν κάποιο όριο το ρευστό δημιουργεί κατά τη ροή του δίνες και η ροή λέγεται **τυρβώδης** ή **στροβιλώδης**. Η μελέτη μιας τέτοιας κίνησης είναι πολύπλοκη. Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη της ροής ενός ρευστού που δεν παρουσιάζει εσωτερικές τριβές και τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει και επιπλέον είναι ασυμπίεστο. Ένα τέτοιο ρευστό χαρακτηρίζεται ως **ιδανικό**.

Στην πραγματικότητα η συμπεριφορά των κινούμενων ρευστών διαφέρει πολύ ή λίγο από τη συμπεριφορά των ιδανικών ρευστών. Για να διακρίνουμε τα υπαρκτά ρευστά από τα ιδανικά θα τα ονομάζουμε **πραγματικά ρευστά**.

Η ροή ενός ιδανικού ρευστού είναι **στρωτή**, δηλαδή δεν παρουσιάζει στροβίλους.

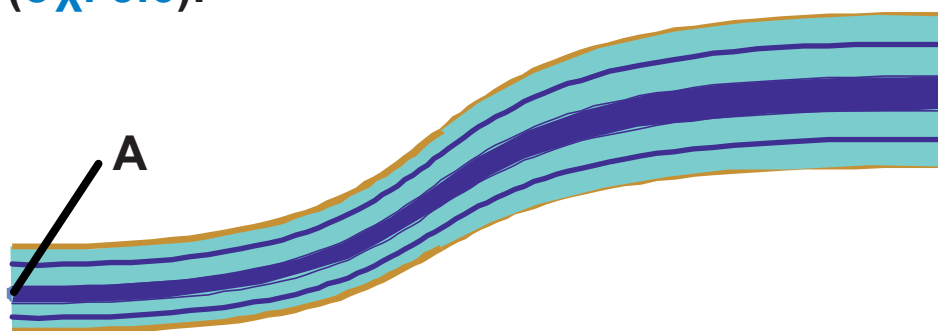
Ρευματικές γραμμές - Φλέβα - Παροχή

Το σύνολο των θέσεων από τις οποίες περνά κάθε μόριο του ρευστού στη διάρκεια της κίνησής του ορίζει μια γραμμή που την ονομάζουμε **ρευματική γραμμή**. Εφόσον η ρευματική γραμμή είναι στην πραγματικότητα η τροχιά του μορίου, η ταχύτητά του σε κάθε θέση θα είναι εφαπτομένη της ρευματικής γραμμής πράγμα που σημαίνει ότι δύο ρευματικές γραμμές δεν είναι δυνατόν να τέμνονται (**σχ. 3.5**).



Ρευματική γραμμή είναι η τροχιά ενός μορίου του υγρού.
Σχήμα 3-5.

Αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια **A** κάθετη στη διεύθυνση του σωλήνα¹, μέσα στον οποίο κινείται ένα ρευστό και από κάθε σημείο του περιγράμματος της **A** σχεδιάσουμε την αντίστοιχη ρευματική γραμμή μέσα στο ρευστό σχηματίζεται ένας νοητός σωλήνας που ονομάζεται **φλέβα** (σχ. 3.6).



Σε κάθε σημείο στο περίγραμμα της επιφάνειας **A** αντιστοιχεί μια ρευματική γραμμή. Όλες αυτές οι ρευματικές γραμμές ορίζουν μία φλέβα.

Σχήμα 3-6.

¹ Ως σωλήνες θεωρούμε κάθε μορφής τοιχώματα που περιορίζουν το κινούμενο ρευστό. Για παράδειγμα σωλήνες μπορούν να θεωρηθούν η κοίτη και τα πλευρικά τοιχώματα στη ροή των ποταμών ή οι κοιλάδες στην κίνηση των ανέμων.

Όπως φαίνεται από τον ορισμό της το ρευστό που κυλάει σε κάποια φλέβα δεν αναμιγνύεται με το περιεχόμενο άλλης φλέβας του σωλήνα.

Από μια διατομή του σωλήνα ή της φλέβας σε χρόνο Δt περνάει ένας όγκος υγρού ΔV . Το πηλίκο

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3.4)$$

ονομάζεται **παροχή** του σωλήνα ή της φλέβας και μετριέται σε m^3/s .

Αν η διατομή του σωλήνα είναι A και το υγρό στο χρονικό διάστημα Δt έχει μετατοπιστεί κατά Δx , μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta V = A\Delta x \quad (3.5)$$

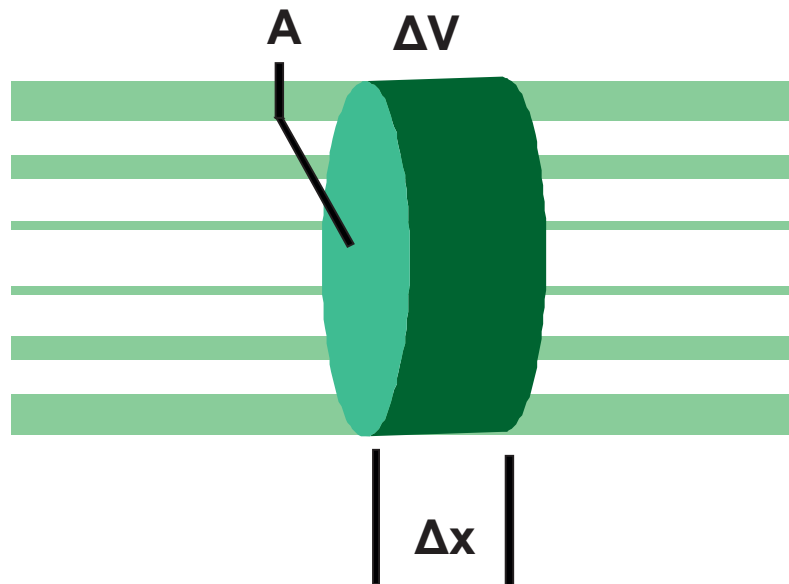
Αντικαθιστώντας την (3.5) στην (3.4) προκύπτει

$$\Pi = \frac{A\Delta x}{\Delta t}$$

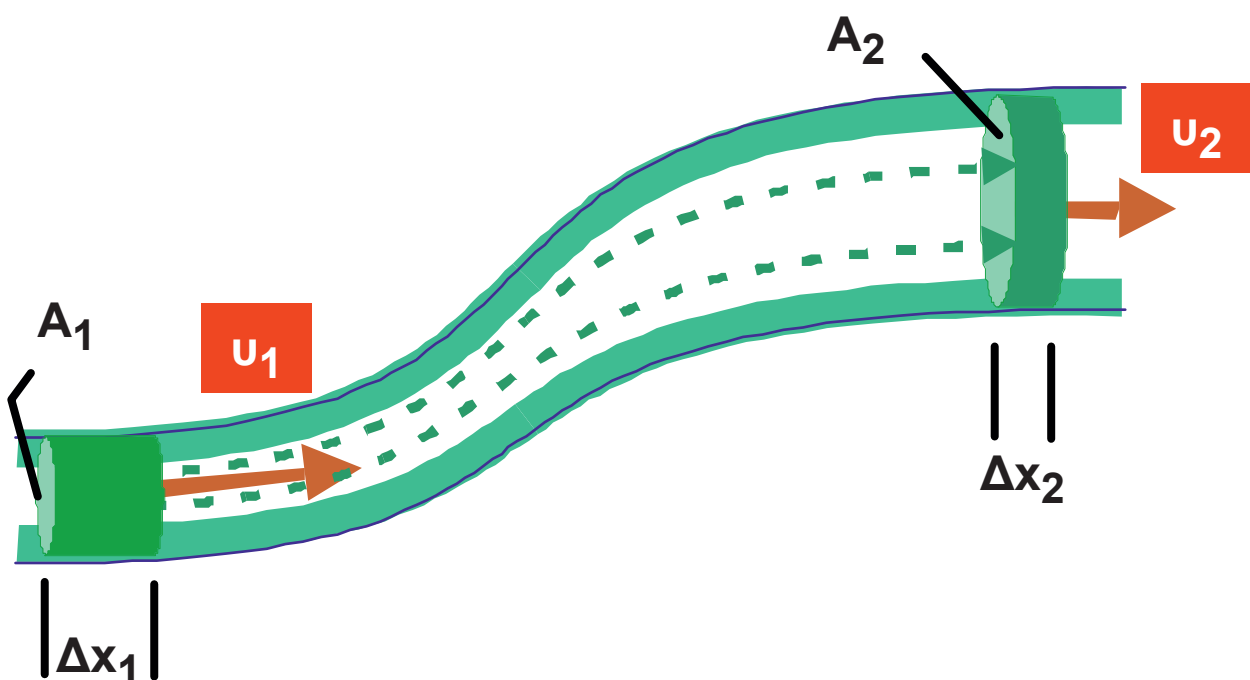
και επειδή το πηλίκο $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ισούται με την ταχύτητα του υγρού στη θέση αυτή

$$\Pi = Au$$

Η παροχή σωλήνα ή φλέβας σε κάποια θέση είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής επί την ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή.



Στο χρονικό διάστημα Δt , από μια διατομή A του σωλήνα περνάει υγρό όγκου $A \Delta x$.
Σχήμα 3-7.



Αν το ρευστό που ρέει στο σωλήνα είναι ασυμπίεστο, το γινόμενο $A u$ είναι σταθερό.
Σχήμα 3-8.

(3.4.) Διατήρηση Ύλης και η Εξίσωση Συνέχειας

Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό που ρέει μέσα σ' ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής (σχ. 3.8). Υποθέτουμε ότι η ροή είναι στρωτή.

Επειδή το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο θα πρέπει η μάζα Δm_1 που περνάει από μία διατομή A_1 του σωλήνα σε χρόνο Δt να είναι ίση με τη μάζα Δm_2 που περνάει στο ίδιο χρονικό διάστημα από μία άλλη διατομή του σωλήνα A_2 . Είναι δηλαδή

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \quad (3.6)$$

ή

$$\rho \Delta V_1 = \rho \Delta V_2$$

όπου ΔV_1 και ΔV_2 οι στοιχειώδεις όγκοι που καταλαμβάνουν μέσα στο σωλήνα οι μάζες Δm_1 και Δm_2 αντίστοιχα.

Αλλά $\Delta V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_1 u_1 \Delta t$ και $\Delta V_2 = A_2 \Delta x_2 = A_2 u_2 \Delta t$ όπου u_1 και u_2 οι ταχύτητες του ρευστού στις διατομές A_1 και A_2 αντίστοιχα.¹

Η εξίσωση (3.6) γίνεται

$$A_1 u_1 \Delta t = A_2 u_2 \Delta t \quad (3.7)$$

και τελικά

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \quad (3.8)$$

¹ Υπενθυμίζεται ότι το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο. Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητά του είναι ίδια σε όλη την έκτασή του.

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση της συνέχειας** και είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης.

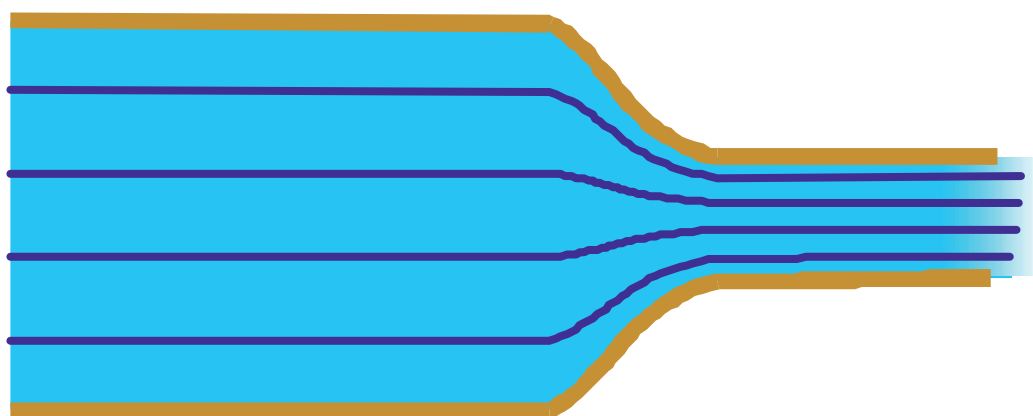
Επειδή $\Pi = Au$ η (3.8) γράφεται και

$$\Pi_1 = \Pi_2 \text{ ή } \Pi = \text{σταθερό} \quad (3.9)$$

Η σχέση (3.9) ισχύει για σωλήνα αλλά και για φλέβα και διατυπώνεται ως εξής:

Κατά μήκος ενός σωλήνα ή μιας φλέβας η παροχή διατηρείται σταθερή.

Από τη σχέση (3.8) φαίνεται ότι κατά μήκος ενός σωλήνα που δεν έχει σταθερή διατομή, η ταχύτητα του υγρού δεν είναι παντού ίδια. Σε σημεία όπου ο σωλήνας στενεύει η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη. Κατά μήκος ενός ποταμού με σταθερό πλάτος πολλές φορές το βάθος ποικίλει. Όπου το ποτάμι έχει μικρό βάθος έχει και μικρή εγκάρσια διατομή. Επειδή η παροχή είναι σταθερή, στις περιοχές όπου το ποτάμι είναι ρηχό το νερό κυλάει γρηγορότερα. Παραστατικά μπορούμε να πούμε ότι εκεί που οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη (σχ. 3.9).



Η ταχύτητα ροής είναι μεγαλύτερη εκεί που πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές.

Σχήμα 3-9.

Παράδειγμα 3.2

Ένας κυλινδρικός σωλήνας συνδέεται με βρύση παροχής $0,001 \text{ m}^3/\text{s}$. α) Εάν ο σωλήνας έχει διάμετρο 3 cm ποια η ταχύτητα ροής του νερού μέσα στο σωλήνα; β) Με τι ταχύτητα εκτοξεύεται το νερό αν μειώσουμε με το δάχτυλό μας, στο μισό, τη διατομή του σωλήνα;

Απάντηση:

$$\alpha) \frac{\Delta V}{\Delta t} = Au \quad \text{άρα} \quad u = \frac{1}{A} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \text{οπότε}$$

$$u = \frac{1}{\pi \frac{(3 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{4}} 0,001 \text{ m}^3/\text{s} = 1,42 \text{ m/s}$$

$$\beta) A_1 u_1 = A_2 u_2 \quad \text{οπότε} \quad u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{και τελικά} \quad u_2 = (1,42 \text{ m/s}) \cdot 2 = 2,84 \text{ m/s}$$

(3.5.) Η Διατήρηση Ενέργειας και η Εξίσωση του Bernoulli (Μπερνούλι)

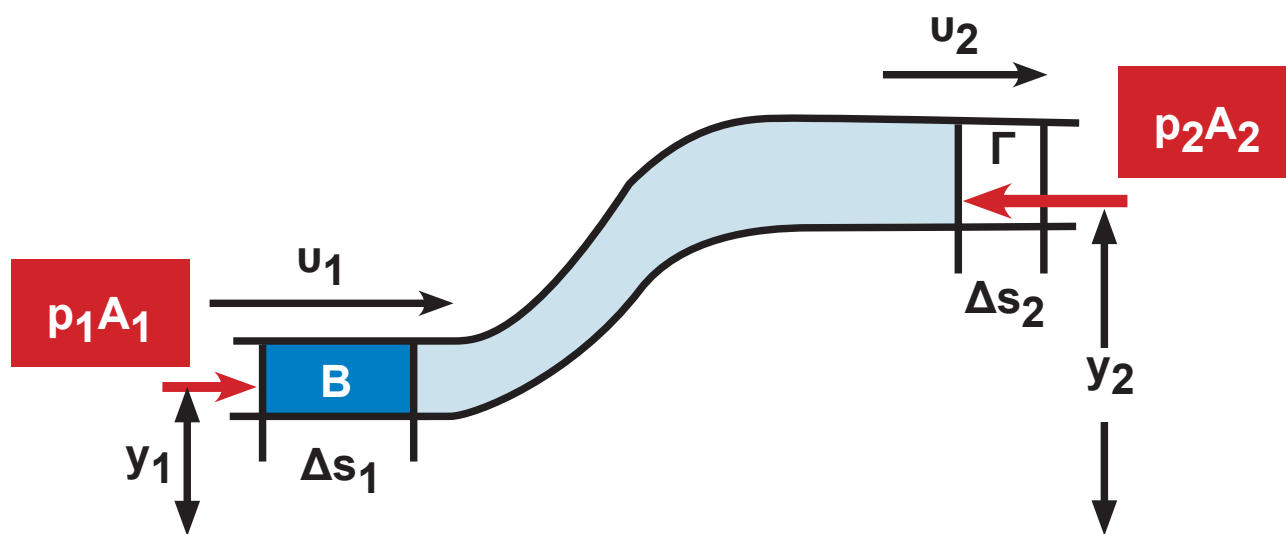
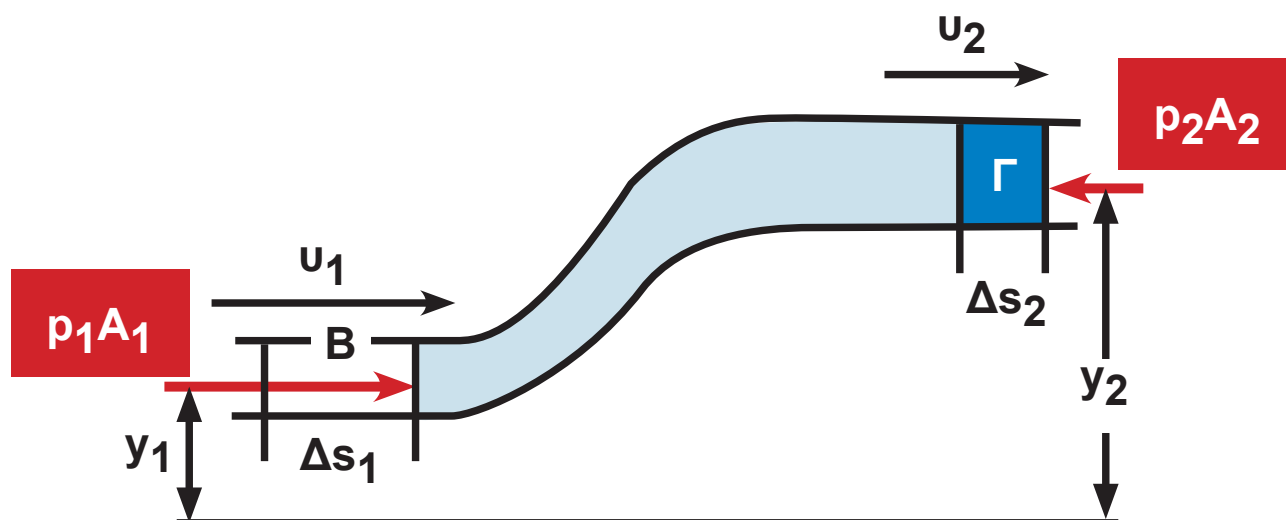
Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι η πίεση ενός ρευστού που ρέει μέσα σε ένα σωλήνα είναι, εν γένει, διαφορετική ανάμεσα σε δύο σημεία που έχουν υψομετρική διαφορά. Το νερό στις βρύσες του πέμπτου ορόφου έχει μικρότερη πίεση από το νερό στις βρύσες του ισογείου.

Σε ένα σωλήνα που η διατομή του δεν είναι παντού

ίδια, η ταχύτητα του υγρού μεταβάλλεται (εξίσωση της συνέχειας). Δηλαδή μια μικρή μάζα Δm του υγρού σε άλλες περιοχές του σωλήνα επιταχύνεται και σε άλλες επιβραδύνεται. Στις περιπτώσεις αυτές η συνολική δύναμη που δέχεται αυτή η μάζα από το περιβάλλον υγρό δεν είναι μηδενική και κατά συνέπεια η πίεση δε μπορεί να είναι ίδια σε όλες τις περιοχές του σωλήνα.

Το 1738 ο Ελβετός Daniel Bernoulli βρήκε μια σχέση που συνδέει την πίεση με την ταχύτητα και με το ύψος.

Έστω ότι έχουμε ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής μέσα στον οποίο ρέει ένα ασυμπίεστο ρευστό (σχ. 3.10). Θα εξετάσουμε την πίεση σε δύο σημεία B , Γ , του σωλήνα. Το σημείο B βρίσκεται σε ύψος y_1 από το έδαφος και ο σωλήνας έχει στην περιοχή του B διατομή A_1 . Η πίεση του ρευστού στο B είναι p_1 . Το σημείο Γ βρίσκεται σε ύψος y_2 από το έδαφος, η διατομή του σωλήνα εκεί είναι A_2 και η πίεση p_2 . Αν θεωρήσουμε σαν σύστημα το ρευστό από το B μέχρι το Γ , βλέπουμε ότι δέχεται από το υπόλοιπο ρευστό μια δύναμη $p_1 A_1$ στην περιοχή του B και μια δύναμη, την $p_2 A_2$ στην περιοχή του Γ , με φορά αντίθετη με τη φορά της $p_1 A_1$. Σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα του ρευστού στην περιοχή του B μετατοπίζεται κατά Δs_1 ενώ ένα αντίστοιχο τμήμα του ρευστού ίσης μάζας, άρα και όγκου, στην περιοχή του Γ μετατοπίζεται κατά Δs_2 .



Ασυμπίεστο ρευστό ρέει με στρωτή ροή μέσα σε ένα σωλήνα. Το ρευστό που βρίσκεται στο μέρος του σωλήνα με μήκος Δs_1 μετακινείται στο μέρος του σωλήνα που έχει μήκος Δs_2 . Οι όγκοι του ρευστού στα δύο μέρη είναι ίσοι.

Σχήμα 3-10.



Daniel Bernoulli (1700 - 1782). Ελβετός φυσικός και μαθηματικός, από οικογένεια διάσημων μαθηματικών. Η πιο φημισμένη του εργασία ήταν πάνω στην υδροδυναμική. Οι μελέτες του Bernoulli πάνω στα ρευστά αποτέλεσαν την απαρχή της κινητικής θεωρίας των αερίων. Ο Bernoulli τιμήθηκε πολύ στη διάρκεια της ζωής του με σειρά από αξιώματα και θέσεις στα πανεπιστήμια της εποχής του.

Εικόνα 3-3.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας στο μικρό χρονικό διάστημα Δt . Σύμφωνα με αυτό

$$W + W_B = \Delta K \quad (3.10)$$

όπου W το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού από το B στο Γ από το περιβάλλον ρευστό. Το έργο αυτό θα είναι το έργο της δύναμης $p_1 A_1$ (θετικό) συν το έργο της $p_2 A_2$ (αρνητικό)

$$W = p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2 \quad (3.11)$$

Όμως $A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2 = \Delta V$

Οπότε $W = (p_1 - p_2) \Delta V$

Το έργο του βάρους στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

$$W_B = -\Delta m g (y_2 - y_1) = -\rho \Delta V g (y_2 - y_1) \quad (3.12)$$

καθώς, στην ουσία, ένα τμήμα του ρευστού Δm έφυγε από το ύψος y_1 και βρέθηκε στο ύψος y_2 .

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m u_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m u_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (u_2^2 - u_1^2) \quad (3.13)$$

όπου u_1 η ταχύτητα του ρευστού στο B και u_2 η ταχύτητα του ρευστού στο Γ .

Αντικαθιστώντας τις (3.11), (3.12) και (3.13) στη σχέση (3.10) έχουμε

$$(p_1 - p_2)\Delta V - \rho\Delta V g(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \rho\Delta V(u_2^2 - u_1^2)$$

Απλοποιούμε τα ΔV και αναδιατάσσοντας την εξίσωση έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g y_2$$

Η σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων άρα μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g y = \text{σταθερό}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η **εξίσωση του Bernoulli** για ιδανικό ρευστό.

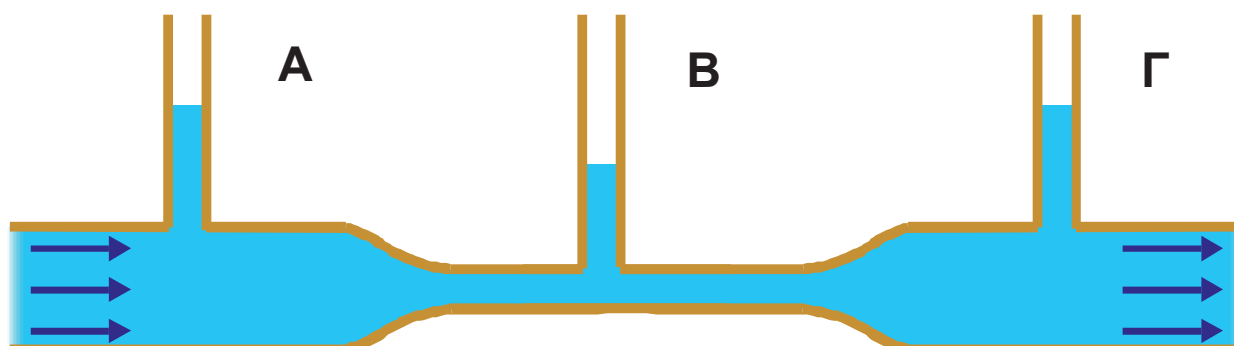
Από την εξίσωση του Bernoulli προκύπτει ότι **το άθροισμα της πίεσης (p), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\frac{1}{2} \rho u^2$) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\rho g y$) έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο της ρευματικής γραμμής.**

Η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών.

Αν ο σωλήνας είναι οριζόντιος η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{σταθερό}$$

από όπου φαίνεται ότι σε περιοχές όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές (μικρή διατομή του σωλήνα) και η ταχύτητα ροής αυξάνεται, η πίεση ελαττώνεται.



Στο στενό μέρος του σωλήνα η ταχύτητα του υγρού είναι μεγαλύτερη. Το ύψος της στάθμης του υγρού πάνω από την περιοχή αυτή δείχνει ότι η πίεση στο σωλήνα είναι μικρότερη.

Σχήμα 3-11.

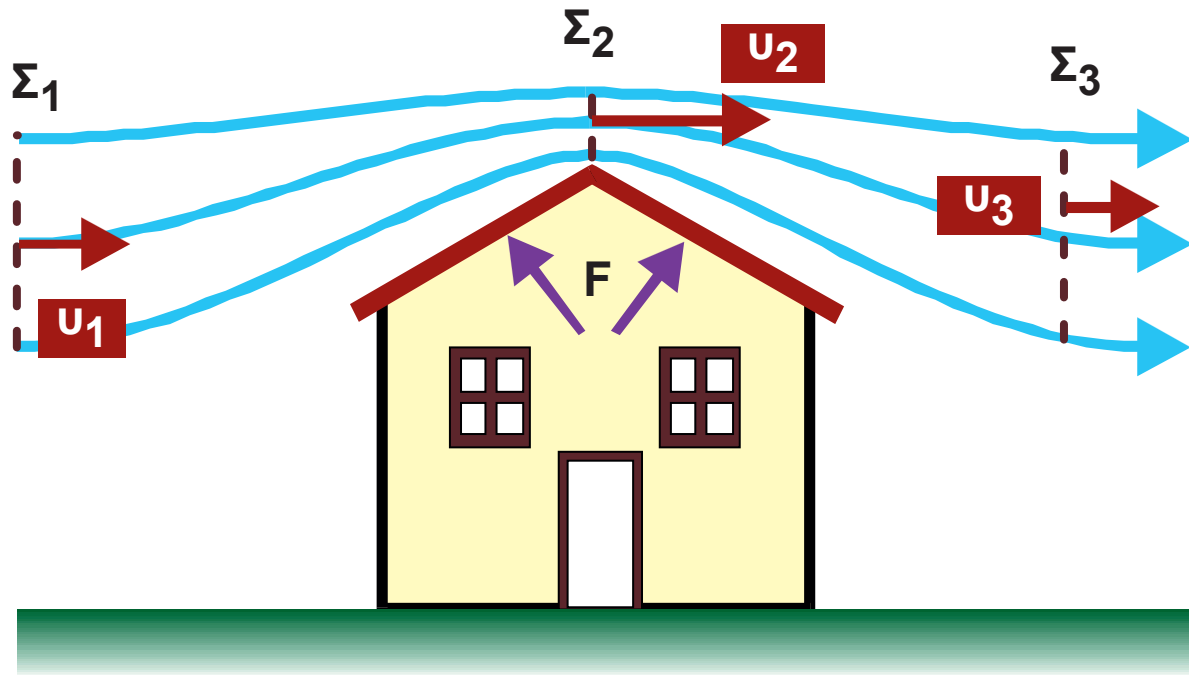
Εφαρμογή 3-1

Γιατί ο δυνατός άνεμος παρασέρνει τις στέγες των σπιτιών;

Ο δυνατός άνεμος όταν συναντά το σπίτι (σχ. 3.12) περνά πάνω από αυτό, με αποτέλεσμα η φλέβα του αέρα να στενεύει στη θέση Σ_2 πάνω από τη στέγη, άρα η ταχύτητά του u_2 να είναι μεγαλύτερη από τις ταχύτητες u_1 και u_3 που έχει στις θέσεις Σ_1 και Σ_3 , αντίστοιχα, πριν και μετά απ' αυτήν (εξίσωση συνέχειας).

Επειδή στη θέση Σ_2 η ταχύτητα του ανέμου είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στις θέσεις Σ_1 και Σ_3 , σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli η πίεση στο Σ_2 θα είναι μικρότερη από αυτήν στις θέσεις Σ_1 και Σ_3 . Η πίεση πάνω

από τη στέγη θα είναι ακόμη μικρότερη από αυτήν που επικρατεί στο εσωτερικό του σπιτιού όπου ο αέρας είναι ακίνητος. Η ισορροπία δυνάμεων που διατηρεί τη στέγη στη θέση της διαταράσσεται, με αποτέλεσμα η στέγη να τείνει να ανυψωθεί.

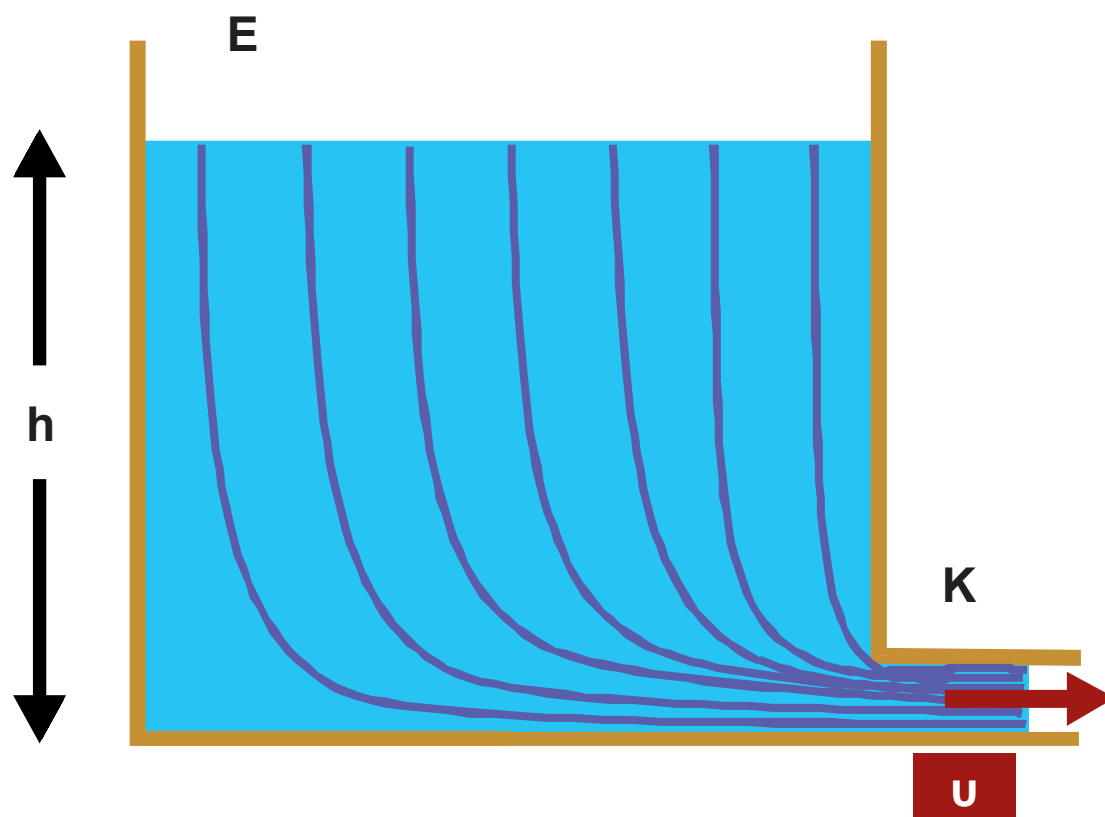


Σχήμα 3-12.

Εφαρμογή 3-2

Θεώρημα Torricelli (Υπολογισμός ταχύτητας εκροής υγρού από ανοικτό δοχείο)

Έστω ότι έχουμε το δοχείο του **σχήματος 3.13** στη βάση του οποίου υπάρχει στόμιο εκροής.



Σχήμα 3-13.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για τις θέσεις E (ελεύθερη επιφάνεια) και K (στόμιο εκροής):

$$p_E + \frac{1}{2} \rho u_E^2 + \rho gh = p_K + \frac{1}{2} \rho u_K^2 + 0 \quad (3.14)$$

Η πίεση τόσο στην ελεύθερη επιφάνεια όσο και στο σημείο εξόδου είναι η ατμοσφαιρική, δηλαδή:

$$p_E = p_K = p_{at} \quad (3.15)$$

Η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του υγρού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα συγκριτικά με την ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στο **K**

$$v_E = 0 \quad (3.16)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.15) και (3.16) και επιλύοντας την (3.14) ως προς v_K βρίσκουμε

$$v_K = \sqrt{2gh}$$

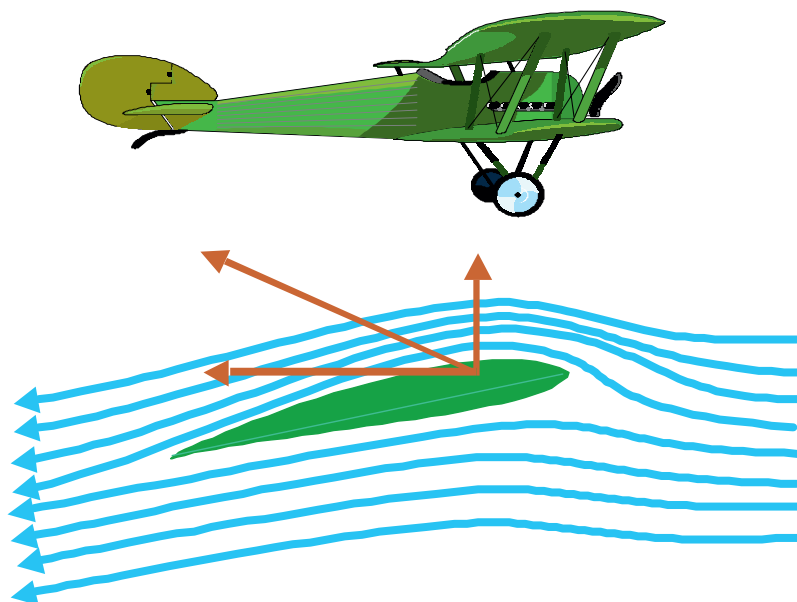
που αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του **θεωρήματος του Torricelli** (Τορικέλι).

Η ταχύτητα εκροής υγρού από στόμιο που βρίσκεται σε βάθος **h** από την ελεύθερη επιφάνειά του είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος **h**.

Εφαρμογή 3.3

Ποια δύναμη ανυψώνει τα αεροπλάνα;

Οι πτέρυγες των αεροπλάνων είναι έτσι σχεδιασμένες ώστε, όταν κινούνται, οι ρευματικές γραμμές του αέρα να παρουσιάζουν πύκνωση στο επάνω μέρος τους και αραιώση στο κάτω (σχ. 3.14).



Σχήμα 3-14.

Η πίεση στο άνω μέρος των πτερύγων είναι μικρότερη από αυτήν στο κάτω μέρος. Η δύναμη που δέχονται οι πτέρυγες λόγω αυτής της διαφοράς πίεσης λέγεται **αεροδύναμη** ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα της λέγεται **δυναμική άνωση**.

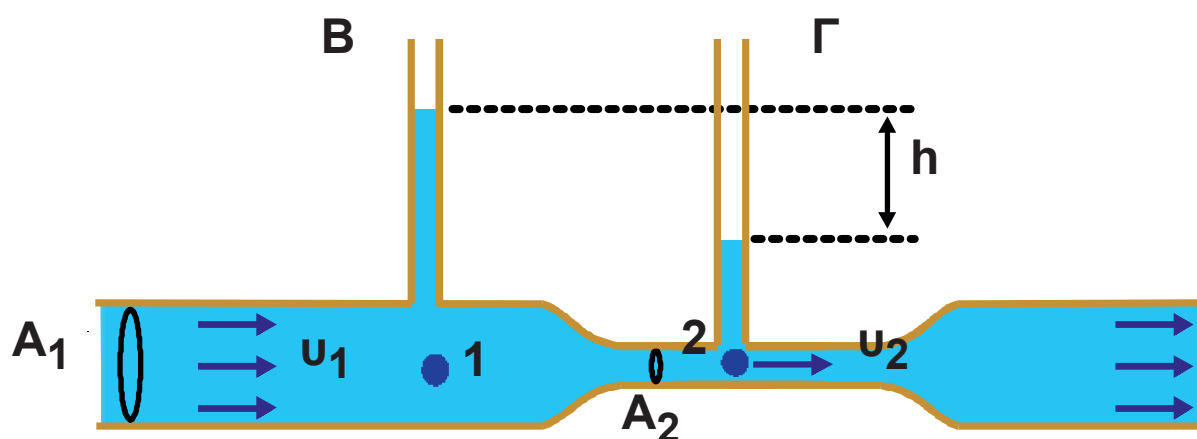
Οι πιέσεις που αναπτύσσονται είναι συνάρτηση της ταχύτητας του ρευστού, στην περίπτωση μας του αέρα, ή, αν το δούμε αντίστροφα, της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς τον αέρα.

Αν η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι τέτοια ώστε η δυναμική άνωση που προκύπτει να είναι μεγαλύτερη από το βάρος του αεροπλάνου, το αεροπλάνο ανυψώνεται.

Στην πραγματικότητα το φαινόμενο είναι πολύπλοκο-τερο. Η ροή του αέρα πάνω και κάτω από τις πτέρυγες είναι τυρβώδης και για να υπολογισθεί ακριβέστερα η δυναμική άνωση απαιτούνται πολύπλοκοι υπολογισμοί.

Παράδειγμα 3.3

Το ροόμετρο του Ventouri. Το **σχήμα 3.15** δείχνει μία διάταξη που χρησιμεύει για τη μέτρηση της ταχύτητας ροής σε ένα σωλήνα. Αν είναι γνωστές οι διατομές A_1 και A_2 , του σωλήνα και η υψομετρική διαφορά h στη στάθμη των δύο κατακόρυφων ανοιχτών σωλήνων B και Γ , να βρεθεί η ταχύτητα ροής στην περιοχή του σωλήνα που έχει διατομή A_1 .



Σχήμα 3-15.

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli στα σημεία 1 και 2 που βρίσκονται στο ίδιο ύψος έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad (3.17)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \quad \text{ή} \quad u_2 = \frac{A_1}{A_2} u_1 \quad (3.18)$$

Αντικαθιστώντας την (3.18) στην (3.17) έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \frac{A_1^2}{A_2^2} u_1^2$$
$$\text{ή} \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho u_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) \quad (3.19)$$

$$\text{Όμως } p_1 = p_{at} + \rho g h_1 \quad \text{και} \quad p_2 = p_{at} + \rho g h_2 \quad (3.20)$$

όπου h_1 το ύψος της στήλης του νερού πάνω από το σωλήνα μετρημένο από το σημείο 1 και h_2 το ύψος της στήλης του νερού μετρημένο από το σημείο 2.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3.20) παίρνουμε

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h \quad (3.21)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.19) την (3.21)

$$\text{βρίσκουμε } \rho g h = \frac{1}{2} \rho u_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

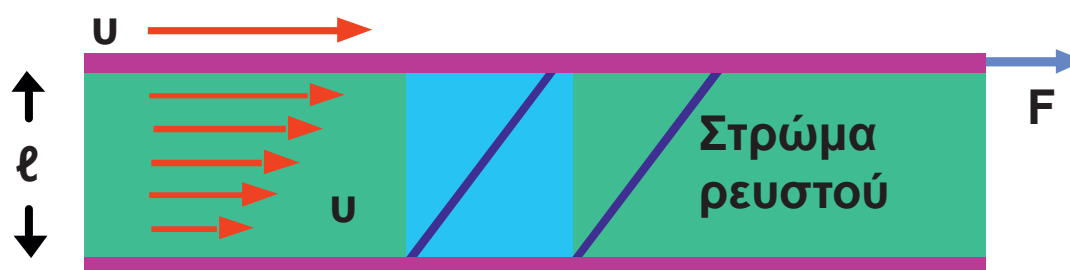
$$\text{και τελικά } u_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}$$

(3.6.) Η Τριβή στα Ρευστά

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι τα ρευστά ρέουν χωρίς να αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής στο εσωτερικό τους, δηλαδή δυνάμεις που να αντιτίθενται στην κίνηση ενός τμήματος του ρευστού ως προς ένα άλλο τμήμα του. Στα πραγματικά ρευστά οι δυνάμεις αυτές υπάρχουν κι έχουν πολύ σημαντικές πρακτικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη λίπανση των τμημάτων μιας μηχανής που θα ήταν αδύνατη αν το λιπαντικό δεν παρουσίαζε κατά τη ροή του τέτοιες δυνάμεις.

Η εσωτερική τριβή μέσα σ' ένα ρευστό ονομάζεται ιξώδες.

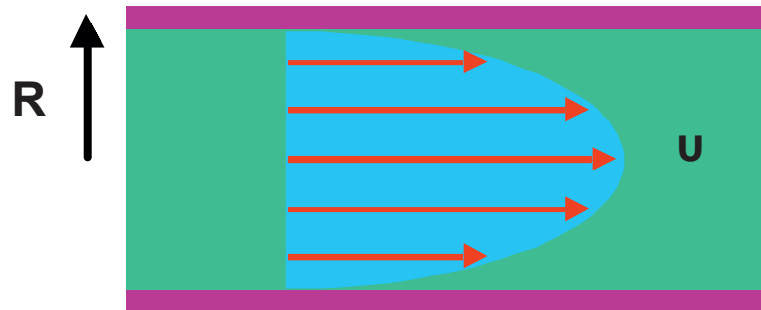
Ας θεωρήσουμε δύο γυάλινες οριζόντιες πλάκες εμβαδού A όπως στο [σχήμα 3.16](#). Σταθεροποιούμε την κάτω πλάκα και απλώνουμε πάνω της ένα στρώμα από μέλι πάχους l . Στη συνέχεια τοποθετούμε τη δεύτερη πλάκα πάνω στο μέλι και τη μετακινούμε με σταθερή ταχύτητα u σε σχέση με την κάτω ακίνητη πλάκα. Διαπιστώνουμε ότι για να συνεχιστεί η κίνηση απαιτείται να ασκηθεί κάποια δύναμη F . Η δύναμη αυτή απαιτείται για να αντισταθμίσει τις τριβές (ιξώδες), που αναπτύσσονται μεταξύ των στρωμάτων του μελιού που κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο.



Στρώμα υγρού που περιέχεται μεταξύ δύο γυάλινων οριζόντιων πλακών, από τις οποίες η κάτω είναι ακίνητη ενώ η επάνω κινείται με ταχύτητα u .

Σχήμα 3-16.

Βλέπουμε ότι το ανώτερο στρώμα έχει προσκολληθεί στην πάνω πλάκα και κινείται με ταχύτητα u ενώ το κατώτερο έχει προσκολληθεί στην κάτω πλάκα και παραμένει ακίνητο. Όλα τα ενδιάμεσα στρώματα έχουν ταχύτητες διαφορετικές μεταξύ τους, που αυξάνουν σταδιακά από 0 έως u καθώς πηγαίνουμε από την κάτω πλάκα προς την πάνω.



Διάγραμμα ταχυτήτων για ένα ρευστό σε κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R .

Σχήμα 3-17.

Εάν αντικαταστήσουμε το μέλι με ένα άλλο ρευστό που ρέει ευκολότερα, για παράδειγμα το λάδι, διαπιστώνουμε ότι η δύναμη που πρέπει να ασκούμε στην πάνω πλάκα για να διατηρείται η ταχύτητά της σταθερή είναι μικρότερη. Επίσης η δύναμη είναι μικρότερη εάν, για το ίδιο ρευστό, μεταξύ των πλακών αυξήσουμε το πάχος του l . Αντίθετα η δύναμη γίνεται μεγαλύτερη αν οι επιφάνειες των πλακών είναι μεγαλύτερες ή αν επιχειρήσουμε να μετακινήσουμε την πάνω πλάκα με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της δύναμης F δίνεται από τη σχέση

$$F = \eta A \frac{u}{\ell}$$

(3.22)

Ο συντελεστής η είναι χαρακτηριστικός κάθε ρευστού ονομάζεται **συντελεστής ιξώδους** και όπως φαίνεται και από την (3.22), στο S.I., μετριέται σε $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$. Στην πράξη ο συντελεστής ιξώδους μετριέται σε **poise** (πουάζ) ($1\text{P} = 1\text{dyn}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$).

Παρακάτω παραθέτουμε έναν πίνακα με το συντελεστή ιξώδους διαφόρων ρευστών.

Ρευστό	$\theta (^{\circ}\text{C})$	Συντελεστής Ιξώδους $\eta (\text{Ns}/\text{m}^2)$
Νερό	20	$1,0 \times 10^{-3}$
Νερό	100	$0,3 \times 10^{-3}$
Αίμα	37	$2,7 \times 10^{-3}$
Γλυκερίνη	20	830×10^{-3}
Μηχανέλαιο (δεκάρι)	30	250×10^{-3}

Πρέπει να πούμε ότι δεν υπακούουν όλα τα ρευστά στην εξίσωση (3.22). Δεν υπάρχει σε όλα τα ρευστά γραμμική αναλογία ανάμεσα στην εσωτερική τριβή που παρουσιάζουν κατά τη ροή τους και την ταχύτητα ροής. Τα ρευστά που υπακούουν στην (3.22) τα ονομάζουμε **νευτώνεια ρευστά**.

Το αίμα παρουσιάζει κάποια ενδιαφέρουσα ιδιαιτερότητα. Το αίμα είναι ένα αιώρημα στερεών σωματιδίων μέσα σε υγρό. Καθώς αυξάνει η ταχύτητα ροής, για να μην αυξηθούν υπέρμετρα οι εσωτερικές τριβές, τα σωματίδια παραμορφώνονται και προσανατολίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνουν τη ροή.

Σύνοψη

Τα υγρά και τα αέρια τα ονομάζουμε με έναν όρο ρευστά. **Συμπιεστά** λέγονται τα ρευστά των οποίων η πυκνότητα μεταβάλλεται αν μεταβληθεί η πίεσή τους για δεδομένη θερμοκρασία.

Ασυμπιεστά λέγονται τα ρευστά των οποίων η πυκνότητα δε μεταβάλλεται αν μεταβληθεί η πίεσή τους πάλι για μια δεδομένη θερμοκρασία.

Η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του. (**Νόμος του Pascal**).

Η πίεση στο εσωτερικό ενός ακίνητου ρευστού σε σχέση με το βάθος από την ελεύθερη επιφάνειά του δίνεται από την εξίσωση

$$p = p_{at} + \rho gh$$

Ένα ρευστό θα θεωρείται **ιδανικό**

1. Αν κινείται χωρίς εσωτερικές τριβές και τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα που το περιορίζει.
2. Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο.

Για όλα τα σημεία μιας φλέβας ρευστού η παροχή είναι σταθερή.

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \text{ (εξίσωση συνέχειας)}$$

Η εξίσωση συνέχειας εκφράζει την αρχή διατήρησης της ύλης στο ρευστό.

Το άθροισμα της πίεσης, της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο της ρευματικής γραμμής.

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho gy = \text{σταθερό (εξίσωση του Bernoulli)}$$

Η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών.

Η εσωτερική τριβή ενός ρευστού ονομάζεται **ιξώδες**.

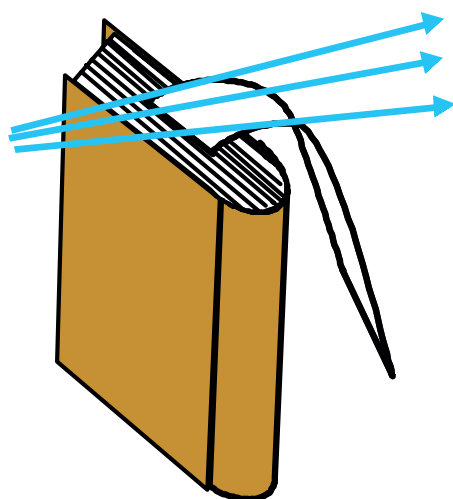
Το μέτρο της συνισταμένης των εσωτερικών τριβών που αναπτύσσονται στο ρευστό κατά τη ροή του δίνεται από τη σχέση

$$F = \eta A \frac{u}{\ell}$$

όπου η συντελεστής ιξώδους.

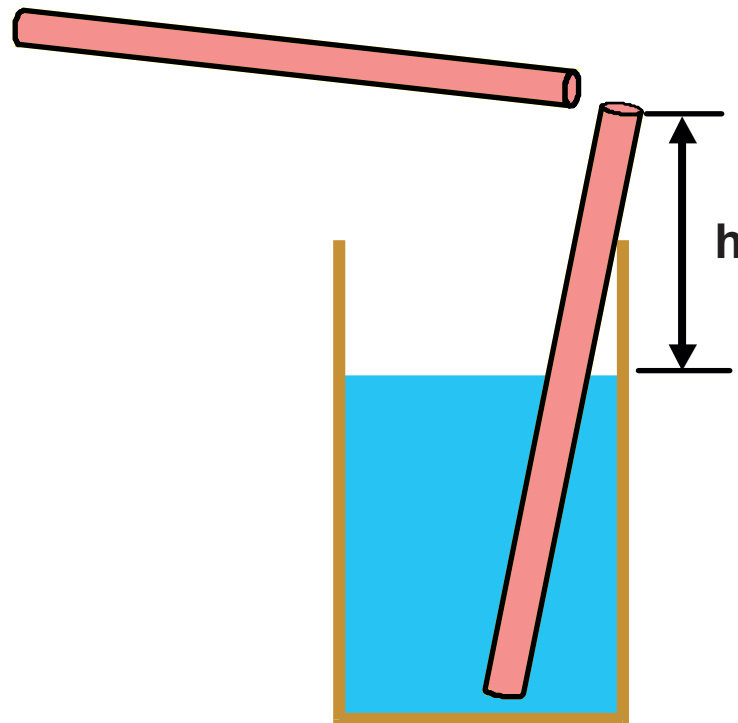
Δραστηριότητες

1. Κρατήστε στα χέρια σας δύο φύλλα χαρτιού ώστε να κρέμονται κατακόρυφα, με τις επιφάνειές τους παράλληλες. Φυσήξτε ανάμεσά τους. Θα τα δείτε να πλησιάζουν. Πώς εξηγείται το φαινόμενο;
2. Τοποθετήστε την άκρη μίας χάρτινης λουρίδας ανάμεσα στις σελίδες ενός βιβλίου. Κρατήστε το βιβλίο όπως στο **σχήμα 3.18** και φυσήξτε με δύναμη πάνω από τη χάρτινη λουρίδα. Η λουρίδα ανυψώνεται και μάλιστα περισσότερο όταν φυσάμε πιο δυνατά. Τι εξήγηση δίνετε;



Σχήμα 3-18.

3. Στην άκρη ενός νήματος στερεώστε ένα μπαλάκι του πινγκ-πονγκ. Κρατώντας την άλλη άκρη του σχοινιού πλησιάστε το μπαλάκι κοντά στο νερό μιας βρύσης. Το μπαλάκι κινείται προς τη μεριά της φλέβας του νερού; Πώς εξηγείται αυτό;
4. Τοποθετήστε ένα καλαμάκι μέσα σε ένα ποτήρι με νερό (σχ. 3.19). Με ένα άλλο καλαμάκι φυσήξτε στη πάνω άκρη του πρώτου. Θα προκληθεί ψεκασμός. Πώς εξηγείται το φαινόμενο; Είναι το ίδιο εύκολος ο ψεκασμός όποια και αν είναι η απόσταση h ; Ελέγξτε το πειραματικά. Πώς το αιτιολογείτε;



Σχήμα 3-19.

Ερωτήσεις

Υδροστατική πίεση - αρχή του Pascal

3.1 Συμπληρώστε τα κενά:

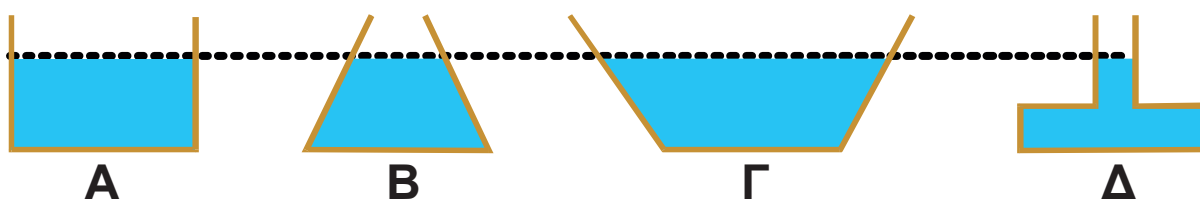
Ασυμπίεστο χαρακτηρίζεται ένα ρευστό στο οποίο η του δε μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η του. Στην πράξη ασυμπίεστα ρευστά θεωρούμε τα

3.2 Για ποιο λόγο τα φράγματα στις τεχνητές λίμνες κατασκευάζονται σχετικά λεπτά στην κορυφή τους και πολύ φαρδιά στη βάση τους;

3.3 Στο **σχήμα 3.20** φαίνονται τέσσερα δοχεία διαφορετικού σχήματος που οι βάσεις τους έχουν το ίδιο εμβαδόν.

α) Ποιο δοχείο περιέχει περισσότερο υγρό;

β) Συγκρίνατε τις πιέσεις στον πυθμένα των δοχείων.



Σχήμα 3-20.

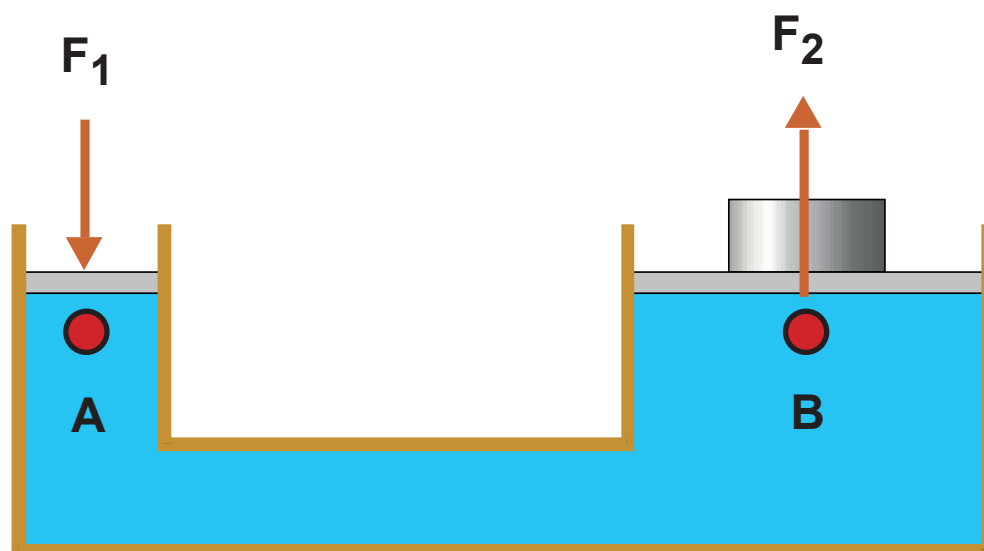
3.4 Στο **σχήμα 3.21** φαίνεται ένα υδραυλικό πιεστήριο (αρχή). Ασκούμε στο μικρό έμβολο δύναμη μέτρου F_1 .

1) Η πίεση στα σημεία **A** και **B** του υγρού θα αυξηθεί α) κατά το ίδιο ποσό β) περισσότερο στο **A** γ) περισσότερο στο **B**.

2) Το μέτρο της δύναμης F_2 που θα ασκήσει το υγρό στο μεγάλο έμβολο θα είναι α) ίσο με F_1 β) μεγαλύτερο από F_1 γ) μικρότερο από F_1 .

3) Το έργο της F_2 θα είναι α) ίσο με το έργο της F_1 β) μεγαλύτερο από το έργο της F_1 γ) μικρότερο από το έργο της F_1 .

Επιλέξτε τις σωστές προτάσεις.



Σχήμα 3-21.

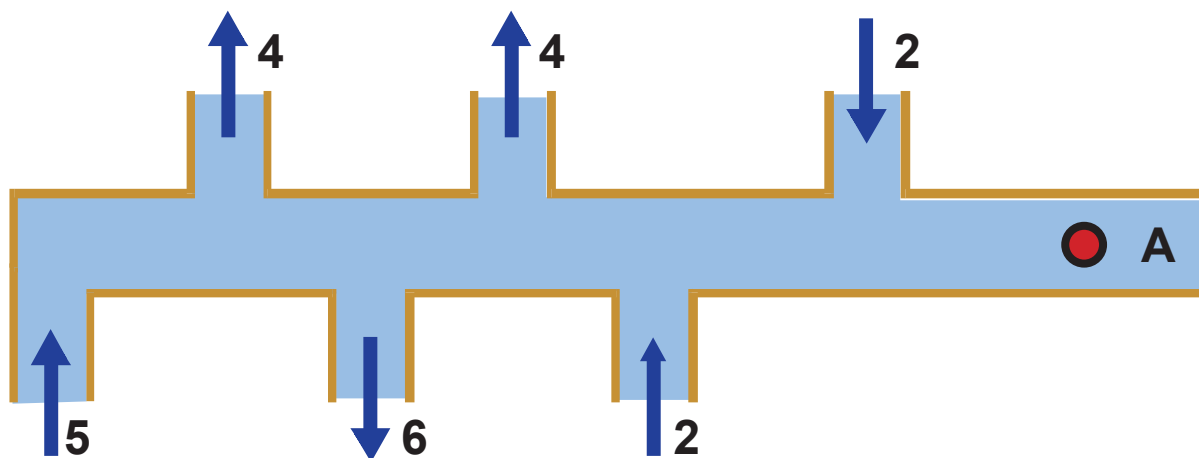
Η εξίσωση της συνέχειας

3.5 Συμπληρώστε τις λέξεις που λείπουν:

Ένα ρευστό χαρακτηρίζεται ιδανικό αν δεν εμφανίζει τριβές και με τα τοιχώματα του σωλήνα που το περιέχει. Επίσης πρέπει να είναι

3.6 Η φλέβα του νερού της βρύσης γίνεται στενότερη καθώς πέφτει. Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

3.7 Στο [σχήμα 3.22](#) δίνονται οι παροχές (σε m^3/s) και οι κατευθύνσεις στις οποίες κινείται το υγρό σε ορισμένες περιοχές του σωλήνα. Ποια είναι η παροχή του σωλήνα και η κατεύθυνση στην οποία κινείται το υγρό στην περιοχή του σημείου **A**;



Σχήμα 3-22.

3.8 Ένα ποτάμι έχει σταθερό πλάτος. Εξηγήστε γιατί όπου το ποτάμι είναι ρηχό το νερό κινείται πιο γρήγορα. Η παροχή του ποταμού σε μια τέτοια περιοχή είναι μεγαλύτερη από την παροχή του σε περιοχές που το βάθος είναι μεγαλύτερο;

3.9 Η διατομή του σωλήνα στην περιοχή **A** είναι τετραπλάσια της διατομής του στην περιοχή **B**.

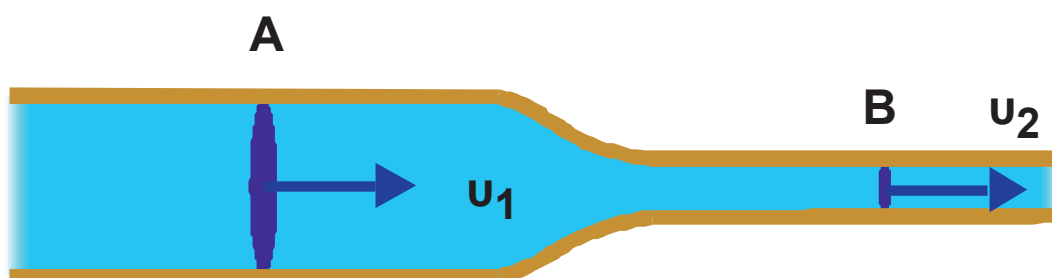
1) Σε ένα δευτερόλεπτο από τη διατομή **A** διέρχονται 8 cm^3 . Στον ίδιο χρόνο από τη διατομή **B** διέρχονται

α) 8 cm^3 β) 16 cm^3 γ) 32 cm^3 δ) 4 cm^3 ε) 2 cm^3 .

2) Η ταχύτητα u_1 του υγρού στην περιοχή **A** είναι 10 cm/s . Η ταχύτητα στην περιοχή **B** είναι

α) $2,5\text{ cm/s}$ β) 5 cm/s γ) 10 cm/s δ) 20 cm/s
ε) 40 cm/s .

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σε κάθε περίπτωση.

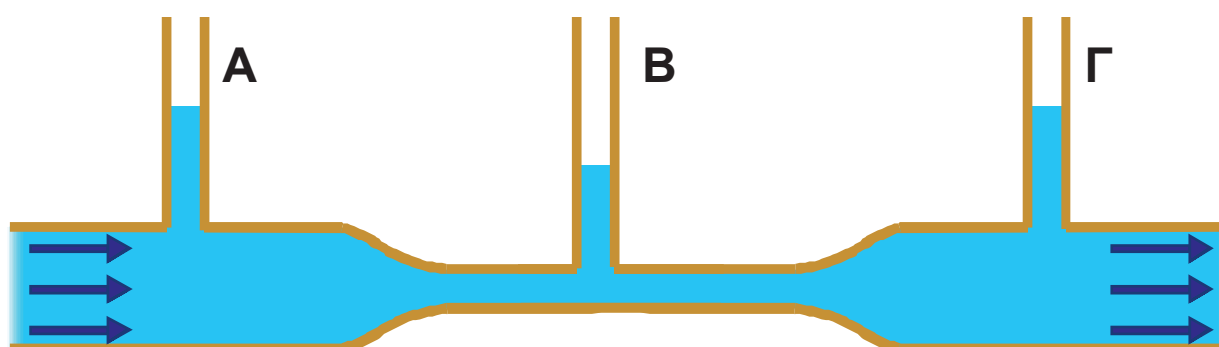


Σχήμα 3-23.

3.10 Όταν θέλουμε να φτάσει μακριά το νερό που βγαίνει από το λάστιχο του ποτίσματος κλείνουμε με το δάχτυλό μας ένα μέρος της διατομής του ή πιέζουμε την άκρη του. Πώς εξηγείται αυτό;

Η εξίσωση του Bernoulli

- 3.11 Τα πλοία δεν επιτρέπεται να κινούνται παράλληλα, σε μικρή μεταξύ τους απόσταση, γιατί «το ρεύμα τα σπρώχνει να πλησιάσουν πιο πολύ και υπάρχει κίνδυνος να συγκρουστούν». Πώς δικαιολογείται αυτή η πρόταση;
- 3.12 Εξηγήστε γιατί η στάθμη του νερού στο σωλήνα **B** είναι πιο χαμηλά από ό,τι στους σωλήνες **A** και **Γ**.



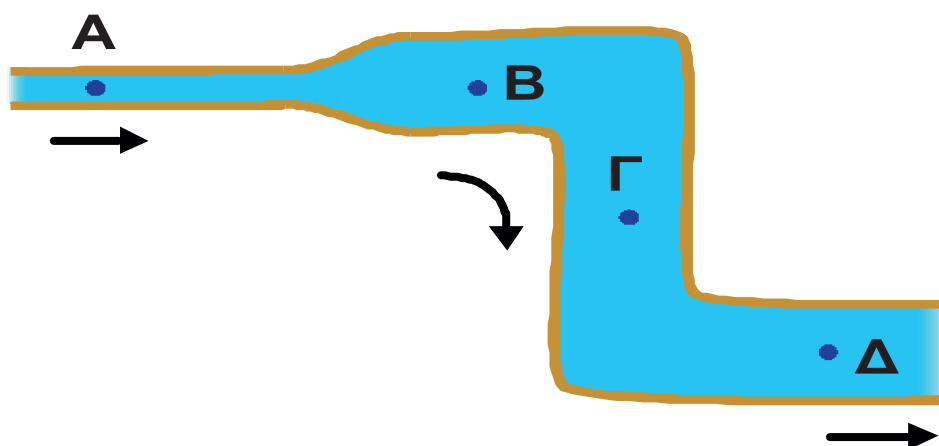
Σχήμα 3-24.

- 3.13 Γιατί οι πιλότοι προτιμούν να απογειώνουν τα αεροπλάνα αντίθετα στον άνεμο;
- 3.14 Ένα αεροπλάνο που πετάει με σταθερή οριζόντια ταχύτητα σε ύψος h δέχεται δυναμική άνωση A_1 . Το ίδιο αεροπλάνο όταν πετάει με την ίδια ταχύτητα σε ύψος $2h$ δέχεται δυναμική άνωση A_2 για την οποία ισχύει:
α) $A_1 < A_2$ β) $A_1 = A_2$ γ) $A_1 > A_2$.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση

3.15 Το σχήμα παριστάνει ένα σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει νερό. Ταξινομήστε τα σημεία A, B, Γ και Δ κατά τη σειρά με την οποία

α) αυξάνεται η ταχύτητα ροής του νερού.

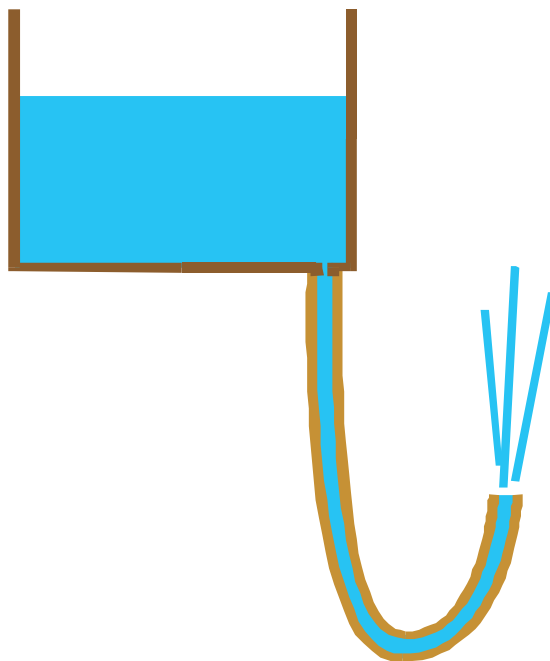
β) αυξάνεται η πίεση.



Σχήμα 3-25.

3.16 Συμπληρώστε τις προτάσεις: Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli το άθροισμα της πίεσης, της ενέργειας και ενέργειας ανά μονάδα όγκου έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής. Ο νόμος του Bernoulli είναι έκφραση της αρχής στα ρευστά.

**3.17 Μέχρι ποιο ύψος θα φτάσει ο πίδακας του νερού;
Θεωρήστε ότι η επιφάνεια του νερού στο δοχείο
είναι πολύ μεγάλη και ότι η αντίσταση του αέρα
είναι αμελητέα. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.**



Σχήμα 3-26.

Ασκήσεις

Νόμος του Pascal - Υδροστατική πίεση

3.18 Το μικρό έμβολο υδραυλικού ανυψωτήρα που χρησιμοποιείται για την ανύψωση αυτοκινήτων έχει διατομή εμβαδού 3 cm^2 ενώ το μεγάλο έχει διατομή εμβαδού 200 cm^2 . Πόση δύναμη πρέπει να ασκηθεί στο μικρό έμβολο ώστε το μεγάλο να ανυψώσει ένα αυτοκίνητο βάρους 10000 N ;

[Απ: 150 N]

Εξίσωση συνέχειας

3.19 Η ταχύτητα με την οποία ρέουν τα νερά ενός ποταμού σταθερού πλάτους σε ένα σημείο όπου το μέσο βάθος είναι $h_1 = 1,5\text{ m}$, είναι $u_1 = 1,3\text{ m/s}$. Πόσο είναι το μέσο βάθος σ' ένα άλλο σημείο όπου τα νερά τρέχουν με ταχύτητα $u_2 = 0,3\text{ m/s}$;

[Απ: $6,5\text{ m}$]

3.20 Η παροχή ενός πυροσβεστικού κρουνού είναι $0,012\text{ m}^3/\text{s}$. Το λάστιχο της πυροσβεστικής καταλήγει στο ελεύθερό του άκρο σ' ένα στένωμα εσωτερικής διαμέτρου $2,2\text{ cm}$. Με τι ταχύτητα εκτοξεύεται το νερό από το στένωμα;

[Απ: $31,6\text{ m/s}$]

Εξίσωση του Bernoulli

3.21 Από το πλευρικό άνοιγμα μιας ανοιχτής δεξαμενής βγαίνει νερό με ταχύτητα $8,86\text{ m/s}$. Με πόση ταχύτητα θα βγαίνει αν η πίεση στην ελεύθερη

επιφάνεια γίνει 2 atm ; Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ και ότι $1 \text{ atm} = 1,033 \times 10^5 \text{ Pa}$.

[Απ: $16,76 \text{ m/s}$]

3.22 Κατά τη διάρκεια καταιγίδας ο αέρας κινείται πάνω από τη στέγη ενός σπιτιού με ταχύτητα 108 km/h . Ποια η διαφορά στην πίεση κάτω και πάνω από τη στέγη; Υπολογίστε την ανυψωτική δύναμη που δέχεται η στέγη. Η στέγη είναι επίπεδη και έχει εμβαδόν $A = 100 \text{ m}^2$. Θεωρήστε την πυκνότητα του αέρα σταθερή και ίση με $1,2 \text{ kg/m}^3$.

[Απ: 540 Pa , $54 \times 10^3 \text{ N}$]

Προβλήματα

3.23 Η φλέβα του νερού της βρύσης γίνεται στενότερη καθώς το νερό πέφτει. Η διατομή της φλέβας είναι $A_1 = 1,2 \text{ cm}^2$ κοντά στο στόμιο της βρύσης και $A_2 = 0,4 \text{ cm}^2$ σε απόσταση $h = 4 \text{ cm}$ από αυτό. Υπολογίστε την παροχή της βρύσης. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

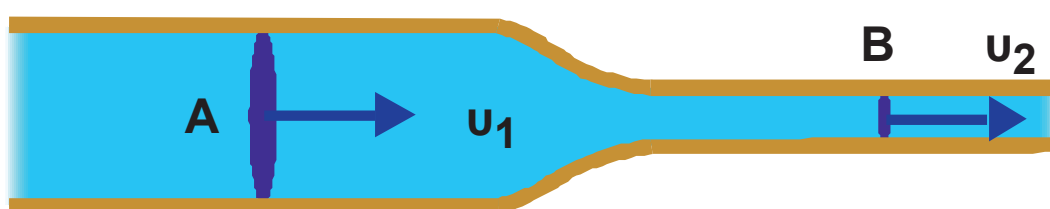
[Απ: $1,2 \sqrt{10} \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$]

3.24 Ανοικτή δεξαμενή που περιέχει νερό έχει στο πλευρικό τοίχωμά της, σε βάθος $h = 1,8 \text{ m}$ κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, βρύση διατομής $A = 0,5 \text{ cm}^2$. Πόση ώρα χρειάζεται για να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 1 L από τη βρύση; Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: $3,33 \text{ s}$]

3.25 Νερό ρέει σε οριζόντιο σωλήνα (σχ. 3.27). Η διατομή του σωλήνα στη θέση **A** είναι $A_1 = 10^{-2} \text{m}^2$ και στη θέση **B** γίνεται $A_2 = \frac{A_1}{2}$. Η παροχή του σωλήνα είναι $\Pi = 2 \times 10^{-2} \text{m}^3/\text{s}$. Να βρείτε τη διαφορά της πίεσης του νερού ανάμεσα στα σημεία **A** και **B**. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$.

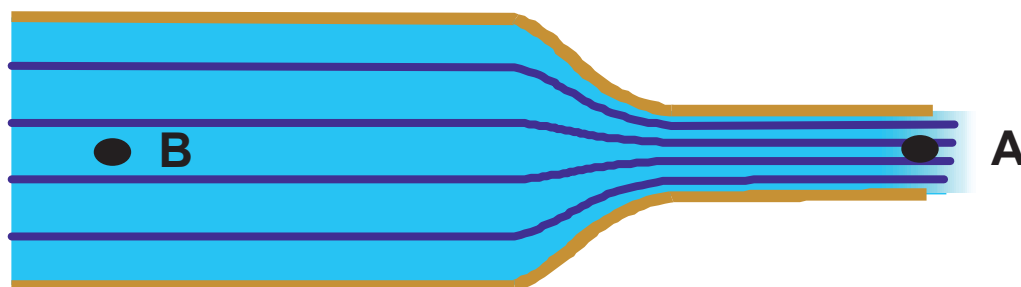
[Απ: 6000 Pa]



Σχήμα 3-27.

3.26 Νερό που κινείται μέσα σε οριζόντιο σωλήνα (σχ. 3.28) βγαίνει από το άκρο **A** με ταχύτητα $u_2 = 10 \text{m/s}$. Το εμβαδόν διατομής του σωλήνα στα σημεία **A** και **B** είναι 16cm^2 και 20cm^2 , αντίστοιχα.
α) Πόσα m^3 νερού δίνει ο σωλήνας σε μία ώρα;
β) Ποια η πίεση στο σημείο **B**;
Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$. Θεωρήστε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι 10^5Pa .

[Απ: $57,6 \text{m}^3$, 118 kPa]



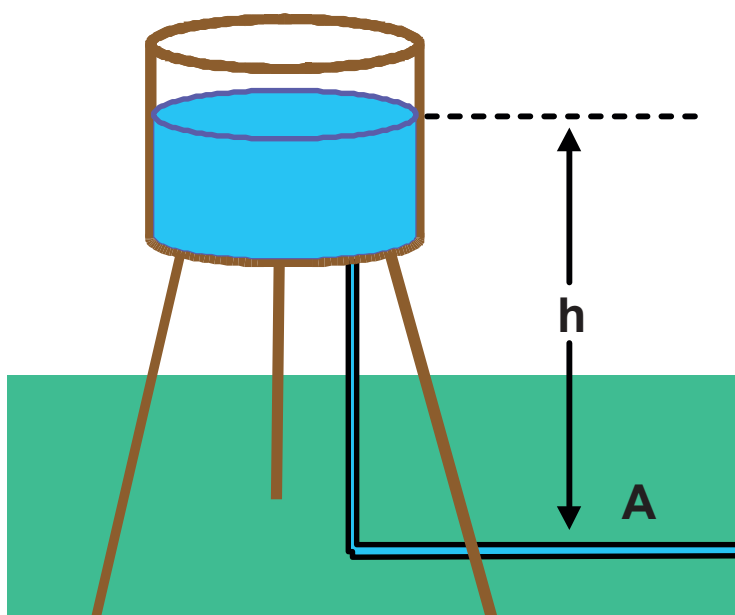
Σχήμα 3-28.

- 3.27 Μια αντλία χρησιμοποιείται για την άντληση νερού από πηγάδι βάθους 5 m . Το νερό βγαίνει από την αντλία με σωλήνα διατομής 10 cm^2 και με ταχύτητα $u=20\text{ m/s}$. Υπολογίστε την ισχύ της αντλίας. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3\text{ kg/m}^3$ και $g=10\text{ m/s}^2$.

[Απ: 5 kW]

- 3.28 Μια ανοιχτή δεξαμενή νερού, μεγάλου όγκου, βρίσκεται ψηλά πάνω από το έδαφος (σχ. 3.29). Όταν χρησιμοποιούμε το νερό της δεξαμενής η ταχύτητα του νερού, σε κάποιο σημείο A , στο σωλήνα που βρίσκεται στο έδαφος είναι $u=12\text{ m/s}$. Υπολογίστε την πίεση στο σημείο A . Δίνεται ότι η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος $h=10\text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho=10^3\text{ kg/m}^3$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$ και η ατμοσφαιρική πίεση 10^5 Pa .

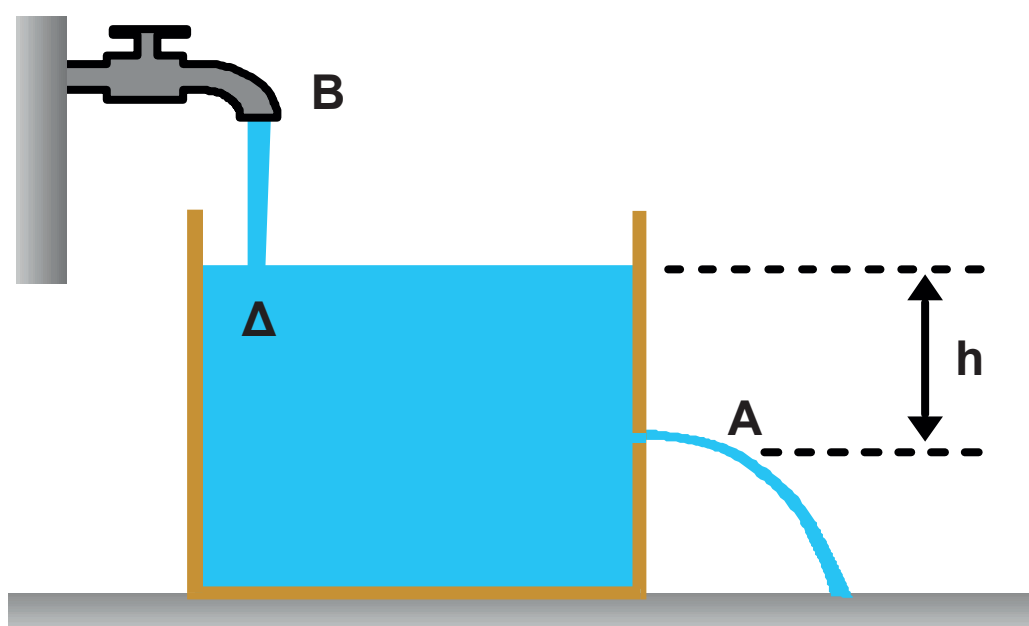
[Απ: $128 \times 10^3\text{ Pa}$]



Σχήμα 3-29.

3.29 Στο δοχείο Δ πέφτει συνέχεια νερό από τη βρύση B (σχ. 3.30). Το δοχείο δε μπορεί να γεμίσει επειδή χύνεται νερό από το πλευρικό άνοιγμα A . Αν η παροχή της βρύσης είναι $22\text{ cm}^3/\text{s}$ και το εμβαδόν του ανοίγματος 1 cm^2 , να βρείτε σε ποιο ύψος h πάνω από το σημείο A θα σταθεροποιηθεί η ελεύθερη επιφάνεια. Δίνεται $g=10\text{ m/s}^2$.

[Απ: 24,2 cm]



Σχήμα 3-30.

3.30 Ένα δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα (σχ. 3.31) περιέχει νερό μέχρι ύψος h . Σε ποιο ύψος (x) από τον πυθμένα πρέπει να τρυπήσουμε το δοχείο, ώστε η φλέβα που θα δημιουργηθεί να συναντά το έδαφος στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από τη βάση του δοχείου;

[Απ: $x = \frac{h}{2}$]

3.31 Ποσότητα νερού είναι αποθηκευμένη σε ανοικτό κυλινδρικό δοχείο. Το ύψος του νερού στο δοχείο είναι $h=1\text{m}$. Το δοχείο έχει μικρή τρύπα στο πλευρικό του τοίχωμα και σε απόσταση 20cm κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Να υπολογίσετε:

α) Την ταχύτητα με την οποία βγαίνει το νερό από την τρύπα.

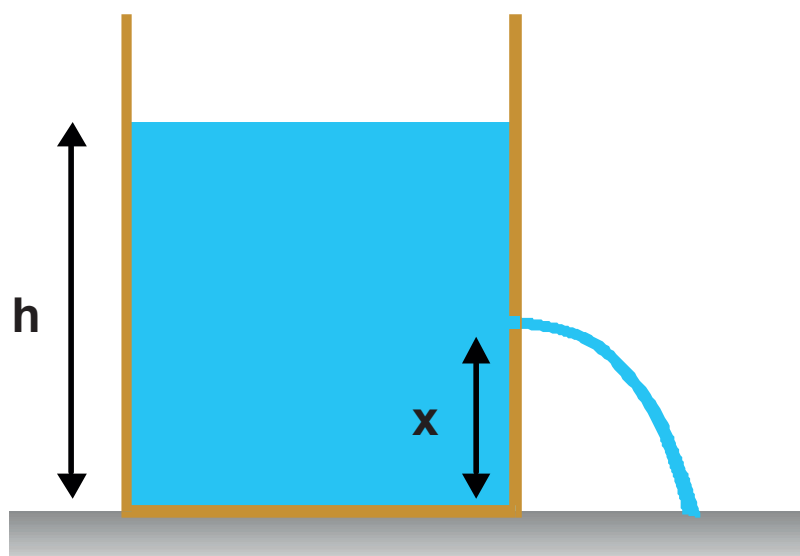
β) Πόσο απέχει από το δοχείο το σημείο του δαπέδου στο οποίο φτάνει η φλέβα του νερού.

γ) Σε ποιο ύψος από τη βάση του δοχείου πρέπει να ανοιχτεί δεύτερη τρύπα στο πλευρικό τοίχωμα ώστε η φλέβα του νερού που θα βγαίνει από αυτή να πέφτει στο ίδιο σημείο με την προηγούμενη.

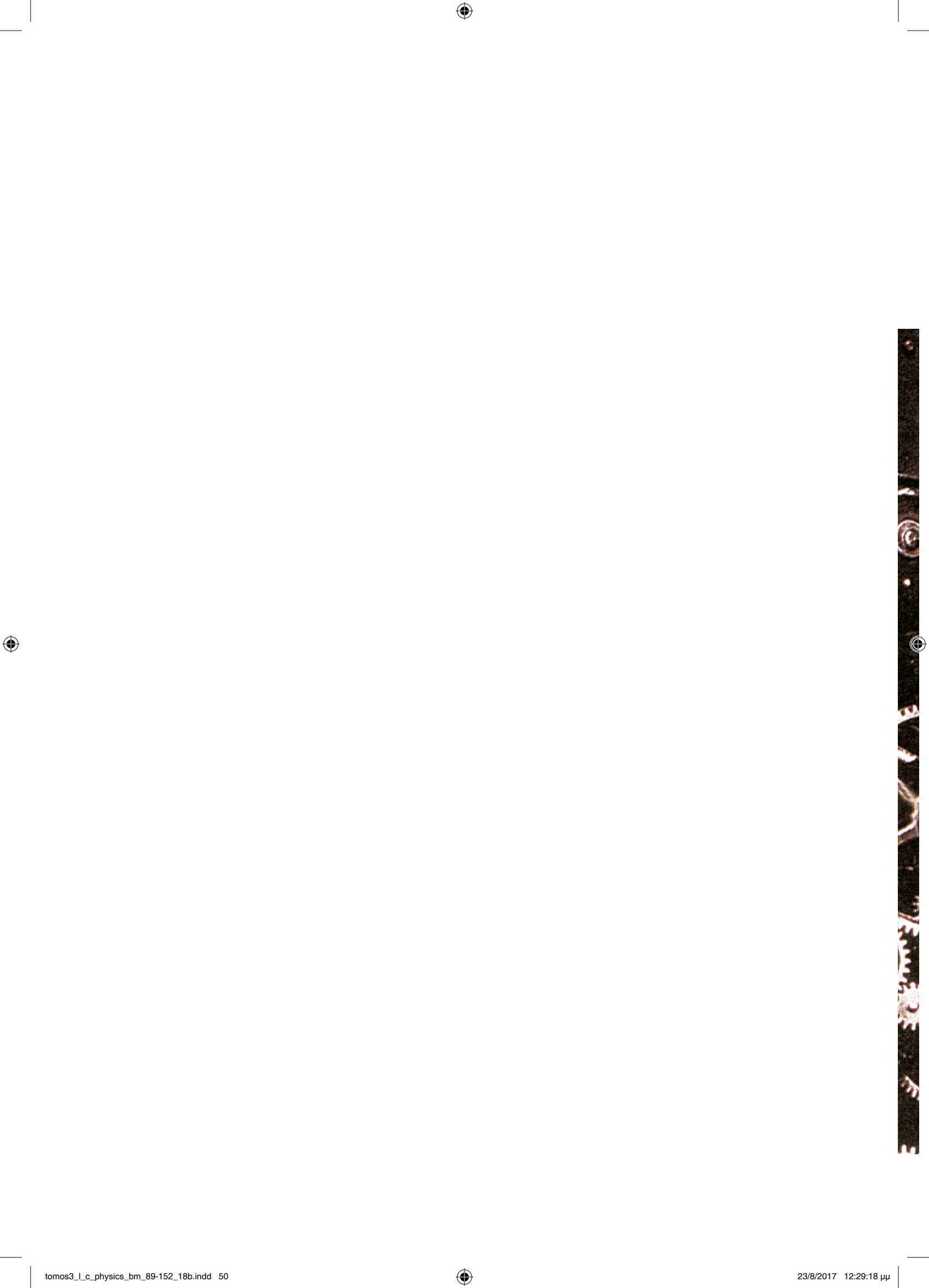
δ) Σε ποιο ύψος από τη βάση του κυλίνδρου πρέπει να ανοίξουμε τρύπα ώστε η φλέβα του νερού να φτάνει στο δάπεδο στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από το δοχείο.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

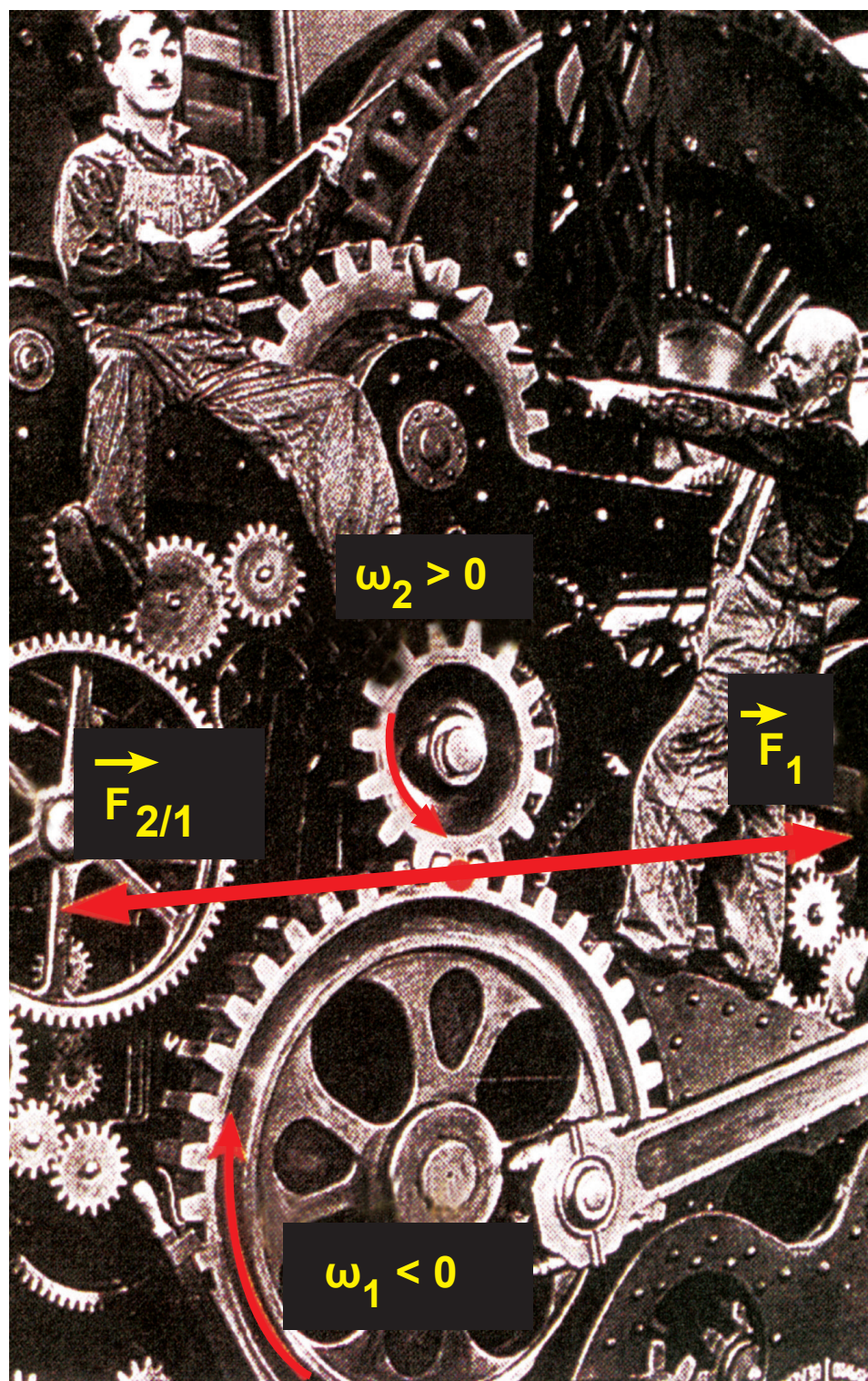
[Απ: 2m/s , $0,8\text{m}$, $0,2\text{m}$, $0,5\text{m}$]



Σχήμα 3-31.



(4 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ)



Ροπή
δύναμης 62

Ισορροπία
στερεού 72

Ροπή
αδράνειας 76

Στροφορμή 94

Κινητική
ενέργεια λόγω
περιστροφής 110

Σύνοψη 118

Ασκήσεις 140

(4.1.) Εισαγωγή

Στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε τη μελέτη της κίνησης των σωμάτων, αντιμετωπίσαμε ως τώρα τα σώματα ως **υλικά σημεία**. Το υλικό σημείο ορίζεται ως σώμα που έχει όλες τις άλλες ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις.

Στην πραγματικότητα όλα τα σώματα έχουν διαστάσεις και γι' αυτό, εκτός από το να εκτελούν μεταφορική κίνηση, μπορούν να αλλάζουν προσανατολισμό στο χώρο, να εκτελούν δηλαδή περιστροφική (στροφική) ή, ακόμη, σύνθετη κίνηση, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

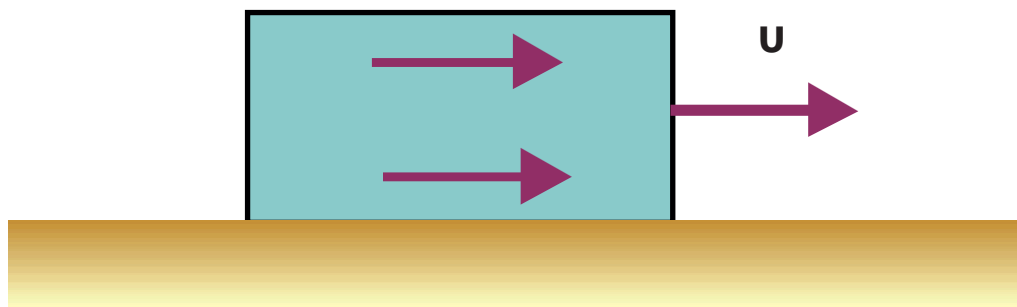
Αν σε κάποιο στερεό σώμα ασκηθούν δυνάμεις το σώμα παραμορφώνεται, λίγο ή πολύ και μόνιμα ή προσωρινά. Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται **μηχανικά στερεά**.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της ισορροπίας και της κίνησης μηχανικών στερεών. Όπου αναφερόμαστε σε στερεό θα εννοούμε μηχανικό στερεό.

(4.2.) Οι Κινήσεις των Στερεών Σωμάτων

Ένα στερεό σώμα μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική και σύνθετη κίνηση.

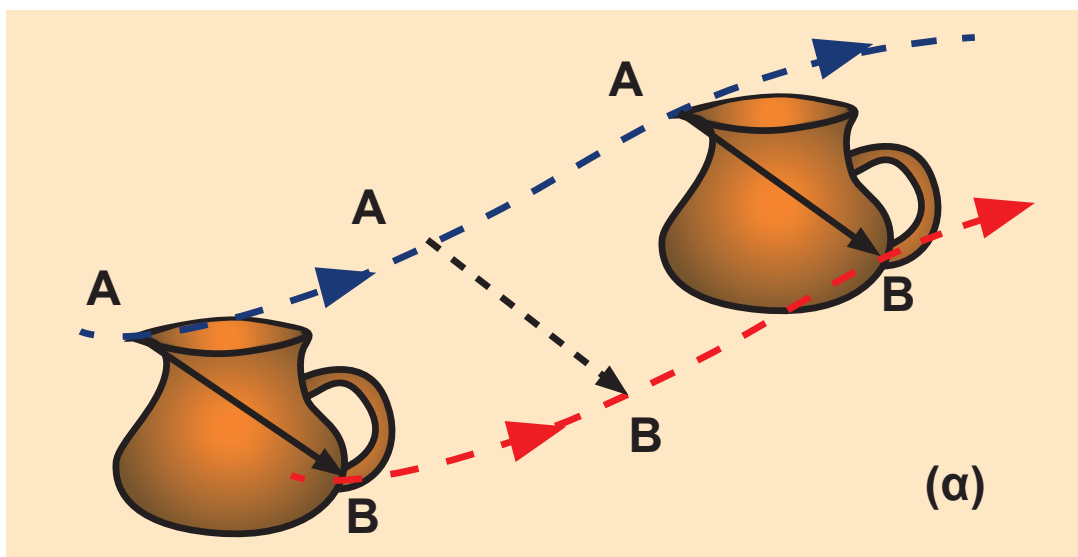
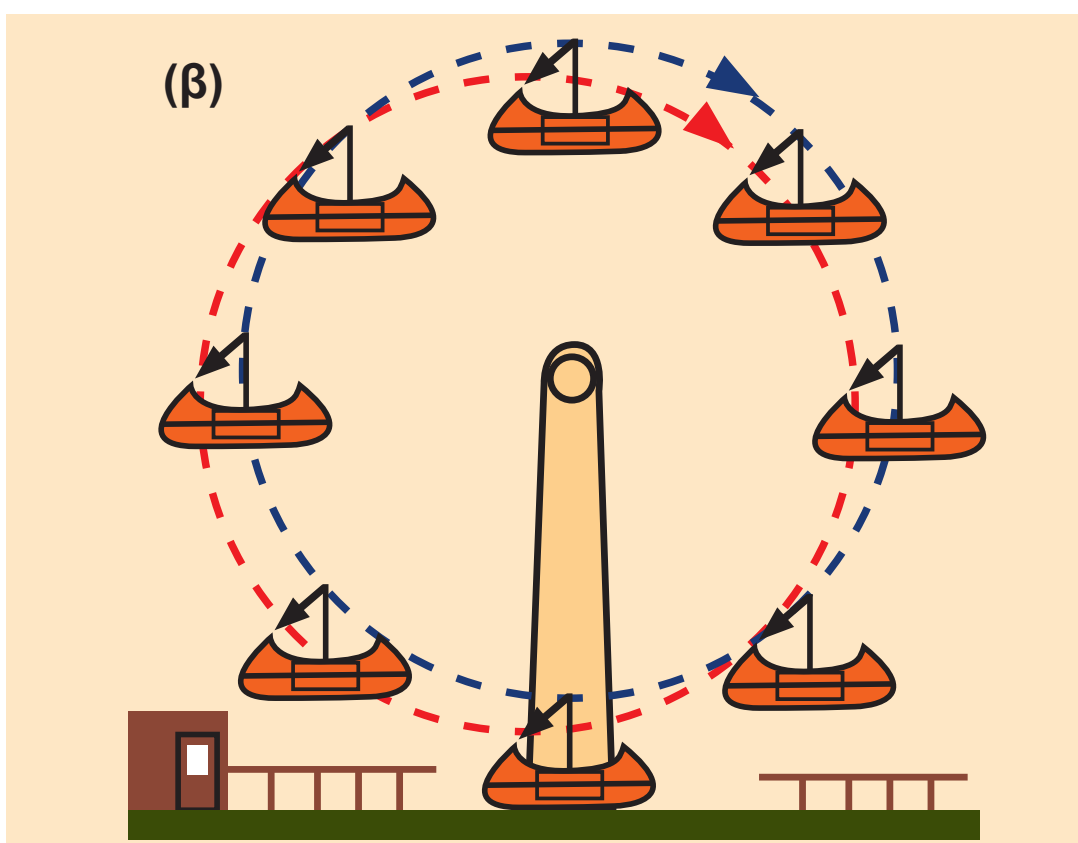
Στη μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Παράδειγμα τέτοιας κίνησης είναι η κίνηση ενός κιβωτίου που ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στη μεταφορική κίνηση των στερεών ισχύουν οι νόμοι που διέπουν την κίνηση των υλικών σημείων.



Το κιβώτιο εκτελεί μεταφορική κίνηση. Όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα.

Σχήμα 4-1.

Μεταφορική μπορεί να είναι και μια καμπυλόγραμμη κίνηση. Το σώμα του **σχήματος 4.2α** κάνει μεταφορική κίνηση αν η ταχύτητα του σημείου **A** είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου **B**. Αυτό είναι δυνατό. Όταν ένα στερεό κάνει μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του. Μεταφορική είναι και η κίνηση που εκτελούν οι θαλαμίσκοι στον τροχό του λούνα πάρκ (**σχ. 4.2β**).



(α) Η τροχιά κάθε σημείου είναι καμπύλη. Η κίνηση του σώματος είναι μεταφορική αφού το ευθύγραμμο τμήμα **AB** παραμένει διαρκώς παράλληλο προς τον εαυτό του.

(β) Ο τροχός του λούνα πάρκ κάνει στροφική κίνηση. Ωστόσο κάθε θαλαμίσκος κάνει μεταφορική κίνηση.

Σχήμα 4-2.

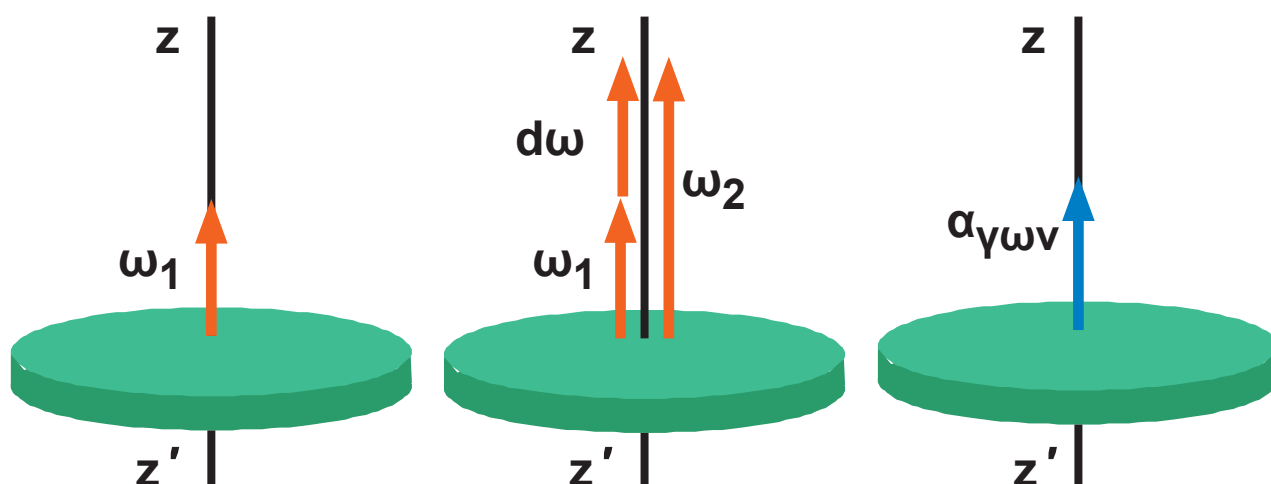
Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό. Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία – **ο άξονας περιστροφής** – που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση.

Κατάλληλο μέγεθος για να περιγράψει το πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα σώμα κάποια στιγμή, είναι η **γωνιακή ταχύτητα ω** . Η γωνιακή ταχύτητα είναι διάνυσμα πάνω στον άξονα περιστροφής.

Στο σώμα που στρέφεται, κάθε σημείο κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμική ταχύτητα που υπολογίζεται από τη σχέση $u = \omega r$, όπου r η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

Αν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που περιστρέφεται είναι σταθερή θα λέμε ότι κάνει **ομαλή στροφική κίνηση**.

Ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος του **σχήματος 4.3** τη χρονική στιγμή t_1 έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1 ενώ τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + dt$ η γωνιακή του ταχύτητα γίνεται $\omega_2 = \omega_1 + d\omega$.



(α) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αυξάνεται κατά $d\omega$. Ο δίσκος έχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$.

Σχήμα 4-3.

Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος τη στιγμή t , ονομάζεται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.

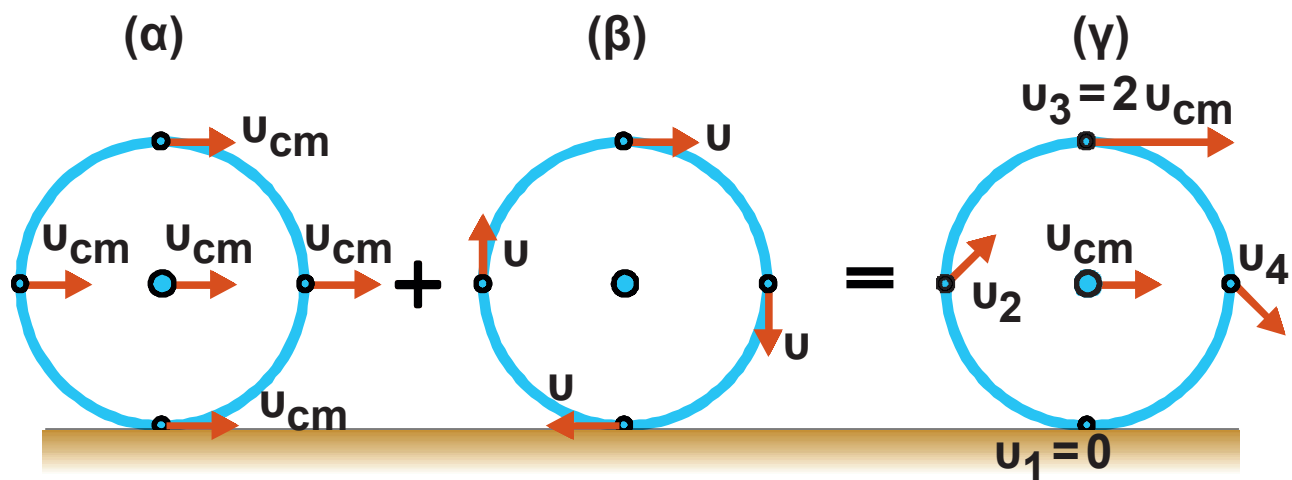
$$\alpha_{\text{γων}} = \frac{d\omega}{dt}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\omega$ και μονάδα 1 rad/s^2 .

Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει **σύνθετη κίνηση**. Τέτοια κίνηση κάνει π.χ. ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν κινείται το αυτοκίνητο. Όπως συμβαίνει και με το υπόλοιπο αυτοκίνητο, ο τροχός αλλάζει θέση στο χώρο (μεταφορική κίνηση) και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Σύνθετη κίνηση είναι και η κίνηση που κάνει μια ρακέτα αν κρατώντας τη από τη λαβή την πετάξουμε ψηλά. **Η σύνθετη κίνηση μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.**

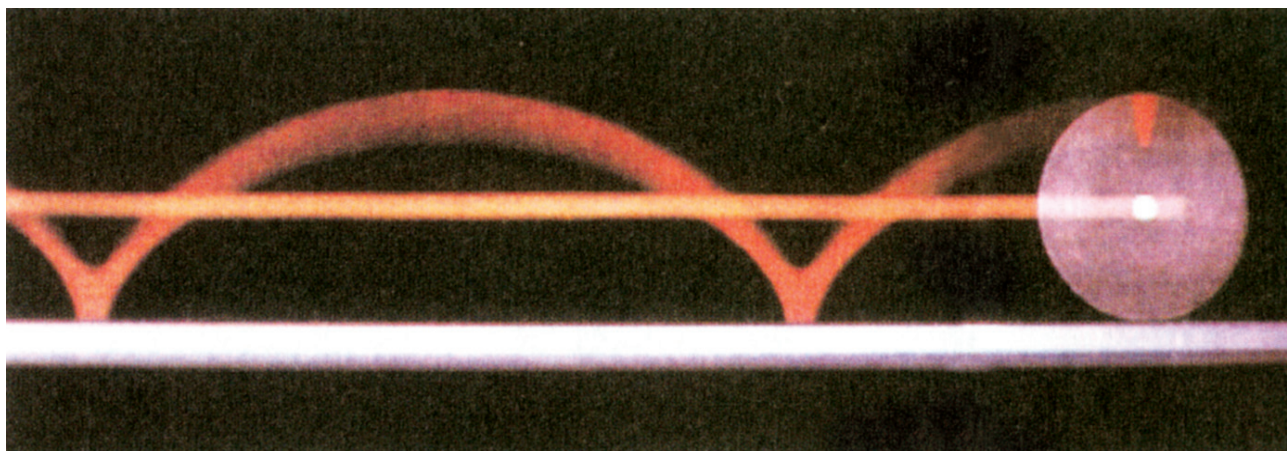
Το **σχήμα 4.4** δείχνει ένα τροχό που κυλίεται. Η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής κίνησης, στην οποία όλα τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή, έχουν την ίδια ταχύτητα u_{cm} (**σχ. 4.4α**) και μιας στροφικής κίνησης, γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του τροχού και είναι κάθετος σ' αυτόν (**σχ. 4.4β**). Στη στροφική κίνηση όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητες με το ίδιο μέτρο u , εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά. Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας u_{cm} , λόγω μεταφορικής κίνησης και της u λόγω της στροφικής (**σχ. 4.4γ**). Όπως γνωρίζουμε για

την ταχύτητα u λόγω στροφικής κίνησης ισχύει $u = \omega R$. Θα δούμε παρακάτω ότι ισχύει και $u_{cm} = \omega R$, δηλαδή $u = u_{cm}$.



Η κύλιση του τροχού (γ) είναι επαλληλία της μεταφορικής κίνησης (α) και της στροφικής κίνησης (β). Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας που έχει λόγω μεταφορικής κίνησης (u_{cm}) και της ταχύτητας λόγω περιστροφής (u).

Σχήμα 4-4.



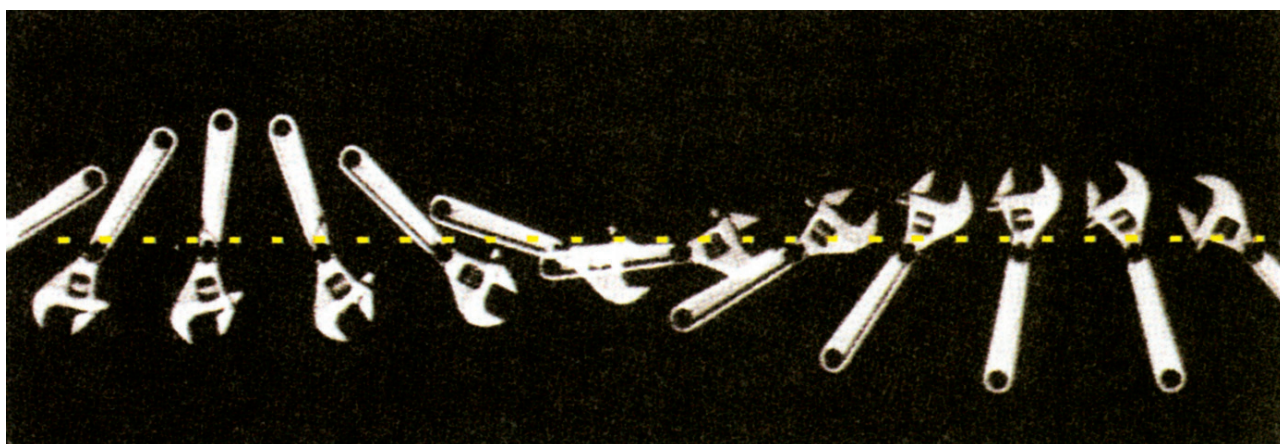
Η τροχιά ενός μικρού λαμπτήρα που τοποθετήθηκε στην περιφέρεια κυλιόμενου τροχού. Το κέντρο του τροχού κινείται ευθύγραμμα.

Εικόνα 4-1.

Το κέντρο μάζας.

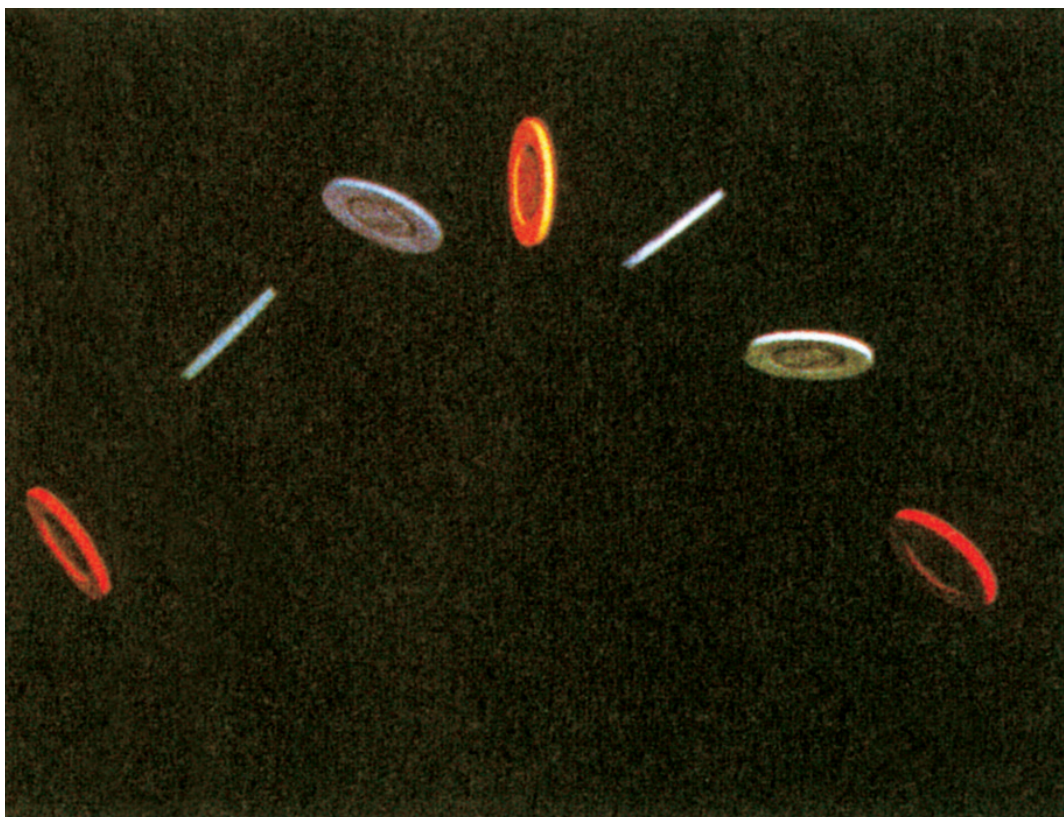
Μια έννοια που απλοποιεί τη μελέτη του στερεού σώματος είναι η έννοια του **κέντρου μάζας** του σώματος.

Στην **εικόνα 4.2** φαίνεται η κίνηση ενός κλειδιού πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μετά από μία ώθηση που δέχτηκε. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο κλειδί είναι μηδέν. Αν το κλειδί ήταν υλικό σημείο θα έκανε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Παρατηρήστε ότι υπάρχει ένα σημείο του που κάνει ακριβώς τέτοια κίνηση. Το σημείο αυτό είναι το κέντρο μάζας του κλειδιού.



Το κλειδί της φωτογραφίας κάνει σύνθετη κίνηση. Το κέντρο μάζας του όμως κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Εικόνα 4-2.

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούσαν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.



Το κέντρο μάζας του δίσκου κινείται όπως ένα υλικό σημείο που βάλλεται πλάγια.

Εικόνα 4-3.

Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Π.χ. το κέντρο μάζας ενός κύβου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, το κέντρο μάζας μιας σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας.

Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου, το κέντρο μάζας του οποίου βρίσκεται στο κέντρο του. Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο βάρους, το σημείο δηλαδή από το οποίο περνάει πάντα το βάρος του σώματος, όπως και να τοποθετηθεί.

Η κύλιση του τροχού

Ας επανέλθουμε στην κύλιση του τροχού (σχ. 4.5). Κατά την κύλιση κάθε σημείο του τροχού έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι, όταν ο τροχός σε χρόνο dt μετακινηθεί κατά ds , ένα σημείο A της περιφέρειας του θα έχει στραφεί κατά τόξο μήκους ds , στο οποίο αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία $d\theta$. Η ταχύτητα u_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού είναι

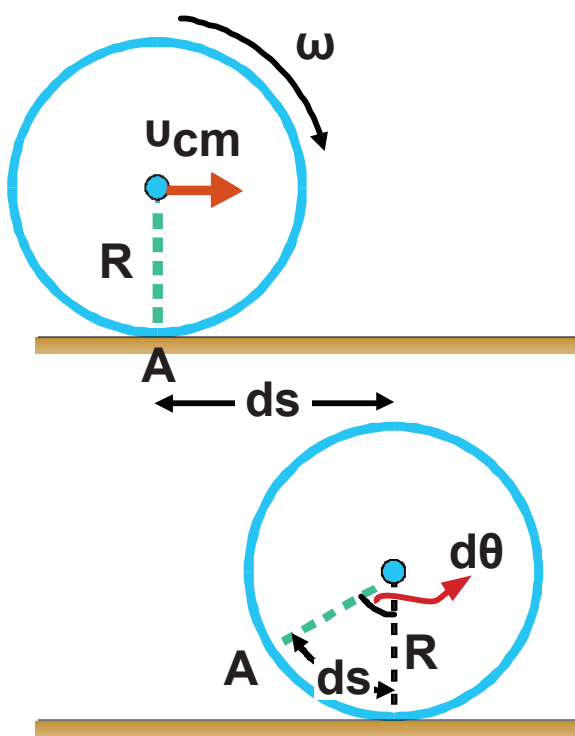
$$u_{cm} = \frac{ds}{dt} \quad (4.1)$$

όμως $d\theta = \frac{ds}{R}$ ή $ds = R d\theta$ αντικαθιστώντας στην (4.1) έχουμε

$$u_{cm} = R \frac{d\theta}{dt} \text{ και, επειδή } \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

τελικά παίρνουμε

$$u_{cm} = \omega R$$



Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινηθεί κατά ds , κάθε σημείο στην περιφέρειά του στρέφεται κατά το ίδιο τόξο. Σχήμα 4-5.

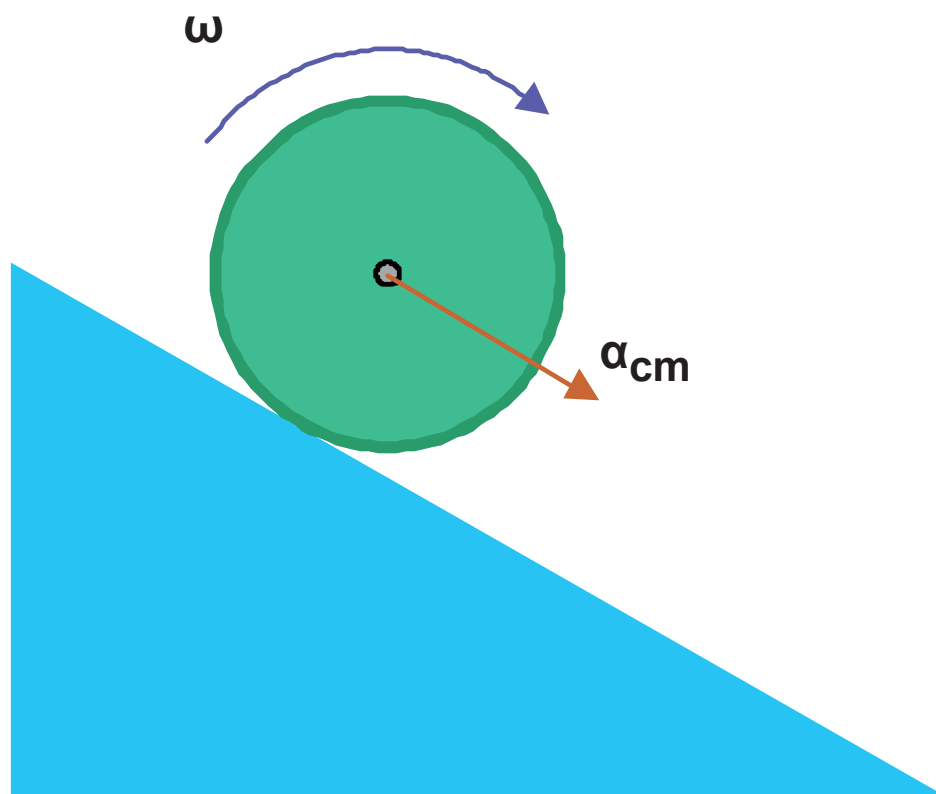
Έστω ένας τροχός που κυλίεται πάνω σε πλάγιο επίπεδο (σχ. 4.6). Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού αυξάνεται, δηλαδή έχει γωνιακή επιτάχυνση. Το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού κάποια στιγμή είναι u_{cm} , θα ισχύει

$$u_{cm} = \omega R \text{ οπότε } \frac{du_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$$

και τελικά

$$a_{cm} = \alpha_{γων} R$$

όπου a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και $\alpha_{γων}$ η γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής του τροχού.

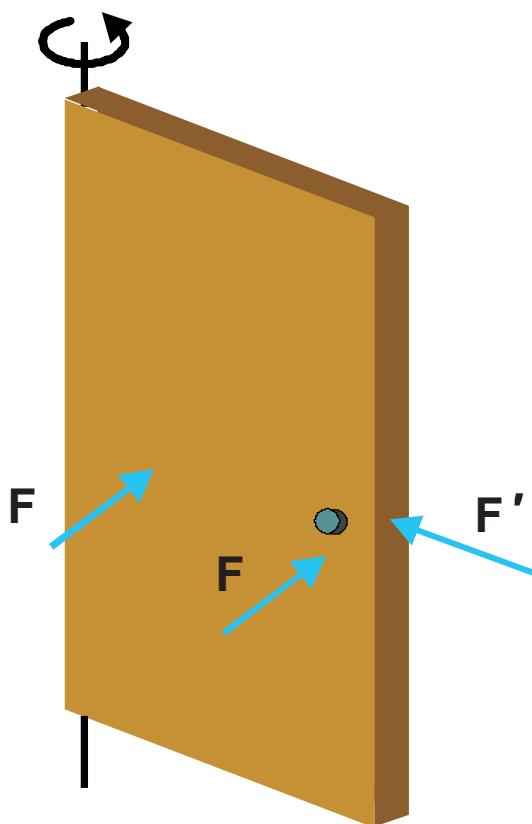


Στον τροχό που κυλάει: $a_{cm} = \alpha_{γων} R$
Σχήμα 4-6.

(4.3.) Ροπή Δύναμης

Αν ασκήσουμε μια δύναμη σε ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα το σώμα περιστρέφεται εκτός αν ο φορέας της δύναμης περνάει από τον άξονα περιστροφής. Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι η περιστροφή που προκαλεί μια δύναμη εξαρτάται όχι μόνο από την κατεύθυνση και το μέγεθος της δύναμης αλλά και από το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη. Για να κλείσουμε μια πόρτα τη σπρώχνουμε κοντά στο πόμολο και όχι κοντά στον άξονα περιστροφής της (μεντεσέδες), γιατί ακόμα και μικρή δύναμη μπορεί να προκαλέσει στροφή της πόρτας όταν εφαρμόζεται μακριά από τον άξονα περιστροφής.

Το μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα ονομάζεται **ροπή της δύναμης** και συμβολίζεται με το ελληνικό **τ** .



Η ίδια δύναμη περιστρέφει την πόρτα πιο εύκολα όταν ασκείται μακριά από τον άξονα περιστροφής. Η F' που ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα δε μπορεί να περιστρέψει το σώμα. **Σχήμα 4-7.**

A) Ροπή δύναμης ως προς άξονα

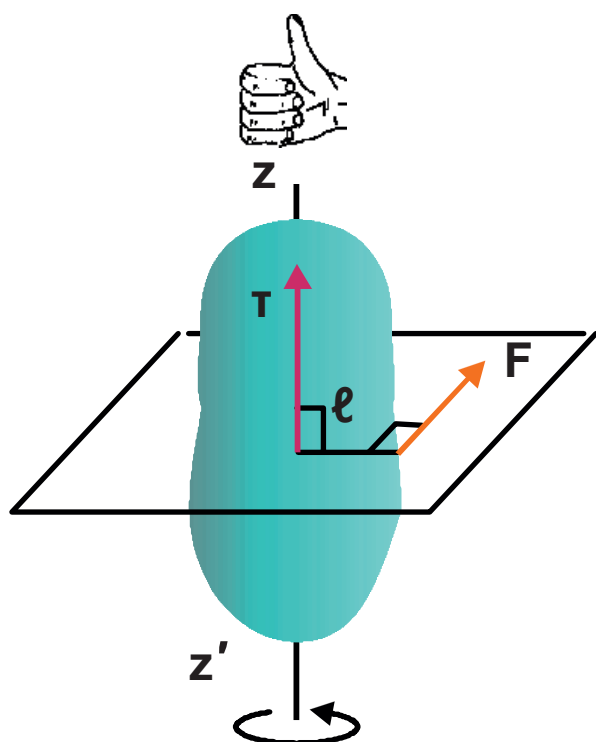
Έστω ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$. Στο σώμα ασκείται δύναμη F που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.

Ροπή της δύναμης F , ως προς τον άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση ℓ της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας).

$$\tau = F\ell$$

Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα ροπής είναι το 1 Nm .

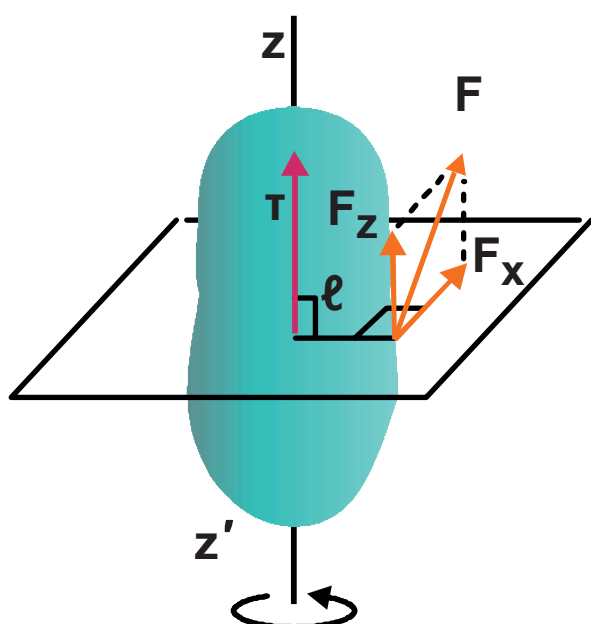
Για να προσδιορίσουμε τη φορά της ροπής κλείνουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού και τα τοποθετούμε έτσι ώστε να δείχνουν τη φορά κατά την οποία τείνει να περιστρέψει το σώμα η δύναμη. Ο αντίχειρας τότε δίνει τη φορά του διανύσματος της ροπής.



Η φορά της ροπής της δύναμης F βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Σχήμα 4-8.

Αν η δύναμη F δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, η ροπή της είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα της που βρίσκεται πάνω στο κάθετο επίπεδο (σχ. 4.9)



Η ροπή της δύναμης F έχει μέτρο $F_x \ell$

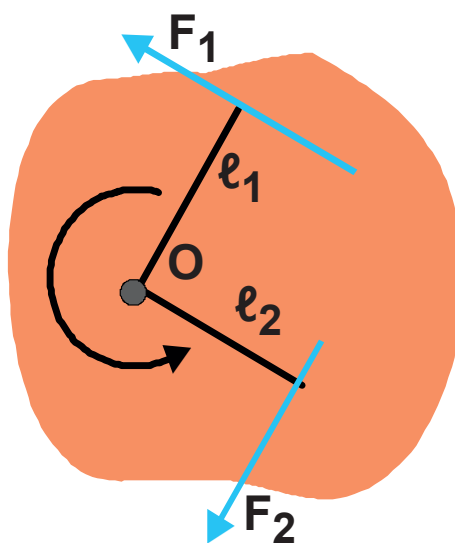
Σχήμα 4-9.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο περιπτώσεις στις οποίες όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Σε τέτοια προβλήματα, για να περιγράψουμε την τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα σώμα προς τη μια ή την άλλη φορά, χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της ροπής. Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να το περιστρέψει κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Στο σώμα του **σχήματος 4.10** δρουν οι δυνάμεις F_1 και F_2 . Το σώμα έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η συνολική ροπή που δέχεται το σώμα είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2$$



Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 . Η φορά περιστροφής του σώματος καθορίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών.

Σχήμα 4-10.

B) Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Αν σ' ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν περιστρέφεται (θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση). Αν όμως ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα μαζί με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα (ελεύθερος άξονας) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας του σώματος.

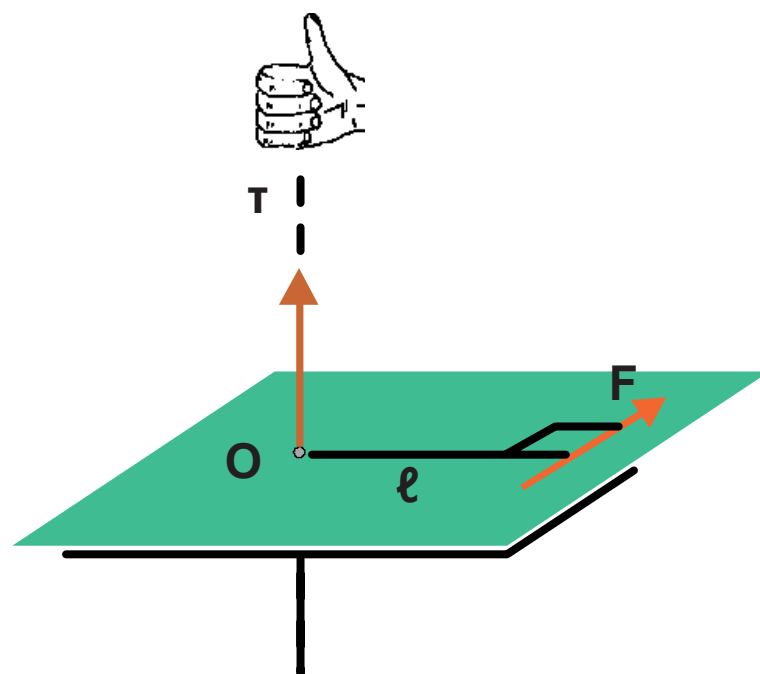
Μπορείτε να διαπιστώσετε τα παραπάνω με ένα μολύβι που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι. Ωθώντας το μολύβι στο κέντρο μάζας του, το μολύβι κάνει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν όμως ασκήσετε δύναμη στη μια του άκρη (ο φορέας της δεν πρέπει να διέρχεται από το κέντρο μάζας του) τότε το μολύβι στρέφεται γύρω από έναν νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και ταυτόχρονα μετακινείται. Η μεταφορική κίνηση μπορεί να μην είναι εμφανής αν η τριβή ανάμεσα στο μολύβι και το τραπέζι είναι σημαντική.

Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής της δύναμης ως προς σημείο.

Ροπή δύναμης F ως προς σημείο O ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόστασή της από το σημείο O

$$\tau = F\ell$$

διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο O και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Προσδιορισμός της φοράς της ροπής δύναμης ως προς σημείο με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Σχήμα 4-11.

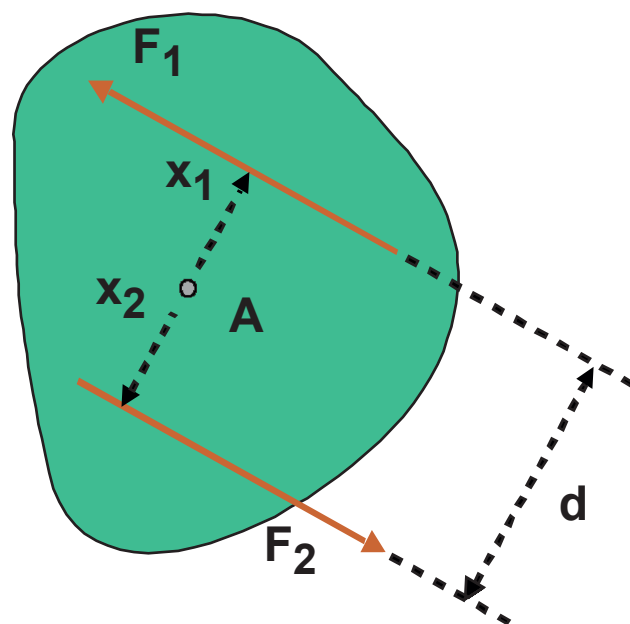
Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση που σε ένα σώμα δρουν δύο αντίρροπες δυνάμεις F_1 και F_2 με ίσα μέτρα. Δυο τέτοιες δυνάμεις αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων**. Αν η απόσταση των φορέων των δυο δυνάμεων είναι d , η αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο A (σχ. 4.12) που απέχει απόσταση x_1 από τη δύναμη F_1 και x_2 από την F_2 , είναι

$$\tau = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F_1 (x_1 + x_2) = F_1 d$$

επομένως

$$\tau = F_1 d$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επομένως, **η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.**



Οι δυνάμεις F_1 και F_2 αποτελούν ζεύγος. Η ροπή τους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.

Σχήμα 4-12.

Παράδειγμα 4.1

Το στερεό του **σχήματος 4.13** αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους, με ακτίνες $R_1 = 4 \text{ cm}$ και $R_2 = 3 \text{ cm}$, που στέφονται γύρω από σταθερό άξονα $x'x$. Ο άξονας $x'x$ συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας των κυλίνδρων. Εξ αιτίας των βαρών που κρέμονται από τους δύο κυλίνδρους, τα σκοινιά ασκούν στους κυλίνδρους δυνάμεις $F_1 = 6 \text{ N}$ και $F_2 = 10 \text{ N}$. Να υπολογίσετε την ολική ροπή που δέχεται το στερεό.

Απάντηση:

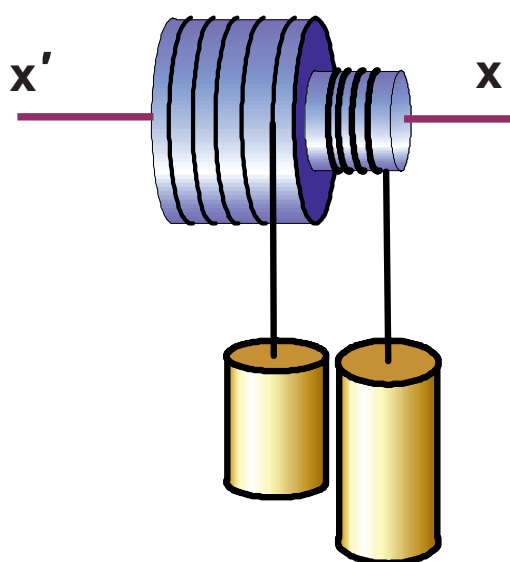
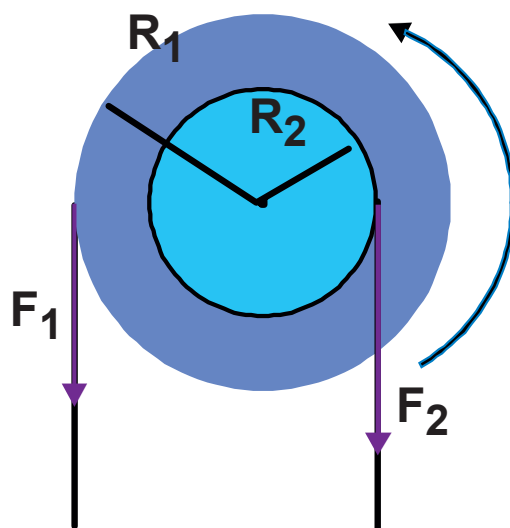
Η δύναμη F_1 τείνει να στρέψει το στερεό κατά τη θετική φορά και δημιουργεί θετική ροπή $\tau_1 = F_1 R_1$.

Η δύναμη F_2 τείνει να το στρέψει κατά την αρνητική φορά και δημιουργεί ροπή $\tau_2 = -F_2 R_2$.

Η συνολική ροπή που δέχεται το στερεό είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 R_1 - F_2 R_2 = -0,06 \text{ N}\cdot\text{m}$$

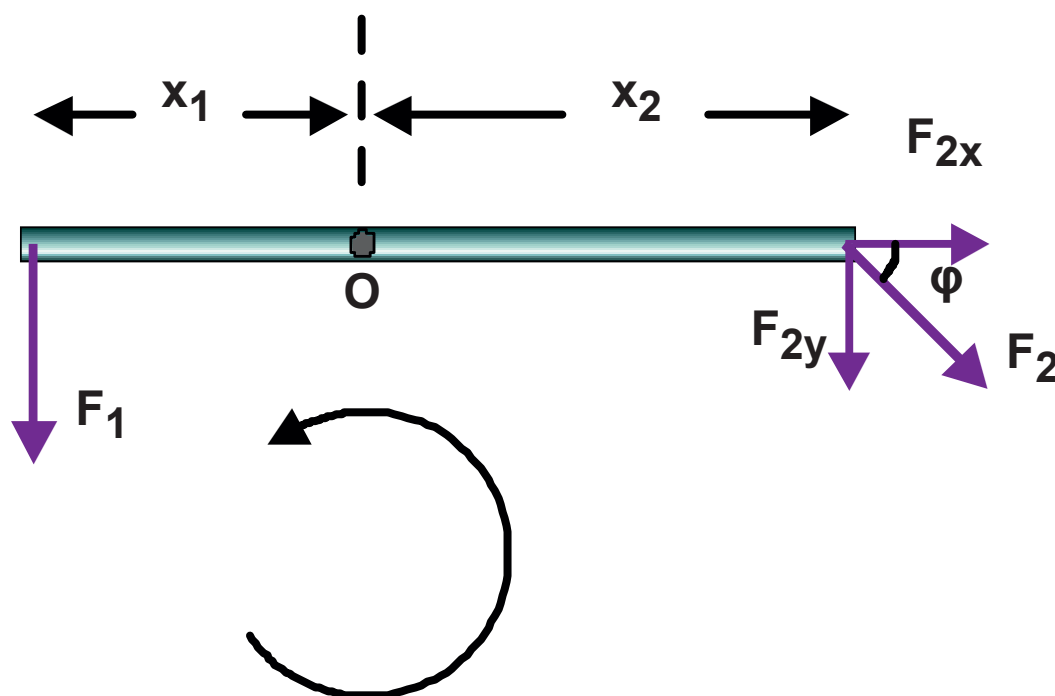
Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το στερεό θα στραφεί όπως στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού.



Σχήμα 4-13.

Παράδειγμα 4.2

Η αβαρής ράβδος του **σχήματος 4.14** μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο **O** και είναι κάθετος σε αυτή. Το **O** απέχει από τα άκρα της ράβδου $x_1 = 5 \text{ cm}$ και $x_2 = 8 \text{ cm}$. Στα άκρα της ράβδου ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = 50 \text{ N}$ και $F_2 = 40 \text{ N}$. Η δύναμη F_2 σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη ράβδο. Πόση είναι η ολική ροπή που δέχεται η ράβδος;



Σχήμα 4-14.

Απάντηση:

Η ροπή της F_1 είναι θετική γιατί η δύναμη τείνει να στρέψει τη ράβδο κατά τη θετική φορά. Είναι

$$\tau_1 = F_1 x_1 = 2,5 \text{ Nm}$$

Για να υπολογίσουμε τη ροπή της F_2 την αναλύουμε στις συνιστώσες F_{2x} και F_{2y} με μέτρα $F_{2x} = F_2 \sin 30^\circ$ και $F_{2y} = F_2 \cos 30^\circ$. Η ροπή της F_{2x} είναι μηδέν διότι ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα (η απόσταση της F_{2x} από τον άξονα είναι μηδέν), ενώ η ροπή της F_{2y} είναι αρνητική και ίση με

$$\tau_2 = -F_2 \cos 30^\circ x_2 = -1,6 \text{ Nm}.$$

Η συνολική ροπή που δέχεται η ράβδος είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0,9 \text{ Nm}.$$

Η συνολική ροπή είναι θετική, επομένως η ράβδος θα στραφεί αντίθετα με τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

(4.4.) Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ας δούμε με ποιες προϋποθέσεις ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό στο οποίο ασκούνται δυνάμεις.

Αν το στερεό έχει σταθερό άξονα μπορεί να κάνει μόνο στροφική κίνηση. Επομένως, για να ισορροπεί, αρκεί η συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα να είναι μηδέν.

Ένα ελεύθερο στερεό, όμως, μπορεί να εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση. Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν το σώμα δε θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι δε θα στραφεί. Αν υπάρχουν ροπές το σώμα θα στραφεί. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, αν υπάρχουν ροπές, αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων. Η ροπή ζεύγους, όμως, είναι ίδια ως προς όλα τα σημεία. Επομένως, για να μη στραφεί το σώμα θα πρέπει η συνισταμένη ροπή να είναι μηδέν ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο (τότε θα είναι μηδέν και ως προς κάθε άλλο).

Επομένως για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις θα πρέπει πρώτον η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν

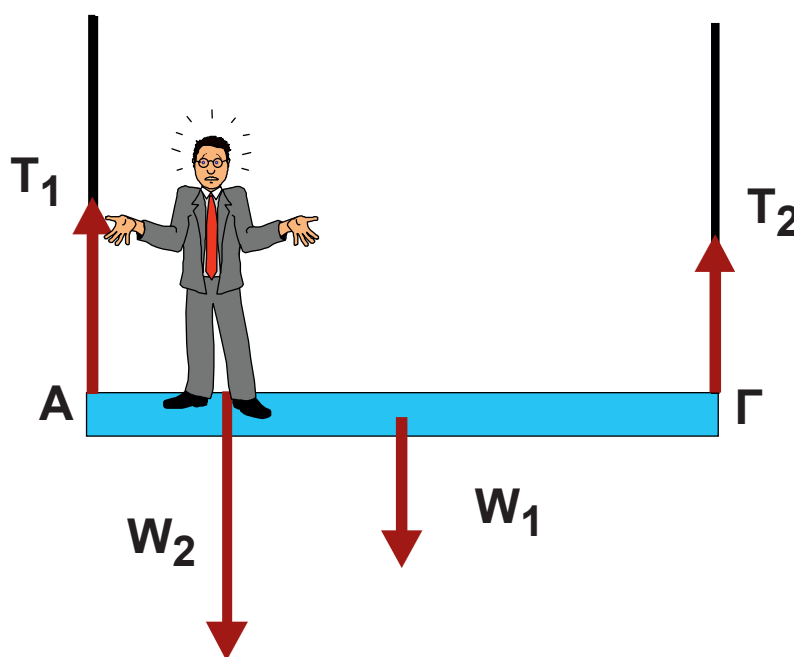
$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

και δεύτερον το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

$$\Sigma \tau = 0$$

Παράδειγμα 4.3

Ομογενής οριζόντια δοκός $ΑΓ$ που έχει μήκος $\ell=4\text{ m}$ και βάρος $w_1=200\text{ N}$, κρέμεται από δύο κατακόρυφα σκοινιά που είναι δεμένα στα άκρα της και ισορροπεί. Πάνω στη δοκό και σε απόσταση $x=1\text{ m}$ από το άκρο της στέκεται άνθρωπος βάρους $w_2=600\text{ N}$. Ποια είναι τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα σκοινιά στη δοκό;



Σχήμα 4-15.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό είναι το βάρος της (w_1), η δύναμη που δέχεται από τον άνθρωπο – είναι ίση με το βάρος του w_2 – και οι δυνάμεις T_1 και T_2 από τα σκοινιά.

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν

$$\Sigma F=0 \text{ επομένως } T_1+T_2-w_1-w_2=0 \quad (4.2)$$

και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι επίσης μηδέν. Οι υπολογισμοί μας απλουστεύονται αν οι ροπές αναφέρονται σε σημείο από το οποίο περνάει μία από τις άγνωστες δυνάμεις. Επιλέγουμε το σημείο **A**.

$$\Sigma \tau_A = 0, \text{ άρα } T_2 \ell - w_1 \frac{\ell}{2} - w_2 x = 0,$$

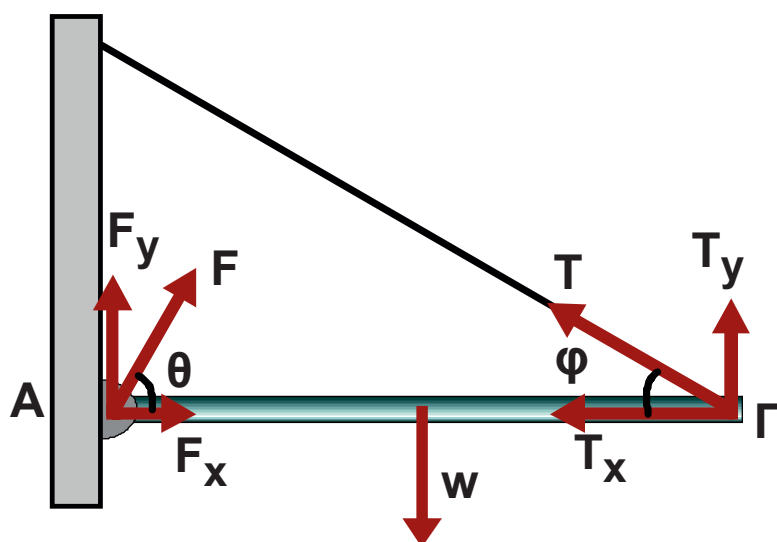
από όπου προκύπτει ότι

$$T_2 = \frac{w_1 \ell + 2w_2 x}{2\ell} = 250 \text{ N}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.2) βρίσκουμε $T_1 = 550 \text{ N}$

Παράδειγμα 4.4

Ομογενής δοκός **ΑΓ**, μήκους ℓ και βάρους $w = 400 \text{ N}$, ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο **A** της δοκού στηρίζεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της **Γ** συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη δοκό. Να βρείτε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση.



Σχήμα 4-16.

Απάντηση:

Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη διεύθυνση.

$$T_x = T \cos 30^\circ \text{ και } T_y = T \sin 30^\circ$$

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } T \cos 30^\circ = F_x \quad (4.3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } T \sin 30^\circ + F_y = w \quad (4.4)$$

Επίσης $\Sigma \tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο.
Υπολογίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο **A**

$$T \sin 30^\circ \ell - w \frac{\ell}{2} = 0 \quad (4.5)$$

Οι δυνάμεις F_x , F_y και T_x έχουν μηδενικές ροπές ως προς το σημείο **A**. Από τη σχέση (4.5) προκύπτει

$$2T \sin 30^\circ = w \text{ επομένως } T = 400 \text{ N} \quad (4.6)$$

Από την (4.3) λαμβάνοντας υπόψη την (4.6) έχουμε

$$F_x = 200 \sqrt{3} \text{ N}$$

και από την (4.4) $F_y = 200 \text{ N}$

Επομένως η δύναμη F έχει μέτρο

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = 400\text{N}$$

και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ για την οποία

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ άρα } \theta = 30^\circ$$

(4.5.) Ροπή Αδράνειας

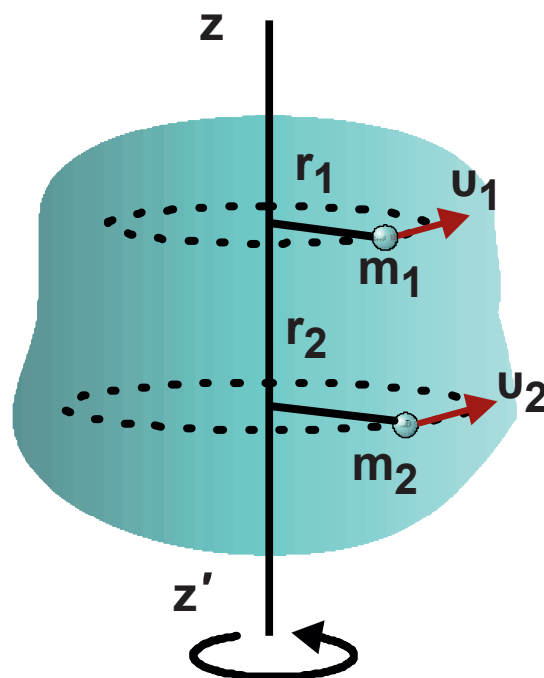
Έστω ένα στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα zz' (σχ.4.17). Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες $m_1, m_2 \dots$, τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι μάζες $m_1, m_2 \dots$ κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα, σε κύκλους ακτίνων $r_1, r_2 \dots$

Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής.

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μονάδα το 1 kg m^2 .

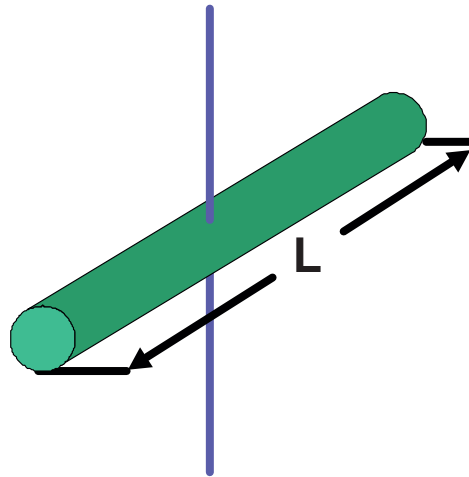
Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας ενός σώματος συνήθως δεν είναι εύκολος.



Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα.
Σχήμα 4-17.

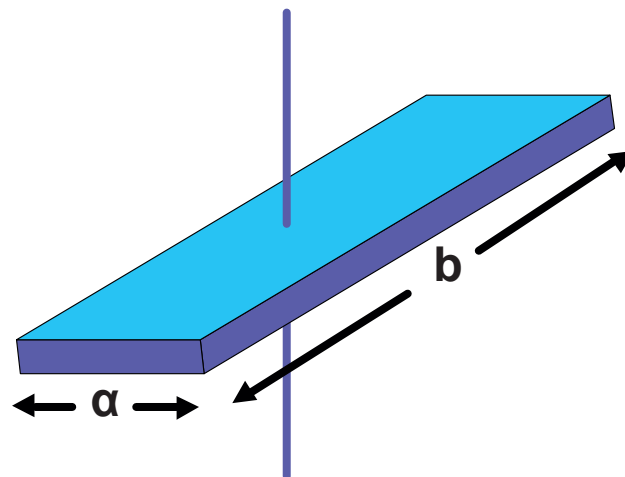
Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι ροπές αδράνειας κάποιων σωμάτων ως προς έναν από τους άπειρους άξονες που διέρχονται από το κέντρο μάζας τους. Ο συγκεκριμένος άξονας για κάθε σώμα εικονίζεται στο σχήμα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΠΟΥ
ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ**



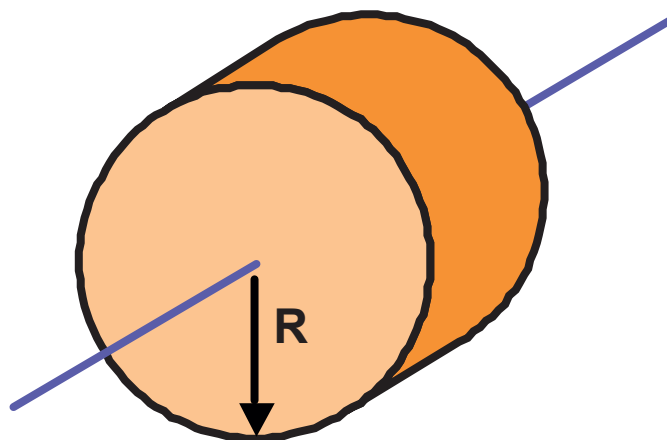
(α) Λεπτή ράβδος

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



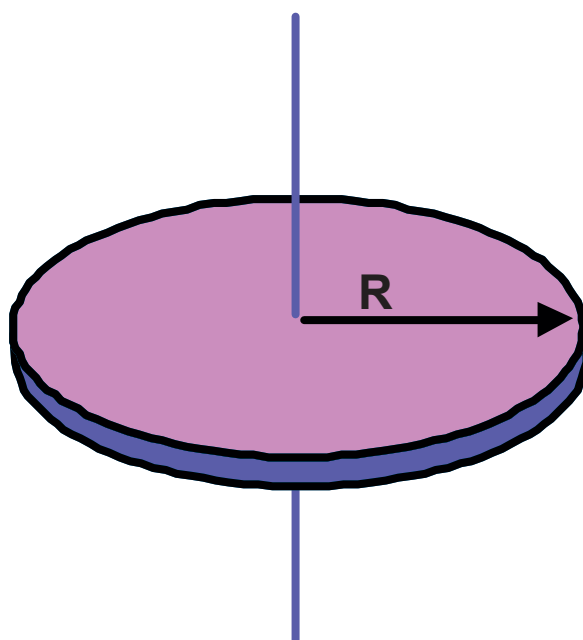
(β) Ορθογώνια πλάκα

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



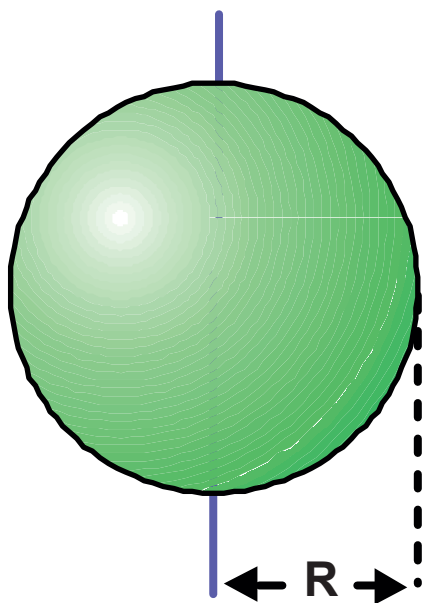
(γ) Συμπαγής κύλινδρος

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



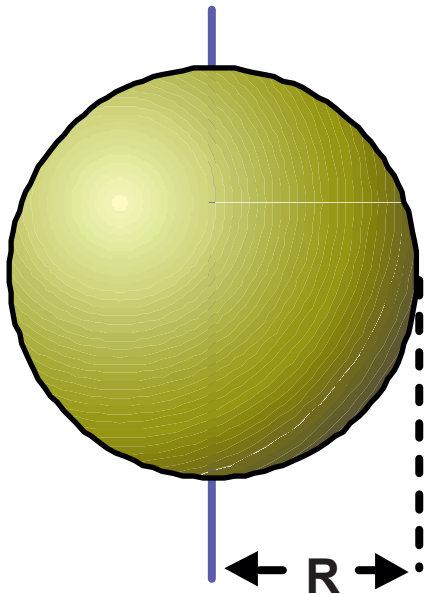
(δ) Δίσκος

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



(ε) Σφαιρικός φλοιός

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

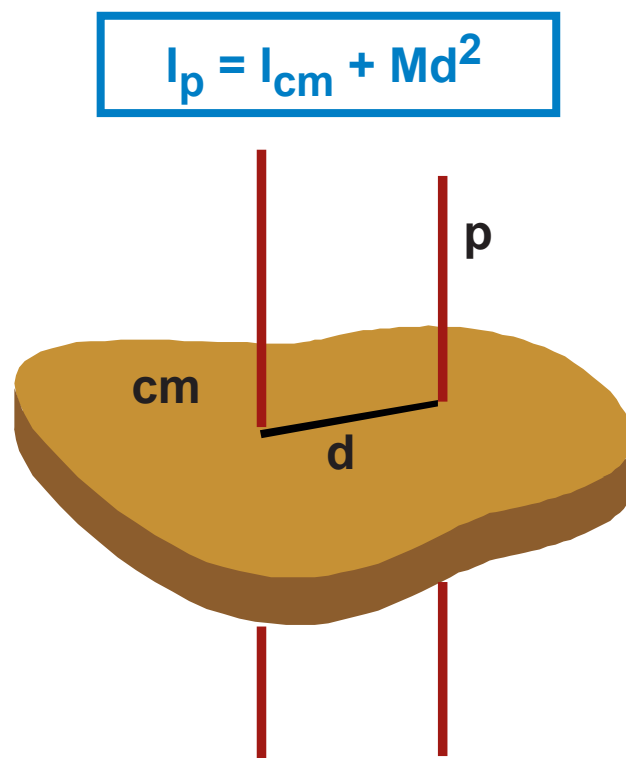


(στ) Συμπαγής σφαίρα

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Μεταξύ της ροπής αδράνειας I_{cm} ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I_p ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα p , παράλληλο με τον πρώτο σε απόσταση d από αυτόν, υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το **θεώρημα παραλλήλων αξόνων** ή **θεώρημα Steiner** (Στάινερ).

Αν I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, η ροπή αδράνειάς του ως προς ένα άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d .

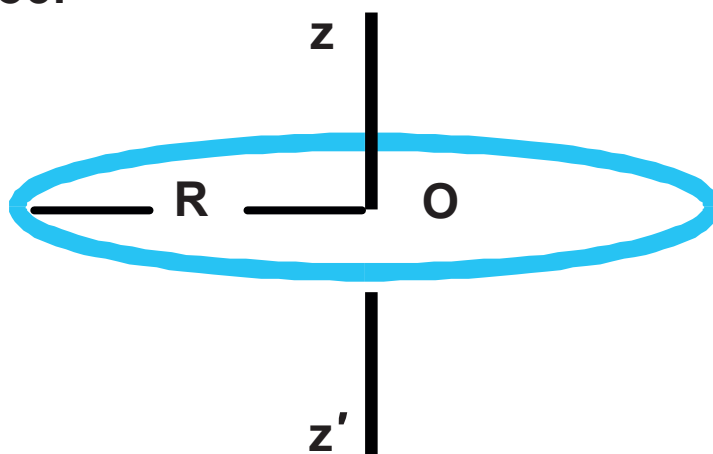


Το θεώρημα παραλλήλων αξόνων δίνει τη ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα που απέχει απόσταση d από το κέντρο μάζας.

Σχήμα 4-18.

Παράδειγμα 4.5

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου μάζας M και ακτίνας R , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει. Το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του.



Σχήμα 4-19.

Απάντηση:

Θεωρούμε ότι ο δακτύλιος αποτελείται από τις στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots$. Είναι φανερό ότι $m_1 + m_2 + \dots = M$

Επειδή το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του R , όλες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής.

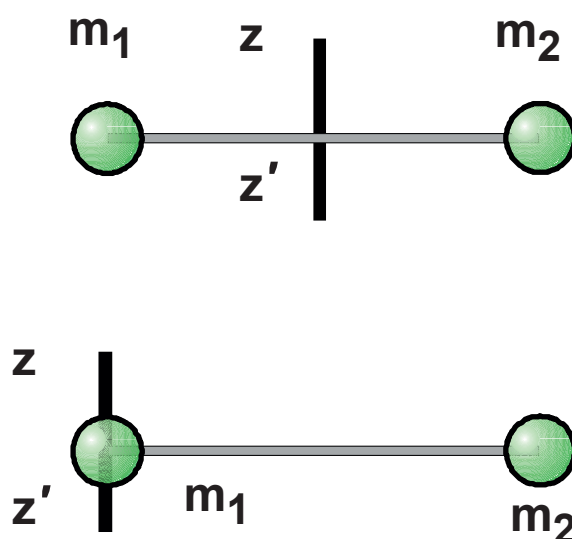
Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \dots = (m_1 + m_2 + \dots) R^2$$

$$\text{Άρα } I = MR^2$$

Παράδειγμα 4.6

Δυο σώματα αμελητέων διαστάσεων, με ίσες μάζες m_1 και m_2 , ($m_1 = m_2 = m$), συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, μήκους ℓ . Ποια είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται α) από το μέσον της ράβδου β) από τη μάζα m_1 ;



Σχήμα 4-20.

Απάντηση:

$$\alpha) \quad I = m_1 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = 2m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{m\ell^2}{2}$$

$$\beta) \quad I = m_1 \ell^2 + 0 = m\ell^2$$

Παράδειγμα 4.7

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός λεπτού ομογενούς δίσκου, μάζας M και ακτίνας R , ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του, που περνάει από το άκρο του δίσκου.



Σχήμα 4-21.

Απάντηση:

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του είναι

$$I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα παραλλήλων αξόνων για $d=R$ έχουμε

$$I_p = I_{\text{cm}} + Md^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

(4.6.) Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης

Στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ προκύπτει ότι για να μεταβληθεί η ταχύτητά του πρέπει να ασκηθεί σε αυτό δύναμη. Αντίστοιχος νόμος ισχύει στη στροφική κίνηση στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην αιτία (ροπή) και το αποτέλεσμα (μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας) είναι

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

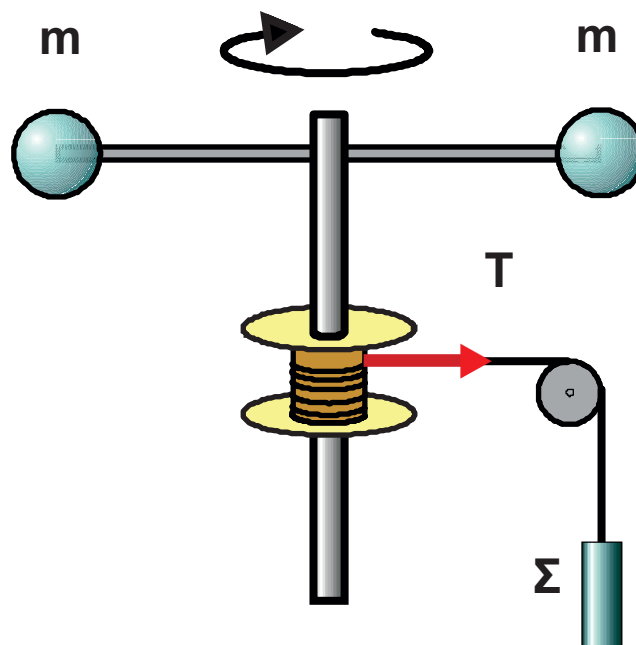
(4.7)

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως **ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, δηλαδή,

το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας (υπολογισμένης ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.

Από τη σχέση (4.7) φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος τόσο πιο δύσκολα αλλάζει η περιστροφική κατάσταση του σώματος. **Η ροπή αδράνειας** εκφράζει στην περιστροφή, ό,τι εκφράζει η μάζα στη μεταφορική κίνηση, δηλαδή **την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση**. Ενώ όμως η μάζα ενός σώματος είναι σταθερό μέγεθος, η ροπή αδράνειας εξαρτάται κάθε φορά από τη θέση του άξονα περιστροφής.

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση (4.7) προκύπτει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν, επομένως το σώμα διατηρεί την προηγούμενη περιστροφική του κατάσταση, δηλαδή αν το σώμα είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να ηρεμεί, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Το σώμα Σ , μέσω του σκοινιού, ασκεί ροπή στον άξονα περιστροφής με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα των μαζών m να αυξάνεται.

Σχήμα 4-22.

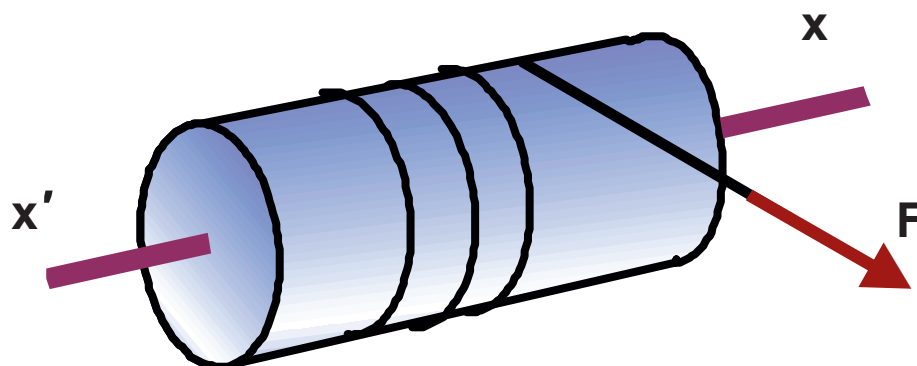
Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε στροφικές κινήσεις γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Τα συμπεράσματά μας για την κίνηση αυτή μπορούν να επεκταθούν και στις περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται. Αυτό συμβαίνει στις σύνθετες κινήσεις, στις οποίες το σώμα κάνει ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως στην κίνηση ενός τροχού που κυλάει. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στις περιπτώσεις αυτές, αρκεί ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, να είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Παράδειγμα 4.8

Ομογενής κύλινδρος μάζας $M=40\text{ kg}$ και ακτίνας $R=40\text{ cm}$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά του που είναι σταθερός. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τυλίξει σκοινί, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή δύναμη $F=6\text{ N}$. Το σκοινί ξετυλίγεται, χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι

$$I = \frac{1}{2} MR^2.$$



Σχήμα 4-23.

Απάντηση:

Η δύναμη που ασκεί το σκοινί στον κύλινδρο προκαλεί ροπή $\tau = FR$

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης

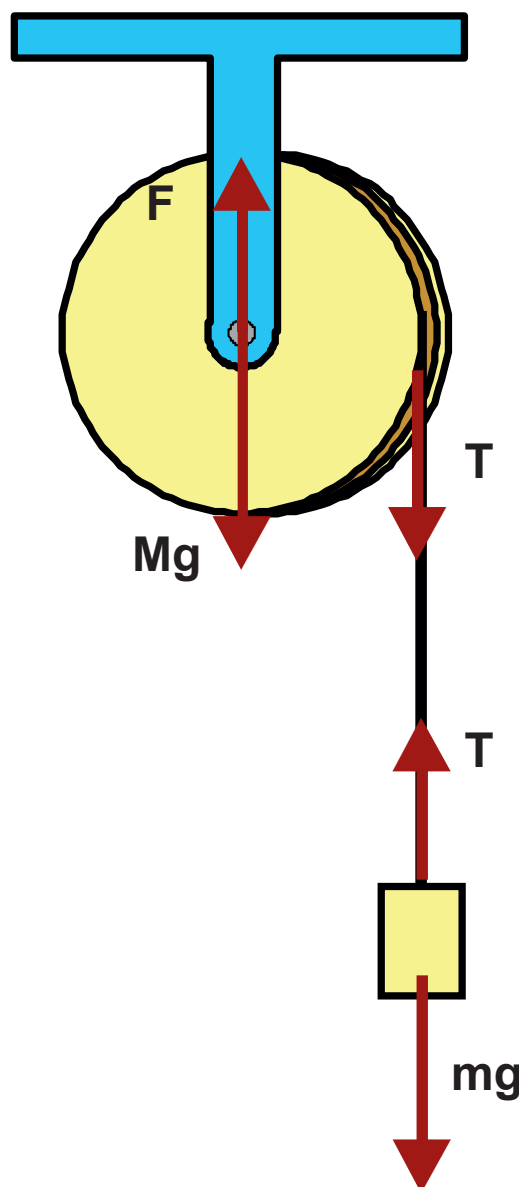
$$\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad FR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Λύνοντας ως προς α και αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών βρίσκουμε

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \cdot 6 \text{ N}}{40 \text{ kg} \cdot 40 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,75 \text{ rad/s}^2$$

Παράδειγμα 4.9

Μία τροχαλία ακτίνας R , και ροπής αδράνειας I μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται σώμα μάζας m . Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος, τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και την τάση του νήματος.



Σχήμα 4-24.

Απάντηση:

Θα εφαρμόσουμε τους νόμους της μηχανικής χωριστά σε κάθε σώμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα m , είναι το βάρος του mg και η τάση του νήματος T .

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $mg - T = ma$ (4.8)

Στον τροχό ασκούνται η T (από το νήμα), η δύναμη F (από τον άξονα) και το βάρος του Mg .

Οι δυνάμεις Mg και F δε δημιουργούν ροπή γιατί ο φορέας τους περνάει από τον άξονα περιστροφής. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση δίνει

$$\tau = I\alpha_{\omega\nu} \text{ ή } TR = I\alpha_{\omega\nu} \quad (4.9)$$

Λύνοντας την (4.8) ως προς T έχουμε $T = mg - ma$

Αντικαθιστώντας στην (4.9)

$$mgR - mRa = I\alpha_{\omega\nu} \quad (4.10)$$

Η επιτάχυνση a του σώματος είναι ίση με το ρυθμό που αυξάνεται η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας. Για την επιτάχυνση αυτή ισχύει

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\omega\nu} R \quad (4.11)$$

οπότε η (4.10) γίνεται

$$mgR - mR^2\alpha_{\omega\nu} = I\alpha_{\omega\nu}$$

$$\text{Επομένως } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{mgR}{I + mR^2} \quad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.11) βρίσκουμε για τη γραμμική επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{mgR^2}{I + mR^2} \quad (4.13)$$

Η τάση T υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε την (4.12) στην (4.9)

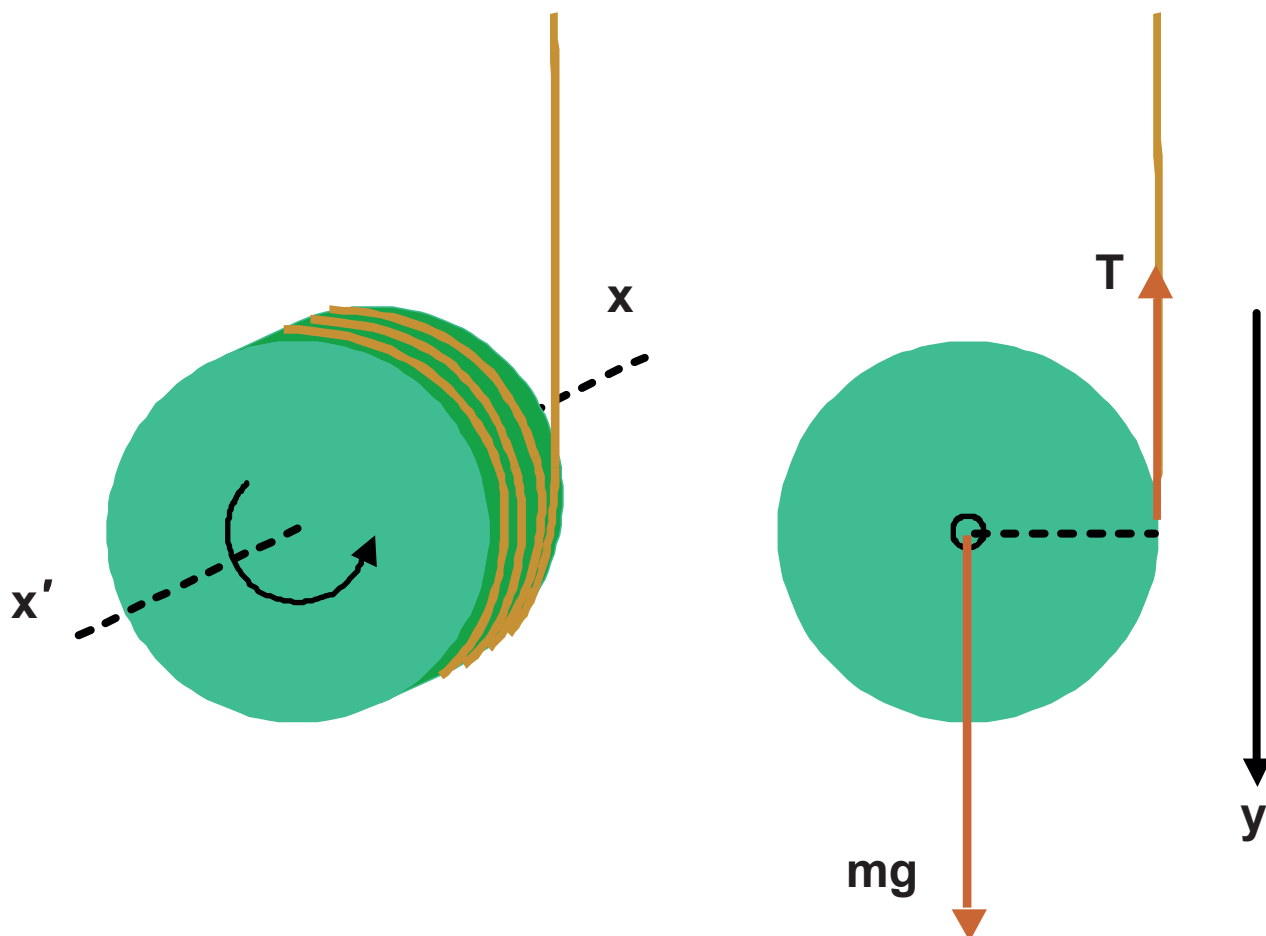
$$T = \frac{I}{R} \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{I}{R} \frac{mgR}{I + mR^2} \quad \text{ή} \quad T = \frac{Img}{I + mR^2}$$

Παράδειγμα 4.10

Το γιο-γιο αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα σκοινί. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σκοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σκοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα, τον xx' .

Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g . Θεωρήστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το σκοινί παραμένει κατακόρυφο.



Σχήμα 4-25.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του mg και η δύναμη T από το σκοινί. Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma F_y = m a_{cm} \quad \text{ή} \quad mg - T = m a_{cm}$$

$$\text{οπότε} \quad T = mg - m a_{cm} \quad (4.14)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς τον άξονα xx' έχουμε

$$\Sigma \tau = I \alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad TR = I \alpha_{γων} \quad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας την (4.14) στην (4.15) βρίσκουμε

$$mgR - mRa_{cm} = I\alpha_{γων}$$

$$\text{ή } mgR - mRa_{cm} = \frac{1}{2} mR^2\alpha_{γων}$$

$$\text{ή } g - a_{cm} = \frac{1}{2} R\alpha_{γων} \quad (4.16)$$

$$\text{Όμως } a_{cm} = R\alpha_{γων} \text{ οπότε } \alpha_{γων} = \frac{a_{cm}}{R}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.16) βρίσκουμε

$$g - a_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} \text{ ή } a_{cm} = \frac{2g}{3}$$

(4.7.) Στροφορμή

Η ορμή αποδείχτηκε μέγεθος ιδιαίτερα χρήσιμο για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης των στερεών. Το αντίστοιχο της ορμής του στερεού στη στροφική κίνηση το ονομάζουμε **στροφορμή**.

Θα ορίσουμε πρώτα τη στροφορμή ενός υλικού σημείου που κάνει κυκλική κίνηση, στη συνέχεια θα ορίσουμε τη στροφορμή στερεού σώματος και, τέλος, τη στροφορμή συστήματος σωμάτων.

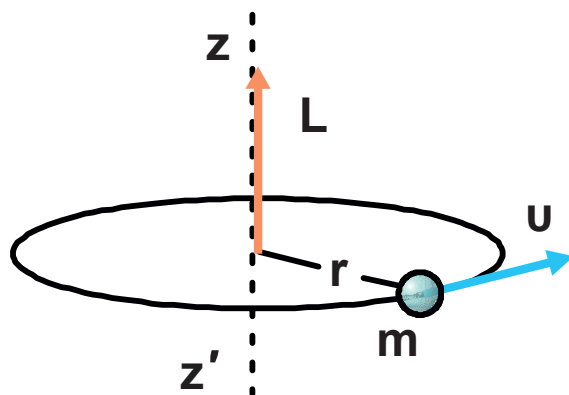
A) Στροφορμή υλικού σημείου

Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m και ορμής p που κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r (σχ. 4.26).

Ονομάζουμε **στροφορμή του υλικού σημείου** ως προς ένα άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

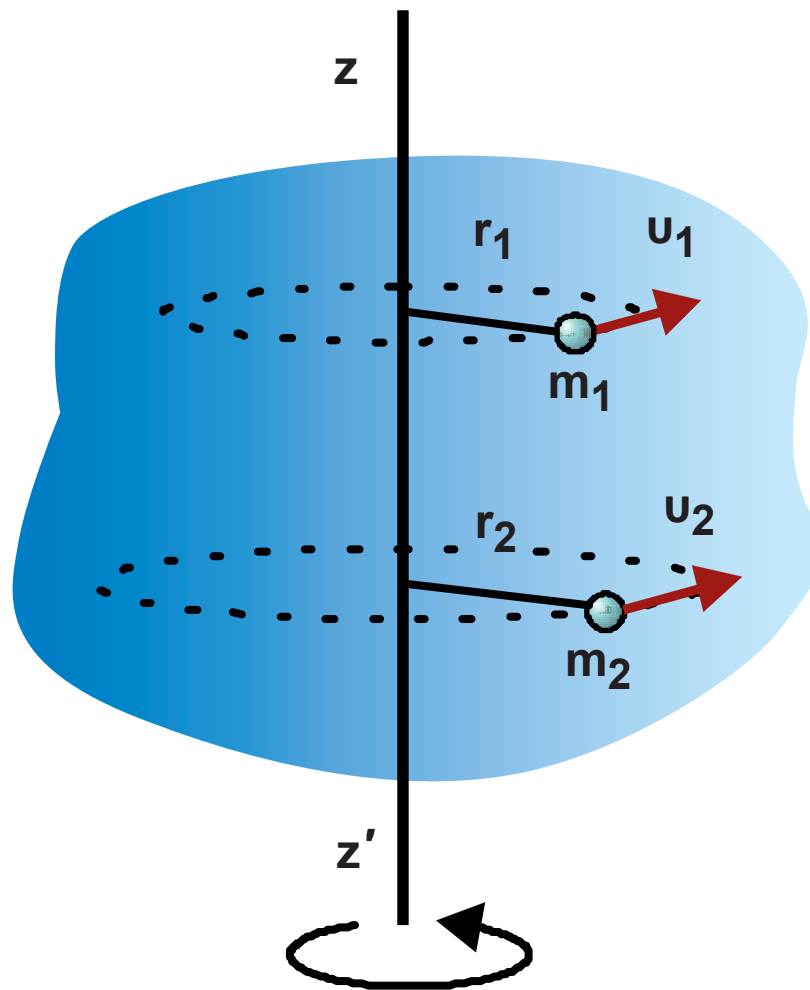
$$L = pr \quad \text{ή} \quad L = mur$$

διεύθυνση αυτή του άξονα $z'z$ και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα στροφορμής είναι το $1 \text{ kg m}^2/\text{s}$.



Το υλικό σημείο μάζας m κινείται κυκλικά. Η στροφορμή του είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς του.

Σχήμα 4-26.



Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1 m_2 ... Κάθε μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.
Σχήμα 4-27.

B) Στροφορμή στερεού σώματος

Έστω το στερεό του [σχήματος 4.27](#) που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα $z'z$ με γωνιακή ταχύτητα ω . Κατά την περιστροφή του σώματος τα διάφορα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , η γραμμική ταχύτητά τους όμως είναι διαφορετική, και μάλιστα ανάλογη με την απόστασή τους από τον άξονα

περιστροφής. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα, με μάζες $m_1, m_2 \dots$, τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι στροφορμές των στοιχειωδών αυτών μαζών έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρα, $L_1 = m_1 u_1 r_1, L_2 = m_2 u_2 r_2, \dots$
Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.

$$L = m_1 u_1 r_1 + m_2 u_2 r_2 + \dots$$

Επειδή τα υλικά σημεία $m_1, m_2 \dots$ κάνουν κυκλική κίνηση οι ταχύτητές τους $u_1, u_2 \dots$ μπορούν να γραφούν

$$u_1 = \omega r_1, u_2 = \omega r_2 \text{ Κ.Ο.Κ. ΟΤΟΤΕ}$$

$$L = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \dots =$$

$$= \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots)$$

$$\text{όμως } m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = I$$

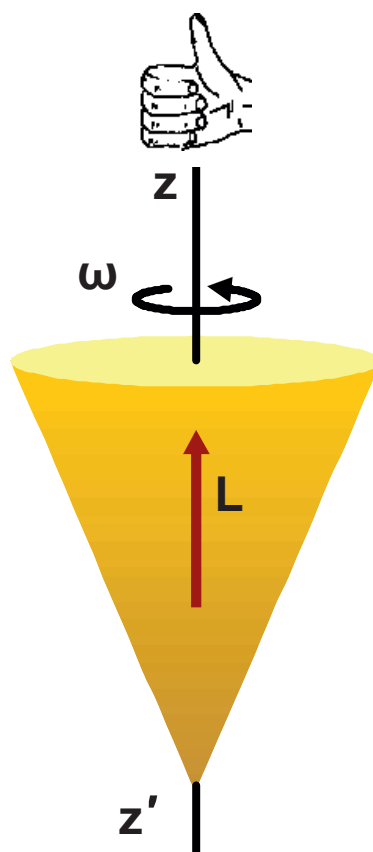
επομένως

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με

$$L = I\omega$$

(4.17)

έχει τη διεύθυνση του άξονα και η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Ο κώνος του σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$ με γωνιακή ταχύτητα ω . Η στροφορμή του σώματος είναι L , βρίσκεται πάνω στον άξονα και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. **Σχήμα 4-28.**

Στροφορμή μερικών σωμάτων	
Τροχιακή κίνηση της Γης	$2,7 \times 10^{40} \text{ kg m}^2/\text{s}$
Περιστροφή της Γης	$5,8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2/\text{s}$
Τροχός αυτοκινήτου ($u=90 \text{ km/h}$)	$10^2 \text{ kg m}^2/\text{s}$
Δίσκος πικ-απ (33 στροφές ανά min)	$6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2/\text{s}$
Τροχιακή κίνηση ηλεκτρονίου	$1,05 \times 10^{-35} \text{ kg m}^2/\text{s}$
Σπιν ηλεκτρονίου	$0,53 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$

Τη στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του συχνά την ονομάζουμε **σπιν**, για να τη διακρίνουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω άλλης κίνησης. Για παράδειγμα, η Γη έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της και στροφορμή εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή της τροχιακής της κίνησης.

Τα στοιχειώδη σωματίδια – ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια – έχουν σπιν μέτρου $0,53 \times 10^{-34} \text{ Js}$. Αυτή η στροφορμή σπιν συνήθως εκφράζεται ως $\frac{1}{2} \hbar$, όπου $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$ (προφέρεται έιτς μπάρ) και είναι μια θεμελιώδης ποσότητα στροφορμής που εμφανίζεται συχνά στη κβαντική φυσική.

Γ) Στροφορμή συστήματος

Σε ένα σύστημα σωμάτων, **στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα**. Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι $L_1, L_2, \dots$, η στροφορμή L του συστήματος είναι

$$L = L_1 + L_2 + \dots$$

Γενικότερη Διατύπωση του Θεμελιώδους Νόμου της Στροφικής Κίνησης

Από τη **σχέση 4.17** προκύπτει ότι αν σε απειροστά μικρό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβληθεί κατά $d\omega$, η στροφορμή του θα μεταβληθεί κατά $dL = I d\omega$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

και εξαιτίας της (4.7)

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$$

(4.18)

Επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Η σχέση αυτή είναι για τη στροφική κίνηση το ανάλογο του **δεύτερου νόμου του Newton**.

Ο νόμος αυτός ισχύει και σε σύστημα σωμάτων. Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη (δράση – αντίδραση). Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες. Η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν. Έτσι η **σχέση 4.18** για σύστημα σωμάτων γράφεται

$$\Sigma \tau_{\text{εξ}} = \frac{dL}{dt} \quad (4.19)$$

όπου $\tau_{\text{εξ}}$ η ροπή μιας εξωτερικής δύναμης και L η στροφορμή του συστήματος.

(4.8.) Διατήρηση της Στροφορμής

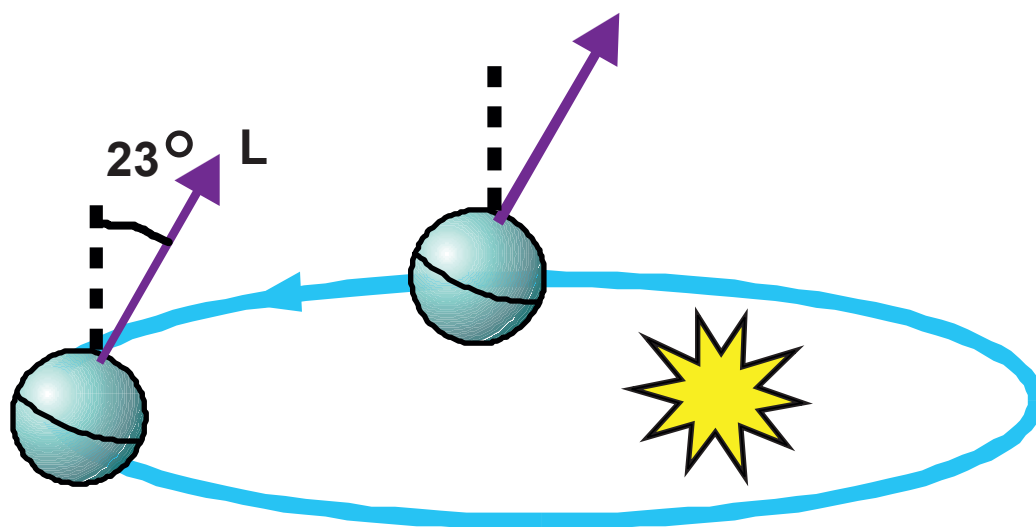
Στη στροφική κίνηση ισχύει ένας νόμος διατήρησης, ανάλογος με το νόμο διατήρησης της ορμής που ισχύει στη μεταφορική κίνηση. Το μέγεθος που διατηρείται στη στροφική κίνηση είναι η στροφορμή.

Η διατήρηση της στροφορμής σε ένα σώμα

Αν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$ προκύπτει ότι $\frac{dL}{dt} = 0$, επομένως, $L = \text{σταθ.}$

Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.

Για παράδειγμα, κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (ιδιοπεριστροφή), επειδή η ελκτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο δε δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της, η στροφορμή της Γης παραμένει σταθερή. Επομένως η χρονική διάρκεια περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή –24 ώρες.



Η στροφορμή της Γης -λόγω της ιδιοπεριστροφής της- διατηρείται σταθερή.

Σχήμα 4-29.

Η διατήρηση της στροφορμής σε σύστημα σωμάτων.

Ο δεύτερος νόμος του Newton για τη στροφική κίνηση στην περίπτωση συστήματος σωμάτων έχει τη μορφή $\Sigma \tau_{\text{εξ}} = \frac{dL}{dt}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **αρχή της διατήρησης της στροφορμής**.

Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

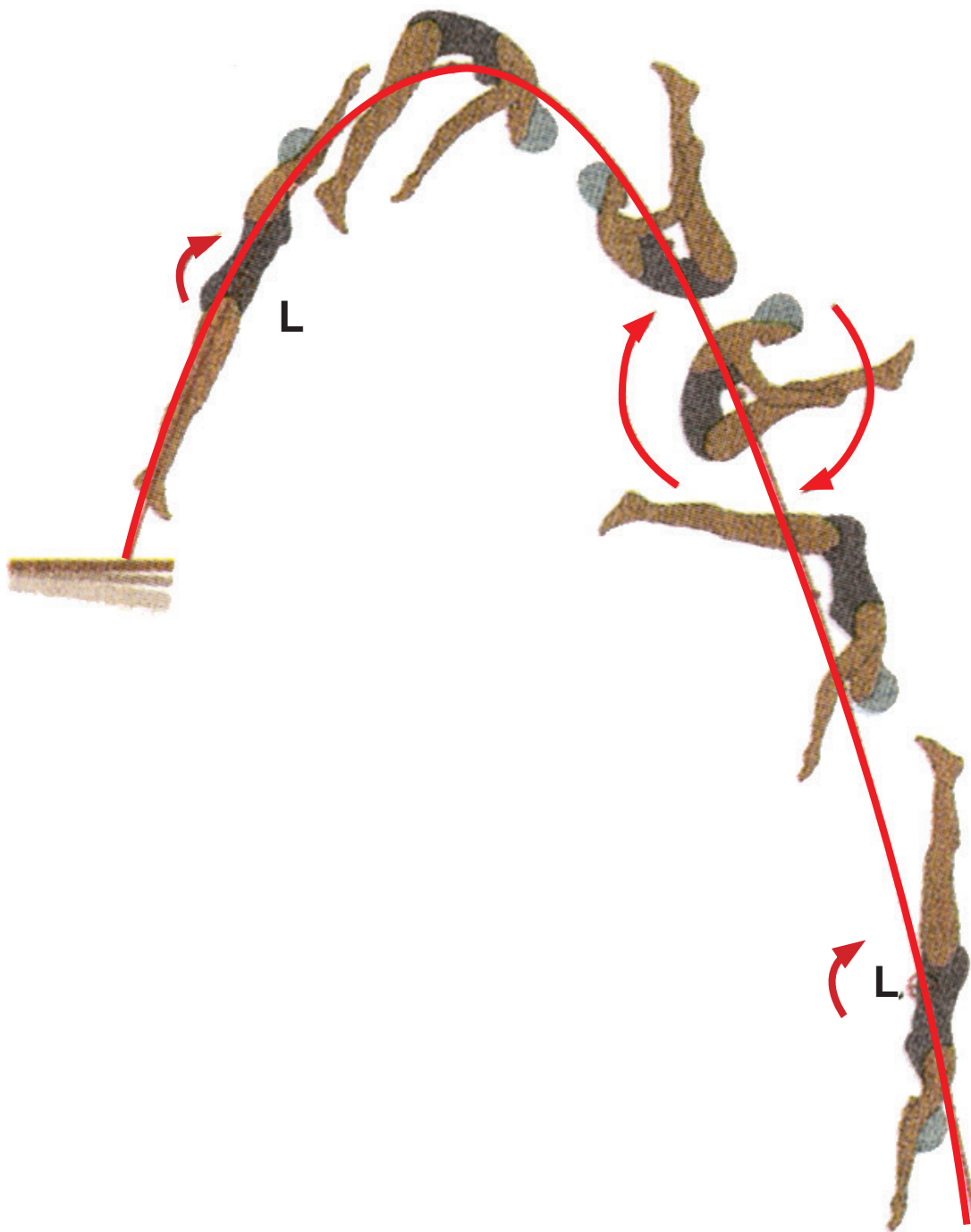
Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητά του αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Τα παραδείγματα φαινομένων στα οποία διατηρείται η στροφορμή είναι πολλά. Στην **εικόνα 4.4** φαίνεται μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ, που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο. Η αθλήτρια μπορεί, συμπύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της, να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Εάν η τριβή των παγοπέδινων με τον πάγο θεωρηθεί αμελητέα, οι εξωτερικές δυνάμεις – όπως το βάρος και η δύναμη που δέχεται από το έδαφος – δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της, επομένως η στροφορμή της διατηρείται, δηλαδή το γινόμενο **$I\omega$** παραμένει σταθερό. Συμπύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της η ροπή αδράνειας μειώνεται, οπότε, αφού το γινόμενο **$I\omega$** μένει σταθερό, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.



Η χορεύτρια συμπύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.
Εικόνα 4-4.



Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας της καταδύτριας με συνέπεια την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της.

Σχήμα 4-30.

Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Κατά την κίνηση του ακροβάτη στον αέρα, μοναδική

εξωτερική δύναμη είναι το βάρος του, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του διατηρείται. Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας, επομένως αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Στο **σχήμα 4.30** φαίνεται πως, με την τεχνική αυτή, μια κατάδυση μπορεί να γίνει πολύ θεαματική.

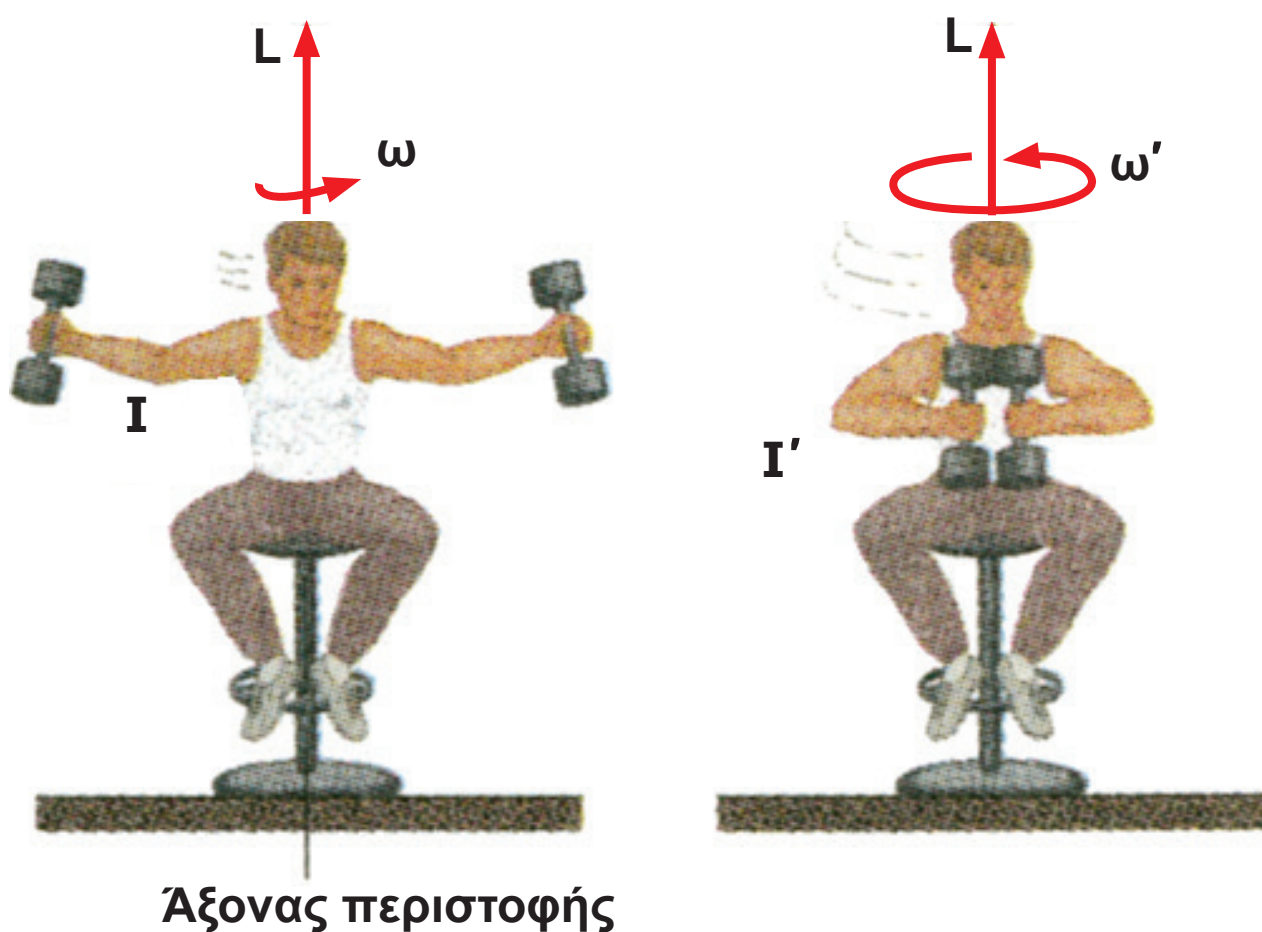
Τα αστέρια τα οποία στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από **1,4** έως **2,5** φορές τη μάζα του Ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τις πηγές ενέργειας που διαθέτουν, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρις ότου οι πυρήνες των ατόμων τους αρχίσουν να εφάπτονται, με αποτέλεσμα η ακτίνα ενός τέτοιου αστέριου να είναι μόνο **15-20 km**. Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται σταθερή και επειδή η ροπή αδράνειας του αστέριου μειώνεται δραματικά έχουμε μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας περιστροφής. Υπολογίζεται ότι ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με συχνότητα **3000 στροφές το δευτερόλεπτο**. Για σύγκριση, να αναφέρουμε ότι η περίοδος περιστροφής του Ήλιου είναι **25 μέρες**.

Παράδειγμα 4.11

Ο άνθρωπος στο **σχήμα 4.31**, έχει τα χέρια του τεντωμένα και στο κάθε χέρι του κρατάει ένα βάρaki μάζας **$M = 4 \text{ kg}$** . Εξαιτίας μιας ώθησης που δέχτηκε, ο άνθρωπος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **$\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$** . Με ποια γωνιακή ταχύτητα θα στρέφεται αν συμπτύξει τα χέρια του;

Το κάθισμα πάνω στο οποίο κάθεται, ο άνθρωπος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα, που είναι ο άξονας συμμετρίας. Η ροπή αδράνειας του ανθρώπου (χωρίς τα βάρáκια που κρατάει) όταν έχει τα χέρια του τεντωμένα είναι $3,25 \text{ kgm}^2$ και όταν συμπτύσσει τα χέρια του είναι $2,5 \text{ kgm}^2$.

Κάθε βάρáκι απέχει από τον άξονα περιστροφής 1 m , στην αρχή και $0,2 \text{ m}$ στο τέλος. Η ροπή αδράνειας του καθίσματος είναι αμελητέα.



Σχήμα 4-31.

Απάντηση:

Η αρχική ροπή αδράνειας I_1 του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής, όταν ο άνθρωπος είχε τα χέρια του τεντωμένα, ήταν το άθροισμα της ροπής αδράνειας του ανθρώπου και της ροπής αδράνειας των σωμάτων που κρατάει.

$$I_1 = I_1^{\text{ανθρ}} + I_1^{\text{βαρ}} = I_1^{\text{ανθρ}} + 2MR_1^2 = 11,25 \text{ kg m}^2$$

Η ροπή αδράνειας I_2 του συστήματος, όταν ο άνθρωπος κατεβάσει τα χέρια του είναι η νέα ροπή αδράνειας του ανθρώπου και η ροπή αδράνειας των σωμάτων.

$$I_2 = I_2^{\text{ανθρ}} + I_2^{\text{βαρ}} = I_2^{\text{ανθρ}} + 2MR_2^2 = 2,82 \text{ kg m}^2$$

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργούν εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής, η στροφορμή του διατηρείται. Δηλαδή ισχύει:

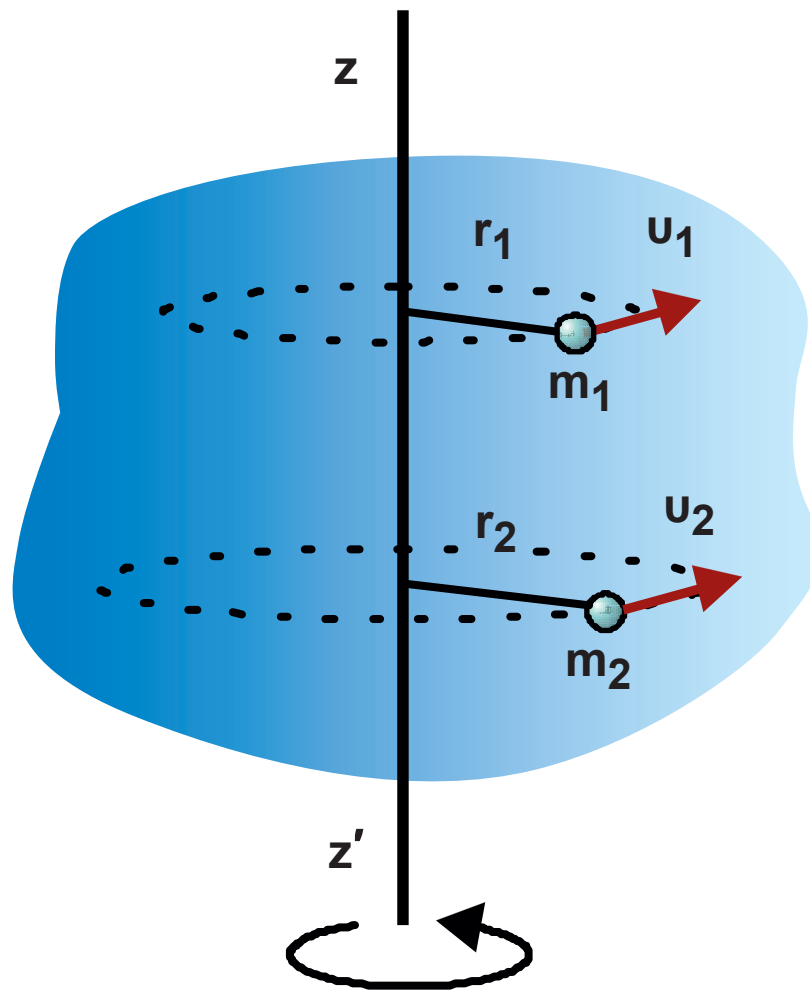
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = 16 \text{ rad/s}$$

(4.9.) Κινητική Ενέργεια Λόγω Περιστροφής

Το σώμα του σχήματος 4.32, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από τον άξονα $z'z$, έχει κινητική ενέργεια.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος, το χωρίζουμε σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots$. Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμικές ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1 = \omega r_1, \quad v_2 = \omega r_2, \quad \dots \quad (4.20)$$



Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα των ενεργειών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται.

Σχήμα 4-32.

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται, δηλαδή

$$K = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \dots$$

Η σχέση αυτή γίνεται, από την (4.20)

$$K = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \dots = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2$$

$$\text{Όμως } m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = I$$

και επομένως

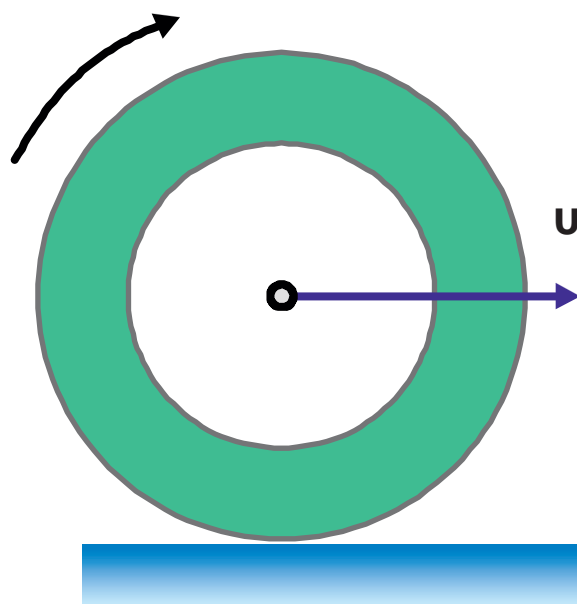
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η ενέργεια αυτή δεν είναι μια νέα μορφή ενέργειας. Η σχέση στην οποία καταλήξαμε αποτελεί απλά μια βολική έκφραση για την κινητική ενέργεια ενός σώματος που στρέφεται.

Αν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως ο τροχός του [σχήματος 4.33](#) η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης

$$K = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

όπου M η μάζα του σώματος και u_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.



Ο τροχός έχει κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και λόγω περιστροφικής κίνησης
Σχήμα 4-33.

(4.10.) Έργο Κατά τη Στροφική Κίνηση

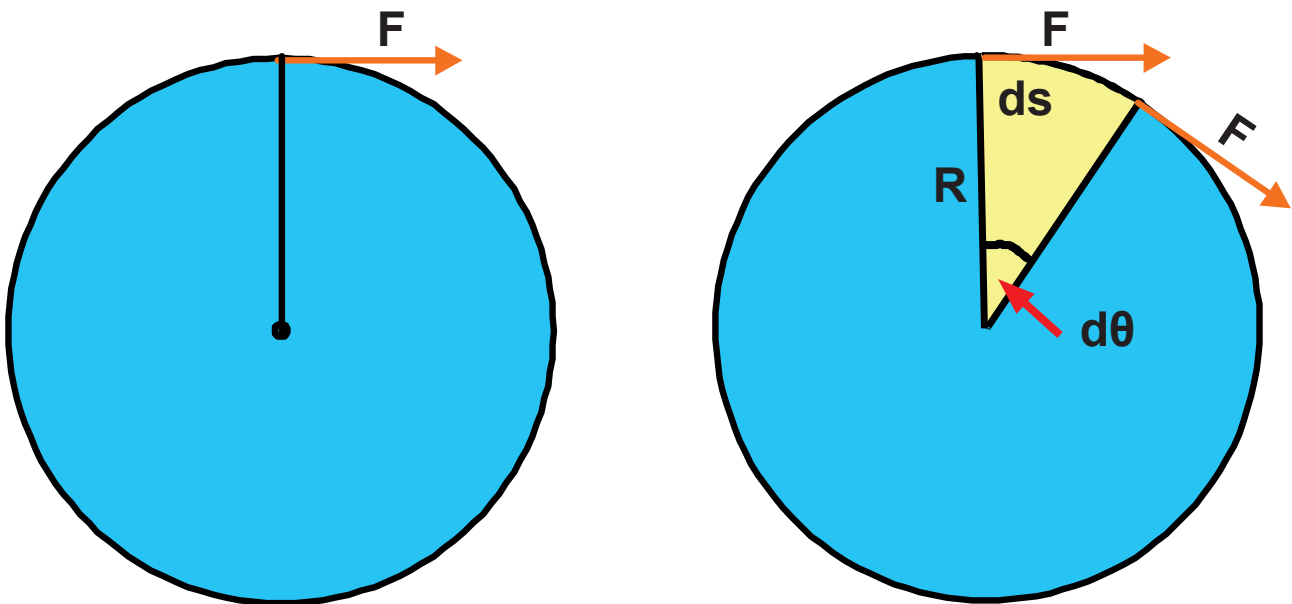
Όταν πατάμε τα πετάλια του ποδηλάτου ασκούμε δύναμη και παράγουμε έργο. Έργο παράγεται και από τη μηχανή του αυτοκινήτου καθώς στρέφει τον άξονα των τροχών. Το έργο μιας δύναμης που στρέφει ένα σώμα μπορούμε να το εκφράσουμε σε συνάρτηση με τη ροπή της.

Έστω ότι η δύναμη F ασκείται στην περιφέρεια ενός τροχού ακτίνας R , κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης (σχ. 4.35). Κατά την απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία $d\theta$ η δύναμη παράγει έργο

$$dW = F ds$$

Αν η γωνία μετريέται σε ακτίνια τότε $ds = R d\theta$ και

$$dW = F R d\theta$$



Με την επίδραση της δύναμης F το σώμα στρέφεται κατά γωνία $d\theta$. Το σημείο εφαρμογής της F μετατοπίζεται κατά $ds = R d\theta$.

Σχήμα 4-34.

Το γινόμενο τr είναι η ροπή τ της δύναμης.

Επομένως

$$dW = \tau d\theta \quad (4.21)$$

Για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης καθώς ένα σώμα στρέφεται κατά γωνία θ χωρίζουμε τη γωνία σε απειροστά μικρές γωνίες $d\theta_1, d\theta_2, \dots$ και αθροίζουμε τα αντίστοιχα έργα. Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, όπως στην περίπτωση του σχήματος 4.35, από το άθροισμα προκύπτει

$$W = \tau \theta$$

Από την (4.21) παίρνουμε

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου $\frac{dW}{dt}$ είναι η ισχύς P της δύναμης και το $\frac{d\theta}{dt}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος, επομένως

$$P = \tau \omega$$

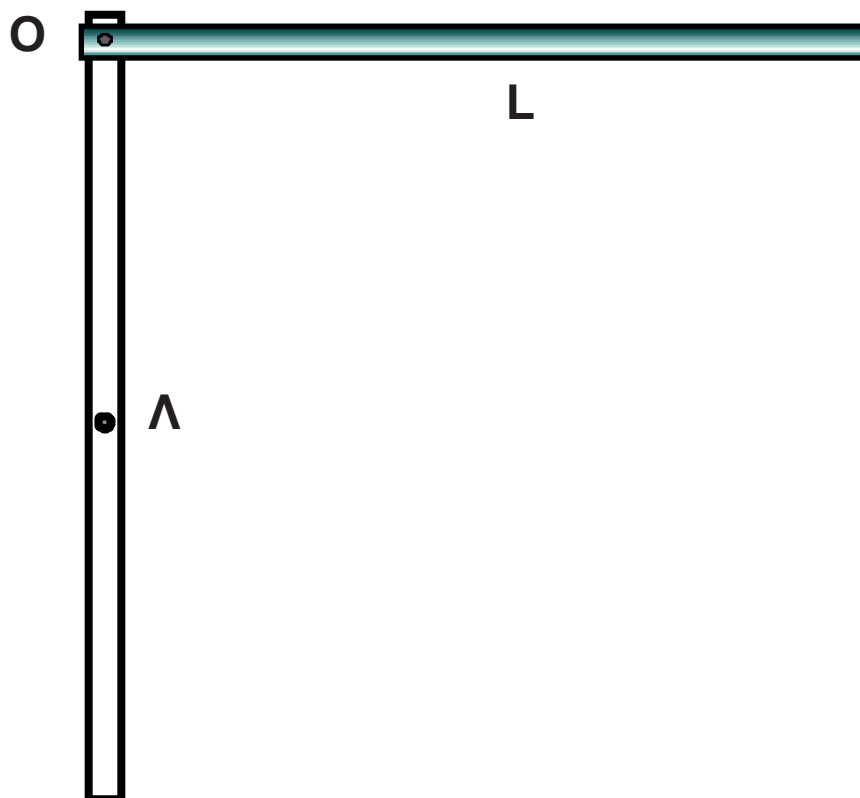
Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Έτσι, στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου – ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\sum W = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.

Παράδειγμα 4.12

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $L=0,3\text{ m}$ και μάζας M , στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα O που διέρχεται από το ένα άκρο της. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητά της τη στιγμή που θα περάσει από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα O είναι $\frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$.



Σχήμα 4-35.

Απάντηση:

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον της

ράβδου Λ όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Το μέσον της ράβδου είναι το κέντρο μάζας της.

Όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση έχει δυναμική ενέργεια $Mg \frac{L}{2}$

Όταν η ράβδος περάσει από την κατακόρυφη θέση, θα έχει κινητική ενέργεια $\frac{1}{2} I \omega^2$, όπου I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα O .

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει

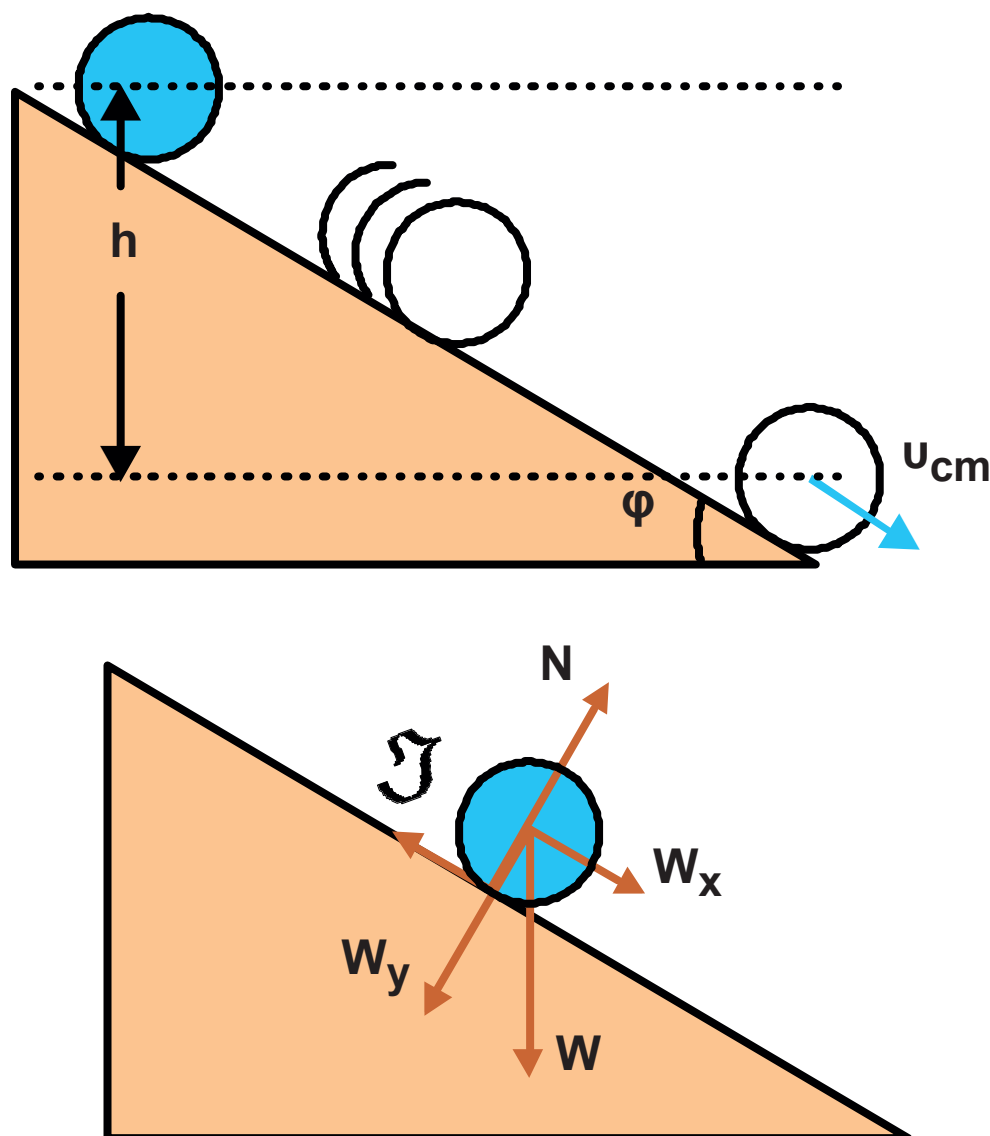
$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{ή} \quad Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} ML^2 \omega^2$$

από όπου $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 10 \text{ rad/s}$

Παράδειγμα 4.13

Ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει κατά μήκος πλάγιου επιπέδου γωνίας ϕ . Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η κατακόρυφη μετατόπισή του είναι h .

Η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) θεωρείται γνωστή. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Σχήμα 4-36.

Απάντηση:

Η κύλιση του κυλίνδρου οφείλεται στην τριβή. Η ροπή της τριβής ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου είναι αυτή που περιστρέφει τον κύλινδρο. Η τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου. Πρόκειται, δηλαδή, για στατική τριβή. Επομένως η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου διατηρείται.

Αν θεωρήσουμε ότι στην κατώτερη θέση του η δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου είναι ίση με μηδέν, στην ανώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει δυναμική ενέργεια Mgh .

Στην κατώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια, που ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς $\left(\frac{1}{2} M u_{cm}^2\right)$ και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής $\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$Mgh = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{ή} \quad Mgh = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$\text{ή} \quad gh = \frac{1}{2} u_{cm}^2 + \frac{1}{4} R^2 \omega^2 \quad (4.22)$$

Όμως η ταχύτητα u_{cm} του κέντρου μάζας είναι

$$u_{cm} = \omega R \quad (4.23)$$

Η (4.22) γίνεται από την (4.23)

$$gh = \frac{1}{2} u_{cm}^2 + \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{u_{cm}}{R} \right)^2$$

$$\text{από όπου } gh = \frac{1}{2} u_{cm}^2 + \frac{1}{4} u_{cm}^2$$

$$\text{και τελικά } u_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}} gh$$

Αντιστοίχιση της Μεταφορικής Κίνησης Στερεού με τη Στροφική Κίνηση

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Θέση x	Γωνία θ
Ταχύτητα $u = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση $a = \frac{du}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων} = \frac{d\omega}{dt}$
Δύναμη F	Ροπή τ

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Μάζα m	Ροπή αδράνειας I
Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής $\Sigma F = ma$	Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης $\Sigma \tau = I\alpha_{γων}$
Ορμή $p = mu$	Στροφορμή $L = I\omega$
Δεύτερος νόμος του Newton $\Sigma F = \frac{dp}{dt}$	Δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$
Διατήρηση της ορμής αν $\Sigma F_{εξ} = 0$ $p = \text{σταθερό}$	Διατήρηση της στροφορμής Αν $\Sigma \tau_{εξ} = 0$ $L = \text{σταθερό}$
Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς $K = \frac{1}{2} m u^2$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

Σύνοψη

Η **γωνιακή επιτάχυνση** είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

$$\alpha_{\text{γων}} = \frac{d\omega}{dt}$$

Ροπή δύναμης F , ως προς άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$\tau = F\ell$$

όπου ℓ η κάθετη απόσταση της δύναμης από τον άξονα περιστροφής, διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα ροπής είναι το **1 Nm**.

Ροπή δύναμης F ως προς σημείο O ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο $\tau = F\ell$ όπου ℓ απόσταση του σημείου από το φορέα της δύναμης, μονάδα το **1 Nm**, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο O και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Για να ισορροπεί ένα ακίνητο στερεό πρέπει

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0$$

Ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα ονομάζεται το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης είναι

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Στροφορμή υλικού σημείου – που κινείται κυκλικά – ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$L = pr \text{ ή } L = mur$$

διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα στροφορμής είναι το $1\text{kg m}^2/\text{s}$.

Στροφορμή στερεού σώματος – που στρέφεται γύρω από άξονα – είναι η συνισταμένη των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το στερεό. Η στροφορμή στερεού είναι ίση με

$$L = I\omega$$

Η στροφορμή ενός συστήματος διατηρείται σταθερή εάν η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα είναι μηδέν.

Ο δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση είναι

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$$

Η κινητική ενέργεια στερεού λόγω περιστροφής είναι

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Το έργο μιας σταθερής ροπής κατά τη στροφή ενός στερεού κατά γωνία θ είναι

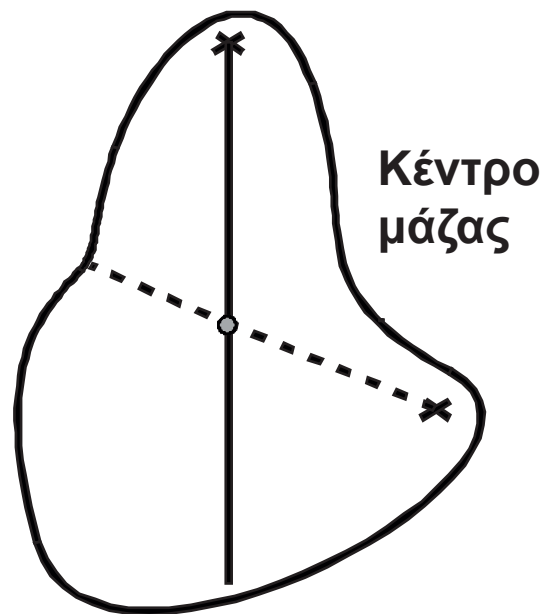
$$W = \tau \theta$$

Η ισχύς μιας ροπής είναι $P = \tau \omega$

Το θεώρημα έργου ενέργειας στη στροφική κίνηση γράφεται

$$\Sigma W = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

Δραστηριότητες



Σχήμα 4-37.

1. Βρείτε το κέντρο μάζας ενός σώματος δύο διαστάσεων.

Κόψτε ένα χαρτόνι που δεν έχει γεωμετρικό σχήμα και αναρτήστε το από ένα σημείο του. Όταν ισορροπήσει το χαρτόνι χαράξτε πάνω του την κατακόρυφη που περνάει από το σημείο ανάρτησης. Επειδή το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών πρέπει να είναι μηδέν, το κέντρο

μάζας του χαρτονιού θα βρίσκεται σ' αυτή την κατακόρυφη. Στη συνέχεια κρεμάστε το σώμα από ένα δεύτερο σημείο και επαναλάβετε τα ίδια. Το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο τομής των δύο γραμμών.

2. Κατασκευάστε μια ζυγαριά.

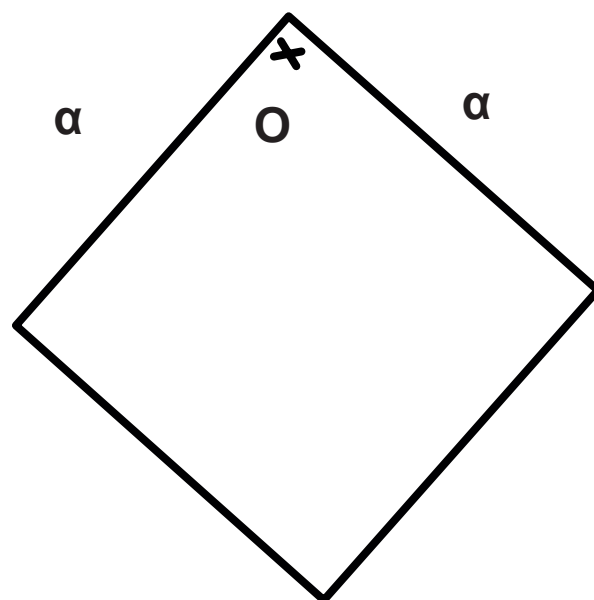
Κόψτε ένα χαρτόνι σε σχήμα τετραγώνου. Κρεμάστε το σε ένα καρφί που περνάει από το σημείο **O** **σχήμα 4.38α**, ώστε να μπορεί να στρέφεται ελεύθερα. Στο ίδιο καρφί κρεμάστε και ένα ευθύγραμμο σύρμα που θα δείχνει τη διεύθυνση της κατακόρυφης. Στερεώστε στο ένα άκρο του χαρτονιού ένα αντίβαρο γνωστής μάζας (**M**) και στο άλλο ένα συνδετήρα ώστε να μπορείτε να κρεμάσετε μικρά αντικείμενα (**σχ. 4.38β**). Σημειώστε πάνω στο χαρτόνι την κατακόρυφη όπως ορίζεται από το σύρμα. Ξεκρεμάστε το χαρτόνι και με ένα μοιρογνωμόνιο χαράξτε πάνω του κλίμακα για τη μέτρηση γωνιών. Το μηδέν της κλίμακας να αντιστοιχεί στη γραμμή που χαράξατε με βάση το σύρμα. Στερεώστε πάλι το χαρτόνι. Αν από το συνδετήρα κρεμάσετε ένα μικρό αντικείμενο άγνωστης μάζας μπορείτε να υπολογίσετε τη μάζα του.

Στη θέση ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το **O** είναι μηδέν.

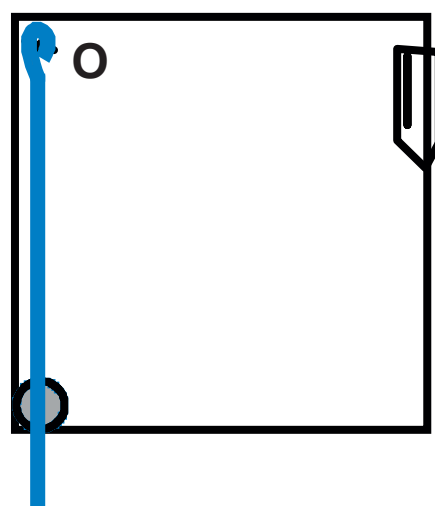
$$Mgx - mgd = 0 \quad \text{ή} \quad Mg \alpha \eta \mu \theta - mg \alpha \sigma \upsilon \nu \theta = 0$$

οπότε $m = M \epsilon \varphi \theta$

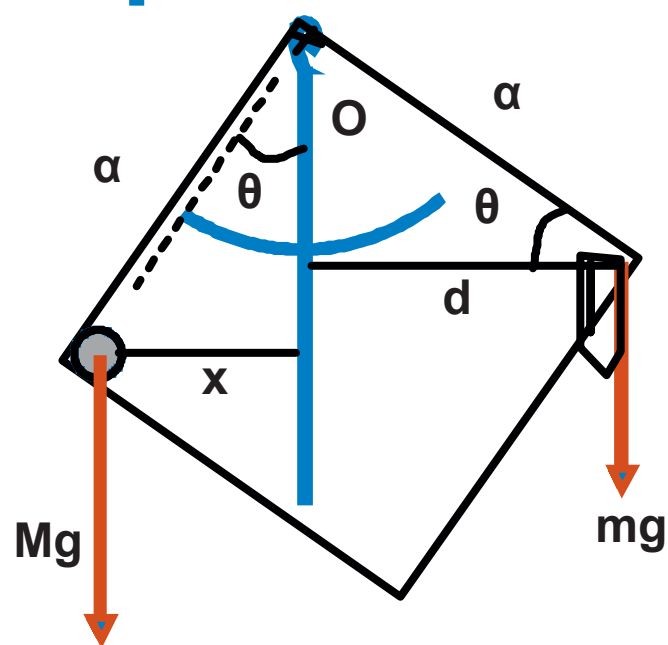
Με την προϋπόθεση ότι η μάζα του χαρτονιού είναι μικρή, αν γνωρίζουμε τη μάζα **M** και μετρήσουμε τη γωνία κατά την οποία στρέφεται το χαρτόνι μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα **m**.



(α)



(β)



(γ)

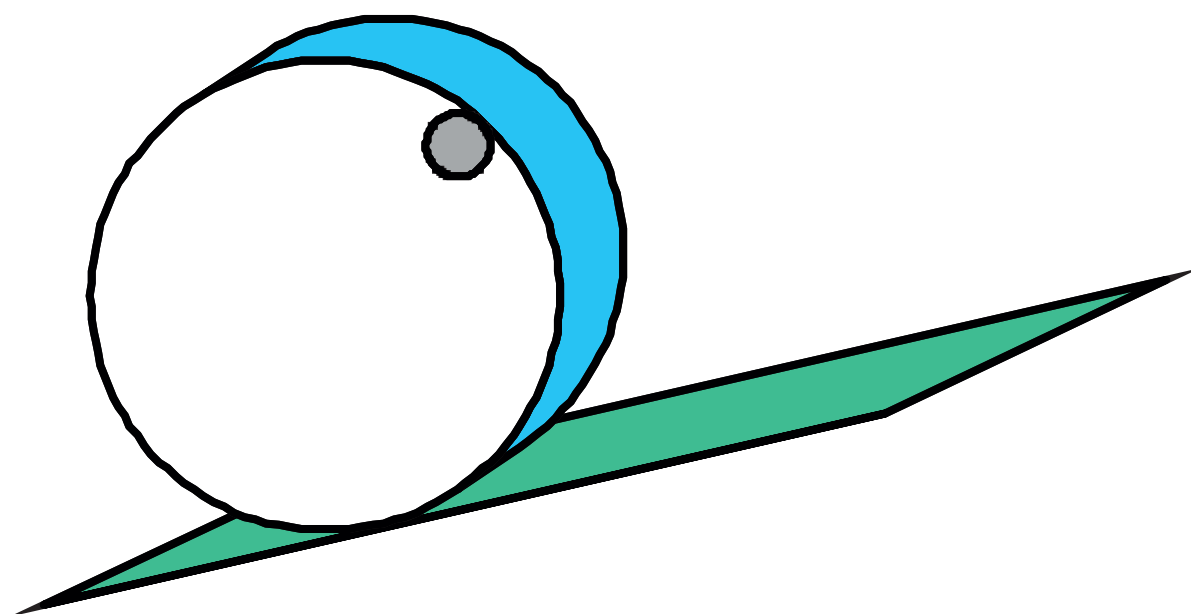
Σχήμα 4-38.

3. Ένας κύλινδρος που «αψηφά» τη βαρύτητα.

Κολλήστε στο εσωτερικό ενός κυλινδρικού κουτιού μεγάλης διαμέτρου μια μικρή μεταλλική ράβδο, παράλληλα με τον άξονα του κουτιού. Αφού σημειώσετε τη θέση της στο εξωτερικό μέρος του κλείστε το κουτί.

Μπορείτε να κάνετε τους φίλους σας να τα χάσουν, νομίζοντας ότι το κουτί δεν ακολουθεί τους γνωστούς νόμους της φύσης:

Τοποθετήστε τον κύλινδρο σε πλάγιο επίπεδο με μικρή κλίση, όπως δείχνει το σχήμα και αφήστε τον ελεύθερο. Για λίγο ο κύλινδρος πηγαίνει προς τα επάνω. Πώς εξηγείται αυτό;

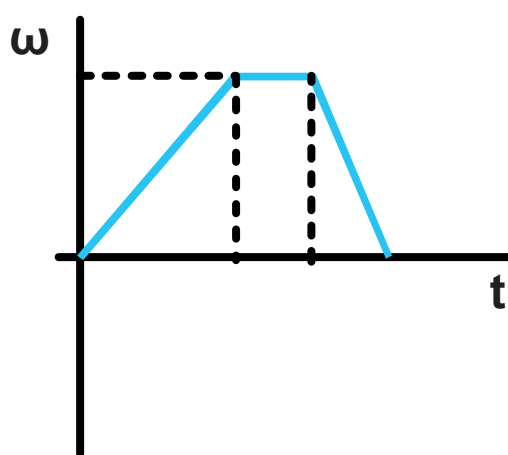


Σχήμα 4-39.

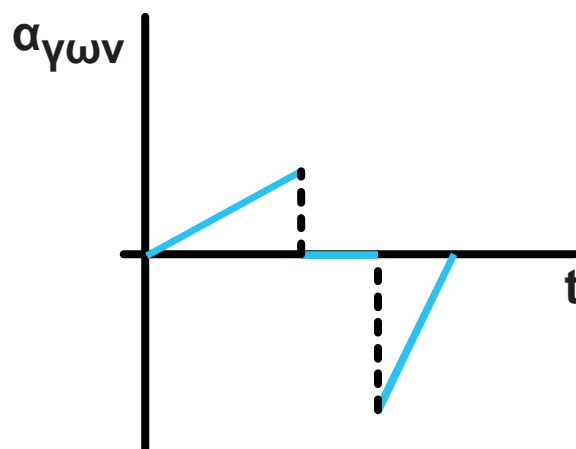
Ερωτήσεις

Κινηματική της περιστροφής

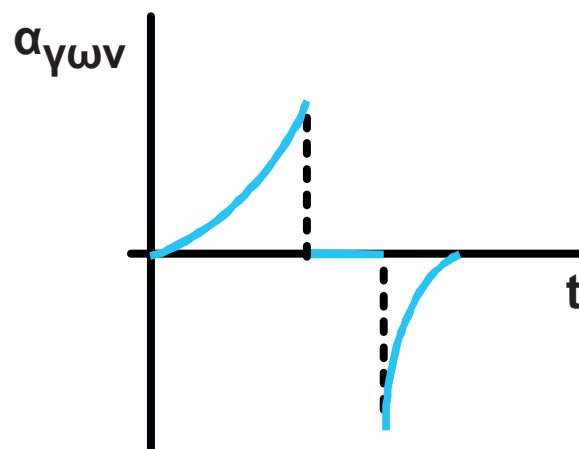
- 4.1 Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ενός τροχού μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο σχ. 4.40α Ποιο από τα διαγράμματα β, γ, δ, ε παριστάνει τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο;



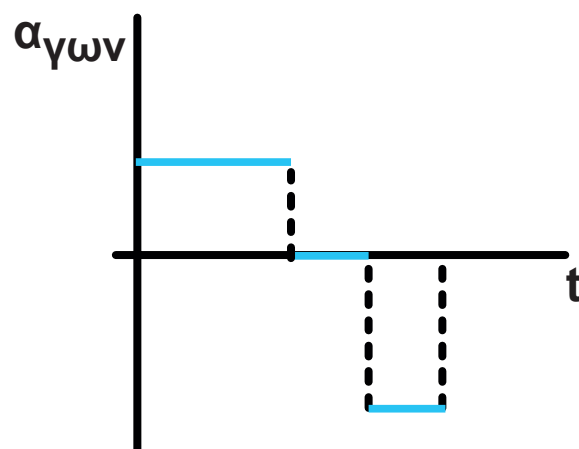
(α)



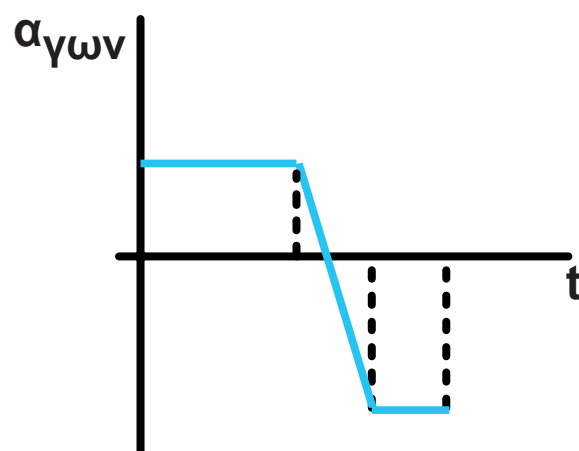
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

Σχήμα 4-40.

4.2 Ένα σώμα κάνει ομαλή στροφική κίνηση. Ποια είναι η γωνιακή του επιτάχυνση;

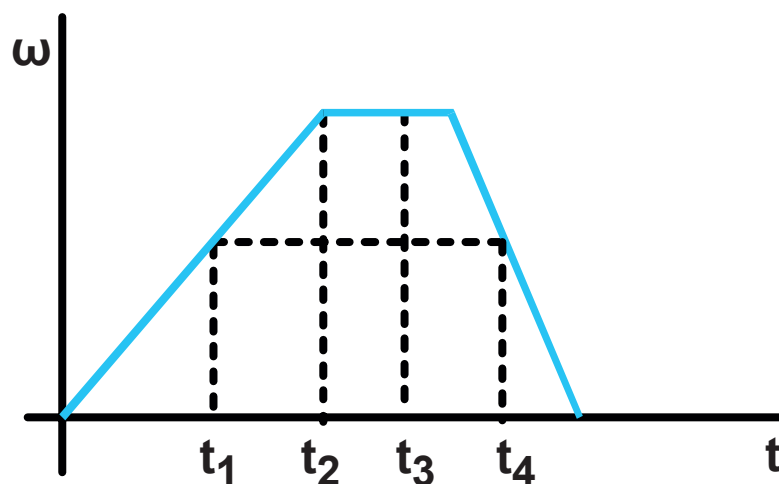
4.3 Ένας δίσκος στέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο παριστάνεται στο διάγραμμα του [σχήματος 4.41](#). Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστή;

α) Η γωνιακή επιτάχυνση το χρονικό διάστημα $t_1 - t_2$ αυξάνεται.

β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_4 είναι μικρότερο απ' ό,τι τη χρονική στιγμή t_1 .

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση που έχει τη χρονική στιγμή t_4 .

δ) Τη χρονική στιγμή t_3 η γωνιακή επιτάχυνση έχει μέτρο μεγαλύτερο απ' ό,τι τη χρονική στιγμή t_1 .



Σχήμα 4-41.

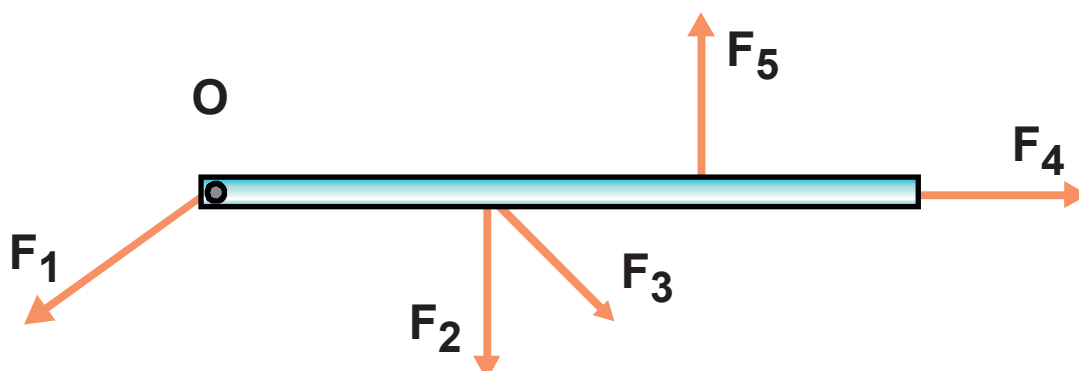
- 4.4** Ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Θεωρήστε δύο στοιχειώδεις μάζες του σώματος σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής. Ποια από τα μεγέθη α) γραμμική ταχύτητα β) γωνιακή ταχύτητα γ) γωνιακή επιτάχυνση και δ) κεντρομόλος επιτάχυνση, έχουν την ίδια τιμή για τις δύο μάζες;
- 4.5** Είναι δυνατό ένα σώμα να έχει, μια χρονική στιγμή, γωνιακή ταχύτητα μηδέν και γωνιακή επιτάχυνση διαφορετική από μηδέν;
- 4.6** Ένα στερεό κάνει σύνθετη κίνηση. Υπάρχει κάποιο σημείο του στερεού, έξω από τον άξονα περιστροφής του, που έχει πάντα την ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ροπή – ισορροπία στερεού

- 4.7** Συμπληρώστε τα κενά:
 Η ροπή δύναμης ως προς σημείο έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί.....
, διεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από
 και φορά που ορίζεται από

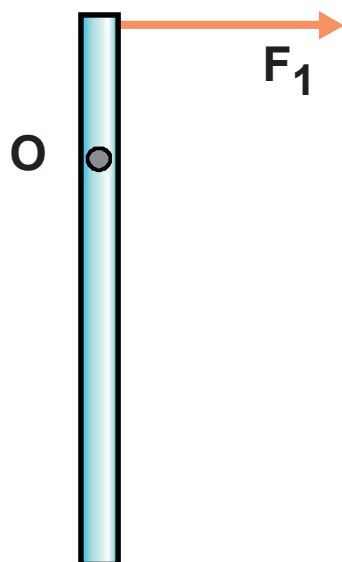
- 4.8** Τα λεωφορεία και τα μεγάλα φορτηγά έχουν τιμόνι μεγάλης διαμέτρου. Τι εξυπηρετεί αυτό;
- 4.9** Στη ράβδο του σχήματος 4.42 ασκούνται πέντε ομοεπίπεδες δυνάμεις του ίδιου μέτρου. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο

επίπεδο των δυνάμεων. Να κατατάξετε τις δυνάμεις κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα αυτόν αυξάνεται.



Σχήμα 4-42.

- 4.10** Η ράβδος του [σχήματος 4.43](#) είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο O . Στο ένα άκρο της ράβδου ασκείται η οριζόντια δύναμη F_1 . Για να μη στρέφεται η ράβδος ασκούμε οριζόντια δύναμη F_2 στο άλλο άκρο της.
- α) Ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνση της F_2 ;
β) Συγκρίνετε τα μέτρα των F_1 και F_2 .



Σχήμα 4-43.

- 4.11 Στο **σχήμα 4.44** φαίνεται μια οριζόντια ράβδος που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο **O**. Στα δύο άκρα της ράβδου ασκούνται οι οριζόντιες δυνάμεις **F₁** και **F₂** κάθετες σε αυτήν. Η ράβδος παραμένει ακίνητη. Η απόσταση της δύναμης **F₁** από τον άξονα περιστροφής είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της ράβδου. Το μέτρο της δύναμης **F₂** είναι



Σχήμα 4-44.

α) $\frac{F_1}{2}$

β) $\frac{2F_1}{3}$

γ) $\frac{F_1}{3}$

δ) $2F_1$

ε) $\frac{3F_1}{2}$

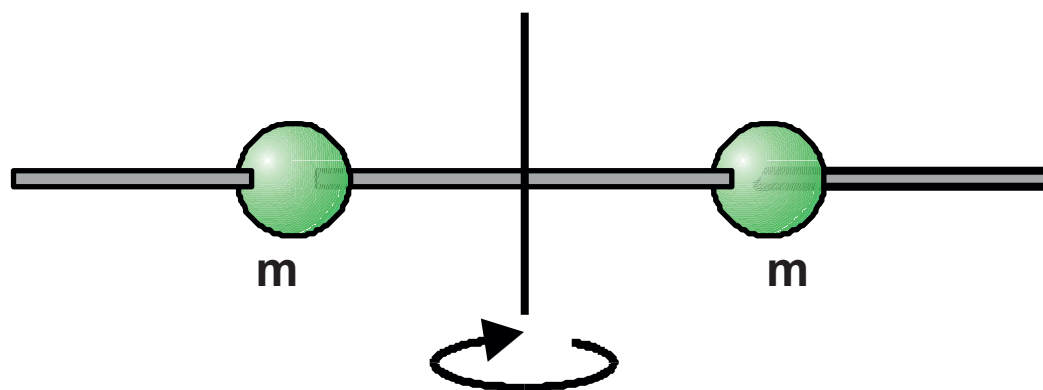
στ) $3F_1$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Ροπή αδράνειας

4.12 Η ράβδος του [σχήματος 4.45](#) είναι αβαρής και οι μάζες m απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής. Αν η απόσταση των μαζών από τον άξονα περιστροφής διπλασιαστεί, η ροπή αδράνειας του συστήματος

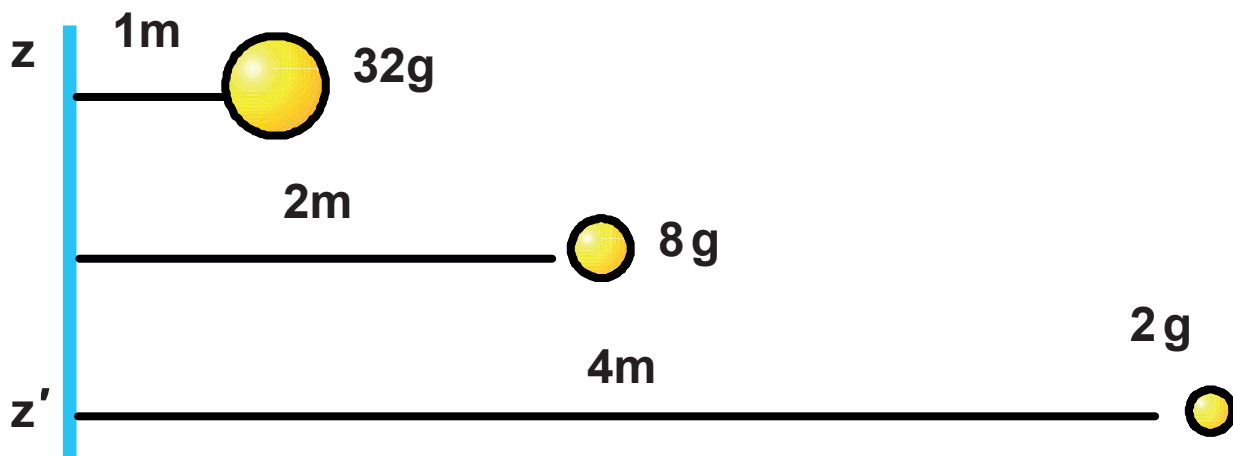
- α) παραμένει ίδια.
- β) διπλασιάζεται.
- γ) τριπλασιάζεται.
- δ) τετραπλασιάζεται.



Σχήμα 4-45.

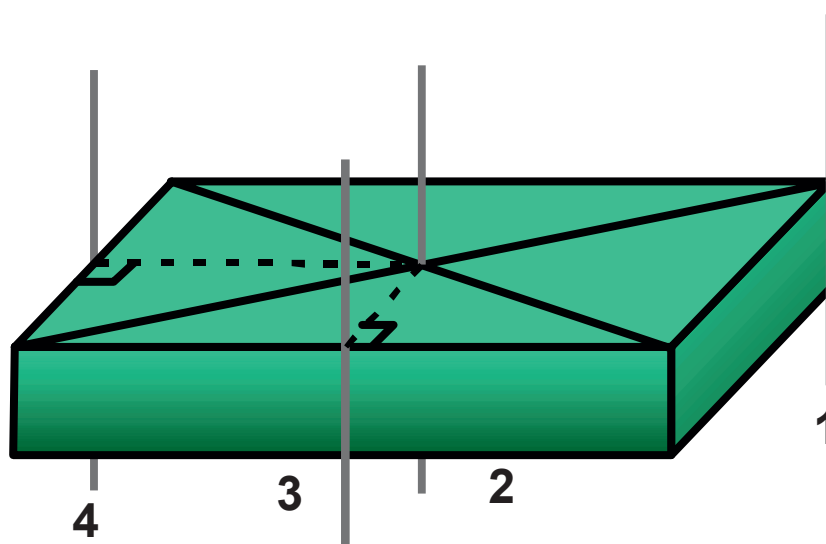
4.13 Ένας τροχός αυτοκινήτου και ένας τροχός ποδηλάτου περιστρέφονται, χωρίς τριβές, γύρω από τον άξονά τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Ποιος από τους δύο τροχούς ακινητοποιείται πιο εύκολα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4.14 Στο [σχήμα 4.46](#) φαίνονται τρία υλικά σημεία που περιστρέφονται γύρω από τον άξονα $z'z$. Η μάζα και η απόσταση καθενός από τον άξονα περιστροφής φαίνονται στο σχήμα. Να συγκρίνετε τις ροπές αδράνειάς τους ως προς τον άξονα $z'z$.



Σχήμα 4-46.

- 4.15** Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι μικρότερη από τη ροπή αδράνειάς του ως προς οποιονδήποτε άλλο άξονα που είναι παράλληλος σ' αυτόν. Πώς προκύπτει αυτό;
- 4.16** Γράψτε με αύξουσα σειρά τις ροπές αδράνειας I_1 , I_2 , I_3 και I_4 του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ως προς τους παράλληλους άξονες 1, 2, 3 και 4 (σχ. 4.47)



Σχήμα 4-47.

Θεμελιώδης νόμος της περιστροφής

4.17 Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι

α) ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.

β) ανάλογη με τη μάζα του σώματος.

γ) ανάλογη με τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.

δ) ανάλογη με τη ροπή που ασκείται στο σώμα.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

4.18 Στο [σχήμα 4.48](#) βλέπουμε την τομή μιας πόρτας με το οριζόντιο επίπεδο. Η πόρτα αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά. Το υλικό 1 έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το υλικό 2. Τα δύο υλικά καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο. Από ποια μεριά πρέπει να τοποθετηθούν οι μεντεσέδες ώστε η πόρτα να ανοίγει και να κλείνει πιο εύκολα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



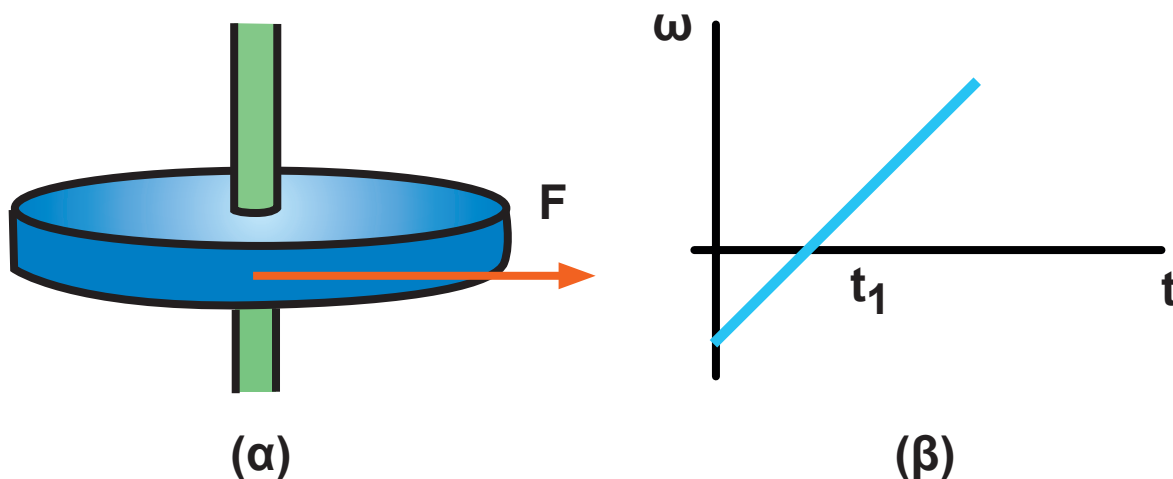
Σχήμα 4-48.

4.19 Ο οριζόντιος δίσκος του [σχήματος 4.49α](#) μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Στο δίσκο ασκείται οριζόντια δύναμη **F** που

εφάπτεται στο δίσκο. Η δύναμη F μεταβάλλει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου όπως φαίνεται στο **διάγραμμα 4.49β**.

Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;

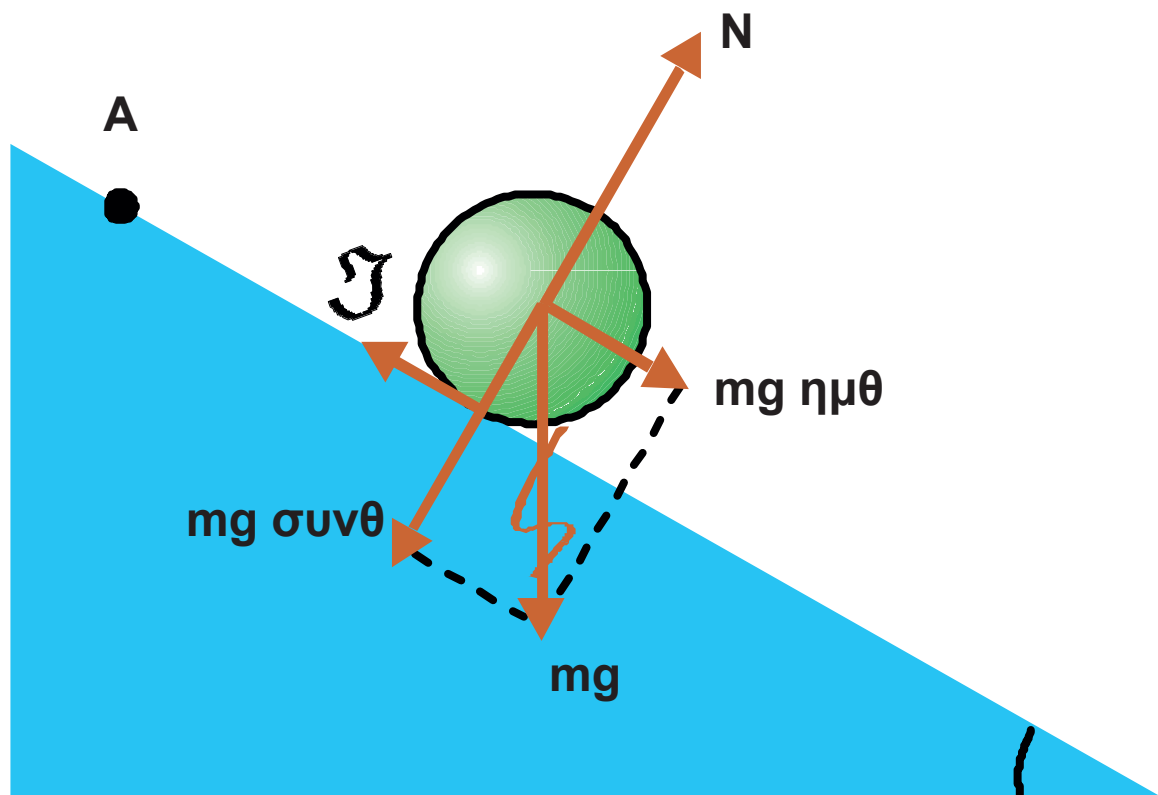
- α) Η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή.
- β) Τη χρονική στιγμή t_1 που η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδέν, η δύναμη F είναι μηδέν.
- γ) Η ροπή της δύναμης αυξάνεται με το χρόνο.
- δ) Η δύναμη F έχει σταθερό μέτρο.



Σχήμα 4-49.

4.20 Μια σφαίρα αφήνεται στο σημείο **A** πλάγιου επιπέδου και κυλίεται χωρίς ολίσθηση προς τη βάση του (σχ. 4.50). Κατά την κίνησή της αυξάνεται τόσο η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής όσο και η ταχύτητα του κέντρου μάζας της, επομένως η σφαίρα αποκτά και γωνιακή και γραμμική επιτάχυνση. Ποιες δυνάμεις είναι υπεύθυνες

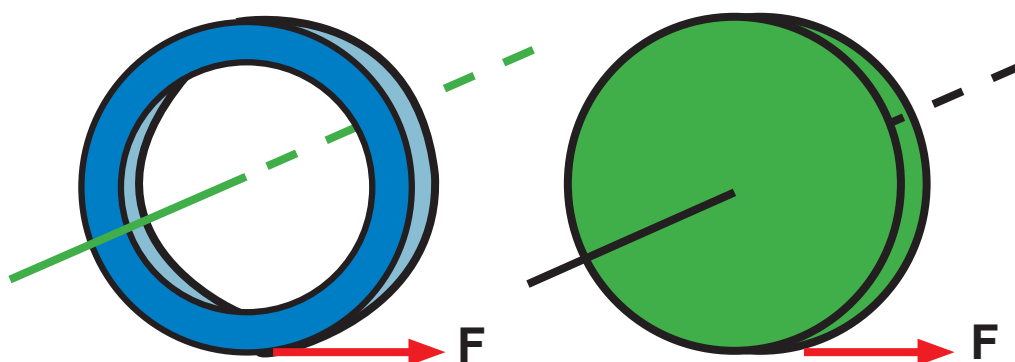
- α) για το ότι η σφαίρα δεν ολισθαίνει.
- β) για τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας.
- γ) για τη γραμμική επιτάχυνσή της.



Σχήμα 4-50.

Στροφορμή διατήρησης της στροφορμής

- 4.21 Ένα αυτοκίνητο κινείται προς το Βορρά, σε οριζόντιο δρόμο. Ποια είναι η κατεύθυνση της στροφορμής των τροχών του;
- 4.22 Το **σχήμα 4.51** δείχνει ένα συμπαγή κυκλικό δίσκο και ένα κυκλικό δακτύλιο που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα και μπορούν να στρέφονται γύρω από οριζόντιο άξονα. Τη στιγμή μηδέν, που τα δύο σώματα είναι ακίνητα, ασκούνται σ' αυτά δυνάμεις του ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρειά τους. Να συγκρίνετε τις στροφορμές τους τη χρονική στιγμή t .



Σχήμα 4-51.

- 4.23 Η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων δε μεταβάλλεται όταν
- α) η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν.
 - β) τα σώματα κάνουν μόνο περιστροφική κίνηση.
 - γ) οι άξονες περιστροφής των σωμάτων είναι σταθεροί.
 - δ) το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.
- Επιλέξτε το σωστό.

- 4.24** Ένας καλλιτέχνης του πατινάζ περιστρέφεται. Στην αρχή ο καλλιτέχνης έχει τα χέρια απλωμένα και στη συνέχεια τα συμπτύσσει. Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστή;
- α) Η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του αυξάνεται.
 - β) Η στροφορμή του αυξάνεται.
 - γ) Η συχνότητα περιστροφής του αυξάνεται.
 - δ) Ο καλλιτέχνης παύει να περιστρέφεται.
- 4.25** Αν έλιωναν οι πολικοί πάγοι, θα ανέβαινε λίγο η στάθμη της θάλασσας. Τι επίπτωση θα είχε αυτό στη συχνότητα περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- 4.26** Ένα παιδί κάθεται σε κάθισμα το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Στα χέρια του κρατάει κατακόρυφα τον άξονα ενός τροχού ποδηλάτου. Ο τροχός στρέφεται. Αρχικά το παιδί και το κάθισμα είναι ακίνητα. Τι θα συμβεί, αν το παιδί στρέψει τον άξονα κατά 180° ; Εάν πραγματοποιούσατε το πείραμα, θα διαπιστώνατε ότι η δύναμη που απαιτείται για να γυρίσει ανάποδα ο τροχός, όταν στρέφεται, είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δύναμη που θα χρειαζόταν αν ήταν ακίνητος. Πώς το εξηγείτε;
- 4.27** Ο οριζόντιος δίσκος 1 (σχ. 4.52) στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Πάνω στο δίσκο αφήνονται να πέσουν οι δίσκοι 2 και 3 οι οποίοι είναι όμοιοι με τον 1. Η γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα περιστρέφεται το σύστημα θα είναι:

α) ω ,

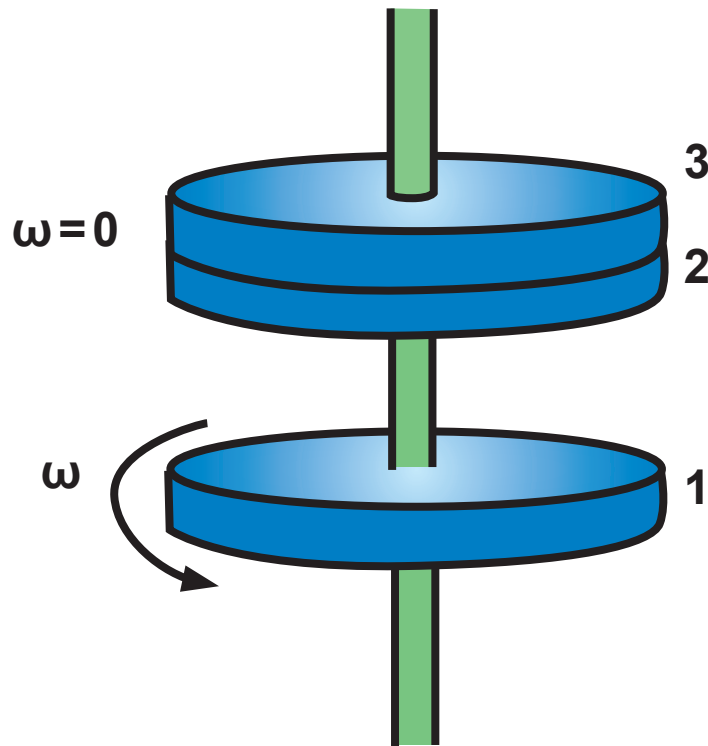
β) 2ω ,

γ) 3ω ,

δ) $\frac{\omega}{2}$,

ε) $\frac{\omega}{3}$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.



Σχήμα 4-52.

Έργο και ενέργεια κατά την περιστροφή

4.28 Ένας κύβος από πάγο και μία σφαίρα αφήνονται από το ίδιο ύψος σε πλάγιο επίπεδο. Η σφαίρα κυλίεται κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου ενώ ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβή. Οι μάζες των δύο σωμάτων είναι ίσες και οι διαστάσεις τους μικρές σε σχέση με το ύψος από το οποίο αφέθηκαν να κινηθούν. Να συγκρίνετε

1. Το έργο του βάρους κατά την κίνηση των δύο σωμάτων.
2. Την ταχύτητα με την οποία τα σώματα φτάνουν στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

4.29 Σε τροχό ο οποίος στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκείται δύναμη F που μεταβάλλει τη γωνιακή του ταχύτητα:

- α) από 1 rad/s σε 3 rad/s .
- β) από 4 rad/s σε 6 rad/s .
- γ) από -2 rad/s σε 5 rad/s .
- δ) από -3 rad/s σε 4 rad/s .

Σε ποια περίπτωση το έργο της δύναμης είναι μεγαλύτερο;

- 4.30** Σώμα που αφήνεται από το σημείο **A** πλάγιου επιπέδου κυλίεται μέχρι το σημείο **Γ**, που βρίσκεται στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Το σημείο **B** είναι ένα ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής του σώματος. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

	Δυναμική ενέργεια	Κινητική ενέργεια από τη μεταφορική κίνηση	Κινητική ενέργεια από την περιστροφική κίνηση
A	120 J		
B		40 J	20 J
Γ	0	80 J	

- 4.31** Συμπληρώστε τον πίνακα:

Σύμβολο	Όνομα	Μέγεθος ¹	Μονάδα στο SI
	Γωνιακή Ταχύτητα		rad/s ²
		διανυσματικό	N m
I			
L			

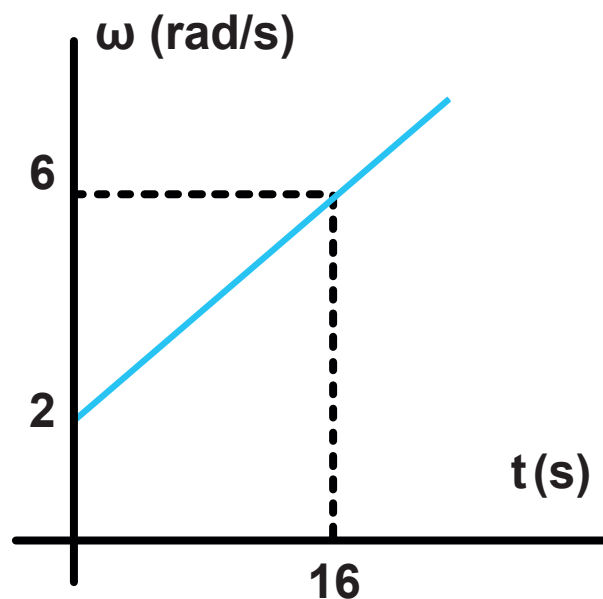
¹ Γράψτε μία από τις λέξεις μονόμετρο ή διανυσματικό.

Ασκήσεις

Κινηματική του στερεού

4.32 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού που στρέφεται μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του **σχήματος 4.53**. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού; Ποια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του τροχού θα έχει τιμή **20 rad/s**;

[Απ: $0,25 \text{ rad/s}^2$, 72 s]



Σχήμα 4-53.

4.33 Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα **20 m/s** . Οι τροχοί του έχουν ακτίνα **40 cm** . Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία στρέφονται.

[Απ: 50 rad/s]

4.34 Ένα όχημα, οι τροχοί του οποίου έχουν ακτίνα $r = 40 \text{ cm}$, κινείται με επιτάχυνση 2 m/s^2 . Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα των τροχών του;

[Απ: 5 rad/s^2]

4.35 Ένας δίσκος ακτίνας 8 cm κυλίεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου του δίσκου είναι 5 m/s . Υπολογίστε:

α) την ταχύτητα με την οποία κινείται το ανώτερο σημείο του δίσκου.

β) τη συχνότητα με την οποία στρέφεται.

[Απ: 10 m/s , $9,9 \text{ Hz}$]

4.36 Τη χρονική στιγμή μηδέν το κέντρο ενός τροχού, ακτίνας $R = 20 \text{ cm}$, που κυλίεται, έχει ταχύτητα $u_0 = 8 \text{ m/s}$. Η ταχύτητα του τροχού μηδενίζεται αφού διανύσει απόσταση $x = 20 \text{ m}$.

Ποια είναι η γωνιακή επιβράδυνσή του, αν θεωρήσουμε ότι είναι σταθερή στη διάρκεια της κίνησης;

[Απ: 8 rad/s^2]

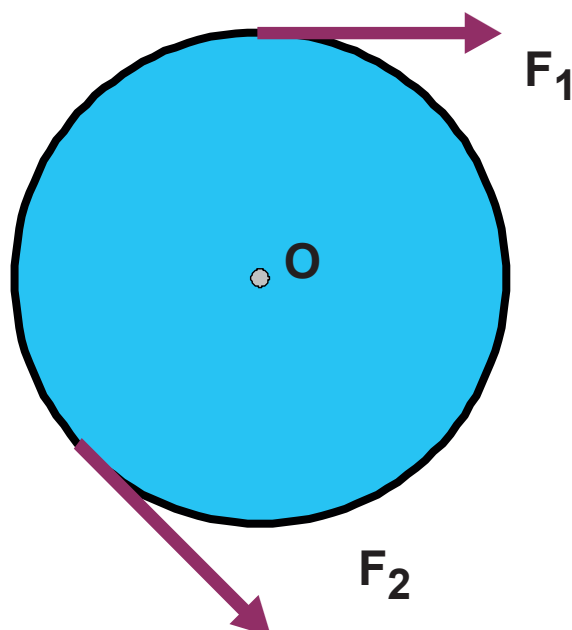
Ροπή δύναμης

- 4.37 Ένας εργάτης, για να σφίξει μια βίδα, χρησιμοποιεί κλειδί μήκους **20 cm**. Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκήσει ο εργάτης είναι **200 N**. Ποια είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκήσει; Πώς πρέπει να ασκηθεί η δύναμη ώστε η ροπή να είναι μέγιστη;

[Απ: 40 Nm]

- 4.38 Ο τροχός του **σχήματος 4.54** έχει ακτίνα **$R=0,5\text{ m}$** και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του **O** και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στον τροχό ασκούνται εφαπτομενικά οι δυνάμεις **$F_1 = 20\text{ N}$** και **$F_2 = 30\text{ N}$** . Ποια είναι η συνολική ροπή που δέχεται ο τροχός;

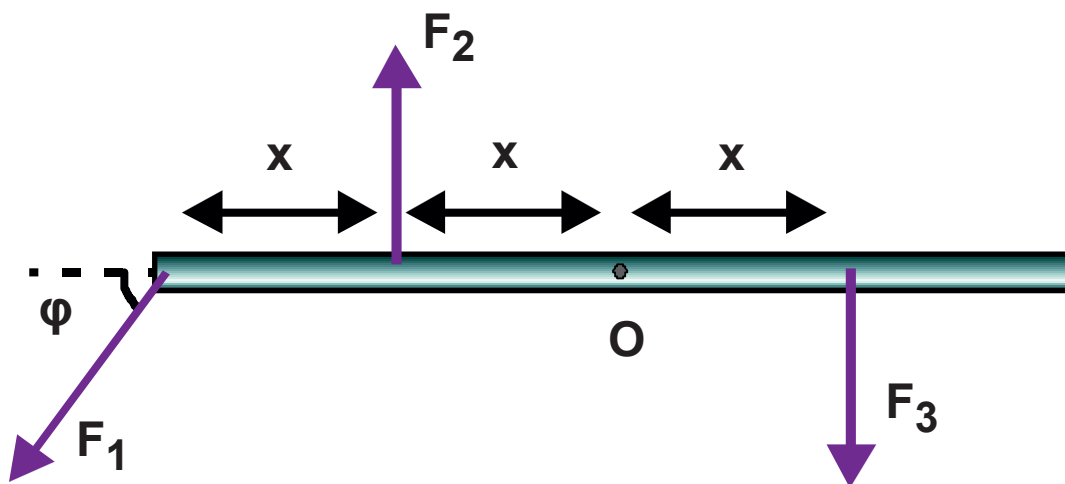
[Απ: 5 Nm]



Σχήμα 4-54.

- 4.39** Η ράβδος του **σχήματος 4.55** έχει αμελητέο βάρος και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο **O** και είναι κάθετος σ' αυτή. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις **$F_1=20\text{N}$** , **$F_2=2\text{N}$** και **$F_3=10\text{N}$** . Να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το σημείο **O**. Δίνονται: **$x=2\text{m}$** και **$\varphi=30^\circ$** .

[Απ: **16Nm**]



Σχήμα 4-55.

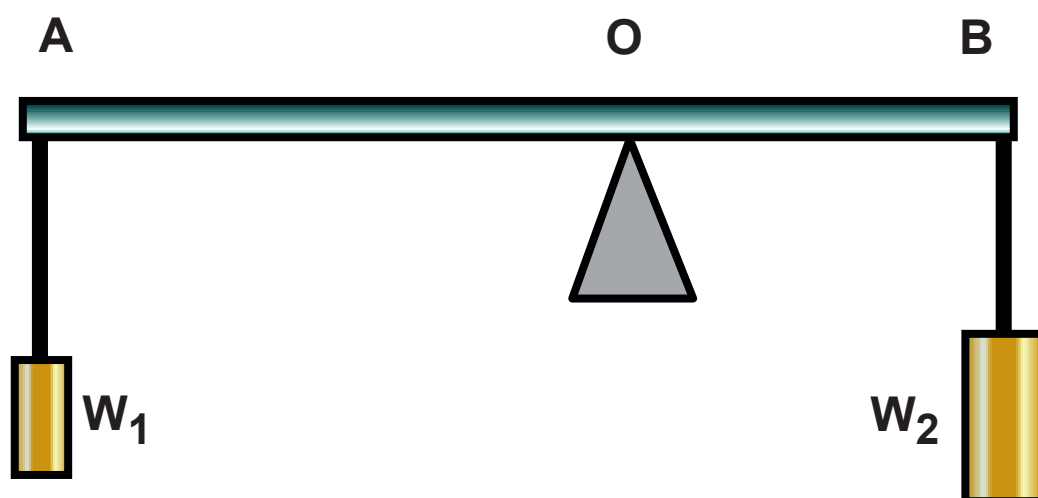
Ισορροπία στερεού σώματος

4.40 Το βαρούλκο ενός πηγαδιού αποτελείται από τύμπανο ακτίνας $R_1 = 20 \text{ cm}$, στο οποίο είναι προσαρμοσμένη χειρολαβή, μήκους $R_2 = 0,5 \text{ m}$. Όταν στρέφεται η χειρολαβή, το σκοινί τυλίγεται στο τύμπανο και έλκει φορτίο (κουβάς με νερό) βάρους 150 N . Να υπολογίσετε την ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στη χειρολαβή ώστε να ανεβαίνει το φορτίο.

[Απ: 60 N]

4.41 Από τα άκρα **A** και **B** αβαρούς ράβδου, μήκους $l = 2 \text{ m}$, κρέμονται με σκοινιά δύο βάρη $w_1 = 200 \text{ N}$ και $w_2 = 300 \text{ N}$ (σχ. 4.56). Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχτεί η ράβδος για να ισορροπεί οριζόντια;

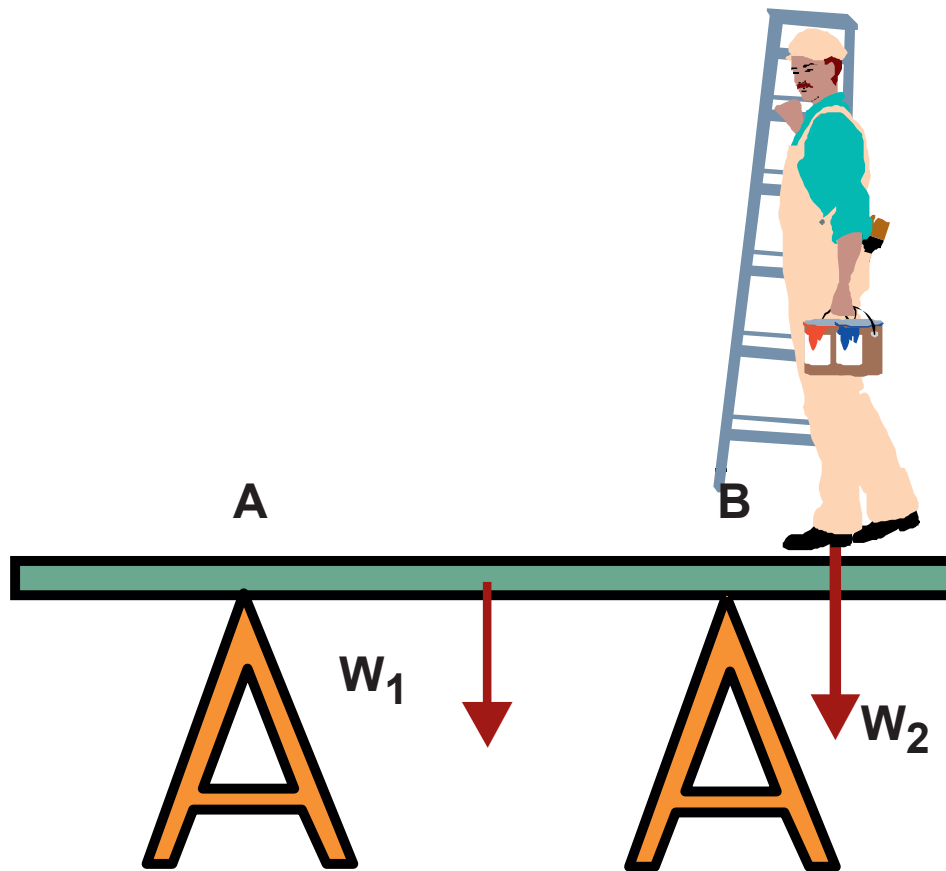
[Απ: $1,2 \text{ m}$ από το άκρο A]



Σχήμα 4-56.

4.42 Ο ελαιοχρωματιστής του **σχήματος 4.57** στέκεται πάνω σε δοκό μήκους $l=4\text{ m}$ και βάρους $w_1 = 150\text{ N}$. Η δοκός στηρίζεται στα σημεία **A** και **B** που απέχουν το καθένα 1 m , από τα άκρα της. Το βάρος του ελαιοχρωματιστή είναι $w_2=700\text{ N}$. Σε πόση απόσταση από τις άκρες μπορεί να σταθεί ο ελαιοχρωματιστής χωρίς να ανατραπεί η δοκός;

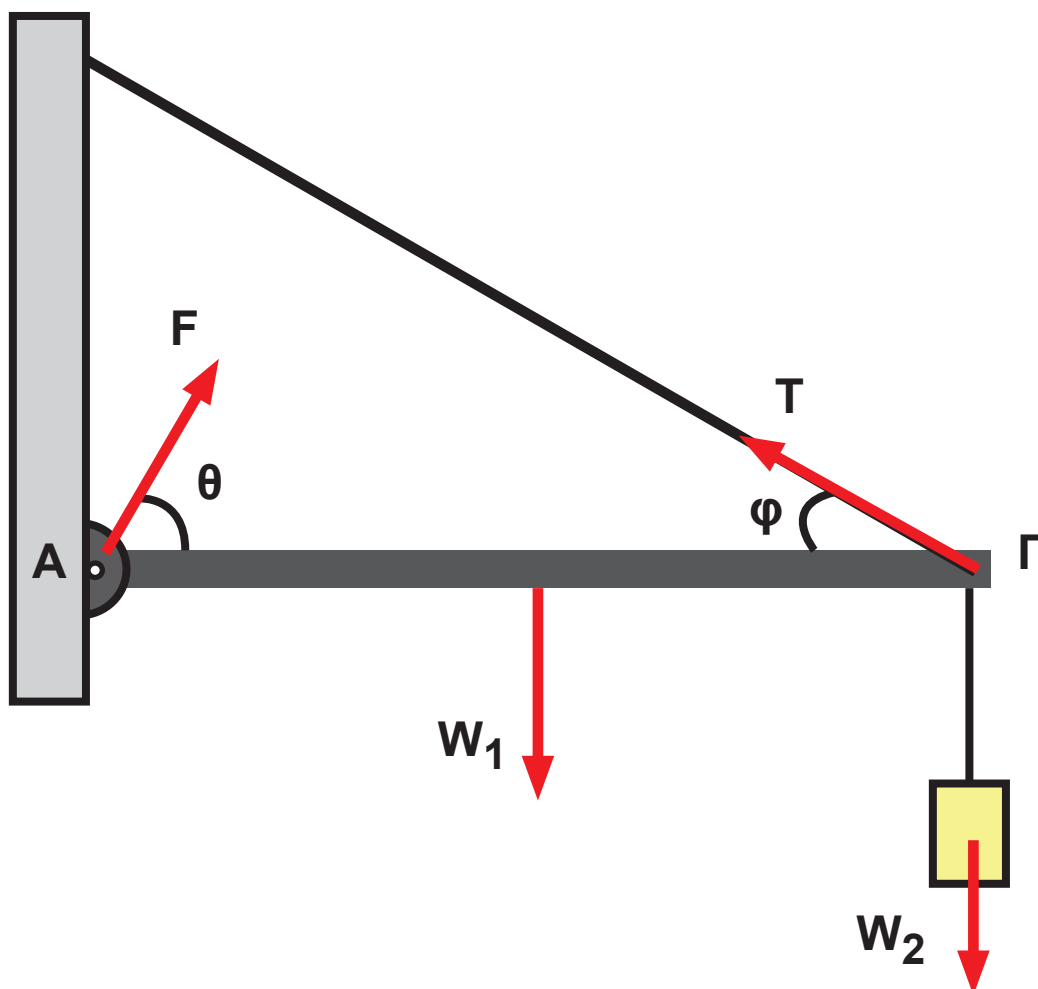
[Απ: 79cm]



Σχήμα 4-57.

4.43 Ομογενής δοκός $ΑΓ$ με μήκος l και βάρος $w_1 = 100\text{ N}$ ισορροπεί οριζόντια (σχ. 4.58). Το άκρο A της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της $Γ$ συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη δοκό. Στο άκρο $Γ$ κρέμεται με σκοινί σώμα βάρους $w_2 = 40\text{ N}$. Υπολογίστε την τάση του σκοινιού και τη δύναμη που δέχεται η δοκός από τον τοίχο.

[Απ: $T = 180\text{ N}$, $F = 163,7\text{ N}$, $\varepsilon\varphi\theta = 0,32$]

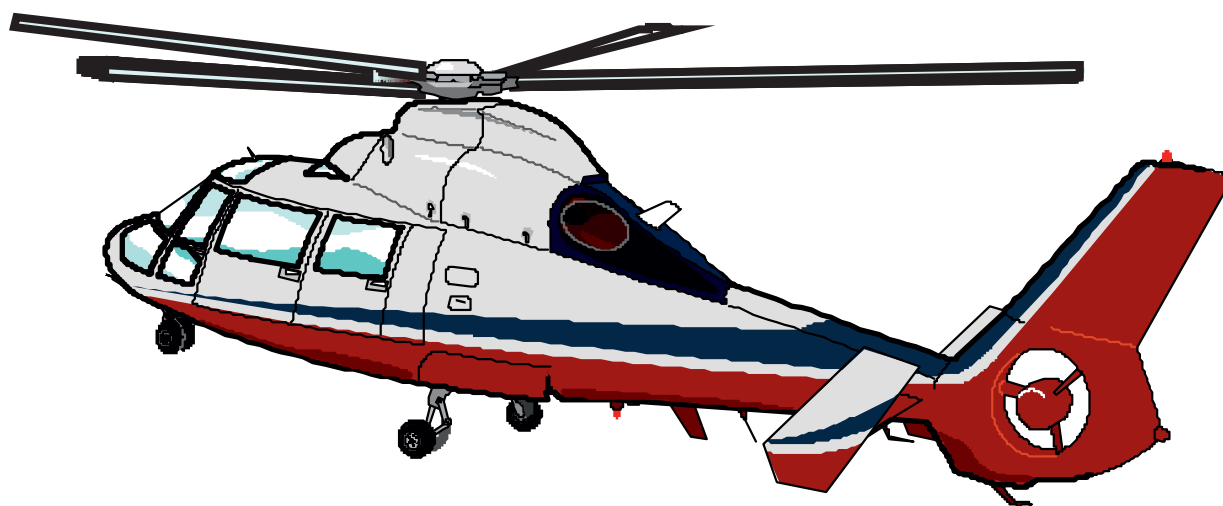


Σχήμα 4-58.

Ροπή αδράνειας και θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

4.44 Καθένα από τα τέσσερα πτερύγια του έλικα του ελικοπτήρου (σχ. 4.59) μπορεί να θεωρηθεί ομογενής ράβδος. Το μήκος κάθε πτερυγίου είναι **6 m** και η μάζα του **100 kg**. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας των τεσσάρων πτερυγίων ως προς τον άξονα περιστροφής τους. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μήκους **L**, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ' αυτή, είναι $I = \frac{1}{12} ML^2$

[Απ: **4800 kg m²**]



Σχήμα 4-59.

4.45 Στην περιφέρεια ενός τροχού, μάζας $M=2\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{ m}$, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega=100\text{ rad/s}$ γύρω από τον άξονά του ασκείται σταθερή δύναμη F , εφαπτομενική στον τροχό. Ο τροχός σταματάει μετά από 5 s . Να υπολογίσετε:

α) τη γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) του τροχού.

β) το μέτρο της δύναμης F .

Η ροπή αδράνειας του τροχού είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

[Απ: 20 rad/s^2 10 N]

4.46 Οριζόντια ομογενής ράβδος, μήκους $L=1\text{ m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της (σχ. 4.60). Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, τη στιγμή που, από την οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη; Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$.

[Απ: 15 rad/s^2]

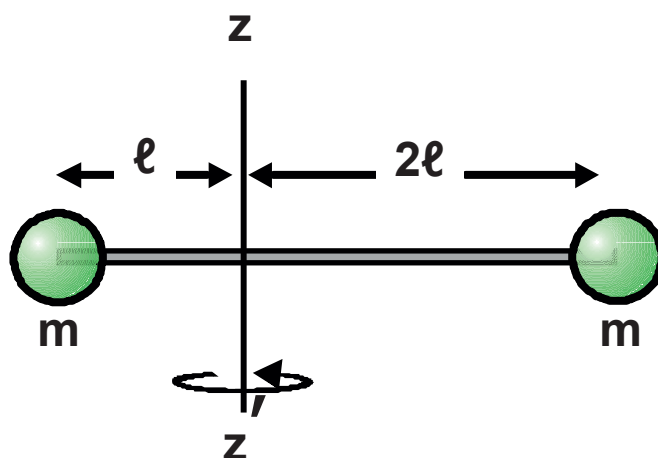


Σχήμα 4-60.

Στροφορμή αρχή διατήρησης της στροφορμής

4.47 Δύο σφαίρες, που η καθεμιά έχει μάζα $m=100\text{ g}$ συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, όπως στο **σχήμα 4.61**. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα $\omega=16\text{ rad/s}$, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $z'z$. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος. Δίνεται $l=0,8\text{ m}$.

[Απ: $5,12\text{ kg m}^2/\text{s}$]



Σχήμα 4-61.

4.48 Υπολογίστε τη στροφορμή ενός τροχού μάζας $M=2\text{ kg}$ και ακτίνας $R=0,4\text{ m}$, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\text{ rad/s}$ γύρω από τον άξονά του. Θεωρήστε ότι η μάζα του τροχού βρίσκεται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

[Απ: $3,2\text{ kg m}^2/\text{s}$]

4.49 Οριζόντιος δίσκος ακτίνας 20 cm και μάζας 1 kg στρέφεται με συχνότητα 2 Hz γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Από

κάποιο ύψος αφήνεται ένα κομμάτι λάσπη μάζας **100 gr**, που κολλάει στο δίσκο σε απόσταση **10 cm** από τον άξονα περιστροφής. Να υπολογίσετε τη νέα συχνότητα περιστροφής.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$

[Απ: 1,9 Hz]

Κινητική ενέργεια – έργο

4.50 Ομογενής ράβδος μάζας **M = 3 kg** και μήκους **L = 40 cm** στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **$\omega = 10 \text{ rad/s}$** γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της ράβδου. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$.

[Απ: 8 J]

4.51 Ομογενής δίσκος μάζας **M = 8 kg** και ακτίνας **R** κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο του δίσκου κινείται με ταχύτητα **$u = 5 \text{ m/s}$** . Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του δίσκου. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

[Απ: 150 J]

4.52 Ένας κινητήρας ασκεί ροπή **4 Nm** και στρέφεται με συχνότητα **50 Hz**. Ποια είναι η ισχύς του;

[Απ: 400π W]

4.53 Ομογενής δίσκος μάζας **m=40 kg** και ακτίνας **R=20 cm**, στρέφεται με συχνότητα **5 Hz** γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. α) Πόσο έργο απαιτείται για να ακινητοποιηθεί ο δίσκος; β) Υπολογίστε τη μέση ισχύ της ροπής που πρέπει να ασκηθεί στο δίσκο για να ακινητοποιηθεί σε **5s**.

Δίνεται $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

[Απ: 400J, 80W]

4.54 Η ράβδος του **σχήματος 4.62** που έχει μήκος **$L=2\text{ m}$** και μάζα **$M=3\text{ kg}$** , είναι οριζόντια και στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της **O**. Στο άλλο άκρο **A** της ράβδου ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου **$F=10\text{ N}$** που είναι διαρκώς κάθετη στη διεύθυνση της ράβδου. Η ράβδος αρχικά ήταν ακίνητη και με την επίδραση της δύναμης **F** αρχίζει να στρέφεται. Να υπολογίσετε:

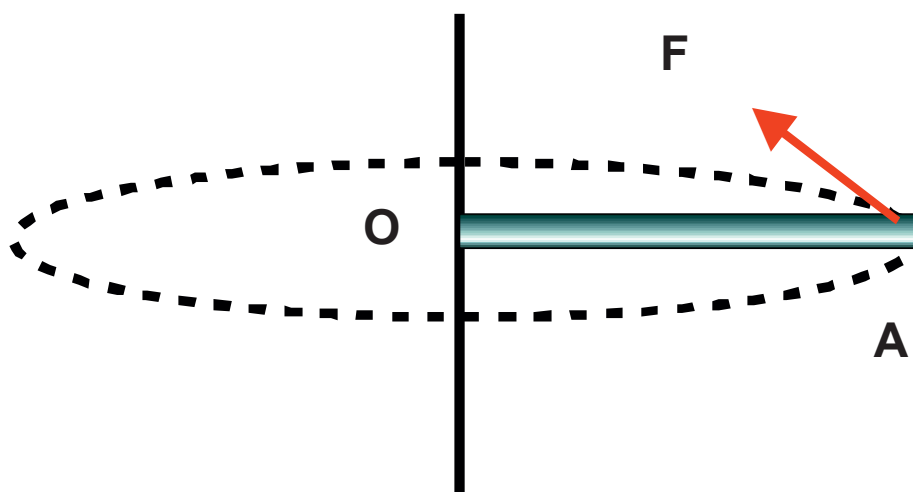
α) Το έργο της δύναμης **F**, σε μία περιστροφή της ράβδου.

β) Τη γωνιακή ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει η ράβδος τη στιγμή κατά την οποία θα έχει ολοκληρώσει μια περιστροφή.

γ) Το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο (ισχύς της δύναμης) την ίδια στιγμή.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I=\frac{1}{3}ML^2$.

[Απ: $W=40\pi\text{ J}$, $\omega=7,9\text{ rad/s}$, $P=158\text{ W}$]

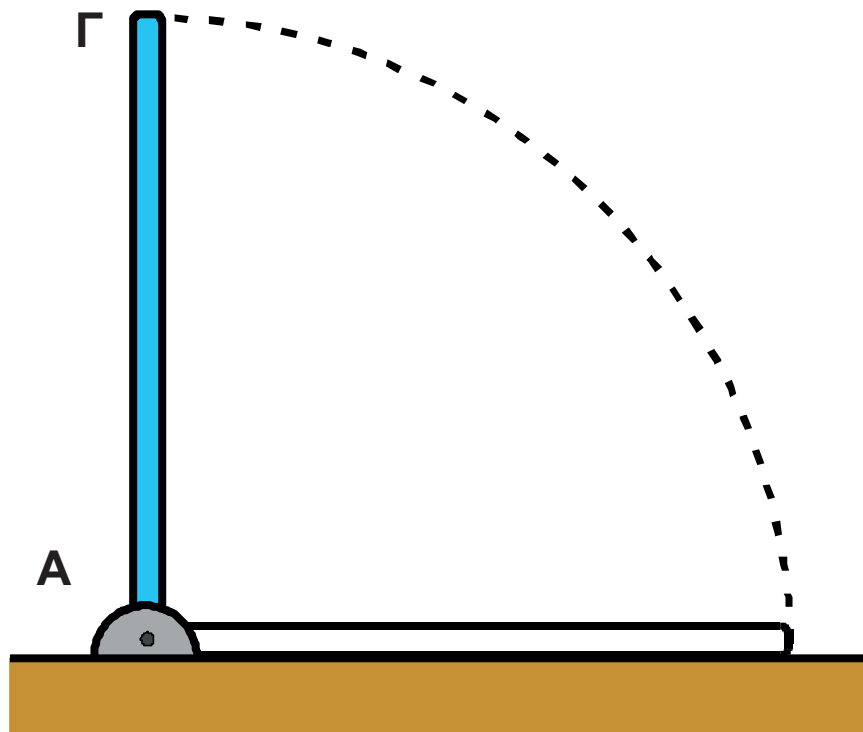


Σχήμα 4-62.

4.55 Η ομογενής ράβδος $A\Gamma$, μήκους $l = 30 \text{ cm}$ και μάζας m , είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A (σχ. 4.63). Η ράβδος αφήνεται από την κατακόρυφη θέση. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που έχει το σημείο Γ , τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσον

της είναι $I = \frac{ml^2}{12}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: 3 m/s]

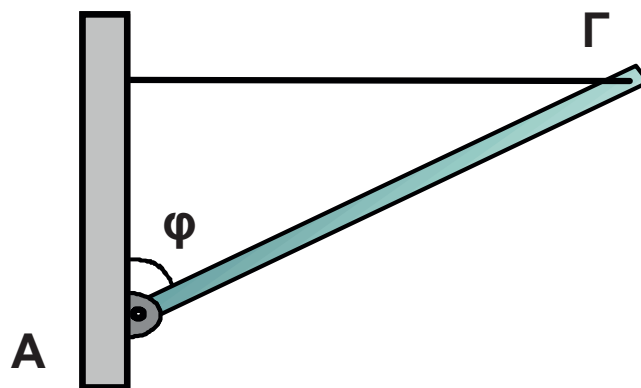


Σχήμα 4-63.

Προβλήματα

- 4.56** Ομογενής δοκός $A\Gamma$ μήκους ℓ και βάρους $w=100\text{ N}$ ισορροπεί όπως φαίνεται στο **σχήμα 4.64**. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση A . Δίνεται $\varphi = 60^\circ$.

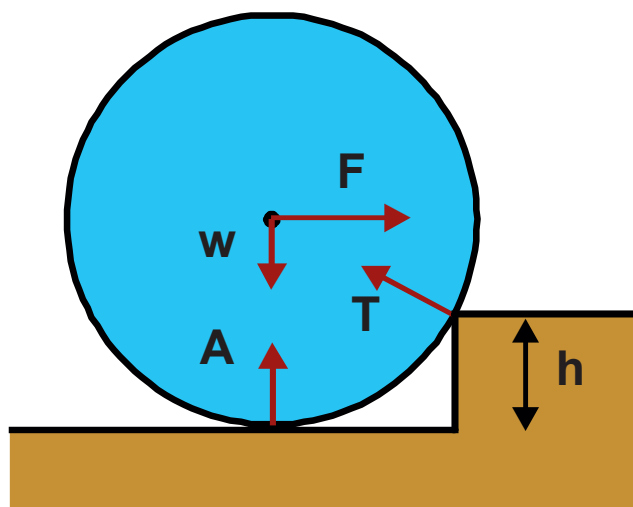
$$[\text{Απ: } T = 50\sqrt{3}\text{ N}, F = 50\sqrt{7}\text{ N}, \varepsilon\varphi\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}]$$



Σχήμα 4-64.

- 4.57** Το εμπόδιο στο **σχήμα 4.65** έχει ύψος h και ο τροχός ακτίνα R και βάρος w . Για ποιες τιμές της οριζόντιας δύναμης F ο τροχός θα υπερπηδήσει το εμπόδιο.

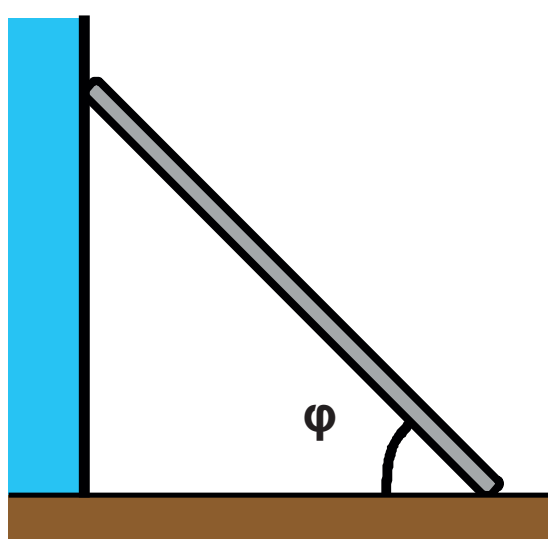
$$[\text{Απ: } F > w \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}]$$



Σχήμα 4-65.

- 4.58** Ομογενής σκάλα μπορεί να ισορροπήσει στηριζόμενη στο έδαφος και στον τοίχο (σχ. 4.66) μόνο όταν η γωνία ϕ που σχηματίζει με το έδαφος είναι μεγαλύτερη των 30° . Να υπολογίσετε το συντελεστή οριακής στατικής τριβής της σκάλας με το οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε αμελητέα την τριβή ανάμεσα στη σκάλα και τον τοίχο.

[Απ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$]



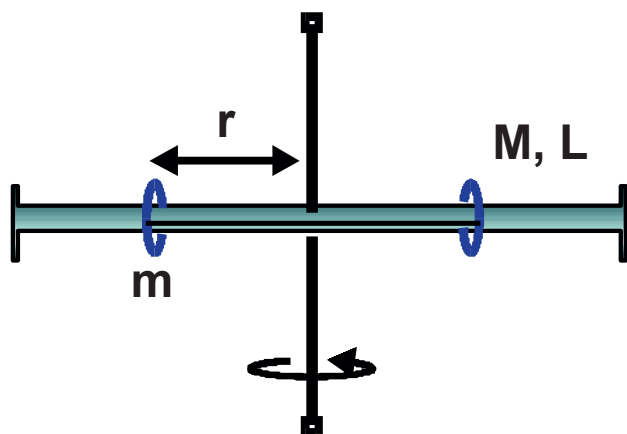
Σχήμα 4-66.

- 4.59** Ο πίσω τροχός ενός ποδηλάτου έχει ακτίνα $R=0,30\text{ m}$ και μάζα 1 kg . Ο τροχός στρέφεται με συχνότητα 100 στροφές ανά λεπτό -χωρίς να έρχεται σε επαφή με το έδαφος. Χρησιμοποιώντας το φρένο ακινητοποιούμε τον τροχό σε 5 s . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στην επαφή τροχού - φρένου, είναι $\frac{\pi}{5}$. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί το φρένο στον τροχό. (Θεωρήστε ότι το φρένο έρχεται σε επαφή με τον τροχό μόνο από τη μια του πλευρά και ότι η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του).

[Απ: 1 N]

- 4.60** Η ράβδος του σχήματος 4.67 είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Το μήκος της ράβδου είναι $L = 1\text{ m}$ και η μάζα της $M=0,6\text{ kg}$. Σε απόσταση $r=0,2\text{ m}$ από τον άξονα περιστροφής βρίσκονται δύο μεταλλικοί δακτύλιοι μάζας $m=0,1\text{ kg}$ ο καθένας, που συνδέονται μεταξύ τους με ένα νήμα. Το σύστημα στρέφεται γύρω από τον άξονα με συχνότητα $f_1 = 10\text{ Hz}$. Κάποια στιγμή το νήμα σπάει και οι δακτύλιοι, λόγω αδράνειας ωθούνται στα άκρα της ράβδου. Υπολογίστε τη νέα συχνότητα με την οποία θα στρέφεται το σύστημα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I = \frac{1}{12}ML^2$.

[Απ: $5,8\text{ Hz}$]



Σχήμα 4-67.

- 4.61** Η ταχύτητα του κέντρου μάζας μιας σφαίρας που κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο είναι 5 m/s . Η σφαίρα στην πορεία της συναντά πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης 30° και συνεχίζει πάνω σ' αυτό την κίνησή της. Η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει η σφαίρα στο πλάγιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $\frac{2}{5} mR^2$. Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$

[Απ: 3,5 m]

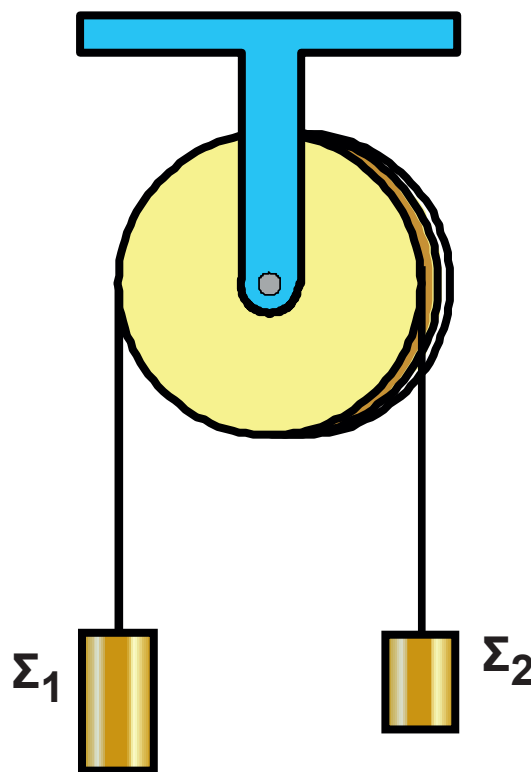
- 4.62** Συμπαγής σφαίρα κατεβαίνει χωρίς ολίσθηση σε πλάγιο επίπεδο με κλίση 30° . Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $I = \frac{2}{5} mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου της σφαίρας.

[Απ: $\frac{25}{7}\text{ m/s}^2$]

4.63 Η τροχαλία του **σχήματος 4.68** είναι ομογενής με μάζα $m=2\text{ kg}$ και ακτίνα R . Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1=3\text{ kg}$, $m_2=1\text{ kg}$. Να υπολογίσετε με ποια επιτάχυνση θα κινηθούν τα σώματα αν αφεθούν ελεύθερα. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$. Το βάρος του νήματος θεωρείται αμελητέο.

Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο σκοινί είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.

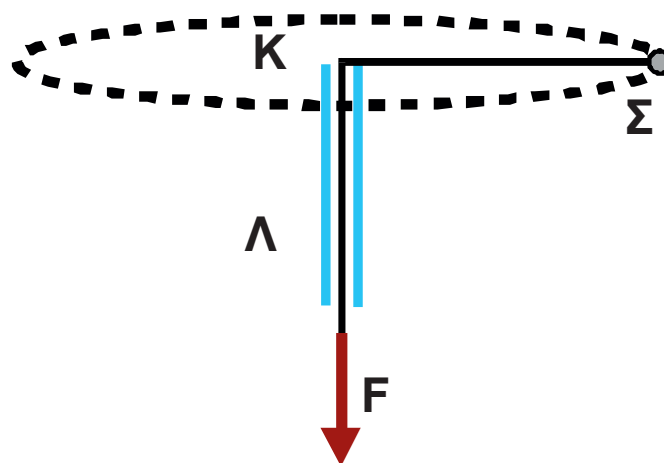
[Απ: $a=4\text{ m/s}^2$]



Σχήμα 4-68.

- 4.64 Το σφαιρίδιο Σ του σχ. 4.69 έχει μάζα 200 g και διαγράφει κύκλο ακτίνας 30 cm με γωνιακή ταχύτητα 40 rad/s . Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Ποιο είναι το έργο της δύναμης F που πρέπει να ασκήσουμε στην ελεύθερη άκρη του σκοινιού μέχρις ότου η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου Σ γίνει 15 cm ; (Θα θεωρήσετε ότι σ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου το σκοινί είναι οριζόντιο και ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του σκοινιού και του σωλήνα).

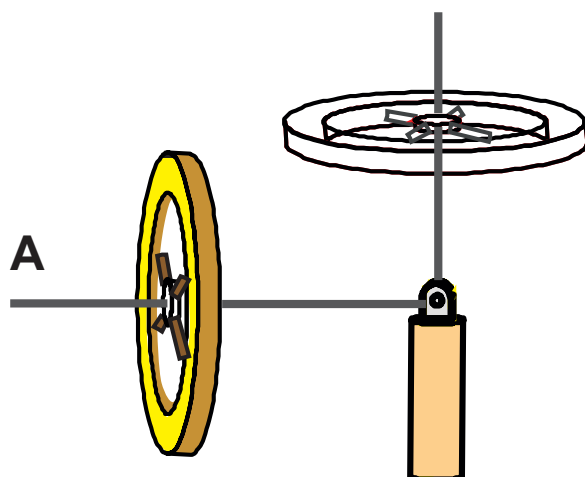
[Απ: $43,2\text{ J}$]



Σχήμα 4-69.

- 4.65 Ο τροχός του σχήματος 4.70 έχει ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονά του, $0,18\text{ kg m}^2$ και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 25\text{ rad/s}$ γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ασκώντας στο σημείο Α του άξονα περιστροφής την κατάλληλη δύναμη τον μετακινούμε ώστε να γίνει κατακόρυφος. Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του τροχού.

[Απ: $4,5\sqrt{2}\text{ Kg m}^2/\text{s}$]

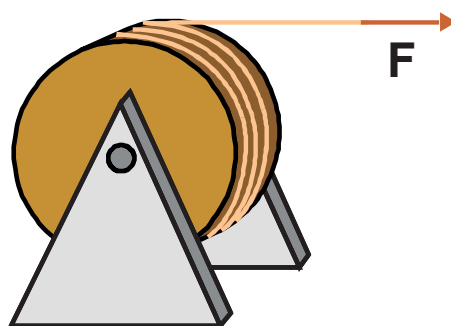


Σχήμα 4-70.

- 4.66 Στην περιφέρεια μιας ακίνητης τροχαλίας, ακτίνας **20 cm**, είναι τυλιγμένο σκοινί. Ασκώντας στο σκοινί οριζόντια δύναμη **20 π N** περιστρέφουμε την τροχαλία. Βρέθηκε ότι όταν η τροχαλία έχει κάνει τέσσερις περιστροφές έχει γωνιακή ταχύτητα **$\omega = 8\pi \text{ rad/s}$** . Να υπολογιστεί η μάζα της. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

[Απ: 50 kg]



Σχήμα 4-71.

4.67 Ένας τροχός αφήνεται να κινηθεί σε πλάγιο επίπεδο που σχηματίζει με το οριζόντιο γωνία φ . Για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής στατικής τριβής η κίνησή του γίνεται χωρίς ολίσθηση; Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται $I = \frac{1}{2} mR^2$.

[Απ: $\mu_s > \frac{\varepsilon\varphi\varphi}{3}$]

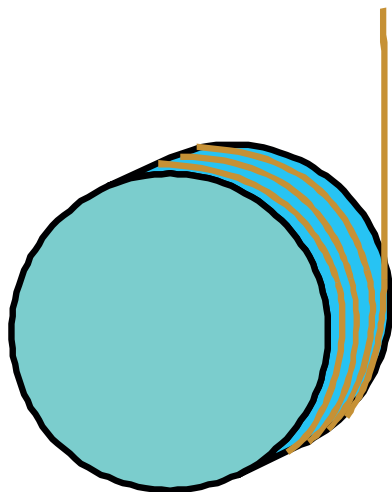
4.68 Το γιο-γιο του σχήματος αποτελείται από κύλινδρο με μάζα $m = 120\text{g}$ και ακτίνα $R = 1,5\text{cm}$, γύρω από τον οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές νήμα (σχ. 4.72). Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος, αφήνουμε τον κύλινδρο να κατεβαίνει. Να υπολογίσετε

α) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η στροφορμή του κυλίνδρου καθώς κατεβαίνει, και

β) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί σκοινί μήκους 30cm . Θεωρήστε το νήμα κατακόρυφο. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι

$I = \frac{1}{2} mR^2$. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

[Απ: α) $6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$, β) 2m/s]



Σχήμα 4-72.

- 4.69** Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο A , πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο **σχήμα 4.73**. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση; Δίνεται $R=20\text{ cm}$. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I = \frac{2}{5} mr^2$. Η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R .

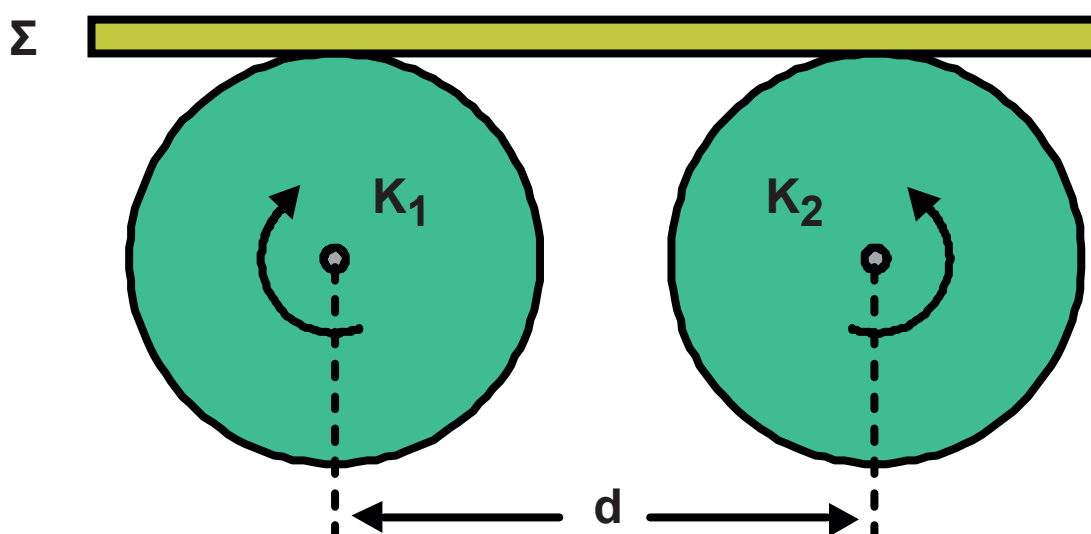
[Απ: 54 cm]



Σχήμα 4-73.

4.70 Οι άξονες δύο ομοίων κυλίνδρων K_1 και K_2 είναι παράλληλοι, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση d . Αφήνουμε μία ισοπαχή ομογενή σανίδα Σ πάνω στους κυλίνδρους έτσι ώστε το μέσον της να βρίσκεται πάνω από το μέσον της απόστασης K_1K_2 και με κατάλληλο μηχανισμό βάζουμε τους κυλίνδρους σε περιστροφή, όπως δείχνει το **σχήμα 4.74**. Μετατοπίζουμε λίγο τη σανίδα από τη θέση ισορροπίας της και την αφήνουμε ελεύθερη. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης της σανίδας με τους κυλίνδρους είναι μ_k και η επιτάχυνση της βαρύτητας g .

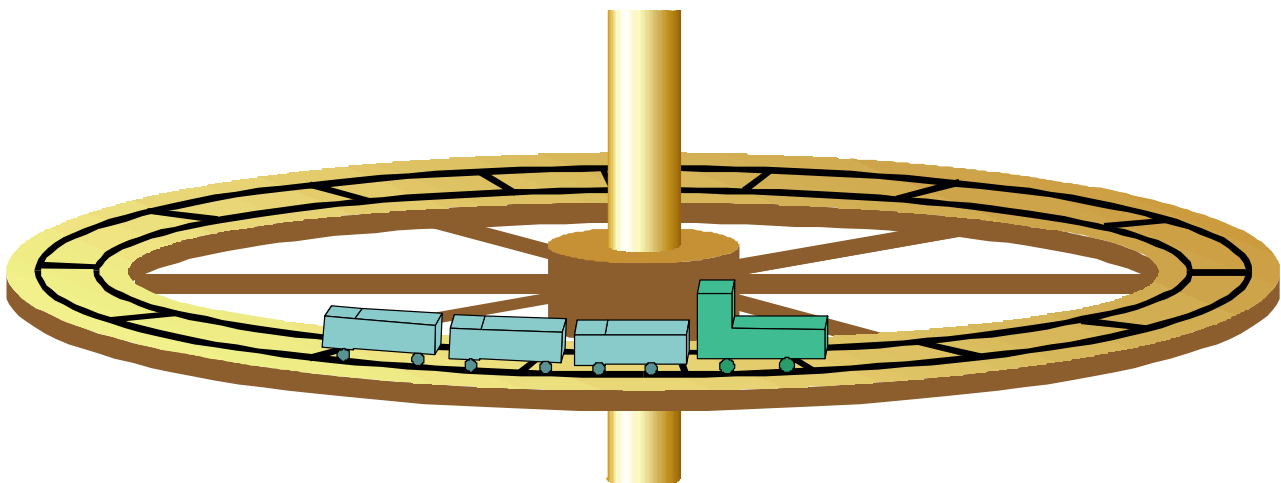
[Απ: $2\pi \sqrt{\frac{d}{2\mu_k g}}$]



Σχήμα 4-74.

4.71 Ένα ηλεκτρικό τρενάκι μάζας $m=2\text{ kg}$ μπορεί να κινείται πάνω σε ένα μεγάλο οριζόντιο τροχό (σχ. 4.75). Ο τροχός μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά και ο τροχός και το τρενάκι είναι ακίνητα. Κάποια στιγμή το τρενάκι αρχίζει να κινείται με ταχύτητα $u=8,4\text{ m/s}$. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα στρέφεται ο τροχός. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του είναι $I=11,52\text{ kgm}^2$ και ότι το τρενάκι απέχει από τον άξονα περιστροφής $R=1,2\text{ m}$.

[Απ: $1,75\text{ rad/s}$]



Σχήμα 4-75.

ΕΝΘΕΤΟ

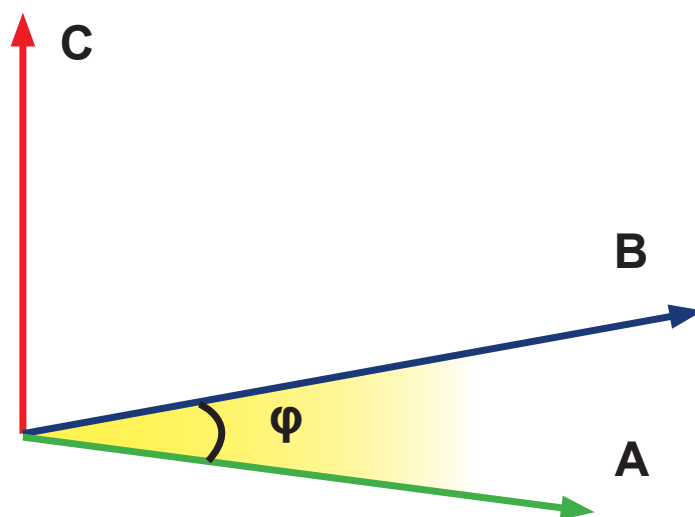
Εξωτερικό Γινόμενο

Υπάρχει ένα γινόμενο που χρησιμοποιείται ευρέως στη φυσική. Ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο. Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **A** και **B** (συμβολίζεται **A × B**) είναι εξ ορισμού ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των **A** και **B**, με μέτρο

$$C = AB |\eta\mu\phi|$$

όπου ϕ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα **A** και **B**.

Η φορά του διανύσματος **C** ορίζεται από το λεγόμενο «κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίας». Σύμφωνα με αυτόν, το πρώτο από τα δύο διανύσματα (**A**) στρέφεται προς το δεύτερο (**B**), ακολουθώντας τη μικρότερη γωνία ανάμεσα στα διανύσματα. Η φορά του **C** είναι η φορά προς την οποία θα κινηθεί ένας δεξιόστροφος κοχλίας, που στρέφεται όπως το διάνυσμα **A**.



Σχήμα 4-76.

Ένας άλλος τρόπος για να καθοριστεί η φορά του διανύσματος $\mathbf{C}$ είναι ο κανόνας του δεξιού χεριού: Αν τα δάχτυλα του δεξιού χεριού βρίσκονται κατά μήκος του $\mathbf{A}$ και καμφθούν για να δείχνουν προς το $\mathbf{B}$ (μέσω της μικρότερης γωνίας ανάμεσα στα δύο διανύσματα), ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση του $\mathbf{C}$.

Όπως προκύπτει από την εξίσωση που δίνει το μέτρο του $\mathbf{C}$, το εξωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε δύο παράλληλα διανύσματα είναι μηδέν.

Αν A_x, A_y, A_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{A}$, σε τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων και B_x, B_y, B_z , οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{B}$, το εξωτερικό γινόμενο σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y και z , αντίστοιχα.

Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό αλλά

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου

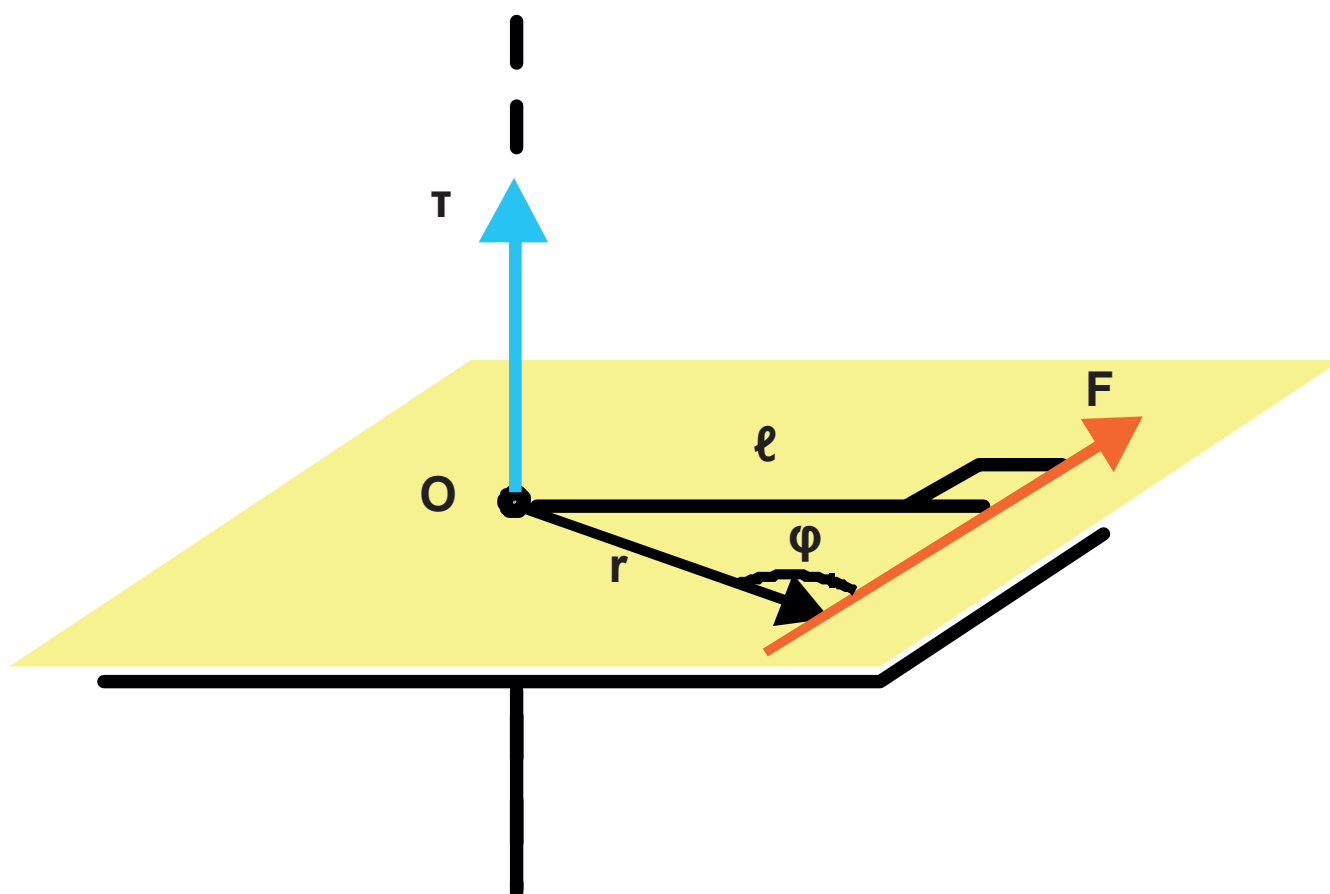
Η ροπή μιας δύναμης $\mathbf{F}$ ως προς σημείο $\mathbf{O}$ ορίζεται από τη διανυσματική σχέση

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.24)$$

όπου $\mathbf{r}$ είναι ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο $\mathbf{O}$ και τέλος ένα σημείο του διανύσματος $\mathbf{F}$. Σύμφωνα με τον ορισμό

του εξωτερικού γινομένου η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{F}$ και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το μέτρο της ροπής που προκύπτει από τον ορισμό αυτό είναι

$$\tau = rF \sin \phi \quad (\text{σχ. 4.77})$$



Σχήμα 4-77.

Αν πάρουμε υπόψη ότι $r \sin \phi = d$ όπου d , η κάθετη απόσταση ανάμεσα στο σημείο O και το διάνυσμα $\mathbf{F}$, καταλήγουμε στη γνωστή σχέση

$$\tau = Fd \quad (4.25)$$

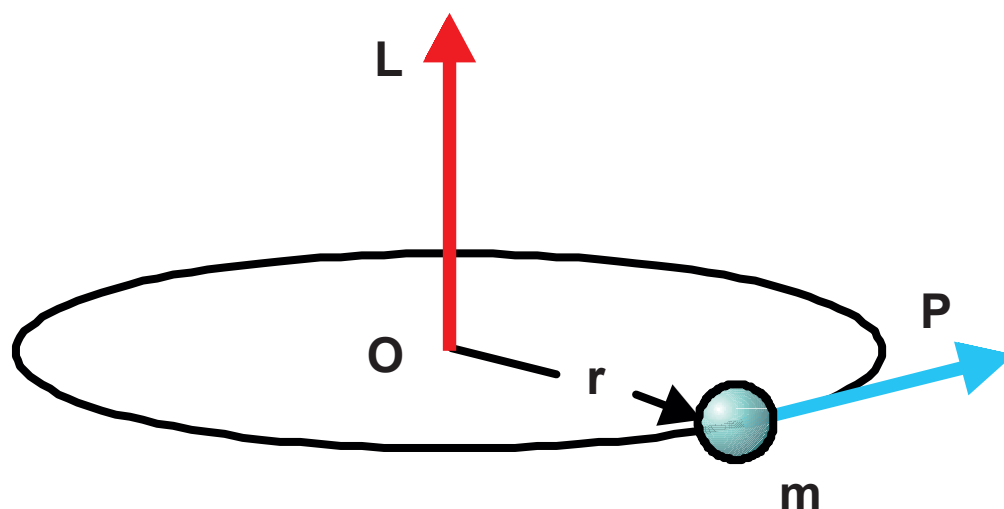
Επομένως η κατεύθυνση και το μέτρο της ροπής είναι ανεξάρτητα από το σημείο του $\mathbf{F}$ στο οποίο καταλήγει το διάνυσμα $\mathbf{r}$.

Ο ορισμός της ροπής σύμφωνα με τη σχέση (4.24) πλεονεκτεί έναντι της (4.25) δηλαδή της σχέσης με την οποία σε προηγούμενη παράγραφο ορίστηκε το μέγεθος, διότι η (4.24) ορίζει ότι είναι διανυσματικό μέγεθος και δίνει το μέτρο και την κατεύθυνσή της.

Η στροφορμή υλικού σημείου που στρέφεται γύρω από σημείο O , ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{u} \quad (4.26)$$

όπου $\mathbf{r}$ η επιβατική ακτίνα. Παρατηρήστε πάλι ότι αυτός ο τρόπος ορισμού είναι πολύ πιο κομψός από τον ορισμό που δόθηκε στην παράγραφο 4-7. Η εξίσωση (4.26) δίνει πληροφορίες για το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της στροφορμής.



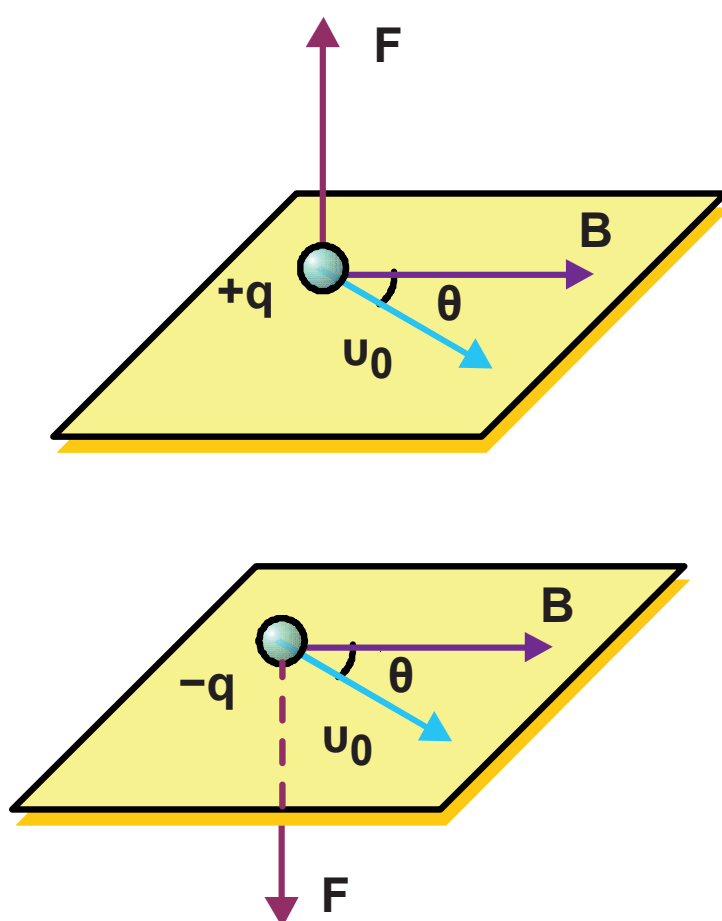
Σχήμα 4-78.

Πέρα από την απλότητα και την κομψότητα, με την οποία μέσω του εξωτερικού γινομένου ορίστηκαν η ροπή και η στροφορμή, υπάρχει και μια βαθύτερη αιτία που κάνει αυτό τον τρόπο ορισμού τους απαραίτητο. Στη φυσική οι εξισώσεις πέρα από τη συνέπεια των

μονάδων και των διαστάσεων πρέπει να έχουν και διανυσματική συνέπεια. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα μπορούν να προστεθούν ή να εξισωθούν μόνο με διανύσματα. Οι εξισώσεις (4.24) και (4.26) έχουν αυτή τη διανυσματική συνέπεια.

Και άλλα μεγέθη στη φυσική, όπως η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, ορίζονται με διανυσματικό γινόμενο. Η δύναμη αυτή (δύναμη Lorentz) ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$



Σχήμα 4-79.

Κιβώτιο Ταχυτήτων και Μετάδοση της Κίνησης στο Αυτοκίνητο

Σ' ένα αυτοκίνητο, ανάμεσα στον κινητήρα και τους κινητήριους τροχούς υπάρχουν μηχανισμοί που επιτρέπουν ή εμποδίζουν να μεταδίδεται η στροφική κίνηση του κινητήρα στους τροχούς. Οι μηχανισμοί αυτοί επιτυγχάνουν επίσης διαφορετικές συχνότητες περιστροφής ανάμεσα στον κινητήρα και τις ρόδες. Το σύνολο των διατάξεων αυτών συνιστούν το **σύστημα μετάδοσης του αυτοκινήτου**.

Το Αμπραγιάζ (συμπλέκτης)

Το αμπραγιάζ είναι τοποθετημένο ανάμεσα στον κινητήρα και το κιβώτιο των ταχυτήτων. Το αμπραγιάζ επιτρέπει

- **να συμπλέκουμε**, δηλαδή να πραγματοποιούμε μια προοδευτική σύνδεση ανάμεσα στον πρωτεύοντα άξονα περιστροφής του κινητήρα, (στροφαλοφόρο) και το υπόλοιπο σύστημα μετάδοσης.
- **να αποσυμπλέκουμε**, δηλαδή να καταργούμε παροδικά αυτή τη σύνδεση κατά τη διάρκεια των αλλαγών ταχυτήτων.

Το Κιβώτιο Ταχυτήτων

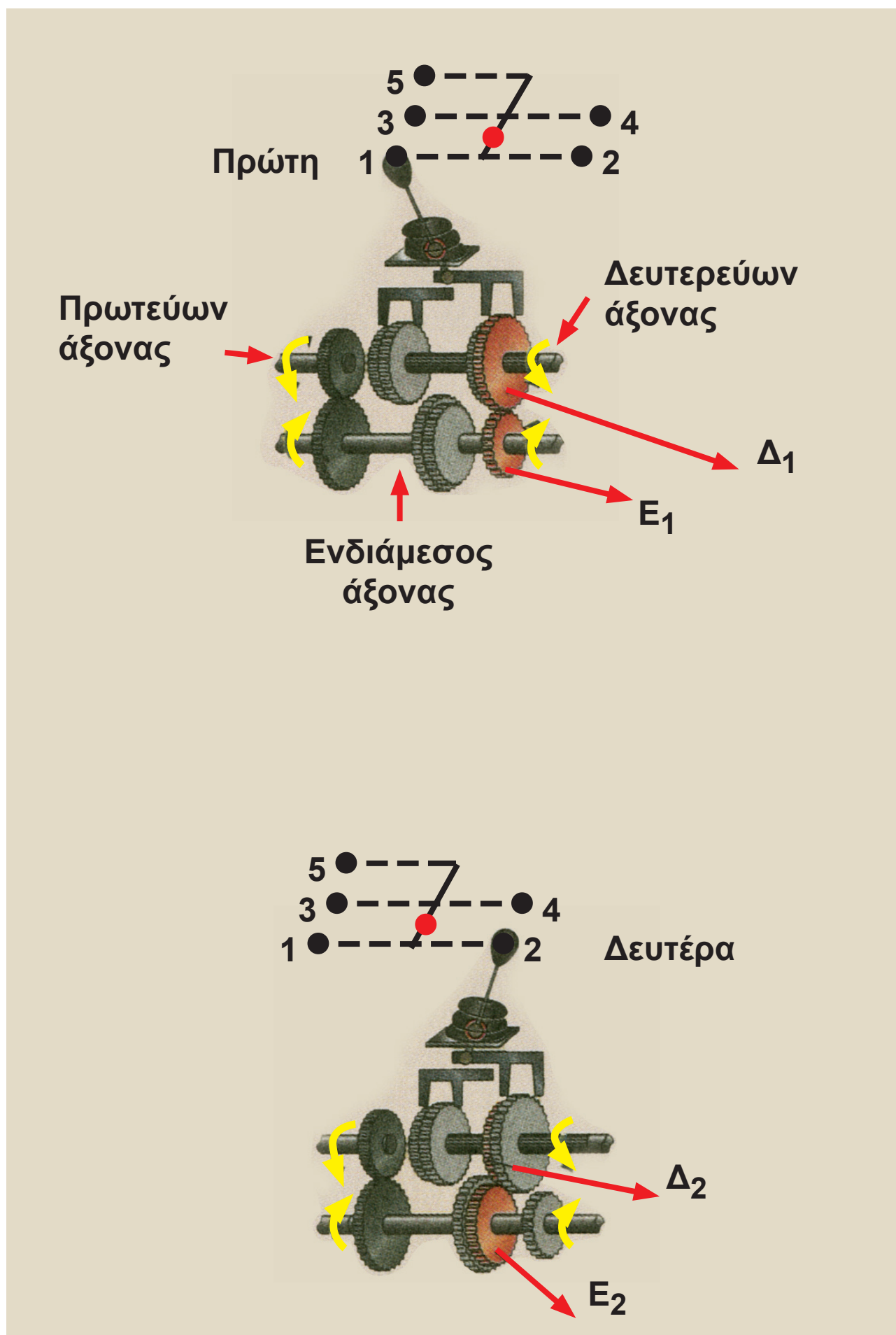
Στην περίπτωση ενός κλασικού αυτοκινήτου εάν εφαρμόζαμε απ' ευθείας τη στροφική κίνηση του στροφαλοφόρου στους τροχούς, τότε, για συνηθισμένες συνθήκες λειτουργίας του κινητήρα (**4000 στροφές/min**), το αυτοκίνητο θα έπρεπε να κινείται με ταχύτητα **450 km/h**. Οι τροχοί πρέπει να περιστρέφονται πιο αργά από το στροφαλοφόρο.

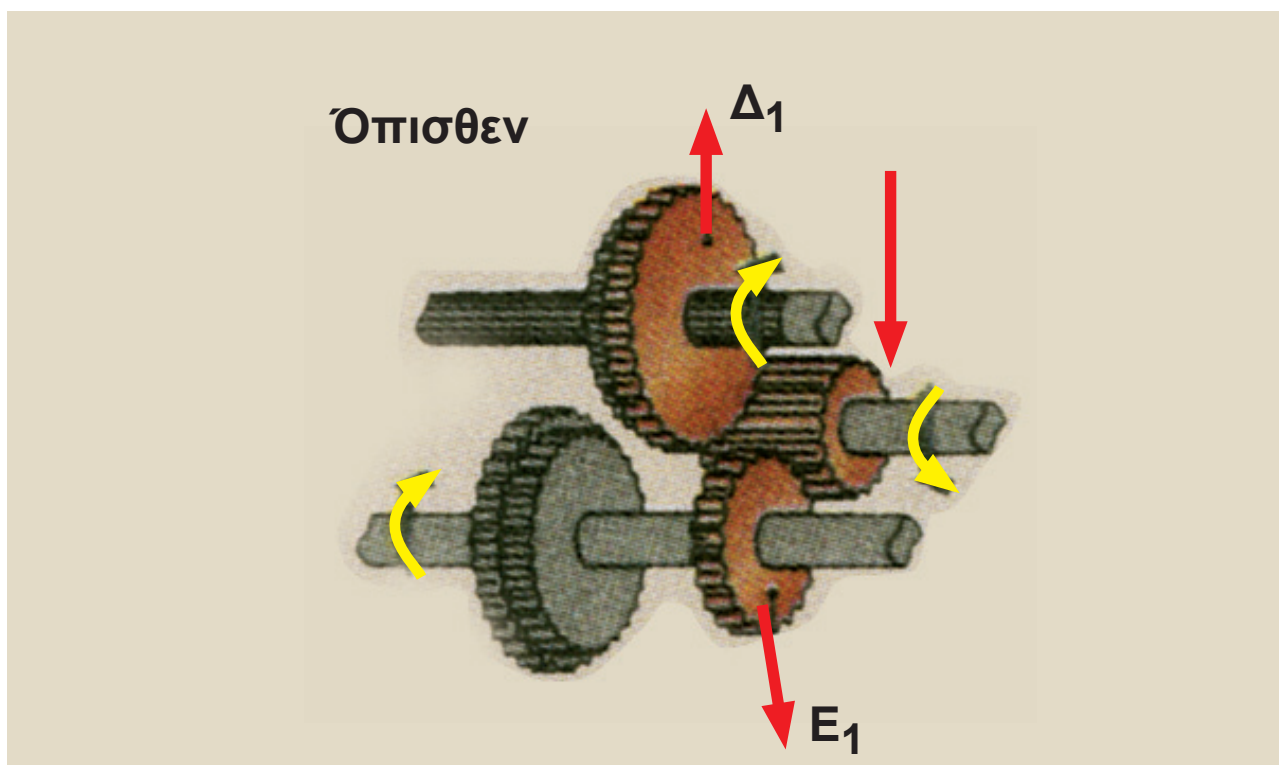
Το κιβώτιο ταχυτήτων πετυχαίνει ακριβώς αυτόν τον υποπολλαπλασιασμό των στροφών.

Το κιβώτιο ταχυτήτων δίνει τη δυνατότητα

- στους τροχούς να στρέφονται πιο αργά από τον κινητήρα,
- να μεταβάλλουμε, ανάλογα με τις ανάγκες της στιγμής, τη ροπή του ζεύγους δυνάμεων¹ που ασκείται στους κινητήριους τροχούς.

¹ Δύο αντίθετες δυνάμεις με ίσα μέτρα και διαφορετικούς φορείς αποτελούν ζεύγος. Το μέτρο της ροπής του ζεύγους είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου των δυνάμεων επί την κάθετη απόσταση μεταξύ των φορέων τους ($\tau = F\ell$). Η ροπή ενός ζεύγους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς.





Σχήμα 4-80.

Το κιβώτιο ταχυτήτων περιλαμβάνει ένα σύστημα γραναζιών διαφορετικών διαμέτρων.

Αποσυμπλέκουμε πατώντας το αμπραγιάζ. Με το μοχλό των ταχυτήτων φέρνουμε σε επαφή ένα γρανάτζι του δευτερεύοντος άξονα (έξοδος του κιβωτίου) με ένα του ενδιάμεσου άξονα (σχ. 4.80). Αφήνουμε το αμπραγιάζ, ο στροφαλοφόρος θέτει σε περιστροφή τον ενδιάμεσο άξονα (είσοδος του κιβωτίου) κι αυτός με τη σειρά του το δευτερεύοντα άξονα.

Στην πρώτη,

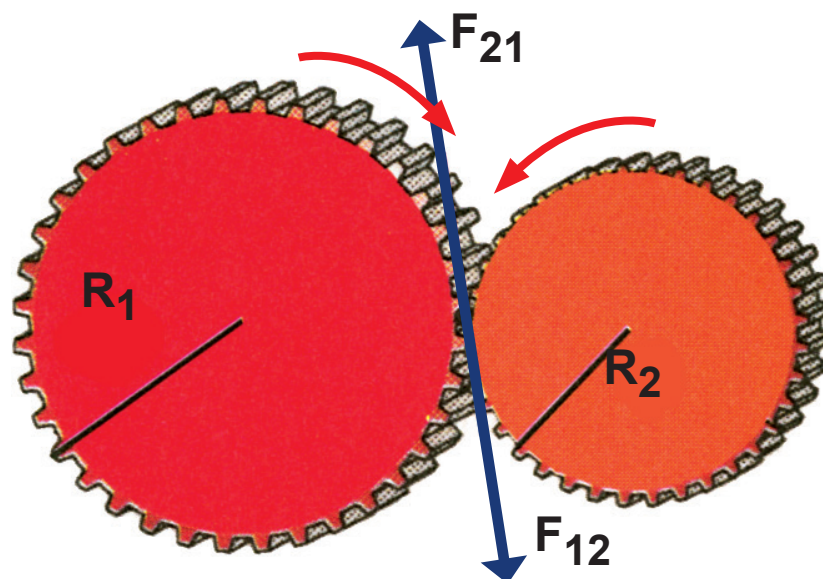
το γρανάτζι Δ_1 του δευτερεύοντος άξονα συναρμόζει με το γρανάτζι E_1 του ενδιάμεσου (σχ. 4.80). Η ακτίνα του γραναζιού Δ_1 (R_{Δ_1}) είναι περίπου τέσσερις φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα του γραναζιού E_1 (R_{E_1}). Ανάμεσα στις γωνιακές ταχύτητες περιστροφής των γραναζιών

ισχύει η σχέση $\frac{\omega_{\Delta_1}}{\omega_{E_1}} = \frac{R_{E_1}}{R_{\Delta_1}}$ από την οποία προκύ-

πτει ότι η συχνότητα περιστροφής του Δ_1 είναι τέσσερις φορές μικρότερη από αυτήν του E_1 . Ταυτόχρονα η ροπή του ζεύγους που στρέφει τα γρανάζια θα είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερη για το Δ_1 σε σχέση με το E_1 γιατί ενώ οι δυνάμεις είναι ίσες η απόσταση μεταξύ των φορέων τους τετραπλασιάζεται στο Δ_1 (σχ. 4.81).

Το αυτοκίνητο δε μπορεί να αναπτύξει μεγάλες ταχύτητες, όμως προέκυψε ένα άλλο όφελος. Το κινητήριο ζεύγος δυνάμεων μετασχηματίσθηκε σ' ένα ζεύγος, που σε τελική ανάλυση ασκείται στους τροχούς, με μια πολύ σημαντικότερη ροπή. Είναι ικανό να ξεκινήσει το αυτοκίνητο ή να το ανεβάσει σε ανηφορίες με μεγάλη κλίση.

Πατώντας το αμπραγιάζ αποσυνπλέκουμε το στροφαλοφόρο από το κιβώτιο ταχυτήτων και με το μοχλό των ταχυτήτων μετακινούμε το δευτερεύοντα άξονα σε σχέση με τον ενδιάμεσο.



$$F_{12} = F_{21}$$

$$\omega_1 < \omega_2$$

$$T_1 > T_2$$

Σχήμα 4-81.

Στη δευτέρα,

το γρανάζι Δ_2 συναρμόζει με το γρανάζι E_2 (σχ. 4.80). Η

σχέση των ακτίνων τώρα είναι $\frac{R_{\Delta_2}}{R_{E_2}} = \frac{2}{1}$. Η συχνότητα

περιστροφής του Δ_2 είναι η μισή αυτής του E_2 και η ροπή του κινητήριου ζεύγους διπλάσια.

Στην τρίτη ο δευτερεύων άξονας στρέφεται με συχνότητα ίση με τα $\frac{2}{3}$ αυτής του ενδιαμέσου, στην τετάρτη οι συχνότητες είναι περίπου ίσες και στην πέμπτη η περιστροφή είναι γρηγορότερη στην έξοδο του κιβωτίου ταχυτήτων απ' ό,τι στην είσοδο. Η πέμπτη ταχύτητα επιτρέπει να πετυχαίνουμε μεγάλες ταχύτητες καταναλώνοντας σχετικά λιγότερο καύσιμο. Όταν έχουμε πέμπτη ταχύτητα, όμως, η ροπή του ζεύγους έχει μειωθεί πολύ και είναι δύσκολο να επιταχύνουμε το αυτοκίνητο αν χρειαστεί, π.χ. σ' ένα προσπέρασμα.

Στην όπισθεν,

ο δευτερεύων άξονας γυρνάει με ανάποδη φορά από αυτήν που γυρνούσε στις άλλες ταχύτητες. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μεσολάβηση ενός τρίτου γραναζιού ανάμεσα στο δευτερεύοντα άξονα και τον ενδιαμέσο (σχ. 4.80).

Οι σχέσεις ακτίνων των γραναζιών ποικίλουν από αυτοκίνητο σε αυτοκίνητο.

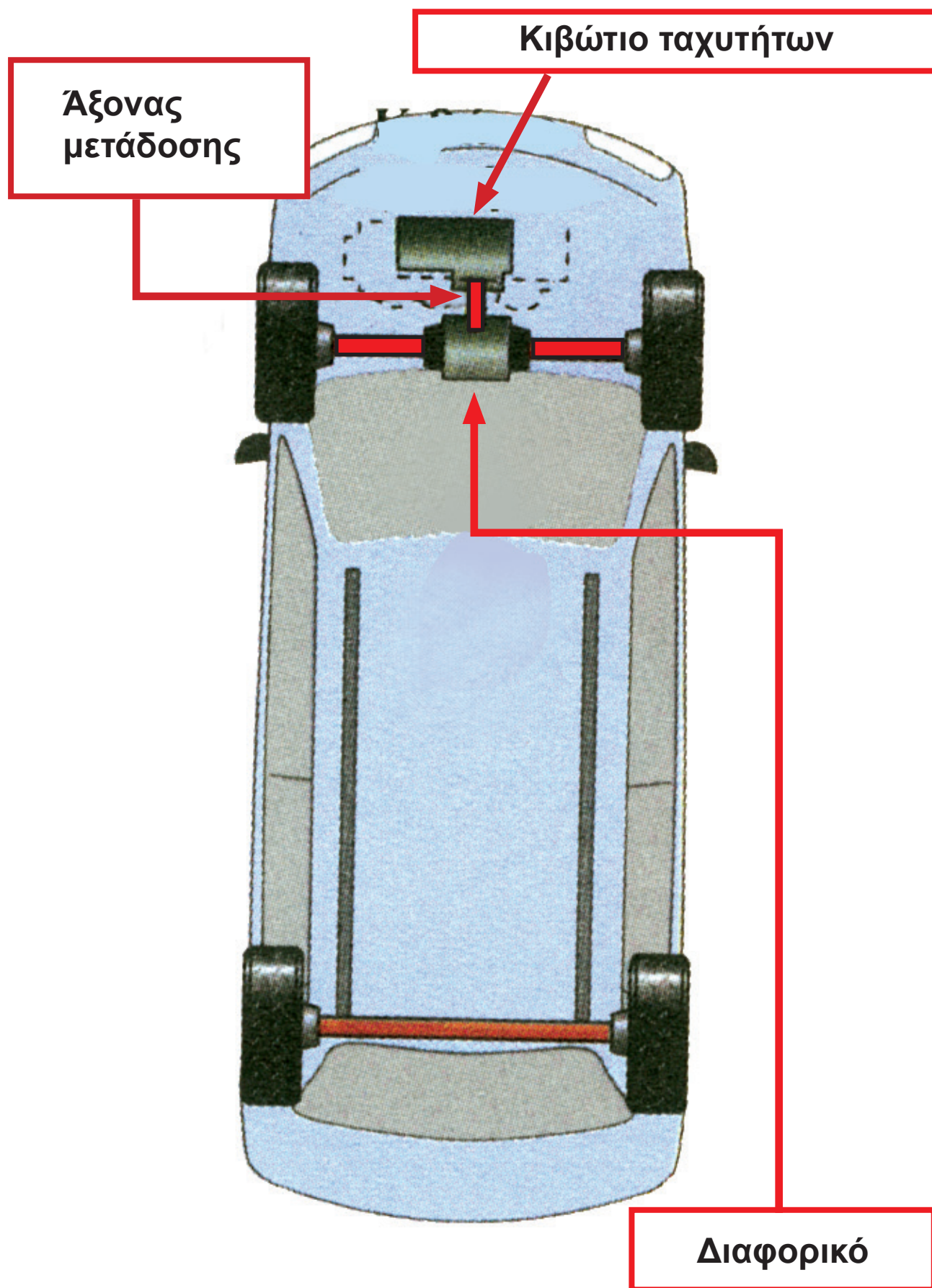
Άξονας Μετάδοσης και Διαφορικό

Ανάμεσα στην έξοδο από το κιβώτιο ταχυτήτων και τους κινητήριους τροχούς βρίσκουμε έναν ή περισσότερους άξονες μετάδοσης και το διαφορικό.

Όταν το αυτοκίνητο στρίβει ο τροχός που βρίσκεται στο εσωτερικό της στροφής διανύει μικρότερο διάστημα από τον εξωτερικό τροχό. Εφόσον το τόξο της στροφής για τον εσωτερικό τροχό είναι μικρότερο θα πρέπει να στρέφεται εκείνη την ώρα με μικρότερη συχνότητα από τον εξωτερικό.

Διαφορικό είναι εκείνος ο μηχανισμός που βρίσκεται στο μέσον του άξονα κίνησης (σχ. 4.82) και μοιράζει τις στροφές στους δυο τροχούς ώστε να γυρίζει ο καθένας με την κατάλληλη συχνότητα. Το διαφορικό επίσης μοιράζει στους τροχούς την ισχύ που φτάνει από τον κινητήρα.

Αν ο άξονας κίνησης ήταν μονοκόμματος το αυτοκίνητο θα είχε πολύ βαρύ τιμόνι, θα ήταν πολύ δύσκολο στην οδήγηση και θα έφθαιρε πολύ γρήγορα τα ελαστικά του.



Σχήμα 4-82.



Πίνακες Σταθερών - Χρήσιμα Μεγέθη

Θεμελιώδεις Φυσικές Σταθερές

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Ταχύτητα του φωτός	c	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$
Φορτίο ηλεκτρονίου (απόλυτη τιμή)	e	$1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Βαρυτική σταθερά (σταθερά της παγκόσμιας έλξης)	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
Σταθερά Planck	h	$6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Σταθερά Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Σταθερά Avogadro	N_A	$6,023 \times 10^{23}$ μόρια/mol
Σταθερά των αερίων	R	$8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
Μάζα ηλεκτρονίου	m_e	$9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Μάζα νετρονίου	m_n	$1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Μάζα πρωτονίου	m_p	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Διηλεκτρική σταθερά του κενού	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$
Σταθερά Coulomb	K_C	$9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$

Άλλες Χρήσιμες Σταθερές

Μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας		4,186 J / cal
Κανονική ατμοσφαιρική πίεση	1 atm	$1,013 \times 10^5 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$
Απόλυτο μηδέν	0 K	-273°C
Ηλεκτρονιοβόλτ	1 eV	$1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
Ενέργεια ηρεμίας ηλεκτρονίου	mc^2	0,511 MeV
Γραμμομοριακός όγκος ιδανικού αερίου (0°C , 1 atm)	V_{mol}	22,4 L / mol

Λεξιλόγιο Όρων

A

αδρανειακό σύστημα: σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει η αρχή της αδράνειας του Newton.

αεροδύναμη: η δύναμη που δέχεται από τον αέρα η πτέρυγα του αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της πτήσης του.

αιθέρας: υποθετικό αβαρές ελαστικό μέσο, η παρουσία του οποίου θεωρήθηκε απαραίτητη για τη διάδοση του φωτός.

ακτίνες Röntgen: ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-8} και 10^{-13} m. Είναι αποτέλεσμα της επιβράδυνσης των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν σε μεταλλικές επιφάνειες με μεγάλη ταχύτητα ή της αποδιέγερσης των ατόμων του μετάλλου.

ακτίνες γ: ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-10} και 10^{-14} m. Εκπέμπονται από πυρήνες ραδιενεργών στοιχείων.

ακτίνες X: οι ακτίνες Roentgen.

ακτινοβολία: ενέργεια που εκπέμπεται με μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

αμορτισέρ: μηχανισμός που χρησιμοποιείται για την απόσβεση των ταλαντώσεων των αυτοκινήτων.

ανάκλαση κύματος: το φαινόμενο κατά το οποίο όταν το κύμα συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια δυο μέσων επιστρέφει στο πρώτο μέσο ακολουθώντας ορισμένο δρόμο.

άξονας περιστροφής (στερεού σώματος): η ευθεία που ενώνει τα σημεία τα οποία παραμένουν ακίνητα κατά την περιστροφή του σώματος.

απεριοδική ταλάντωση: η κίνηση ενός ταλαντωτή ο οποίος δεν υπερβαίνει τη θέση ισορροπίας, λόγω ισχυρών αποσβέσεων.

απομάκρυνση: η απόσταση σώματος που ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας.

αρμονική ταλάντωση: η ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση του ταλαντωτή είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

αρχική φάση: η τιμή που έχει τη χρονική στιγμή μηδέν η φάση ενός μεγέθους που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

Γ

γενική θεωρία της σχετικότητας: η θεωρία της σχετικότητας που συμπεριλαμβάνει και μη αδρανειακά συστήματα - θεωρία για τη βαρύτητα.

γωνία εκτροπής: η γωνία που σχηματίζει με την αρχική της διεύθυνση η μονοχρωματική δέσμη που βγαίνει από μια οπτική διάταξη.

γωνιακή συχνότητα: μέγεθος που χαρακτηρίζει τα περιοδικά φαινόμενα, ανάλογο προς τη συχνότητα. Στην ομαλή κυκλική κίνηση συμπίπτει με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.

Δ

δείκτης διάθλασης (υλικού): ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητά του στο υλικό αυτό.

δεσμός στάσιμου κύματος: ένα σημείο που παραμένει ακίνητο όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει δημιουργείται στάσιμο κύμα.

δευτέριο: ισότοπο του υδρογόνου με μαζικό αριθμό δύο.

διάθλαση κύματος: η αλλαγή πορείας ενός κύματος κατά τη μετάβασή του από ένα μέσο σε ένα άλλο στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα.

διακρότημα: η αυξομείωση του πλάτους της ταλάντωσης που εκτελεί ένα σώμα όταν μετέχει σε δυο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, που έχουν το ίδιο πλάτος και συχνότητες που παρουσιάζουν μικρή διαφορά.

διάμηκες κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται στη διεύθυνση της διάδοσής του.

διαμόρφωση πλάτους (AM): η τροποποίηση του πλάτους του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διαμόρφωση συχνότητας (FM): η τροποποίηση της συχνότητας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διασκεδασμός (του φωτός): η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης ενός υλικού από το μήκος κύματος.

διαστολή του χρόνου: Η φαινομενική επιβράδυνση του χρόνου (αύξηση του χρονικού διαστήματος) σε σώμα που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

δίδυμη γένεση: η μετατροπή ενός φωτονίου σε ζεύγος ηλεκτρονίου- ποζιτρονίου.

διέγερση (ατόμου): η μετάβαση ενός ηλεκτρονίου του ατόμου σε στιβάδα με ενέργεια μεγαλύτερη από την αρχική.

διεγέρτης: το σώμα που προκαλεί εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός ταλαντωτή- που προσφέρει περιοδικά ενέργεια σε ένα σώμα που ταλαντώνεται.

δύναμη επαναφοράς: η δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να ταλαντώνεται- που τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας.

δυναμική άνωση: η συνιστώσα της αεροδύναμης η κάθετη στην ταχύτητα.

Ε

εγκάρσιο κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση της διάδοσής του.

ειδική θεωρία της σχετικότητας: θεωρία που διατύπωσε ο Einstein για αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Βασικές της παραδοχές είναι: α) η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από τη ταχύτητα του παρατηρητή, β) οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

έκκεντρη κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες.

ελαστική κρούση: η κρούση κατά την οποία διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.

ελεύθερη ταλάντωση: η ταλάντωση ενός σώματος το οποίο εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

έλλειμμα μάζας: η διαφορά της μάζας ενός πυρήνα από τη μάζα των συστατικών του.

ενέργεια σύνδεσης (πυρήνα): το ποσό της ενέργειας που πρέπει να προσφερθεί στον πυρήνα για να διασπαστεί στα συστατικά του.

ενέργεια ηρεμίας: το ποσό της ενέργειας (mc^2) που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

ένταση ακτινοβολίας: η ενέργεια που περνάει από τη μονάδα επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου.

εξαναγκασμένη ταλάντωση: η ταλάντωση που γίνεται με την περιοδική προσφορά ενέργειας στο ταλαντούμενο σύστημα.

εξίσωση κύματος: η σχέση που δίνει την απομάκρυνση των σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα κάθε χρονική στιγμή.

εξίσωση συνέχειας: η σχέση μεταξύ της ταχύτητας ενός ασυμπίεστου ρευστού και της διατομής του σωλήνα στον οποίο κινείται.

εσωτερική τριβή ρευστού: η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των μορίων του ρευστού λόγω της κίνησής του.

έργο εξαγωγής: η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να πάρει ένα ηλεκτρόνιο για να εγκαταλείψει την επιφάνεια ενός μετάλλου.

H

ηλεκτρική ταλάντωση: εναλλασσόμενο ρεύμα μεγάλης συχνότητας που παίρνουμε από κύκλωμα LC όταν φορτίσουμε τον πυκνωτή.

ηλεκτρομαγνητικό κύμα: η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου στο χώρο.

Ι

ιδιομήκος (αντικειμένου): βλ. «μήκος ηρεμίας».

ιδιόχρονος (αδρανειακού συστήματος): ο χρόνος που μετράει ένα ρολόι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα.

ιξώδες: η εσωτερική τριβή μεταξύ των μορίων ενός ρευστού- συντελεστής που δείχνει πόσο παχύρρευστο είναι ένα υγρό.

Κ

κβαντισμένο μέγεθος: κάθε μέγεθος που παίρνει διακριτές τιμές που είναι πολλαπλάσια μιας ελάχιστης.

κέντρο μάζας (σώματος): το σημείο στο οποίο μπορεί να θεωρηθεί συγκεντρωμένη όλη η μάζα ενός σώματος.

κοιλία στάσιμου κύματος: ένα σημείο που ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει σχηματίζεται στάσιμο κύμα.

κρίσιμη γωνία: η μέγιστη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφανών υλικών για την οποία το φως περνάει από το πρώτο υλικό στο δεύτερο στο οποίο το φως διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

κρούση κεντρική: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

κύμα μηχανικό: μια διαταραχή που μεταδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο.

κυματοπακέτο: κύμα περιορισμένο στο χώρο.

M

μάζα ηρεμίας: η μάζα που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

μέλαν σώμα: σώμα που απορροφά όλες τις ακτινοβολίες που πέφτουν πάνω του.

μετασχηματισμοί Lorentz: οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης και χρόνου ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση.

μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου: οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

μεταφορική κίνηση (στερεού σώματος): η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.

μήκος ηρεμίας (αντικειμένου): το μήκος ενός αντικειμένου, όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ηρεμεί.

μήκος κύματος De Broglie: το μήκος του κύματος που αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο.

μήκος κύματος: η απόσταση στην οποία φτάνει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου- η μικρότερη απόσταση δύο σημείων, στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, που βρίσκονται σε φάση.

μικροκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκη κύματος μεταξύ **1mm** και **30cm**. Χρησιμοποιούνται στα ραντάρ.

μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας: όργανο που επιτρέπει να απεικονίσουμε αγώγιμες επιφάνειες σε ατομική κλίμακα. Η λειτουργία του βασίζεται στο φαινόμενο σήραγγας.

N

νευτώνεια ρευστά: τα ρευστά στα οποία η εσωτερική τριβή είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας ροής.

O

ολική εσωτερική ανάκλαση: η ανάκλαση μιας φωτεινής δέσμης που δε συνοδεύεται από διάθλαση. Γίνεται στην επιφάνεια που διαχωρίζει ένα διαφανές μέσον από ένα άλλο με μικρότερο δείκτη διάθλασης, όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία.

ορμή (υλικού σημείου): το διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας και μέτρο ίσο με το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί το μέτρο της ταχύτητάς του.

ουράνιο τόξο: το φωτεινό τόξο που εμφανίζεται στον ουρανό, ως αποτέλεσμα της ανάκλασης και του διασκεδασμού του ηλιακού φωτός στα σταγονίδια της βροχής.

Π

poise (πουάζ): μονάδα μέτρησης του ιξώδους ενός ρευστού, ισοδύναμη με 10^{-1} Nsm^{-2} .

παροχή (σωλήνα ή ρευματικής φλέβας): το πηλίκο του όγκου dV του ρευστού που περνάει από μια διατομή του σωλήνα (ή της φλέβας) σε χρόνο dt προς το χρόνο αυτό.

περίοδος (φαινομένου): το πηλίκο του χρόνου μέσα στον οποίο ολοκληρώνονται N εναλλαγές του φαινομένου με τον αριθμό N - ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικές όμοιες φάσεις του φαινομένου.

πλάγια κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε τυχαία διεύθυνση.

πλαστική κρούση: η κρούση που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων.

ποζιτρόνιο: το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου - σωματίδιο με μάζα ίση με τη μάζα του ηλεκτρονίου και φορτίο $+e$.

πυρηνική σύντηξη: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας πυρήνες μικρού ατομικού αριθμού συντηκονται και δίνουν βαρύτερους πυρήνες, με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνική σχάση: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας ένας πυρήνας μεγάλου ατομικού αριθμού χωρίζεται σε δυο πυρήνες μικρότερου ατομικού αριθμού με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνικός αντιδραστήρας: η διάταξη στην οποία πραγματοποιούνται ελεγχόμενες πυρηνικές αντιδράσεις.

P

ραδιοκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα που προκύπτουν από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες.

ρευματική γραμμή: η γραμμή που συνδέει τις διαδοχικές θέσεις ενός μορίου του ρευστού.

ρευστά: σώματα που δεν έχουν δικό τους σχήμα - τα υγρά και τα αέρια.

ροπή αδράνειας (ως προς άξονα): το μέτρο της αδράνειας των σωμάτων στη στροφική κίνηση - ορίζεται

ως το άθροισμα $\sum m_i \cdot r_i^2$, όπου m_i μια στοιχειώδης μάζα του σώματος και r_i η απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς άξονα): διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση του άξονα και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της συνιστώσας της δύναμης που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα επί την απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς σημείο): διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το σημείο και ο φορέας της δύναμης και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του σημείου από τον φορέα της δύναμης.

Σ

σταθερά απόσβεσης: η σταθερά αναλογίας στη σχέση που συνδέει τη δύναμη η οποία προκαλεί την απόσβεση μιας ταλάντωσης με την ταχύτητα του ταλαντωτή.

στάσιμο κύμα: η κίνηση που κάνει ένα μέσο στο οποίο διαδίδονται ταυτόχρονα, με αντίθετη φορά, δυο κύματα της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους.

στιγμιότυπο κύματος: η εικόνα που παρουσιάζει μια χρονική στιγμή το ελαστικού μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα - η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x,t)$ για ορισμένη τιμή του t .

στρόβιλοι: περιοχές στις οποίες το ρευστό κάνει περιστροφική κίνηση.

στροφική κίνηση: η κίνηση ενός στερεού γύρω από άξονα- η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

στροφορμή στερεού σώματος: το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών τμημάτων που απαρτίζουν το στερεό.

στροφορμή συστήματος σωμάτων: το άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

στροφορμή υλικού σημείου (που κάνει κυκλική κίνηση): διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς με μέτρο το γινόμενο του μέτρου της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα της τροχιάς του.

στρωτή ροή: η κίνηση ενός ρευστού, όταν δε σχηματίζονται στρόβιλοι.

συμβολή κυμάτων: η ταυτόχρονη διάδοση δυο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου.

συμβολόμετρο: όργανο που μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε με μεγάλη ακρίβεια τη θέση των κροσσών συμβολής του φωτός.

σύνθεση ταλαντώσεων: η μελέτη της κίνησης ενός σώματος που μετέχει σε περισσότερες από μια ταλαντώσεις.

συντονισμός: το φαινόμενο κατά το οποίο ένα σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με το μέγιστο πλάτος.

συστολή του μήκους: Η φαινομενική σμίκρυνση ενός σώματος που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

συχνότητα κατωφλίου: η ελάχιστη συχνότητα που πρέπει να έχει μια φωτεινή δέσμη για να προκαλέσει εκπομπή φωτοηλεκτρονίων από ένα μέταλλο.

συχνότητα (φαινομένου): ο αριθμός των επαναλήψεων του φαινομένου στη μονάδα του χρόνου.

Τ

ταλάντωση (μηχανική): Παλινδρομική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας.

πλάτος ταλάντωσης: η μεγαλύτερη τιμή της απομάκρυνσης του ταλαντωτή.

τάση αποκοπής: η τιμή της τάσης μεταξύ των ηλεκτροδίων ενός φωτοκύτταρου για την οποία διακόπτεται το ρεύμα.

τυρβώδης ροή: η ροή ενός ρευστού όταν σχηματίζονται στρόβιλοι.

Υ

υδροστατική πίεση: η πίεση των υγρών που οφείλεται στο βάρος τους.

υπεριώδης ακτινοβολία: αόρατη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος από **60 nm** μέχρι **380 nm**.

Φ

φαινόμενο Compton: ο σκεδασμός της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τα σωματίδια της ύλης. Συνοδεύεται από αύξηση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας.

φαινόμενο Doppler: η εμφάνιση διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα του εκπεμπόμενου κύματος και της συχνότητας που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής όταν μεταβάλλεται η απόστασή του από την πηγή του κύματος.

φαινόμενο σήραγγας: η διέλευση σωματιδίων μέσα από ένα φράγμα δυναμικού χωρίς να έχουν την απαραίτητη ενέργεια, όπως απαιτεί η κλασική θεωρία.

φωτοηλεκτρικό φαινόμενο: η απόσπαση ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο όταν στην επιφάνειά του προσπίπτει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατάλληλης συχνότητας.

φλέβα: το σχήμα που ορίζεται από τις ρευματικές γραμμές που αντιστοιχούν στα σημεία του περιγράμματος μιας επιφάνειας που βρίσκεται στη ροή του ρευστού.

φώραση: η διαδικασία με την οποία διαχωρίζεται το μικροφωνικό ρεύμα από το φέρον κύμα.

φωτοκύτταρο: διάταξη με την οποία οι αυξομειώσεις στην ένταση μιας φωτεινής δέσμης, κατάλληλης συχνότητας, μετατρέπονται σε αυξομειώσεις ηλεκτρικού ρεύματος.

φωτόνιο: το κβάντο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Σωματίο μηδενικής μάζας ηρεμίας.

Αλφαβητικό Ευρετήριο

Στο Αλφαβητικό Ευρετήριο τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε και ΣΤ δηλώνουν τον 1ο, 2ο, 3ο, 4ο, 5ο και 6ο τόμο αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί αναφέρονται στην πρώτη από τις δύο ενδείξεις που αναγράφονται σε κάθε σελίδα.

Α

αδρανειακό σύστημα	Δ' 24
ακτίνες Röntgen	Β' 60, ΣΤ' 21
ακτίνες γ	Β' 60
ακτίνες Χ	Β' 60, ΣΤ' 21
ακτινοβολία μέλανος σώματος	ΣΤ' 6
ανάκλαση του φωτός	Β' 60
ανάλυση του φωτός	Β' 79
αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας	Ε' 15
απεριοδική ταλάντωση	Α' 37
απομάκρυνση	Α' 13
αρμονική ταλάντωση	Α' 13
αρχή διατήρησης της στροφορμής	Γ' 100
αρχή της αβεβαιότητας	ΣΤ' 32
αρχή του Pascal	Γ' 8
αρχική φάση	Α' 17

Γ

γενική θεωρία της σχετικότητας	Ε' 59
γωνία εκτροπής	Β' 81
γωνιακή επιτάχυνση	Γ' 56
γωνιακή συχνότητα	Α' 11

Δ

δείκτης διάθλασης (υλικού)	Β' 66
δεσμός στάσιμου κύματος	Β' 35
διάθλαση του φωτός	Β' 65

διακρότημα	A' 61 - 63
διάμηκες κύμα	B' 10
διαμόρφωση κατά πλάτος	B' 49
διασκεδασμός (του φωτός)	B' 80
διαστολή του χρόνου	A' 18
διαφορικό	Γ' 176
δίδυμη γένεση	E' 45
διεγέρτης	A' 44
δύναμη επαναφοράς	A' 20

E

εγκάρσιο κύμα	B' 9
έκκεντρη κρούση	Δ' 10
ελαστική κρούση	Δ' 13
ελεύθερη ταλάντωση	A' 44
έλλειμμα μάζας	E' 45
ενέργεια σύνδεσης	E' 48
ενέργεια ηρεμίας	E' 44
εξαναγκασμένη ταλάντωση (ηλεκτρ.)	A' 50
εξαναγκασμένη ταλάντωση (μηχαν.)	A' 43
εξίσωση Schrödinger	ΣΤ' 40
εξίσωση Bernoulli	Γ' 18
εξίσωση κύματος	B' 15
εξίσωση στάσιμου κύματος	B' 33
εξίσωση συνέχειας	Γ' 16
εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	Γ' 165
επαλληλία κυμάτων	B' 18
έργο εξαγωγής	ΣΤ' 17
εσωτερική τριβή	Γ' 31

H

ηλεκτρική ταλάντωση	A' 26
ηλεκτρομαγνητικό κύμα	B' 40
ηχοκαρδιογράφημα Doppler	Δ' 83

Θ

θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης Γ' 85

θεώρημα Steiner Γ' 81

θεώρημα Torricelli Γ' 26

Ι

ιδανικά υγρά Γ' 12

ιδιομήκος Ε' 25

ιδιοσυχνότητα Α' 44

ιδιόχρονος Ε' 18

ιξώδες Γ' 31

Κ

καμπύλωση του χωροχρόνου Ε' 65

κβαντικός αριθμός ΣΤ' 11

κέντρο μάζας (συστήματος) Δ' 37 - 39

κέντρο μάζας (σώματος) Γ' 58

κιβώτιο ταχυτήτων Γ' 170

κίνηση του κέντρου μάζας Δ' 38

κινητική ενέργεια:

- στην αρμονική ταλάντωση Α' 20

- στη στροφική κίνηση Γ' 109

κοιλία στάσιμου κύματος Β' 35

κρίσιμη γωνία Β' 74

κρούση κεντρική Δ' 9

κύλιση τροχού Γ' 57

κύμα ελαστικότητας Β' 7

κυματοπακέτο ΣΤ' 33

κυματοσυνάρτηση ΣΤ' 40

Μ

μάζα ηρεμίας Ε' 44

μέλαν σώμα ΣΤ' 8

μετασχηματισμοί Lorentz Ε' 28, Ε' 35

μετασχηματισμοί έντασης	E' 52
ηλεκτρικού - μαγνητικού πεδίου	Δ' 33
μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου	Γ' 53
μεταφορική κίνηση	E' 25
μήκος ηρεμίας	B' 12
μήκος κύματος	ΣΤ' 29
μήκος κύματος De Broglie	B' 7
μηχανικά κύματα	B' 58
μικροκύματα	ΣΤ' 70
μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας	E' 21
μιόνιο	

N

νευτώνεια ρευστά	Γ' 33
νόμος μετατόπισης του Wien	ΣΤ' 9
νόμος του Snell	B' 66

O

ολική εσωτερική ανάκλαση	B' 74
ουράνιο τόξο	B' 83

Π

poise (πουάζ)	Γ' 33
παράδοξο των διδύμων	E' 88
παροχή	Γ' 14
πείραμα Michelson- Morley	E' 8
περίοδος	A' 10
περίοδος ηλεκτρικής	
ταλάντωσης	A' 31
πηγάδι δυναμικού	
- με άπειρο βάθος	ΣΤ' 45
- με ορισμένο βάθος	ΣΤ' 48
πλάγια κρούση	Δ' 10, Δ' 18

πλαστική κρούση	Δ' 13, Δ' 21
πλάτος ταλάντωσης	Α' 13
ποζιτρόνιο	Ε' 45
προώθηση πυραύλου	Δ' 45
P	
ραδιοκύματα	Β' 55
ρευματική γραμμή	Γ' 12
ρευστά	Γ' 6
ροπή αδράνειας (ως προς άξονα)	Γ' 76
ροπή δύναμης (ως προς άξονα)	Γ' 63
ροπή δύναμης (ως προς σημείο)	Γ' 66
Σ	
σταθερά απόσβεσης	Α' 35
σταθερά επαναφοράς	Α' 20
στάσιμο κύμα	Β' 30
στιγμιότυπο κύματος	Β' 16
στροφική κίνηση	Γ' 55
στροφορμή στερεού σώματος	Γ' 96
στροφορμή συστήματος	Γ' 99
στροφορμή υλικού σημείου	Γ' 94
στρωτή ροή	Γ' 12
συμβολή κυμάτων	Β' 20
συμβολόμετρο	Ε' 10
σύνθεση ταλαντώσεων	Α' 56
σύνθετη κίνηση στερεού	Γ' 56
συνθήκη ισορροπίας στερεού	Γ' 72
συνθήκη κανονικοποίησης	ΣΤ' 41
συντονισμός	Α' 46
συντονισμού εφαρμογές	Α' 52

σύστημα αναφοράς	
κέντρου μάζας	Δ' 37
συστολή του μήκους	Ε' 25
συχνότητα	Α' 11
συχνότητα κατωφλίου	ΣΤ' 20
σχετικιστική ορμή	Ε' 42
σχετικιστική ενέργεια	Ε' 44
σωλήνας	Γ' 13

T

ταλάντωση (μηχανική)	Α' 12
τάση αποκοπής	ΣΤ' 16

Y

υδροστατική πίεση	Γ' 7
υπέρθυση κυμάτων	Β' 18
υπεριώδης ακτινοβολία	Β' 59

Φ

φαινόμενο Compton	ΣΤ' 21
φαινόμενο Doppler	Δ' 47
φαινόμενο σήραγγας	ΣΤ' 51
φάση ταλάντωσης	Α' 17
φέρουσα συχνότητα	Β' 49
φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση	Α' 42
φθίνουσα ταλάντωση	Α' 34
φλέβα ρευματική	Γ' 12, Γ' 13
φώραση	Β' 53
φωτοηλεκτρικό φαινόμενο	ΣΤ' 14
φωτοκύτταρο	ΣΤ' 14
φωτόνιο	ΣΤ' 17

X

χωροχρόνος	Ε' 16
------------	-------

Βιβλιογραφία

1. Πανεπιστημιακή Φυσική Hugh D. Young Εκδόσεις Παπαζήση.
2. Physics for scientists & engineers Serway.
3. Φυσική Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
4. Halliday - Resnick - Walker Fundamentals of Physics Extended (fifth edition).
5. F.J.Keller - W.E.Gettys - M.J.Skove Physics (second edition).
6. Κεφάλαια σύγχρονης Φυσικής Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
7. Οι έννοιες της Φυσικής Paul G. Hewitt Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
8. Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική David J. Griffiths Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
9. Μαθήματα Φυσικής (Ηλεκτρισμός - Μαγνητισμός) πανεπιστήμιο Berkley Edward Purcell μετάφραση και έκδοση ομάδα καθηγητών ΕΜΠ.
10. Κλασσική και σύγχρονη Φυσική Kenneth W. Ford Εκδόσεις Πνευματικός.
11. Κβαντομηχανική Ι. Στέφανος Τραχανάς Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
12. Η Φυσική σήμερα Ε.Ν. Οικονόμου Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
13. Η εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική Einstein - Infeld Εκδόσεις Δωδώνη.

- 14. Η ελαφρότητα της Βαρύτητας Jayant Narlikar
Εκδόσεις Τροχαλία.**
- 15. Ιστορία της Φυσικής Emilio Segre Εκδόσεις
Δίαυλος.**
- 16. Φυσική Β΄ Ενιαίου Λυκείου (ειδίκευση) Υπουργείο
Παιδείας Κύπρος.**
- 17. Κ.Δ. Αλεξόπουλος - Δ.Ι. Μαρίνος Γενική Φυσική.
Εκδόσεις ΟΛΥΜΠΙΑ.**
- 18. Κβαντικό σύμπαν Tony Hey & Patrick Walters,
εκδόσεις Κάτοπτρο.**
- 19. 3000 solved problems in physics Alvin Halpern,
Ph.D Schaum's Mc Graw Hill.**
- 20. Echocardiography Harvey Feigenbaum fourth
edition Lea & Febigep.**
- 21. String and sticky tape experiments by R.D.Edge.**
- 22. Turning the World Inside Out by Robert Ehrlich.**

Περιεχόμενα

3 Ρευστά σε κίνηση

Εισαγωγή	6
Υγρά σε ισορροπία	6
Ρευστά σε κίνηση	12
Διατήρηση ύλης και εξίσωση συνέχειας	16
Διατήρηση ενέργειας και εξίσωση Bernoulli	18
Η τριβή στα ρευστά	31
Σύνοψη	34
Δραστηριότητες	35
Ερωτήσεις	37
Προβλήματα	45

4 Μηχανική στερεού σώματος

Εισαγωγή	52
Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων	53
Ροπή δύναμης	62
Ισορροπία στερεού σώματος	72
Ροπή αδράνειας	76
Θεμελιώδης νόμος στρωφικής κίνησης	85
Στροφορμή	94
Διατήρηση στροφορμής	100
Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής	107

Έργο κατά τη στροφική κίνηση	110
Σύνοψη	118
Δραστηριότητες	120
Ερωτήσεις	124
Ασκήσεις	140
Προβλήματα	154
Ένθετο. Εξωτερικό γινόμενο	165
Ένθετο. Κιβώτιο ταχυτήτων και μετάδοση κίνησης στο αυτοκίνητο	170

Παραρτήματα

Πίνακες σταθερών	179
Λεξιλόγιο όρων	182
Αλφαβητικό ευρετήριο	195
Βιβλιογραφία	201



Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.