

ΦΥΣΙΚΗ

**Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Υγείας**

**Γ' τάξη
Γενικού Λυκείου**

ΤΟΜΟΣ 5ος

**Σημείωση: Στο Ευρετήριο Όρων τα
γράμματα Α, Β, Γ,..., Θ δηλώνουν
αντίστοιχα τον 1ο, 2ο, 3ο,...,9ο τόμο.**

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**Α. ΙΩΑΝΝΟΥ - Γ. ΝΤΑΝΟΣ
Α. ΠΗΤΤΑΣ - Σ. ΡΑΠΤΗΣ**

**Η συγγραφή και η επιστημονική επι-
μέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθη-
κε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού
Ινστιτούτου**

ΦΥΣΙΚΗ

**Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών
Σπουδών και Σπουδών Υγείας**

**Γ' τάξη
Γενικού Λυκείου**

ΤΟΜΟΣ 5ος

Ι. Τ. Υ. Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Συγγραφείς:

**Αλέκος Ιωάννου, Γιάννης Ντάνος
Άγγελος Πήττας, Σταύρος Ράπτης**

Κριτές:

**Αντωνίου Νικόλαος, καθηγητής Πα-
νεπιστημίου Αθηνών, ως πρόεδρος
Ευθυμιόπουλος Θωμάς, Αν. Καθη-
γητής Πανεπιστημίου Κρήτης**

**Αρναουτάκης Ιωάννης, Σχολικός
Σύμβουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης**

**Καρανίκας Ιωάννης, Σχολικός
Σύμβουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης**

**Πρίντζας Γεώργιος, Σχολικός Σύμ-
βουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης**

**Κοτρόζου Αικατερίνη, Φυσικός,
M.Sc. Καθηγήτρια Δ/θμιας Εκ/σης**

**Φωτάκης Ιωάννης, Καθηγητής
ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης».**

Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ.

**Υποπρόγραμμα 1: ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕ-
ΧΝΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

**Μέτρο 1.1: ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟ-
ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥ-
ΣΗΣ**

Ενέργεια 1.1α: Προγράμματα-βιβλία

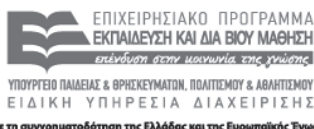
**ΕΡΓΟ: ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΚΣΥΓ-
ΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ-
ΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙ-
ΣΤΗΜΩΝ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΑΡΑΓΩ-
ΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ**

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**Η αξιολόγηση, η κρίση
των προσαρμογών και
η επιστημονική επιμέλεια
του προσαρμοσμένου βιβλίου
πραγματοποιείται από τη Μονάδα
Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου
Εκπαιδευτικής Πολιτικής.**

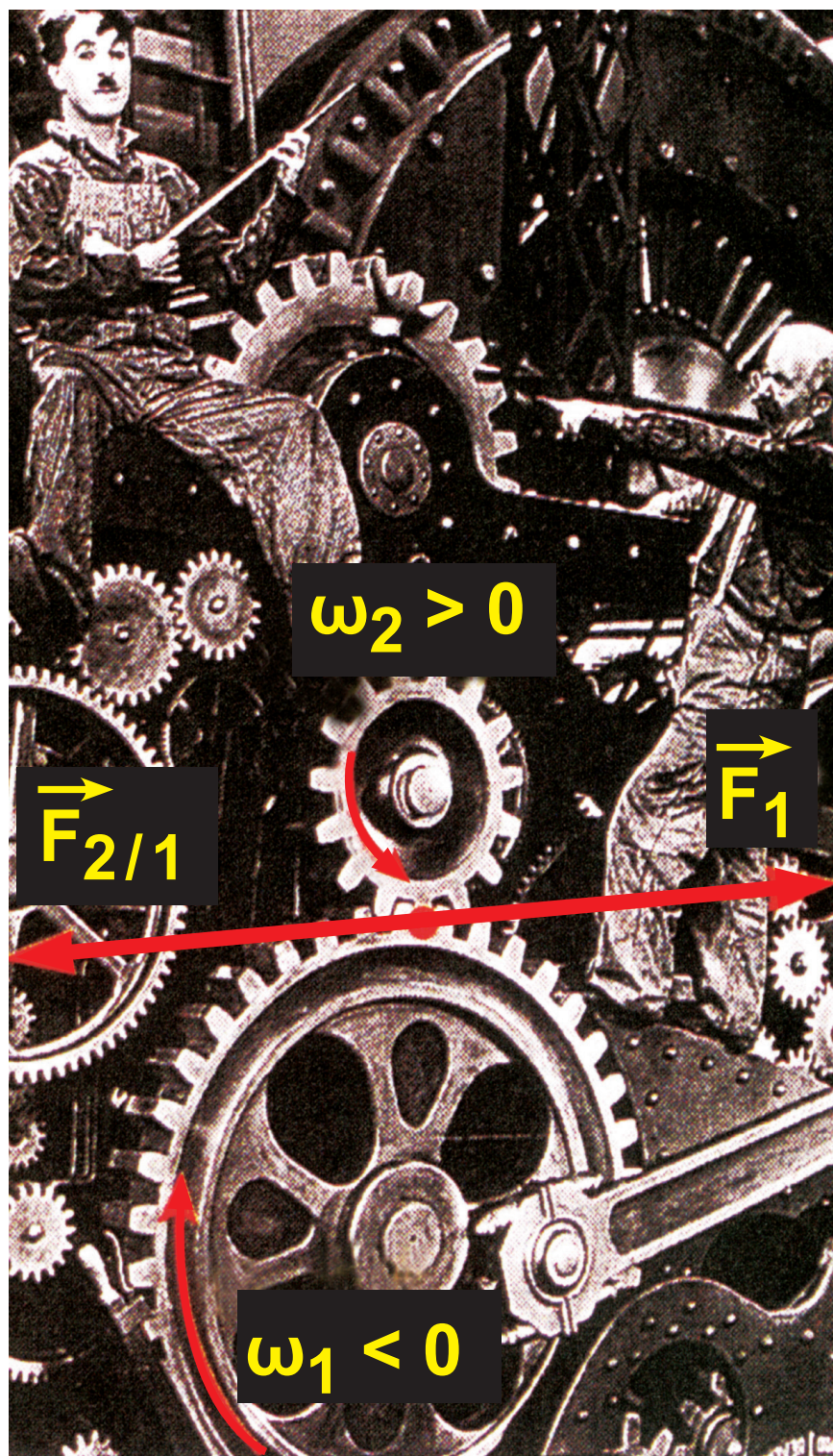
**Η προσαρμογή του βιβλίου
για μαθητές με μειωμένη όραση
από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
πραγματοποιείται με βάση
τις προδιαγραφές που έχουν
αναπτυχθεί από ειδικούς
εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ



(4 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ)



Ροπή
δύναμης

Ισορροπία
στερεού

Ροπή
αδράνειας

Στροφορμή

Κινητική
ενέργεια
λόγω περι-
στροφής

Σύνοψη

Ασκήσεις

(4.1.) Εισαγωγή

Στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε τη μελέτη της κίνησης των σωμάτων, αντιμετωπίσαμε ως τώρα τα σώματα ως **υλικά σημεία**. Το υλικό σημείο ορίζεται ως σώμα που έχει όλες τις άλλες ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις.

Στην πραγματικότητα όλα τα σώματα έχουν διαστάσεις και γι' αυτό, εκτός από το να εκτελούν μεταφορική κίνηση, μπορούν να αλλάζουν προσανατολισμό στο χώρο, να εκτελούν δηλαδή περιστροφική (στροφική) ή, ακόμη, σύνθετη κίνηση, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

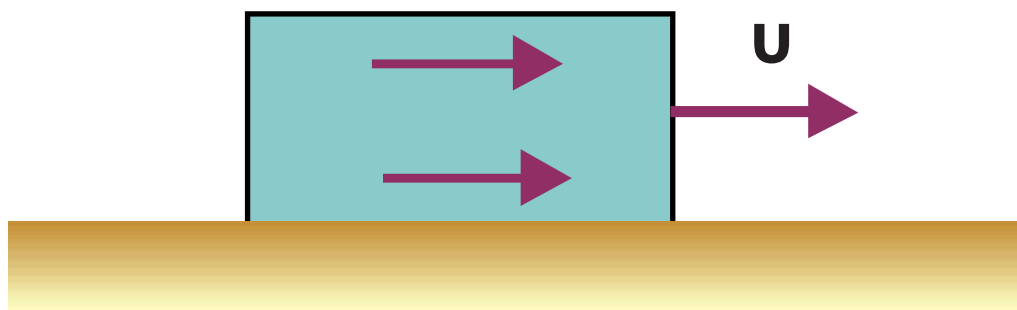
Αν σε κάποιο στερεό σώμα ασκηθούν δυνάμεις το σώμα παραμορφώνεται, λίγο ή πολύ και μόνιμα ή προσωρινά. Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται **μηχανικά στερεά**.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της ισορροπίας και της κίνησης μηχανικών στερεών. Όπου αναφερόμαστε σε στερεό θα εννοούμε μηχανικό στερεό.

(4.2.) Οι Κινήσεις των Στερεών Σωμάτων

Ένα στερεό σώμα μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική και σύνθετη κίνηση.

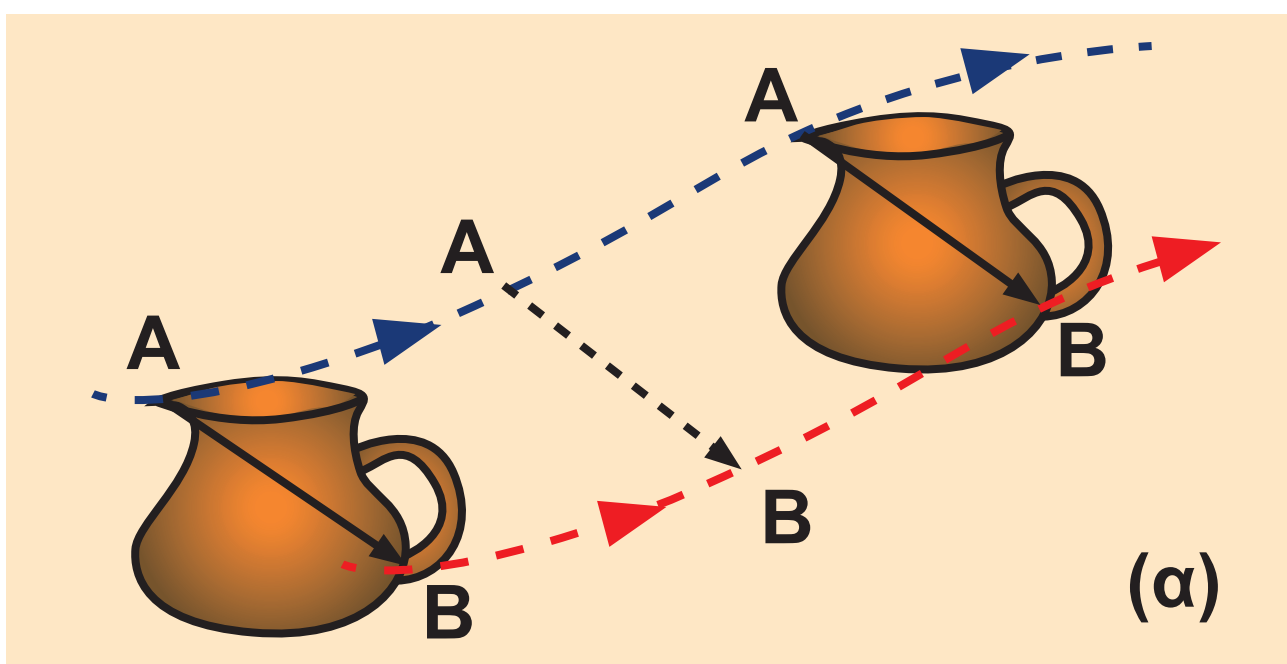
Στη μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Παράδειγμα τέτοιας κίνησης είναι η κίνηση ενός κιβωτίου που ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στη μεταφορική κίνηση των στερεών ισχύουν οι νόμοι που διέπουν την κίνηση των υλικών σημείων.

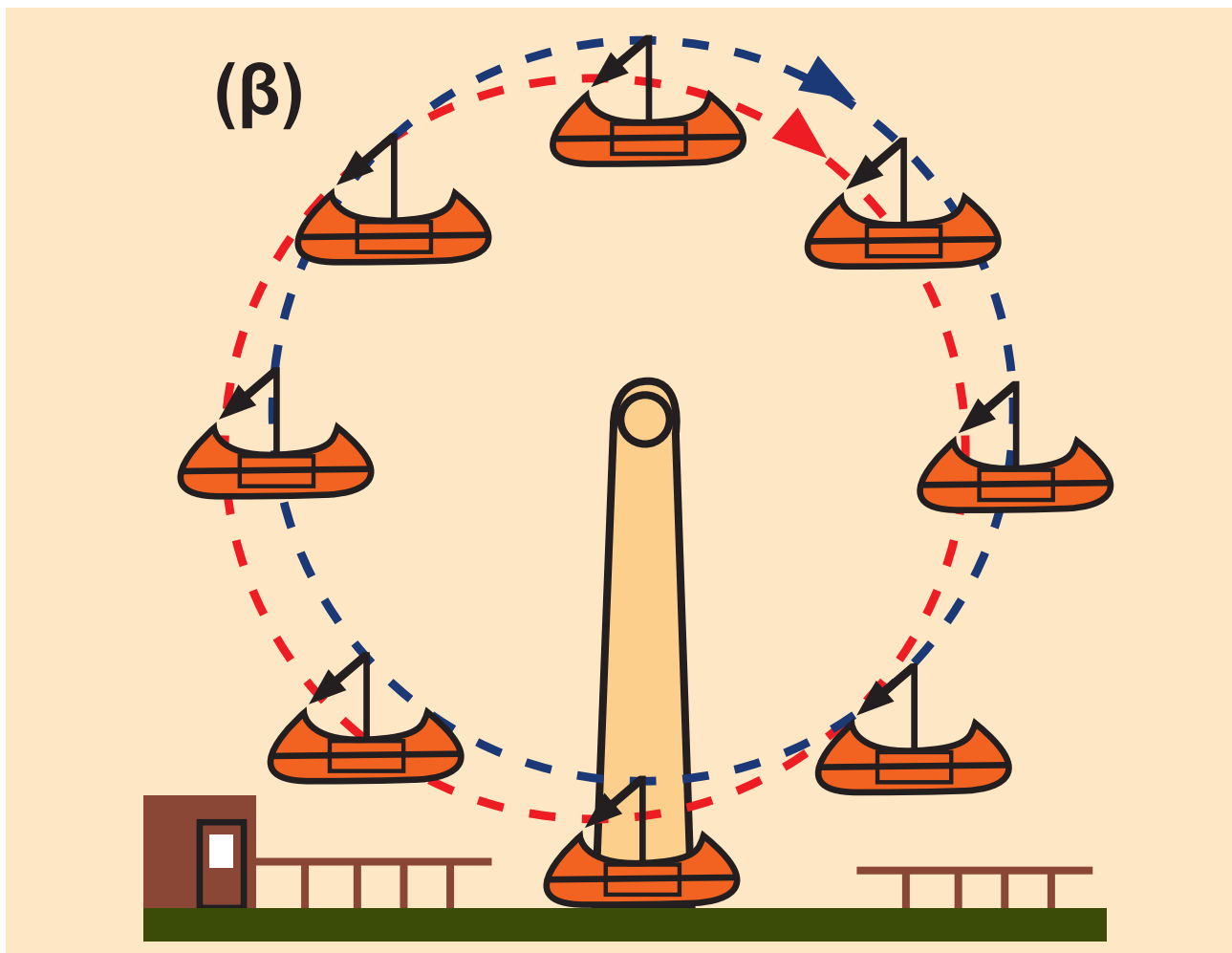


Το κιβώτιο εκτελεί μεταφορική κίνηση. Όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα.

Σχήμα 4-1.

Μεταφορική μπορεί να είναι και μια καμπυλόγραμμη κίνηση. Το σώμα του **σχήματος 4.2α** κάνει μεταφορική κίνηση αν η ταχύτητα του σημείου **A** είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου **B**. Αυτό είναι δυνατό. Όταν ένα στερεό κάνει μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του. Μεταφορική είναι και η κίνηση που εκτελούν οι θαλαμίσκοι στον τροχό του λούνα πάρκ (**σχ. 4.2β**).





(α) Η τροχιά κάθε σημείου είναι καμπύλη. Η κίνηση του σώματος είναι μεταφορική αφού το ευθύγραμμο τμήμα **AB** παραμένει διαρκώς παράλληλο προς τον εαυτό του. (β) Ο τροχός του λούνα πάρκ κάνει στροφική κίνηση. Ωστόσο κάθε θαλαμίσκος κάνει μεταφορική κίνηση.

Σχήμα 4-2.

Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό. Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία – **ο άξονας περιστροφής** – που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση.

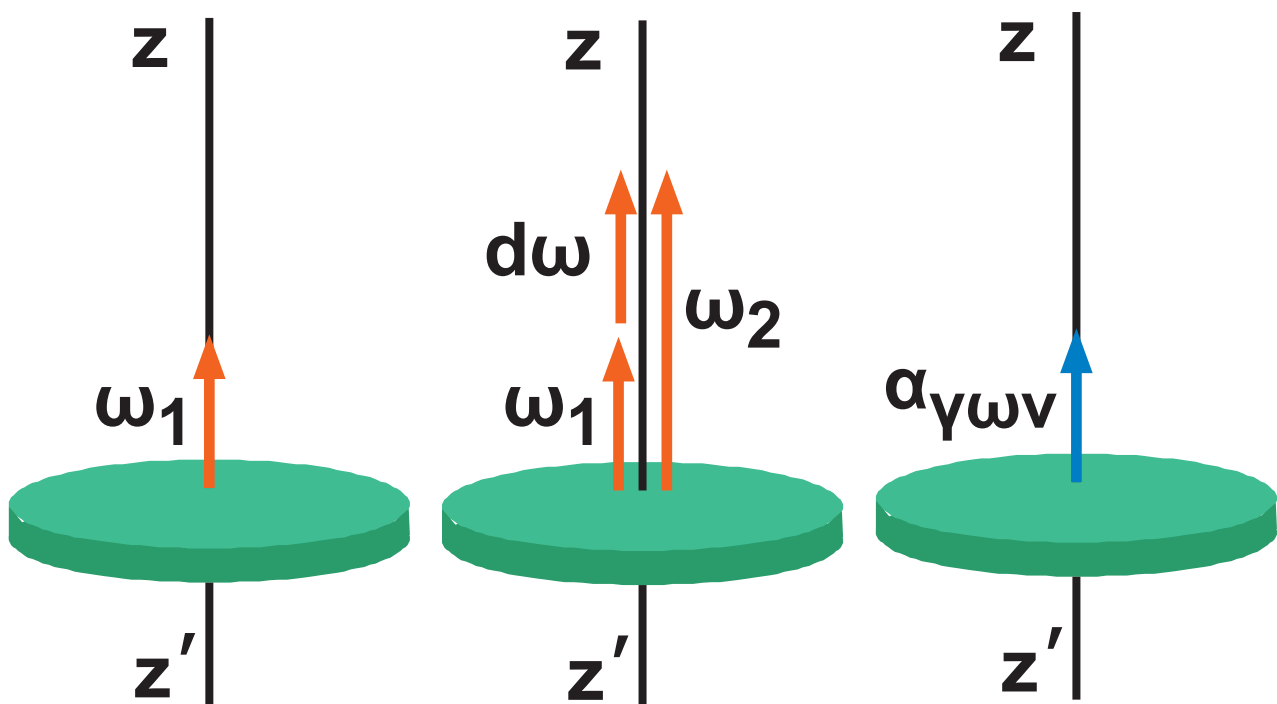
Κατάλληλο μέγεθος για να περιγράψει το πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα σώμα κάποια στιγμή, είναι η **γωνιακή ταχύτητα ω** . Η γωνιακή ταχύτητα είναι διάνυσμα πάνω στον άξονα περιστροφής.

Στο σώμα που στρέφεται, κάθε σημείο κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμική ταχύτητα που υπολογίζεται από τη σχέση **$u = \omega r$** , όπου **r** η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

Αν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που περιστρέφεται είναι

σταθερή θα λέμε ότι κάνει **ομαλή
στροφική κίνηση**.

Ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος του **σχήματος 4.3** τη χρονική στιγμή **t_1** έχει γωνιακή ταχύτητα **ω_1** ενώ τη χρονική στιγμή **$t_2 = t_1 + dt$** η γωνιακή του ταχύτητα γίνεται **$\omega_2 = \omega_1 + d\omega$** .



(α) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αυξάνεται κατά **$d\omega$** . Ο δίσκος έχει γωνιακή επιτάχυνση **$\alpha_{γων}$** .
Σχήμα 4-3.

Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος τη στιγμή t , ονομάζεται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.

$$\alpha_{\text{γων}} = \frac{d\omega}{dt}$$

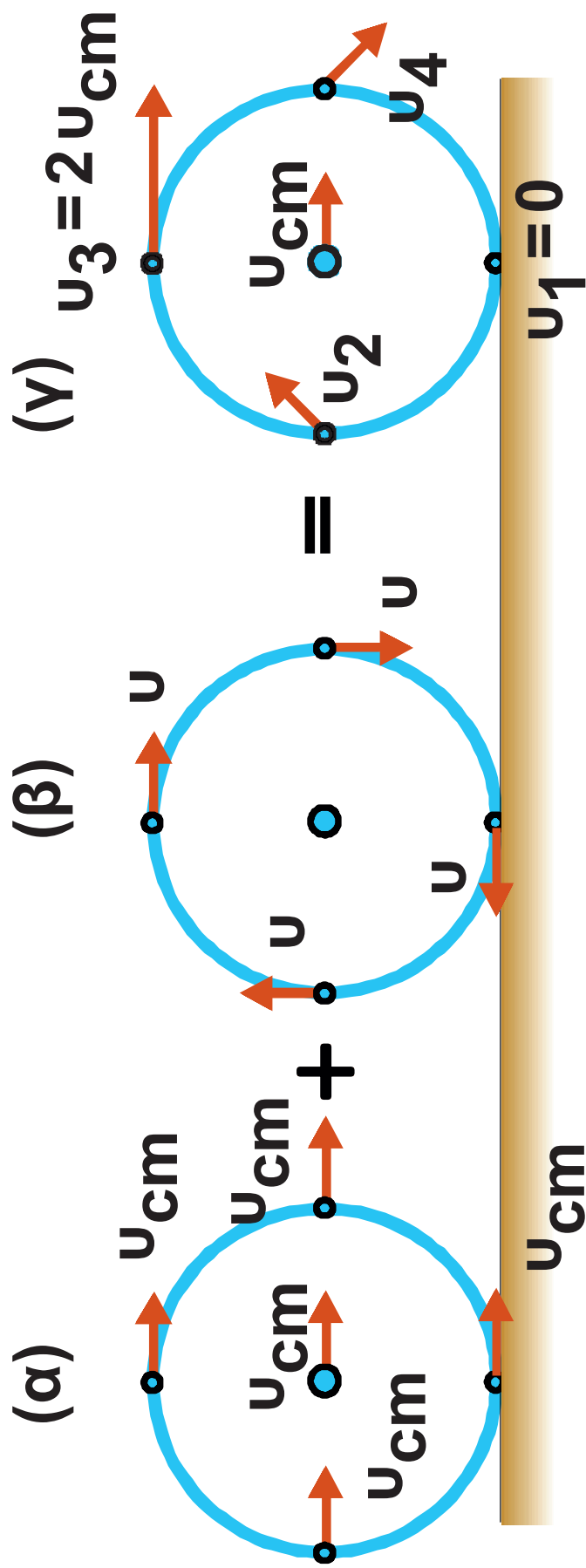
Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\omega$ και μονάδα 1 rad/s^2 .

Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει **σύνθετη κίνηση**. Τέτοια κίνηση κάνει π.χ. ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν κινείται το αυτοκίνητο. Όπως συμβαίνει και με το υπόλοιπο αυτοκίνητο, ο τροχός αλλάζει θέση στο χώρο (μεταφορική κίνηση) και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Σύνθετη κίνηση είναι

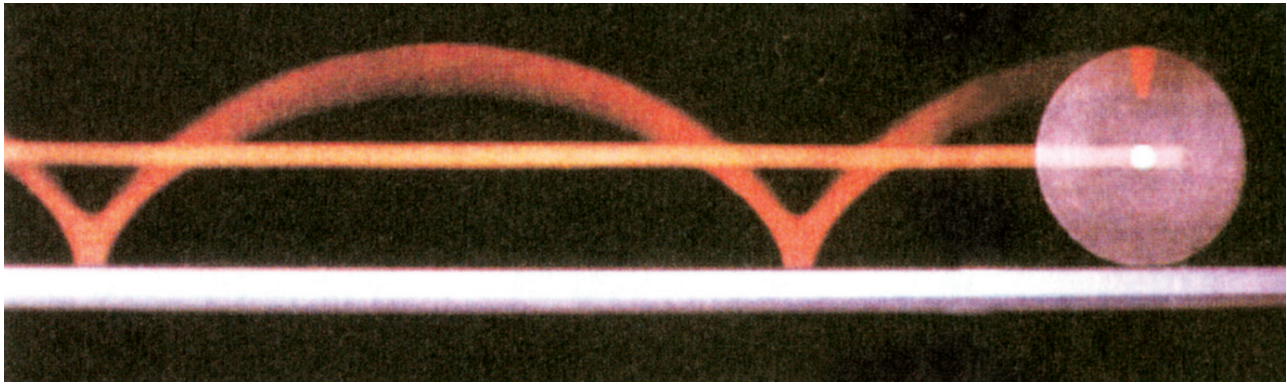
και η κίνηση που κάνει μια ρακέτα αν κρατώντας τη από τη λαβή την πετάξουμε ψηλά. **Η σύνθετη κίνηση μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.**

Το **σχήμα 4.4** δείχνει ένα τροχό που κυλίνεται. Η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής κίνησης, στην οποία όλα τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή, έχουν την ίδια ταχύτητα u_{cm} (**σχ. 4.4α**) και μιας στροφικής κίνησης, γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του τροχού και είναι κάθετος σ' αυτόν (**σχ. 4.4β**). Στη στροφική κίνηση όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητες με το ίδιο μέτρο u , εφαπτόμενες στην κυκλική τους

τροχιά. Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας u_{cm} , λόγω μεταφορικής κίνησης και της u λόγω της στροφικής (σχ. 4.4γ). Όπως γνωρίζουμε για την ταχύτητα u λόγω στροφικής κίνησης ισχύει $u = \omega R$. Θα δούμε παρακάτω ότι ισχύει και $u_{cm} = \omega R$, δηλαδή $u = u_{cm}$.



Η κύλιση του τροχού (γ) είναι επαλληλία της μεταφο-
 ρικής κίνησης (α) και της στροφικής κίνησης (β). Η τα-
 χύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη
 της ταχύτητας που έχει λόγω μεταφορικής κίνησης
 (u_{cm}) και της ταχύτητας λόγω περιστροφής (u).
Σχήμα 4-4.



Η τροχιά ενός μικρού λαμπτήρα που τοποθετήθηκε στην περιφέρεια κυλιόμενου τροχού. Το κέντρο του τροχού κινείται ευθύγραμμα.

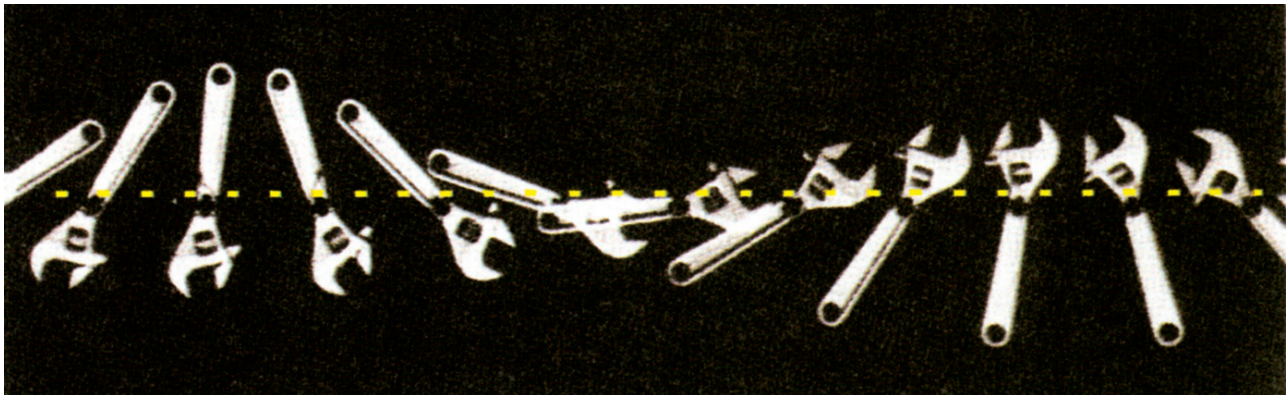
Εικόνα 4-1.

Το κέντρο μάζας.

Μια έννοια που απλοποιεί τη μελέτη του στερεού σώματος είναι η έννοια του **κέντρου μάζας** του σώματος.

Στην **εικόνα 4.2** φαίνεται η κίνηση ενός κλειδιού πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μετά από μία ώθηση που δέχτηκε. Η συνολική δύναμη

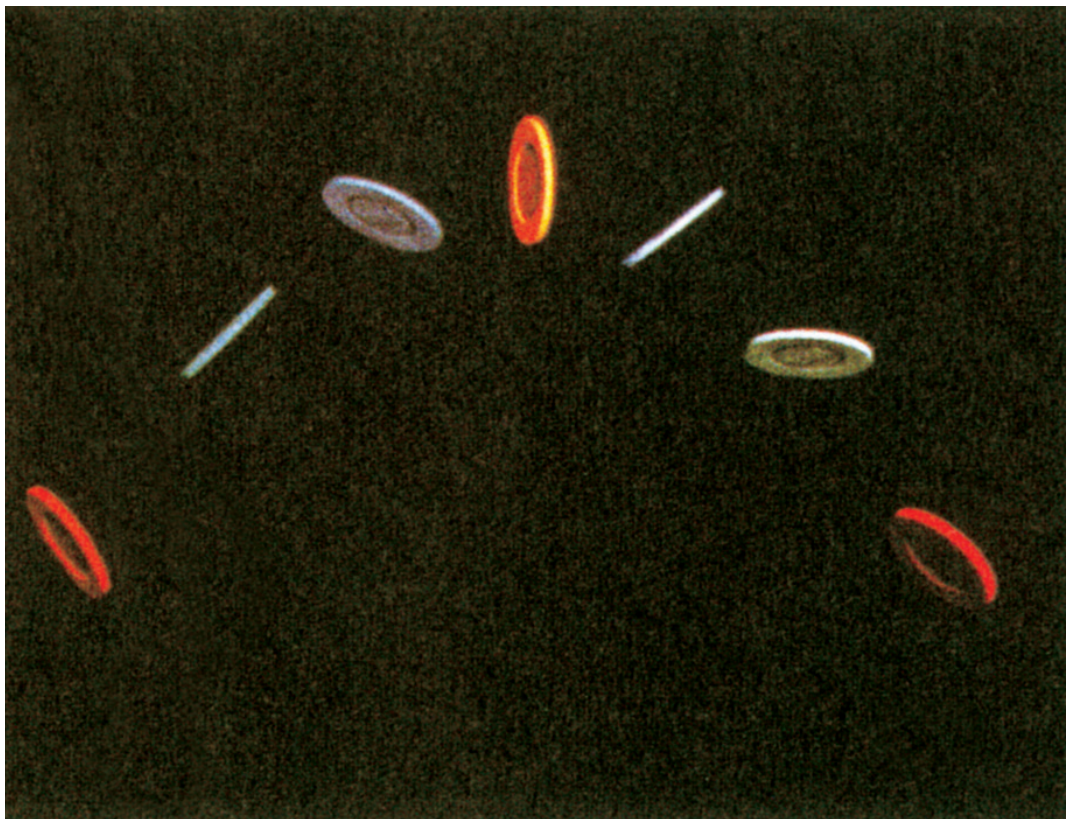
που ασκείται στο κλειδί είναι μηδέν.
Αν το κλειδί ήταν υλικό σημείο θα
έκανε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Παρατηρήστε ότι υπάρχει ένα
σημείο του που κάνει ακριβώς
τέτοια κίνηση. Το σημείο αυτό είναι
το κέντρο μάζας του κλειδιού.



Το κλειδί της φωτογραφίας κάνει
σύνθετη κίνηση. Το κέντρο μάζας
του όμως κάνει ευθύγραμμη ομαλή
κίνηση.

Εικόνα 4-2.

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.



Το κέντρο μάζας του δίσκου κινείται όπως ένα υλικό σημείο που βάλ-
λεται πλάγια.

Εικόνα 4-3.

Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Π.χ. το κέντρο μάζας ενός κύβου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, το κέντρο μάζας μιας σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας.

Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου, το κέντρο μάζας του οποίου βρίσκεται στο κέντρο του. Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο βάρους, το σημείο δηλαδή από το οποίο περνάει πάντα το βάρος του σώματος, όπως και να τοποθετηθεί.

Η κύλιση του τροχού

Ας επανέλθουμε στην κύλιση του τροχού (σχ. 4.5). Κατά την κύλιση κάθε σημείο του τροχού έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι, όταν ο τροχός σε χρόνο dt μετακινηθεί κατά ds , ένα σημείο A της περιφέρειας του θα έχει στραφεί κατά τόξο μήκους ds , στο οποίο αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία $d\theta$. Η ταχύτητα u_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού είναι

$$u_{cm} = \frac{ds}{dt} \quad (4.1)$$

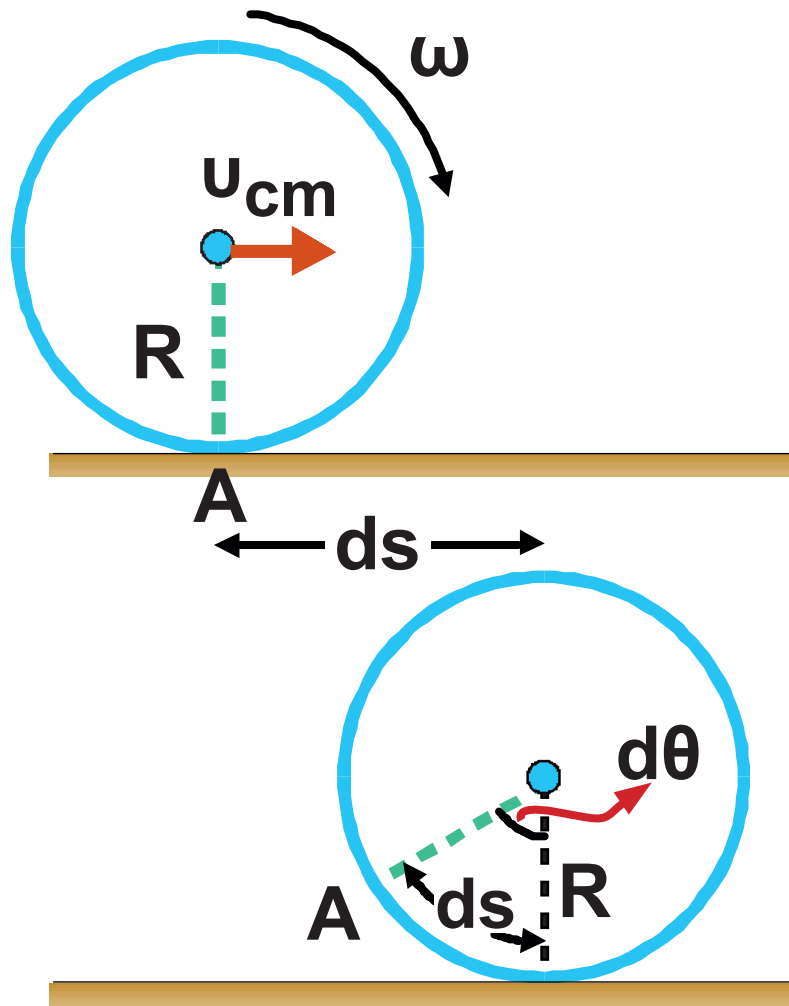
$$\text{όμως } d\theta = \frac{ds}{R} \quad \text{ή} \quad ds = R d\theta$$

αντικαθιστώντας στην (4.1) έχουμε

$$v_{cm} = R \frac{d\theta}{dt} \text{ και, επειδή } \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

τελικά παίρνουμε

$$v_{cm} = \omega R$$



Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινηθεί κατά ds , κάθε σημείο στην περιφέρειά του στρέφεται κατά το ίδιο τόξο.

Σχήμα 4-5.

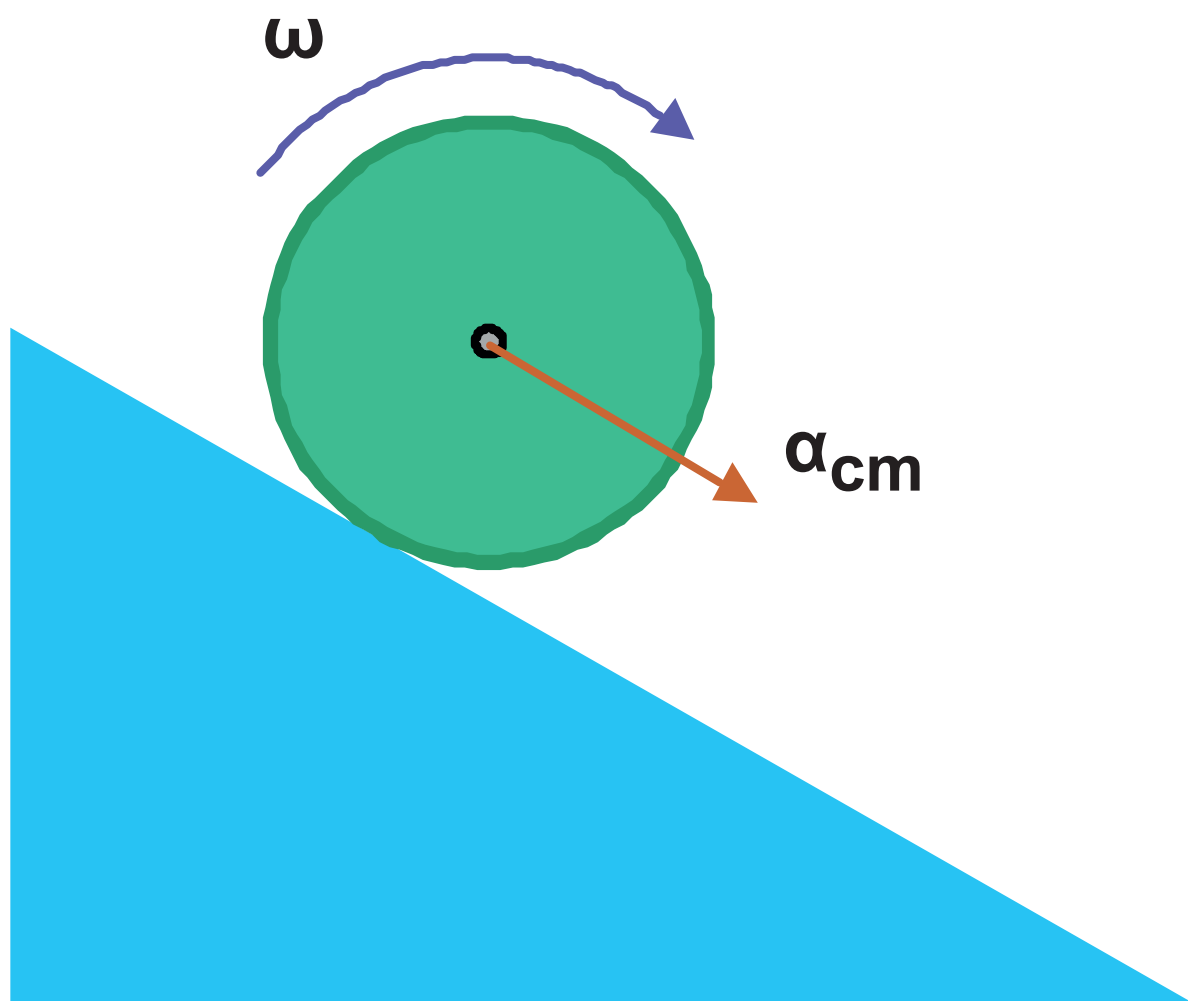
Έστω ένας τροχός που κυλίνεται πάνω σε πλάγιο επίπεδο (σχ. 4.6). Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού αυξάνεται, δηλαδή έχει γωνιακή επιτάχυνση. Το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού κάποια στιγμή είναι u_{cm} , θα ισχύει

$$u_{cm} = \omega R \text{ οπότε } \frac{du_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$$

και τελικά

$$a_{cm} = a_{γων} R$$

όπου a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και $a_{γων}$ η γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής του τροχού.

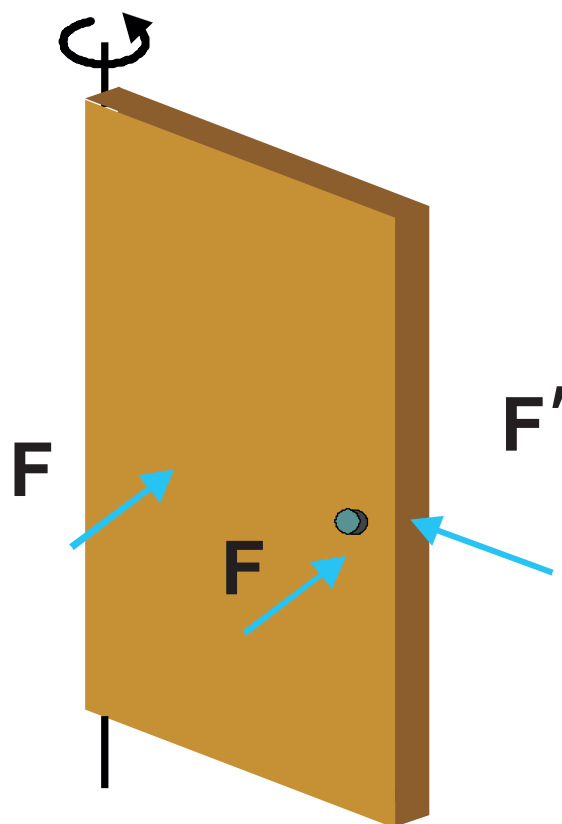


Στον τροχό που κυλάει: $\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$
Σχήμα 4-6.

(4.3.) Ροπή Δύναμης

Αν ασκήσουμε μια δύναμη σε ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα το σώμα περιστρέφεται εκτός αν ο φορέας της δύναμης περνάει από τον άξονα περιστροφής. Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι η περιστροφή που προκαλεί μια δύναμη εξαρτάται όχι μόνο από την κατεύθυνση και το μέγεθος της δύναμης αλλά και από το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη. Για να κλείσουμε μια πόρτα τη σπρώχνουμε κοντά στο πόμολο και όχι κοντά στον άξονα περιστροφής της (μεντεσέδες), γιατί ακόμα και μικρή δύναμη μπορεί να προκαλέσει στροφή της πόρτας όταν εφαρμόζεται μακριά από τον άξονα περιστροφής.

Το μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα ονομάζεται **ροπή της δύναμης** και συμβολίζεται με το ελληνικό **τ** .



Η ίδια δύναμη περιστρέφει την πόρτα πιο εύκολα όταν ασκείται μακριά από τον άξονα περιστροφής. Η F' που ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα δε μπορεί να περιστρέψει το σώμα.
Σχήμα 4-7.

A) Ροπή δύναμης ως προς άξονα

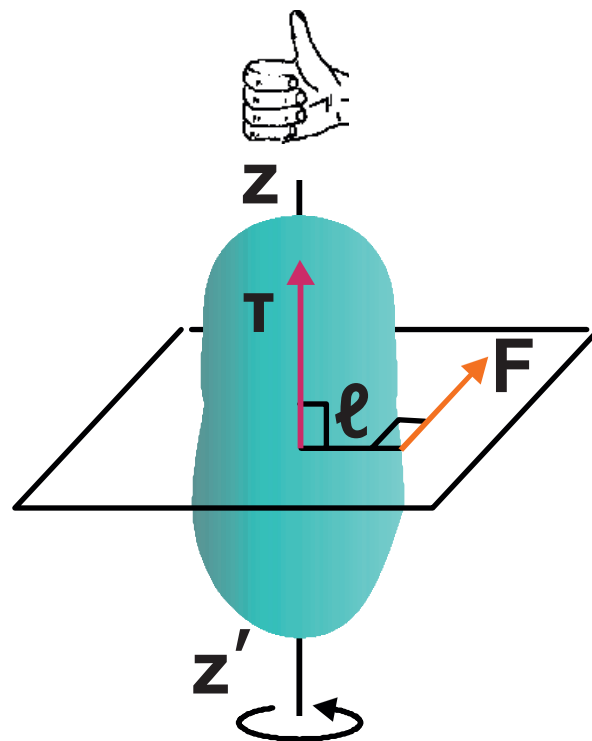
Έστω ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$. Στο σώμα ασκείται δύναμη F που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.

Ροπή της δύναμης F , ως προς τον άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση ℓ της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας).

$$\tau = F\ell$$

Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα ροπής είναι το 1 Nm .

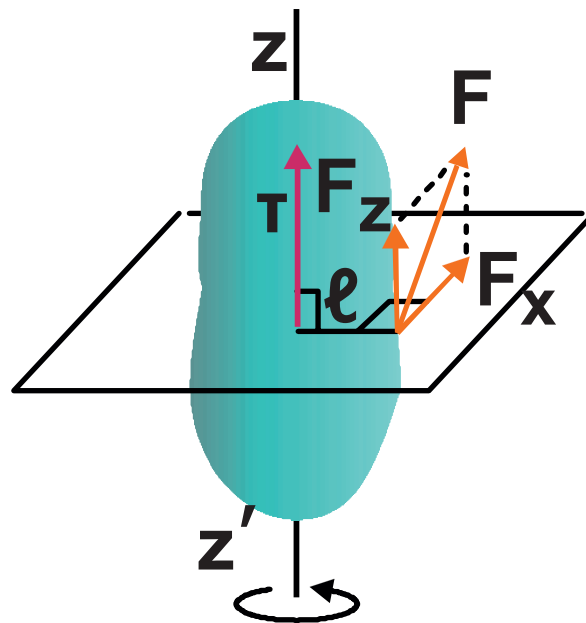
Για να προσδιορίσουμε τη φορά της ροπής κλείνουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού και τα τοποθετούμε έτσι ώστε να δείχνουν τη φορά κατά την οποία τείνει να περιστρέψει το σώμα η δύναμη. Ο αντίχειρας τότε δίνει τη φορά του διανύσματος της ροπής.



Η φορά της ροπής της δύναμης **F** βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Σχήμα 4-8.

Αν η δύναμη $\mathbf{F}$ δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, η ροπή της είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα της που βρίσκεται πάνω στο κάθετο επίπεδο (σχ. 4.9)



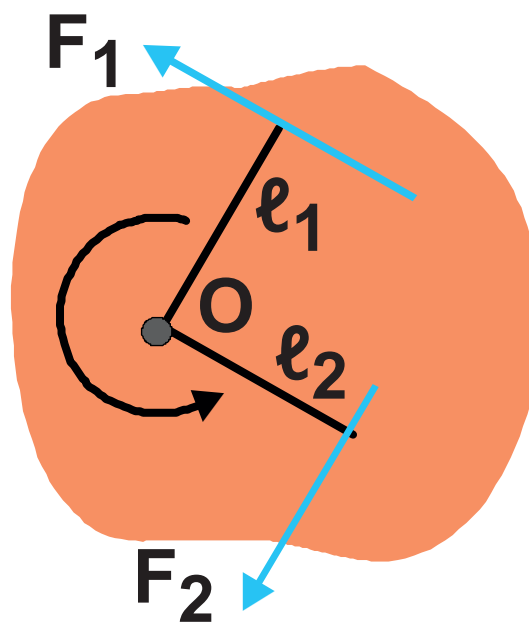
Η ροπή της δύναμης $\mathbf{F}$ έχει μέτρο $F_x \ell$
Σχήμα 4-9.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο περιπτώσεις στις οποίες όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Σε τέτοια προβλήματα, για να περιγράψουμε την τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα σώμα προς τη μια ή την άλλη φορά, χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της ροπής. Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να το περιστρέψει κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Στο σώμα του **σχήματος 4.10** δρουν οι δυνάμεις F_1 και F_2 . Το σώμα έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο **O** και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η συνολική ροπή που δέχεται το σώμα είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2$$



Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 . Η φορά περιστροφής του σώματος καθορίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών.

Σχήμα 4-10.

B) Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Αν σ' ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν περιστρέφεται (θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση). Αν όμως ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα μαζί με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα (ελεύθερος άξονας) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας του σώματος.

Μπορείτε να διαπιστώσετε τα παραπάνω με ένα μολύβι που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι. Ωθώντας το μολύβι στο κέντρο μάζας του, το μολύβι κάνει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν όμως ασκήσετε δύναμη στη

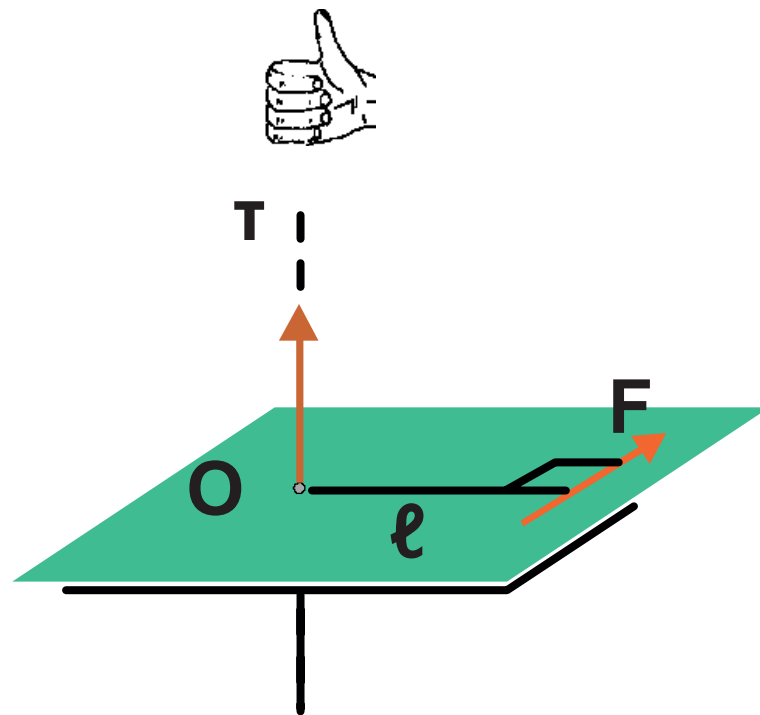
μια του άκρη (ο φορέας της δεν πρέπει να διέρχεται από το κέντρο μάζας του) τότε το μολύβι στρέφεται γύρω από έναν νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και ταυτόχρονα μετακινείται. Η μεταφορική κίνηση μπορεί να μην είναι εμφανής αν η τριβή ανάμεσα στο μολύβι και το τραπέζι είναι σημαντική.

Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής της δύναμης ως προς σημείο.

Ροπή δύναμης F ως προς σημείο O
ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόστασή της από το σημείο O

$$\tau = F\ell$$

**διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο
που ορίζεται από τη δύναμη και το
σημείο O και φορά που δίνεται από
τον κανόνα του δεξιού χεριού.**



Προσδιορισμός της φοράς της ρο-
πής δύναμης ως προς σημείο με τον
κανόνα του δεξιού χεριού.
Σχήμα 4-11.

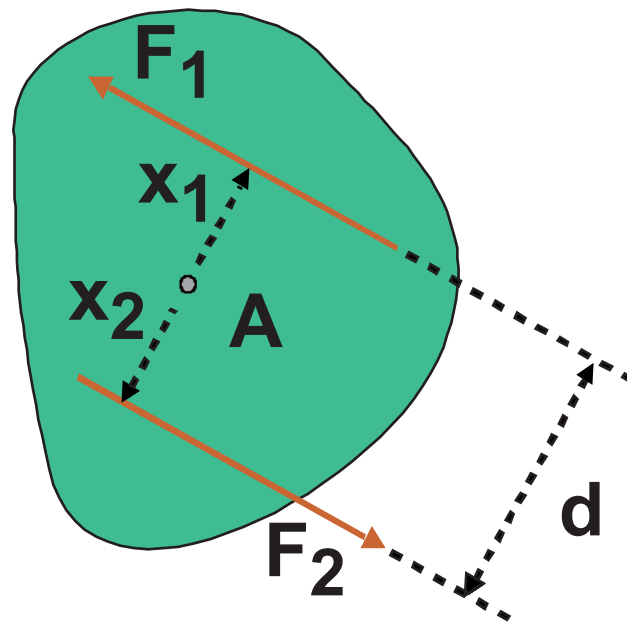
Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση που σε ένα σώμα δρουν δύο αντίρροπες δυνάμεις F_1 και F_2 με ίσα μέτρα. Δυο τέτοιες δυνάμεις αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων**. Αν η απόσταση των φορέων των δυο δυνάμεων είναι d , η αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο A (σχ. 4.12) που απέχει απόσταση x_1 από τη δύναμη F_1 και x_2 από την F_2 , είναι

$$\tau = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F_1 (x_1 + x_2) = F_1 d$$

επομένως

$$\tau = F_1 d$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επομένως, **η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο**.



Οι δυνάμεις F_1 και F_2 αποτελούν ζεύγος. Η ροπή τους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.

Σχήμα 4-12.

Παράδειγμα 4.1

Το στερεό του σχήματος 4.13 αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους, με ακτίνες $R_1 = 4\text{ cm}$ και $R_2 = 3\text{ cm}$, που στέφονται γύρω από σταθερό άξονα $x'x$. Ο άξονας $x'x$ συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας των κυλίνδρων. Εξ αιτίας των βαρών που κρέμονται από τους δύο κυλίνδρους, τα σκοινιά ασκούν στους κυλίνδρους δυνάμεις $F_1 = 6\text{ N}$ και $F_2 = 10\text{ N}$. Να υπολογίσετε την ολική ροπή που δέχεται το στερεό.

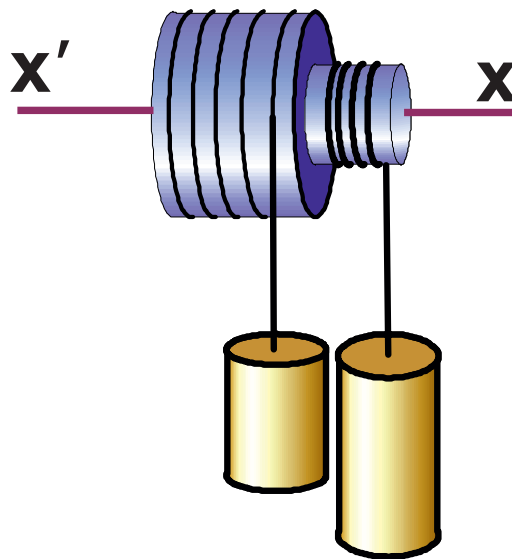
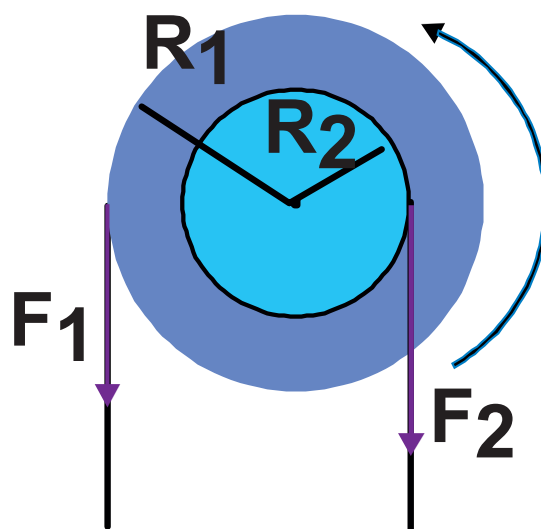
Απάντηση:

Η δύναμη F_1 τείνει να στρέψει το στερεό κατά τη θετική φορά και δημιουργεί θετική ροπή $\tau_1 = F_1 R_1$. Η δύναμη F_2 τείνει να το στρέψει κατά την αρνητική φορά και δημιουργεί ροπή $\tau_2 = -F_2 R_2$.

Η συνολική ροπή που δέχεται το στερεό είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 R_1 - F_2 R_2 = -0,06 \text{ N}\cdot\text{m}$$

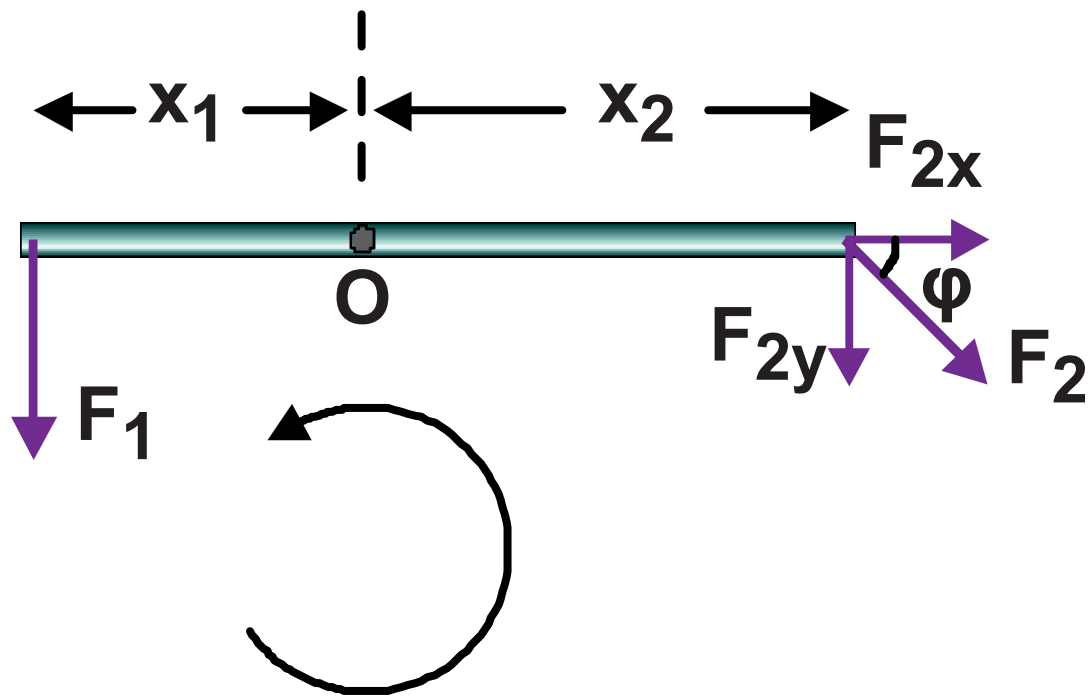
Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το στερεό θα στραφεί όπως στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού.



Σχήμα 4-13.

Παράδειγμα 4.2

Η αβαρής ράβδος του σχήματος 4.14 μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος σε αυτή. Το O απέχει από τα άκρα της ράβδου $x_1 = 5\text{ cm}$ και $x_2 = 8\text{ cm}$. Στα άκρα της ράβδου ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = 50\text{ N}$ και $F_2 = 40\text{ N}$. Η δύναμη F_2 σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη ράβδο. Πόση είναι η ολική ροπή που δέχεται η ράβδος;



Σχήμα 4-14.

Απάντηση:

Η ροπή της F_1 είναι θετική γιατί η δύναμη τείνει να στρέψει τη ράβδο κατά τη θετική φορά. Είναι

$$\tau_1 = F_1 x_1 = 2,5 \text{ Nm}$$

Για να υπολογίσουμε τη ροπή της F_2 την αναλύουμε στις συνιστώσες F_{2x}

και F_{2y} με μέτρα $F_{2x} = F_2 \sin 30^\circ$
και $F_{2y} = F_2 \cos 30^\circ$. Η ροπή της F_{2x}
είναι μηδέν διότι ο φορέας της διέρ-
χεται από τον άξονα (η απόσταση
της F_{2x} από τον άξονα είναι μηδέν),
ενώ η ροπή της F_{2y} είναι αρνητική
και ίση με

$$\tau_2 = -F_2 \cos 30^\circ x_2 = -1,6 \text{ Nm}.$$

Η συνολική ροπή που δέχεται η
ράβδος είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0,9 \text{ Nm}.$$

Η συνολική ροπή είναι θετική, επο-
μένως η ράβδος θα στραφεί αντίθε-
τα με τη φορά της κίνησης των δει-
κτών του ρολογιού.

(4.4.) Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ας δούμε με ποιες προϋποθέσεις ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό στο οποίο ασκούνται δυνάμεις.

Αν το στερεό έχει σταθερό άξονα μπορεί να κάνει μόνο στροφική κίνηση. Επομένως, για να ισορροπεί, αρκεί η συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα να είναι μηδέν.

Ένα ελεύθερο στερεό, όμως, μπορεί να εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση. Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν το σώμα δε θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι δε θα στραφεί. Αν υπάρχουν ροπές το σώμα θα στραφεί. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, αν υπάρχουν ροπές, αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων. Η ροπή ζεύγους, όμως, είναι

ίδια ως προς όλα τα σημεία. Επομένως, για να μη στραφεί το σώμα θα πρέπει η συνισταμένη ροπή να είναι μηδέν ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο (τότε θα είναι μηδέν και ως προς κάθε άλλο).

Επομένως για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις θα πρέπει πρώτον η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

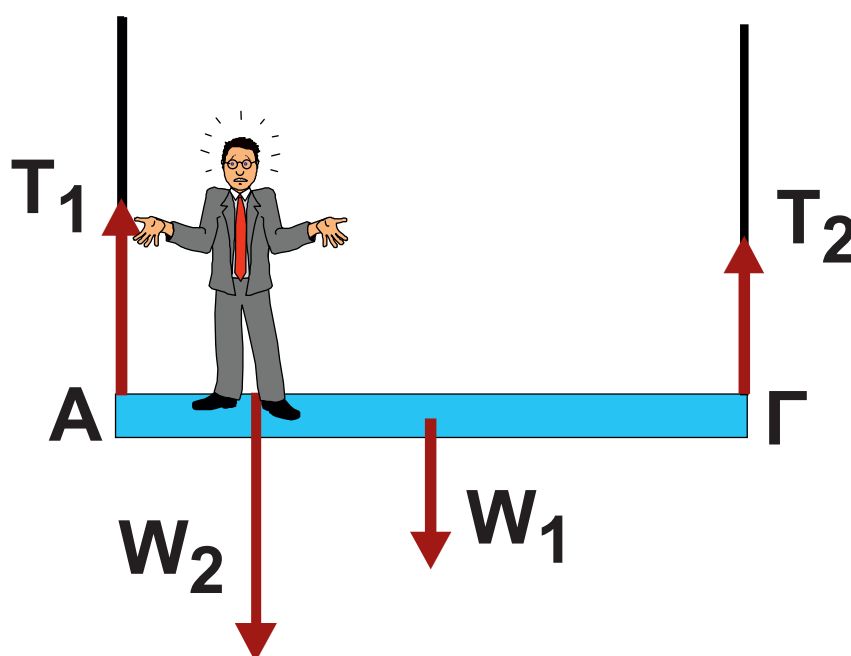
$$\Sigma F_y = 0$$

και δεύτερον το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

$$\Sigma \tau = 0$$

Παράδειγμα 4.3

Ομογενής οριζόντια δοκός $ΑΓ$ που έχει μήκος $\ell = 4\text{ m}$ και βάρος $w_1 = 200\text{ N}$, κρέμεται από δύο κατακόρυφα σκοινιά που είναι δεμένα στα άκρα της και ισορροπεί. Πάνω στη δοκό και σε απόσταση $x = 1\text{ m}$ από το άκρο της στέκεται άνθρωπος βάρους $w_2 = 600\text{ N}$. Ποια είναι τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα σκοινιά στη δοκό;



Σχήμα 4-15.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό είναι το βάρος της (w_1), η δύναμη που δέχεται από τον άνθρωπο – είναι ίση με το βάρος του w_2 – και οι δυνάμεις T_1 και T_2 από τα σκοινιά.

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν

$$\Sigma F = 0 \text{ επομένως } T_1 + T_2 - w_1 - w_2 = 0 \quad (4.2)$$

και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι επίσης μηδέν. Οι υπολογισμοί μας απλουστεύονται αν οι ροπές αναφέρονται σε σημείο από το οποίο περνάει μία από τις άγνωστες δυνάμεις. Επιλέγουμε το σημείο A .

$$\Sigma \tau_A = 0, \text{ άρα } T_2 \ell - w_1 \frac{\ell}{2} - w_2 x = 0,$$

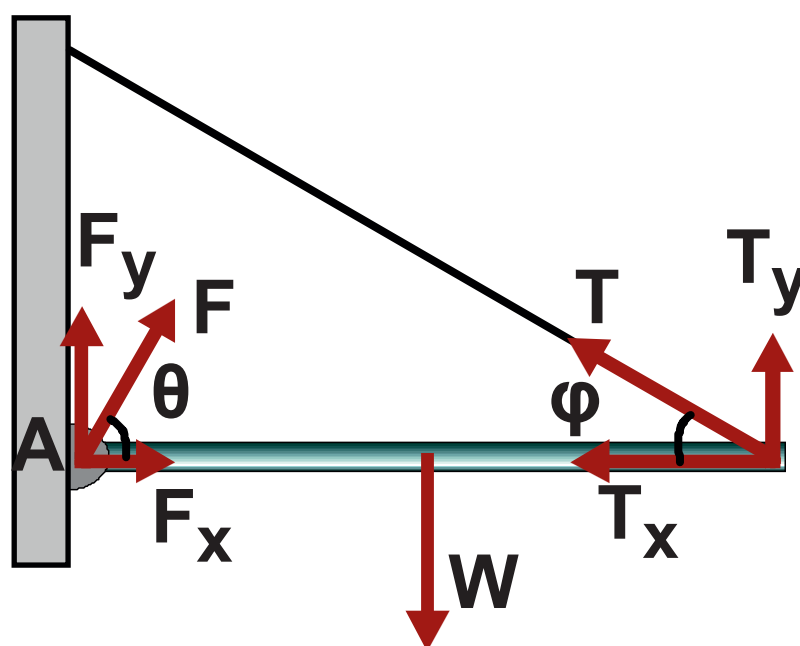
από όπου προκύπτει ότι

$$T_2 = \frac{w_1 \ell + 2w_2 x}{2\ell} = 250 \text{ N}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.2) βρίσκουμε $T_1 = 550 \text{ N}$

Παράδειγμα 4.4

Ομογενής δοκός $ΑΓ$, μήκους ℓ και βάρους $w=400\text{ N}$, ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο A της δοκού στηρίζεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της $Γ$ συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με τη δοκό. Να βρείτε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση.



Σχήμα 4-16.

Απάντηση:

Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη διεύθυνση.

$$T_x = T \cos 30^\circ \text{ και } T_y = T \sin 30^\circ$$

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } T \cos 30^\circ = F_x \quad (4.3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } T \sin 30^\circ + F_y = w \quad (4.4)$$

Επίσης $\Sigma \tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο.

Υπολογίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο **A**

$$T \sin 30^\circ \ell - w \frac{\ell}{2} = 0 \quad (4.5)$$

Οι δυνάμεις F_x F_y και T_x έχουν μη-δενικές ροπές ως προς το σημείο **A**. Από τη σχέση (4.5) προκύπτει

$$2T \eta \mu 30^\circ = w \text{ επομένως } T = 400\text{N} \quad (4.6)$$

Από την (4.3) λαμβάνοντας υπόψη

την (4.6) έχουμε $F_x = 200\sqrt{3}\text{ N}$

και από την (4.4) $F_y = 200\text{ N}$

Επομένως η δύναμη **F** έχει μέτρο

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = 400\text{N}$$

και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ για την οποία

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ άρα } \theta = 30^\circ$$

(4.5.) Ροπή Αδράνειας

Έστω ένα στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα zz' (σχ.4.17). Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1 , m_2 ..., τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι μάζες m_1 , m_2 ... κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα, σε κύκλους ακτίνων r_1 , r_2 ...

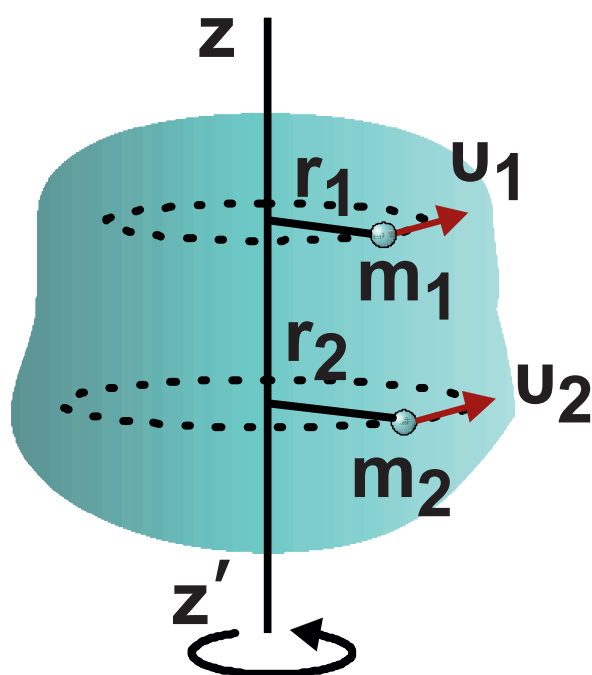
Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής.

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μονάδα το 1 kg m^2 .

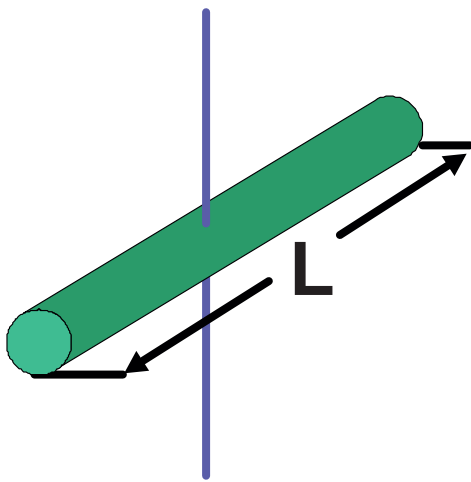
Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας ενός σώματος συνήθως δεν είναι εύκολος.

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι ροπές αδράνειας κάποιων σωμάτων ως προς έναν από τους άπειρους άξονες που διέρχονται από το κέντρο μάζας τους. Ο συγκεκριμένος άξονας για κάθε σώμα εικονίζεται στο σχήμα.



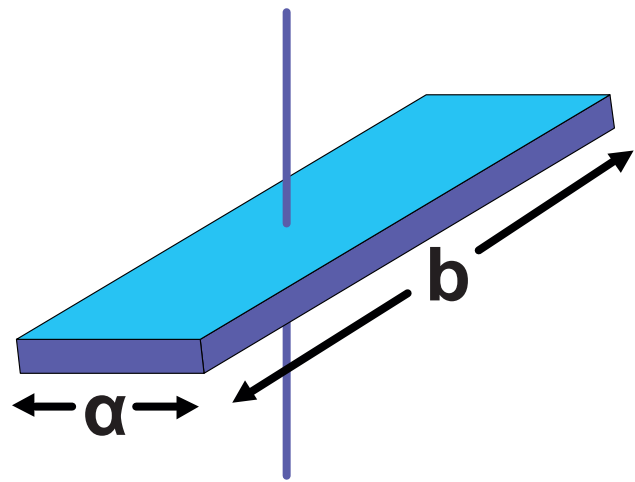
Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα.
Σχήμα 4-17.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ



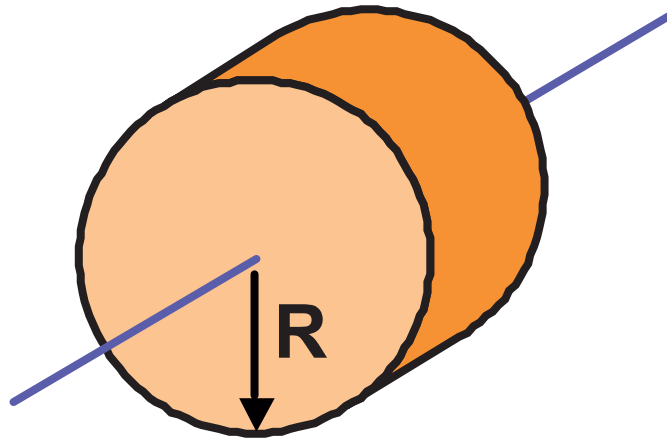
(α) Λεπτή
ράβδος

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



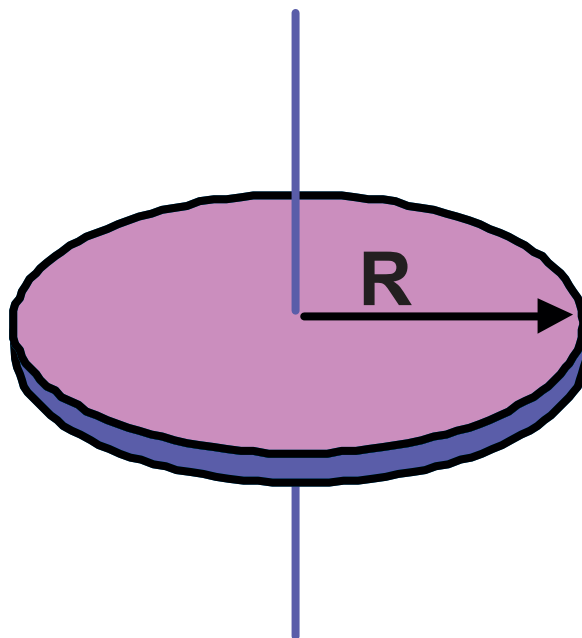
(β) Ορθογώνια
πλάκα

$$I = \frac{1}{12} M(\alpha^2 + b^2)$$



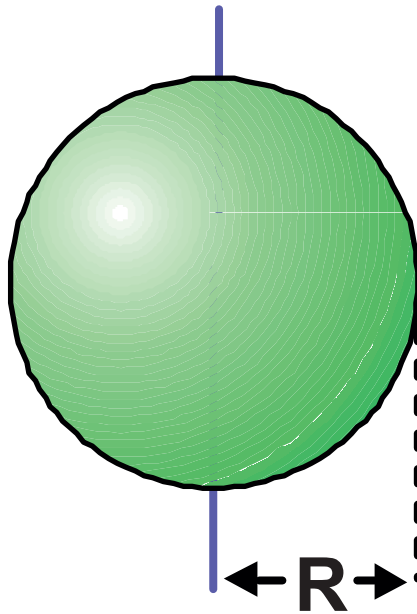
(γ) Συμπαγής κύλινδρος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



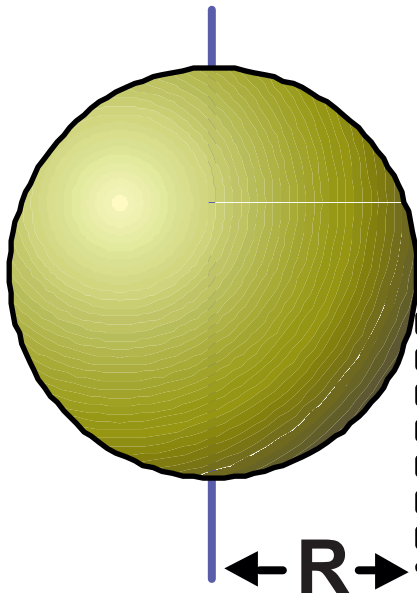
(δ) Δίσκος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



(ε) Σφαιρικός φλοιός

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



(στ) Συμπαγής σφαίρα

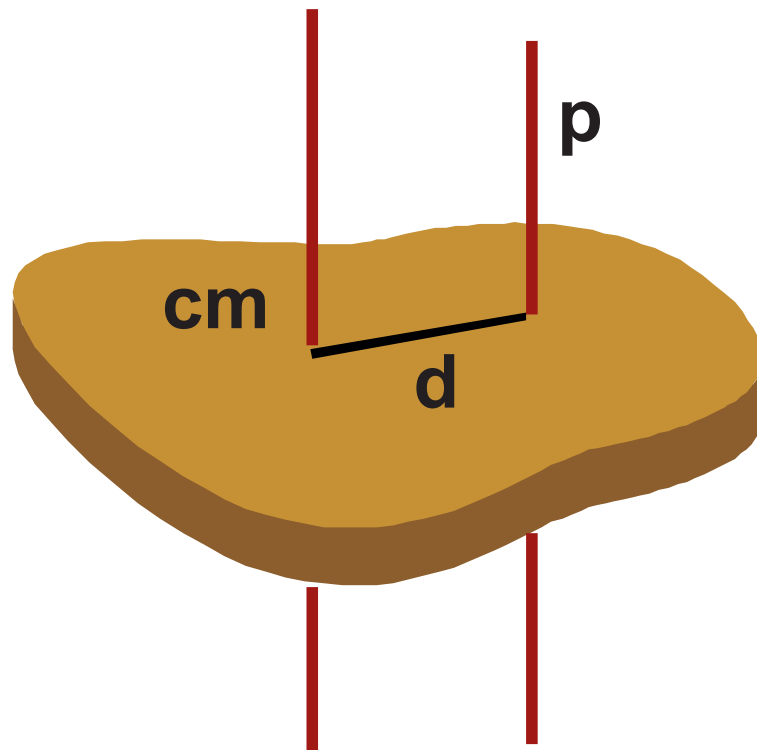
$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Μεταξύ της ροπής αδράνειας I_{cm} ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I_p ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα p , παράλληλο με τον πρώτο σε απόσταση d από αυτόν, υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το **θεώρημα παραλλήλων αξόνων** ή **θεώρημα Steiner** (Στάινερ).

Αν I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, η ροπή αδράνειάς του ως προς ένα άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του

γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d .

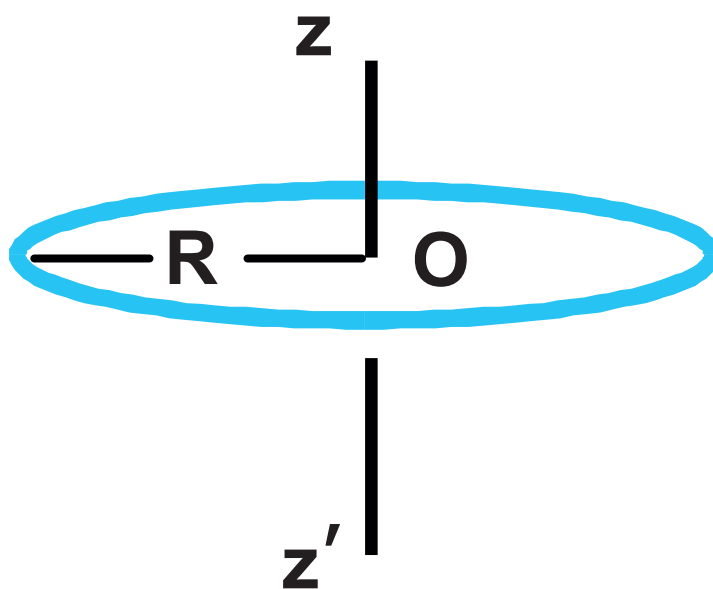
$$I_p = I_{cm} + Md^2$$



Το θεώρημα παραλλήλων αξόνων δίνει τη ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα που απέχει απόσταση d από το κέντρο μάζας.
Σχήμα 4-18.

Παράδειγμα 4.5

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου μάζας M και ακτίνας R , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει. Το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του.



Σχήμα 4-19.

Απάντηση:

Θεωρούμε ότι ο δακτύλιος αποτελείται από τις στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots$. Είναι φανερό ότι $m_1 + m_2 + \dots = M$

Επειδή το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του R , όλες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής.

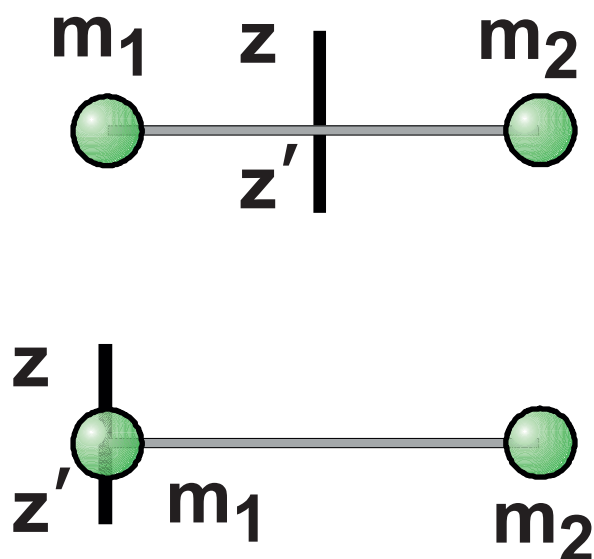
Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας

$$\begin{aligned} I &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \\ &= m_1 R^2 + m_2 R^2 + \dots = \\ &= (m_1 + m_2 + \dots) R^2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I = MR^2$$

Παράδειγμα 4.6

Δυο σώματα αμελητέων διαστάσεων, με ίσες μάζες m_1 και m_2 , ($m_1 = m_2 = m$), συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, μήκους ℓ . Ποια είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται α) από το μέσον της ράβδου β) από τη μάζα m_1 ;



Σχήμα 4-20.

Απάντηση:

$$\alpha) \quad I = m_1 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \\ = 2m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{m \ell^2}{2}$$

$$\beta) \quad I = m_1 \ell^2 + 0 = m \ell^2$$

Παράδειγμα 4.7

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός λεπτού ομογενούς δίσκου, μάζας **M** και ακτίνας **R**, ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του, που περνάει από το άκρο του δίσκου.



Σχήμα 4-21.

Απάντηση:

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του είναι

$$I_{cm} = \frac{MR^2}{2}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα παραλλήλων αξόνων για $d=R$ έχουμε

$$I_p = I_{cm} + Md^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

(4.6.) Θεμελιώδης Νόμος της Στρο- φικής Κίνησης

Στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ προκύπτει ότι για να μεταβληθεί η ταχύτητά του πρέπει να ασκηθεί σε αυτό δύναμη. Αντίστοιχος νόμος ισχύει στη στρο-
φική κίνηση στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην αιτία (ροπή) και το αποτέλεσμα (μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας) είναι

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

(4.7)

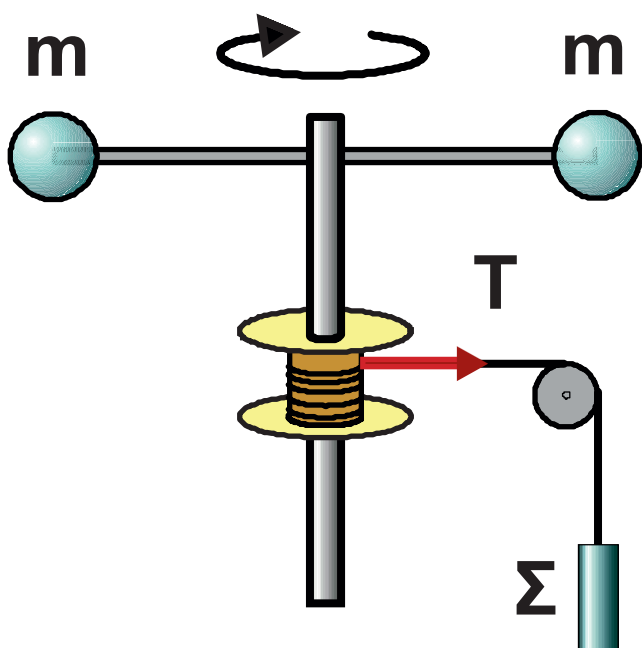
Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως **ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, δηλαδή,

το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας (υπολογισμένης ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.

Από τη σχέση (4.7) φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος τόσο πιο δύσκολα αλλάζει η περιστροφική κατάσταση του σώματος. **Η ροπή αδράνειας** εκφράζει στην περιστροφή, ό,τι εκφράζει η μάζα στη μεταφορική κίνηση, δηλαδή **την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση.**

Ενώ όμως η μάζα ενός σώματος είναι σταθερό μέγεθος, η ροπή αδράνειας εξαρτάται κάθε φορά από τη θέση του άξονα περιστροφής.

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση (4.7) προκύπτει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν, επομένως το σώμα διατηρεί την προηγούμενη περιστροφική του κατάσταση, δηλαδή αν το σώμα είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να ηρεμεί, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Το σώμα Σ , μέσω του σκοινιού, ασκεί ροπή στον άξονα περιστροφής με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα των μαζών m να αυξάνεται.
Σχήμα 4-22.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε στροφικές κινήσεις γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Τα συμπεράσματά μας για την κίνηση αυτή μπορούν να επεκταθούν και στις περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται. Αυτό συμβαίνει στις σύνθετες κινήσεις, στις οποίες το σώμα κάνει ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως

στην κίνηση ενός τροχού που κυλάει. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στις περιπτώσεις αυτές, αρκεί ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, να είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης.

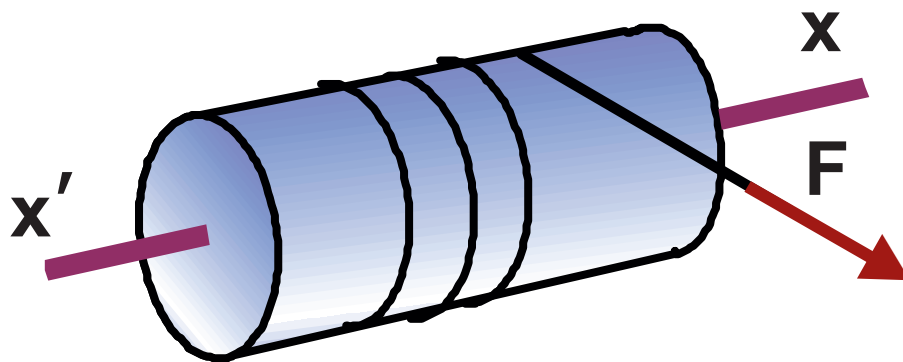
Παράδειγμα 4.8

Ομογενής κύλινδρος μάζας $M=40\text{ kg}$ και ακτίνας $R=40\text{ cm}$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά του που είναι σταθερός. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τυλίξει σκοινί, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή δύναμη $F=6\text{ N}$. Το σκοινί ξετυλίγεται, χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας

ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι

$$I = \frac{1}{2} MR^2.$$



Σχήμα 4-23.

Απάντηση:

Η δύναμη που ασκεί το σκοινί στον κύλινδρο προκαλεί ροπή $\tau = FR$

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης

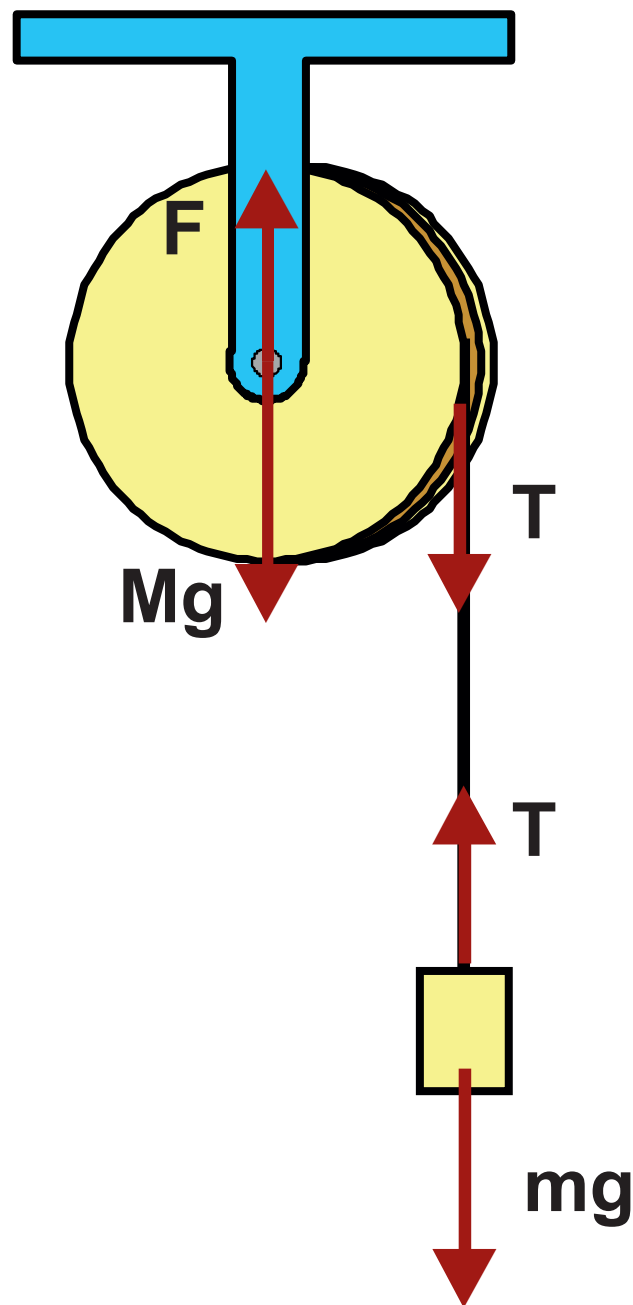
$$\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad FR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Λύνοντας ως προς α και αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma\omega\nu} &= \frac{2F}{MR} = \\ &= \frac{2 \cdot 6 \text{ N}}{40 \text{ kg} \cdot 40 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,75 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.9

Μία τροχαλία ακτίνας R , και ροπής αδράνειας I μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται σώμα μάζας m . Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος, τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και την τάση του νήματος.



Σχήμα 4-24.

Απάντηση:

Θα εφαρμόσουμε τους νόμους της μηχανικής χωριστά σε κάθε σώμα.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα m , είναι το βάρος του mg και η τάση του νήματος T .

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $mg - T = ma$ (4.8)

Στον τροχό ασκούνται η T (από το νήμα), η δύναμη F (από τον άξονα) και το βάρος του Mg .

Οι δυνάμεις Mg και F δε δημιουργούν ροπή γιατί ο φορέας τους περνάει από τον άξονα περιστροφής. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση δίνει

$$\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (4.9)$$

Λύνοντας την (4.8) ως προς T έχουμε $T = mg - ma$

Αντικαθιστώντας στην (4.9)

$$mgR - mRa = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (4.10)$$

Η επιτάχυνση α του σώματος είναι ίση με το ρυθμό που αυξάνεται η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας. Για την επιτάχυνση αυτή ισχύει

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \quad (4.11)$$

οπότε η (4.10) γίνεται

$$mgR - mR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{Επομένως } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{mgR}{I + mR^2} \quad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.11) βρίσκουμε για τη γραμμική επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{mgR^2}{I + mR^2} \quad (4.13)$$

Η τάση T υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε την (4.12) στην (4.9)

$$T = \frac{I}{R} \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{I}{R} \frac{mgR}{I + mR^2}$$

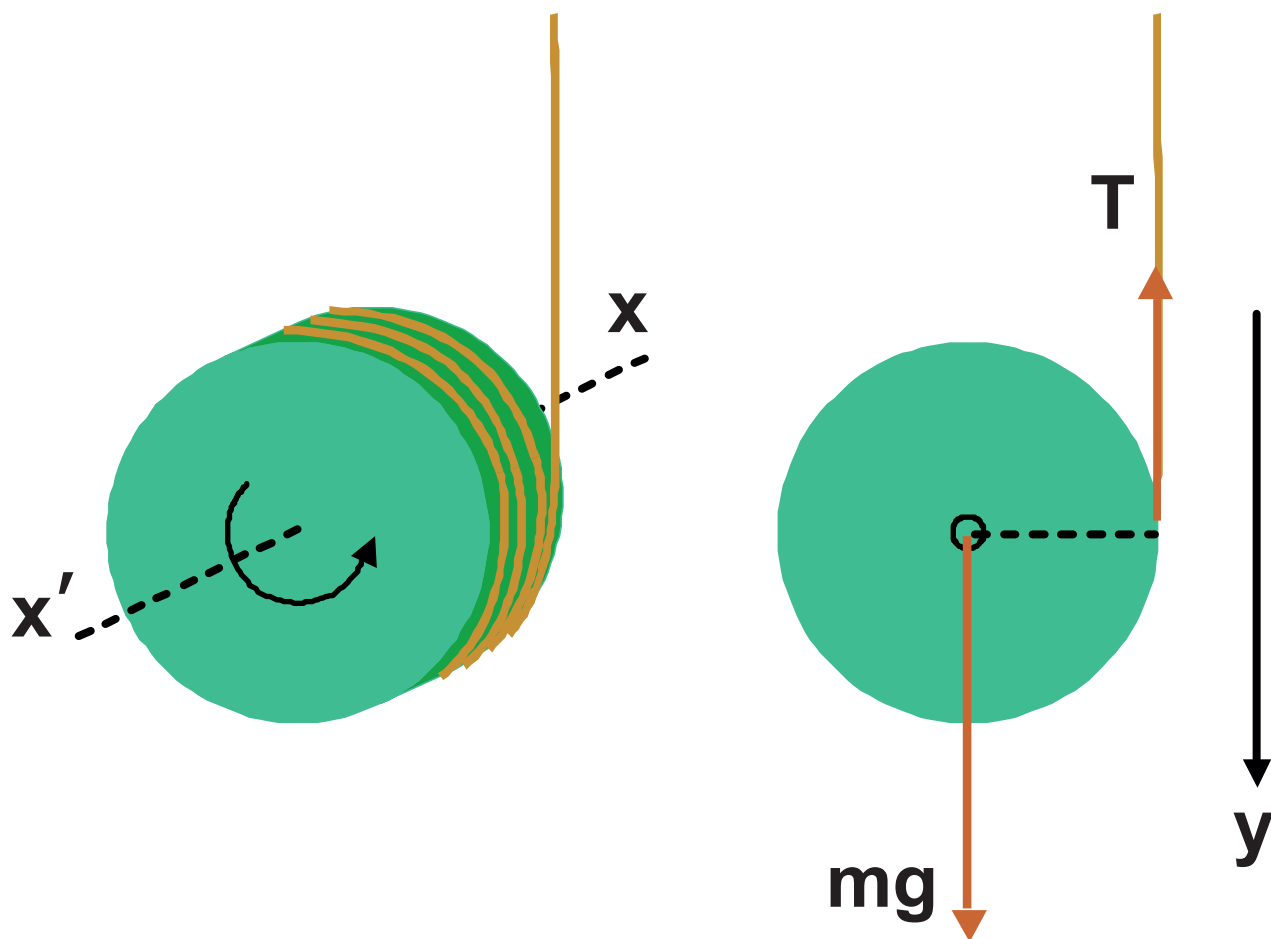
$$\text{ή } T = \frac{Img}{I + mR^2}$$

Παράδειγμα 4.10

Το γιο – γιο αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα σκοινί. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σκοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σκοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα, τον xx' .

Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g . Θεωρήστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το σκοινί παραμένει κατακόρυφο.



Σχήμα 4-25.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του mg και η δύναμη T από το σκοινί. Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma F_y = ma_{cm} \quad \text{ή} \quad mg - T = ma_{cm}$$

$$\text{οπότε} \quad T = mg - ma_{cm} \quad (4.14)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς τον άξονα xx' έχουμε

$$\Sigma \tau = I\alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad TR = I\alpha_{γων} \quad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας την (4.14) στην (4.15) βρίσκουμε

$$mgR - mRa_{cm} = I\alpha_{γων}$$

$$\begin{aligned} \text{ή } mgR - mR\alpha_{cm} &= \frac{1}{2} mR^2\alpha_{γων} \\ \text{ή } g - \alpha_{cm} &= \frac{1}{2} R\alpha_{γων} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Όμως $\alpha_{cm} = R\alpha_{γων}$

οπότε $\alpha_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R}$

Αντικαθιστώντας στην (4.16) βρίσκουμε

$$g - \alpha_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = \frac{2g}{3}$$

(4.7.) Στροφορμή

Η ορμή αποδείχτηκε μέγεθος ιδιαίτερα χρήσιμο για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης των στερεών. Το αντίστοιχο της ορμής του στερεού στη στροφική κίνηση το ονομάζουμε **στροφορμή**.

Θα ορίσουμε πρώτα τη στροφορμή ενός υλικού σημείου που κάνει κυκλική κίνηση, στη συνέχεια θα ορίσουμε τη στροφορμή στερεού σώματος και, τέλος, τη στροφορμή συστήματος σωμάτων.

A) Στροφορμή υλικού σημείου

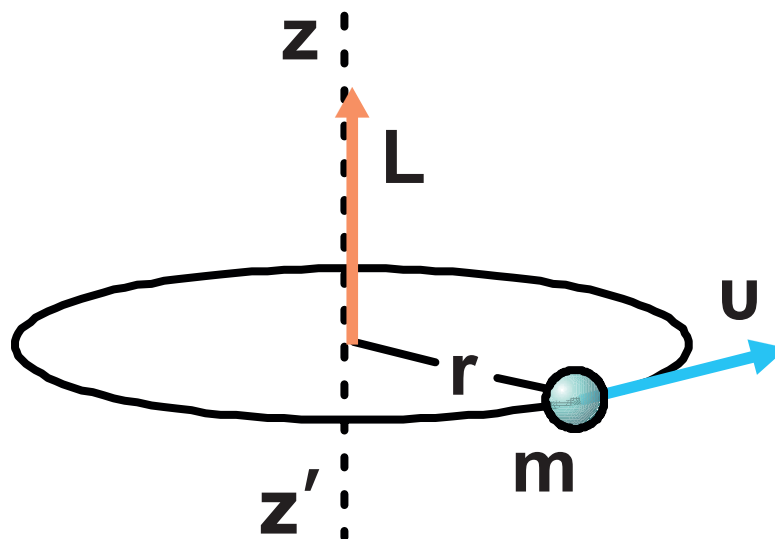
Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m και ορμής p που κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r (σχ. 4.26).

Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου ως προς ένα άξονα

$z'z$ που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

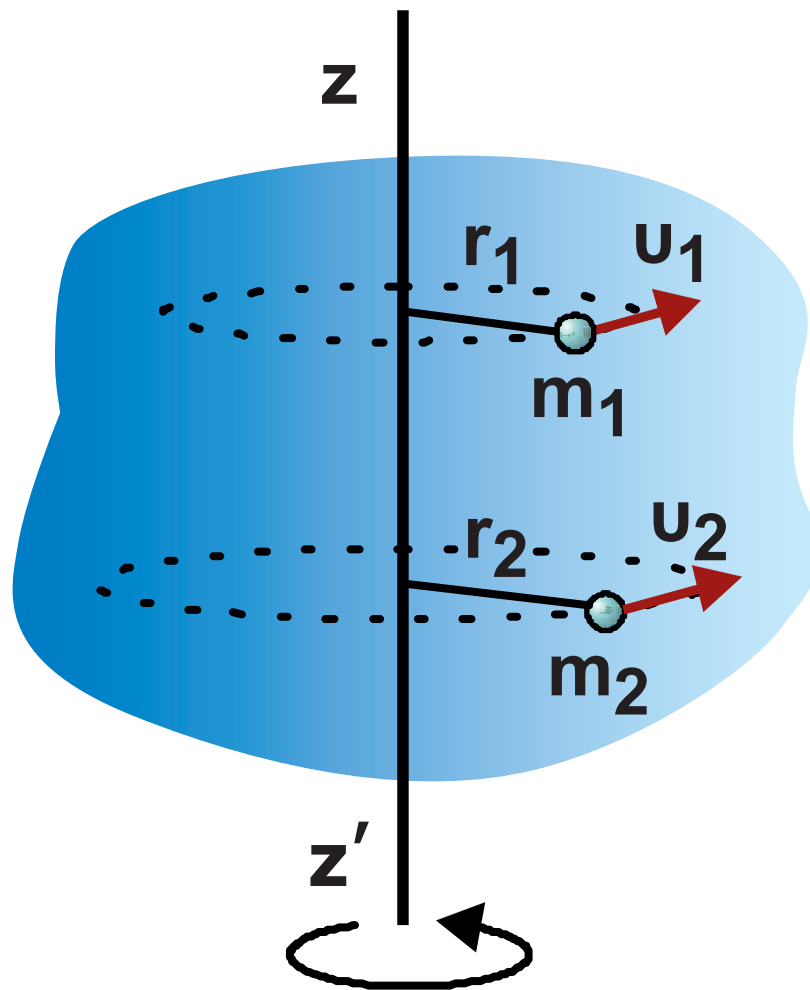
$$L = pr \quad \text{ή} \quad L = mur$$

διεύθυνση αυτή του άξονα $z'z$ και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα στροφορμής είναι το $1 \text{ kg m}^2/\text{s}$.



Το υλικό σημείο μάζας m κινείται κυκλικά. Η στροφορμή του είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς του.

Σχήμα 4-26.



Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1 m_2 ... Κάθε μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.
Σχήμα 4-27.

B) Στροφορμή στερεού σώματος

Έστω το στερεό του σχήματος 4.27 που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα $z'z$ με γωνιακή ταχύτητα ω . Κατά την περιστροφή του σώματος τα διάφορα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , η γραμμική ταχύτητά τους όμως είναι διαφορετική, και μάλιστα ανάλογη με την απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα, με μάζες $m_1, m_2 \dots$, τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι στροφορμές των στοιχειωδών αυτών μαζών έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρα, $L_1 = m_1 u_1 r_1, L_2 = m_2 u_2 r_2, \dots$

Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.

$$L = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + \dots$$

Επειδή τα υλικά σημεία $m_1, m_2 \dots$ κάνουν κυκλική κίνηση οι ταχύτητές τους $v_1, v_2 \dots$ μπορούν να γραφούν $v_1 = \omega r_1, v_2 = \omega r_2$ κ.ο.κ. οπότε

$$\begin{aligned} L &= m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \dots = \\ &= \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \end{aligned}$$

$$\text{όμως } m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = I$$

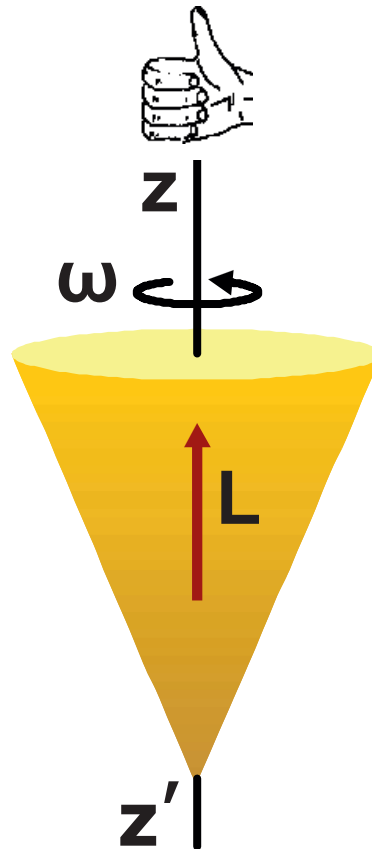
επομένως

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με

$$L = I\omega$$

(4.17)

έχει τη διεύθυνση του άξονα και η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Ο κώνος του σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$ με γωνιακή ταχύτητα ω . Η στροφορμή του σώματος είναι $L\omega$, βρίσκεται πάνω στον άξονα και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Σχήμα 4-28.

Στροφορμή μερικών σωμάτων

Τροχιακή κίνηση της Γης $2,7 \times 10^{40} \text{ kg m}^2/\text{s}$

Περιστροφή της Γης $5,8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2/\text{s}$

Τροχός αυτοκινήτου
($u=90 \text{ km/h}$) $10^2 \text{ kg m}^2/\text{s}$

Δίσκος πικ-απ
(33 στροφές ανά min) $6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2/\text{s}$

Τροχιακή κίνηση ηλεκτρονίου $1,05 \times 10^{-35} \text{ kg m}^2/\text{s}$

Σπιν ηλεκτρονίου $0,53 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$

Τη στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του συχνά την ονομάζουμε **σπιν**, για να τη διακρίνουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω άλλης κίνησης. Για παράδειγμα, η Γη έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της και στροφορμή εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή της τροχιακής της κίνησης.

Τα στοιχειώδη σωματίδια –ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια– έχουν σπιν μέτρου $0,53 \times 10^{-34} \text{ Js}$. Αυτή η στροφορμή σπιν συνήθως εκφράζεται ως $\frac{1}{2} \hbar$, όπου $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$ (προφέρεται έιτς μπάρ) και είναι μια θεμελιώδης

ποσότητα στροφορμής που εμφανίζεται συχνά στη κβαντική φυσική.

Γ) Στροφορμή συστήματος

Σε ένα σύστημα σωμάτων, **στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα**. Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι $L_1, L_2, \dots$, η στροφορμή L του συστήματος είναι

$$L = L_1 + L_2 + \dots$$

Γενικότερη Διατύπωση του Θεμελιώδους Νόμου της Στροφικής Κίνησης

Από τη **σχέση 4.17** προκύπτει ότι αν σε απειροστά μικρό χρόνο dt

η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβληθεί κατά $d\omega$, η στροφορμή του θα μεταβληθεί κατά $dL = I d\omega$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha_{\text{γων}}$$

και εξαιτίας της (4.7)

$$\boxed{\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}} \quad (4.18)$$

Επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Η σχέση αυτή είναι για τη στροφική κίνηση το ανάλογο του **δεύτερου νόμου του Newton**.

Ο νόμος αυτός ισχύει και σε σύστημα σωμάτων. Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη (δράση – αντίδραση). Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες. Η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων

να είναι μηδέν. Έτσι η **σχέση 4.18** για σύστημα σωμάτων γράφεται

$$\Sigma \tau_{\text{εξ}} = \frac{dL}{dt} \quad (4.19)$$

όπου $\tau_{\text{εξ}}$ η ροπή μιας εξωτερικής δύναμης και L η στροφορμή του συστήματος.

(4.8.) Διατήρηση της Στροφορμής

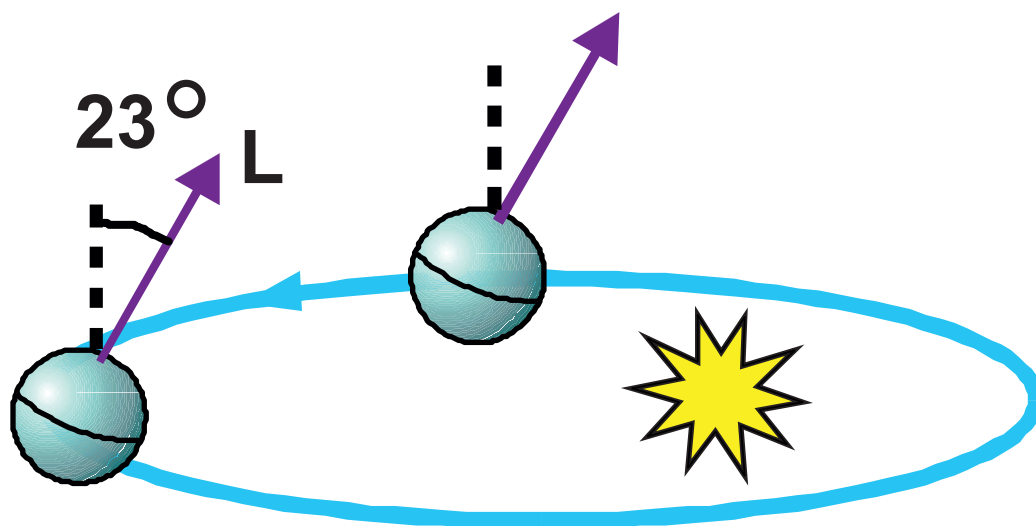
Στη στροφική κίνηση ισχύει ένας νόμος διατήρησης, ανάλογος με το νόμο διατήρησης της ορμής που ισχύει στη μεταφορική κίνηση. Το μέγεθος που διατηρείται στη στροφική κίνηση είναι η στροφορμή.

Η διατήρηση της στροφορμής σε ένα σώμα

Αν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$ προκύπτει ότι $\frac{dL}{dt} = 0$, επομένως, $L = \text{σταθ.}$

Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.

Για παράδειγμα, κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (ιδιοπεριστροφή), επειδή η ελκτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο δε δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της, η στροφορμή της Γης παραμένει σταθερή. Επομένως η χρονική διάρκεια περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή –24 ώρες.



Η στροφορμή της Γης -λόγω της ιδιοπεριστροφής της- διατηρείται σταθερή.

Σχήμα 4-29.

Η διατήρηση της στροφορμής σε σύστημα σωμάτων.

Ο δεύτερος νόμος του Newton για τη στροφική κίνηση στην περίπτωση συστήματος σωμάτων έχει

τη μορφή $\Sigma \tau_{\text{εξ}} = \frac{dL}{dt}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν το αλγεβρικό

άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **αρχή της διατήρησης της στροφορμής**.

Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητά του αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

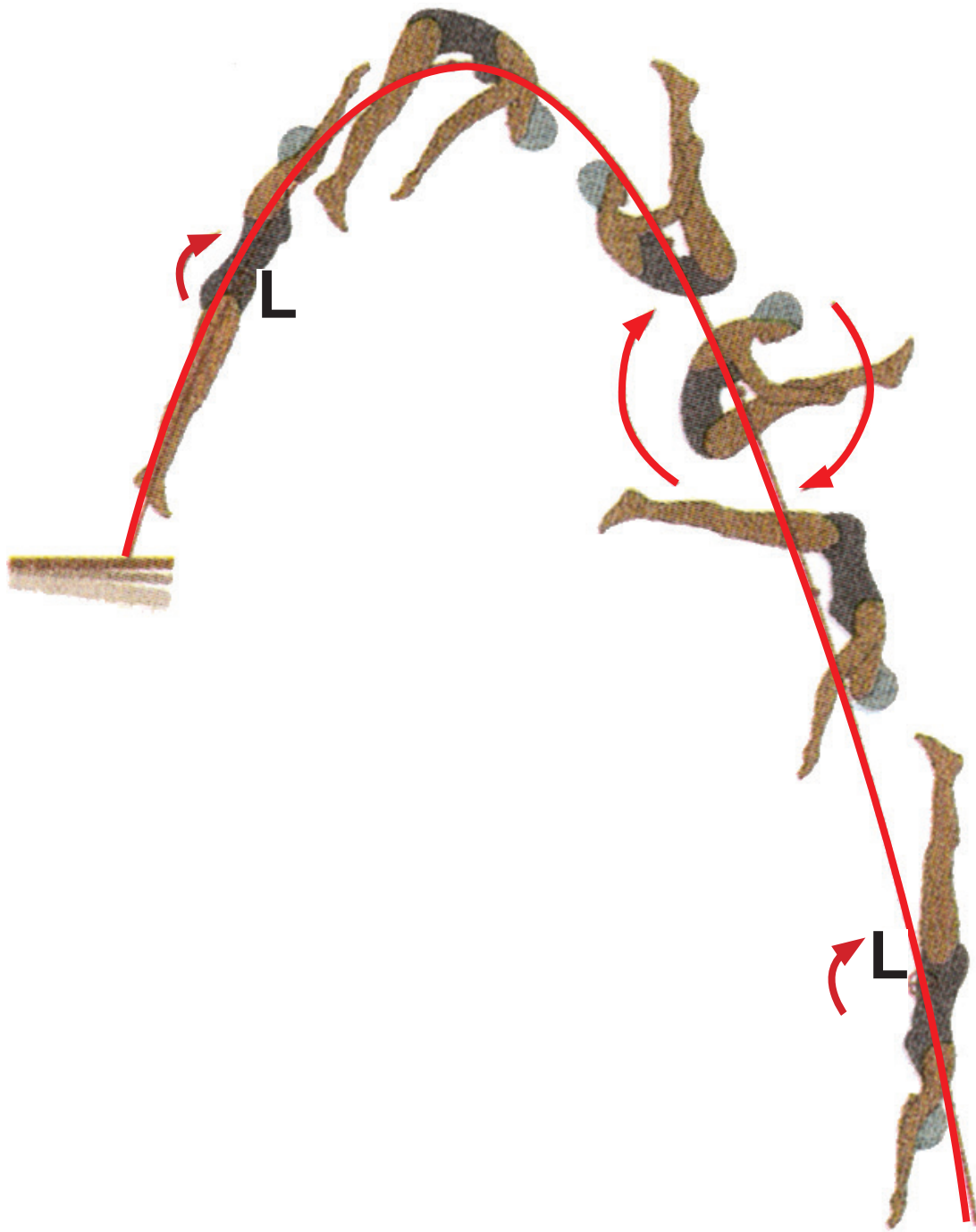
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Τα παραδείγματα φαινομένων στα οποία διατηρείται η στροφορμή είναι

πολλά. Στην **εικόνα 4.4** φαίνεται μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ, που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο. Η αθλήτρια μπορεί, συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της, να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Εάν η τριβή των παγοπέδιλων με τον πάγο θεωρηθεί αμελητέα, οι εξωτερικές δυνάμεις – όπως το βάρος και η δύναμη που δέχεται από το έδαφος – δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της, επομένως η στροφορμή της διατηρείται, δηλαδή το γινόμενο **$I\omega$** παραμένει σταθερό. Συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της η ροπή αδράνειας μειώνεται, οπότε, αφού το γινόμενο **$I\omega$** μένει σταθερό, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.



Η χορεύτρια συμπύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.
Εικόνα 4-4.



Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας της καταδύτριας με συνέπεια την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της.
Σχήμα 4-30.

Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Κατά την κίνηση του ακροβάτη στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος του, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του διατηρείται. Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας, επομένως αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Στο **σχήμα 4.30** φαίνεται πως, με την τεχνική αυτή, μια κατάδυση μπορεί να γίνει πολύ θεαματική.

Τα αστέρια τα οποία στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από **1,4** έως **2,5** φορές τη μάζα του Ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τις πηγές

ενέργειας που διαθέτουν, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρις ότου οι πυρήνες των ατόμων τους αρχίσουν να εφάπτονται, με αποτέλεσμα η ακτίνα ενός τέτοιου αστεριού να είναι μόνο **15-20 km**. Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται σταθερή και επειδή η ροπή αδράνειας του αστεριού μειώνεται δραματικά έχουμε μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας περιστροφής. Υπολογίζεται ότι ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με συχνότητα **3000 στροφές το δευτερόλεπτο**. Για σύγκριση, να αναφέρουμε ότι η περίοδος περιστροφής του Ήλιου είναι **25 μέρες**.

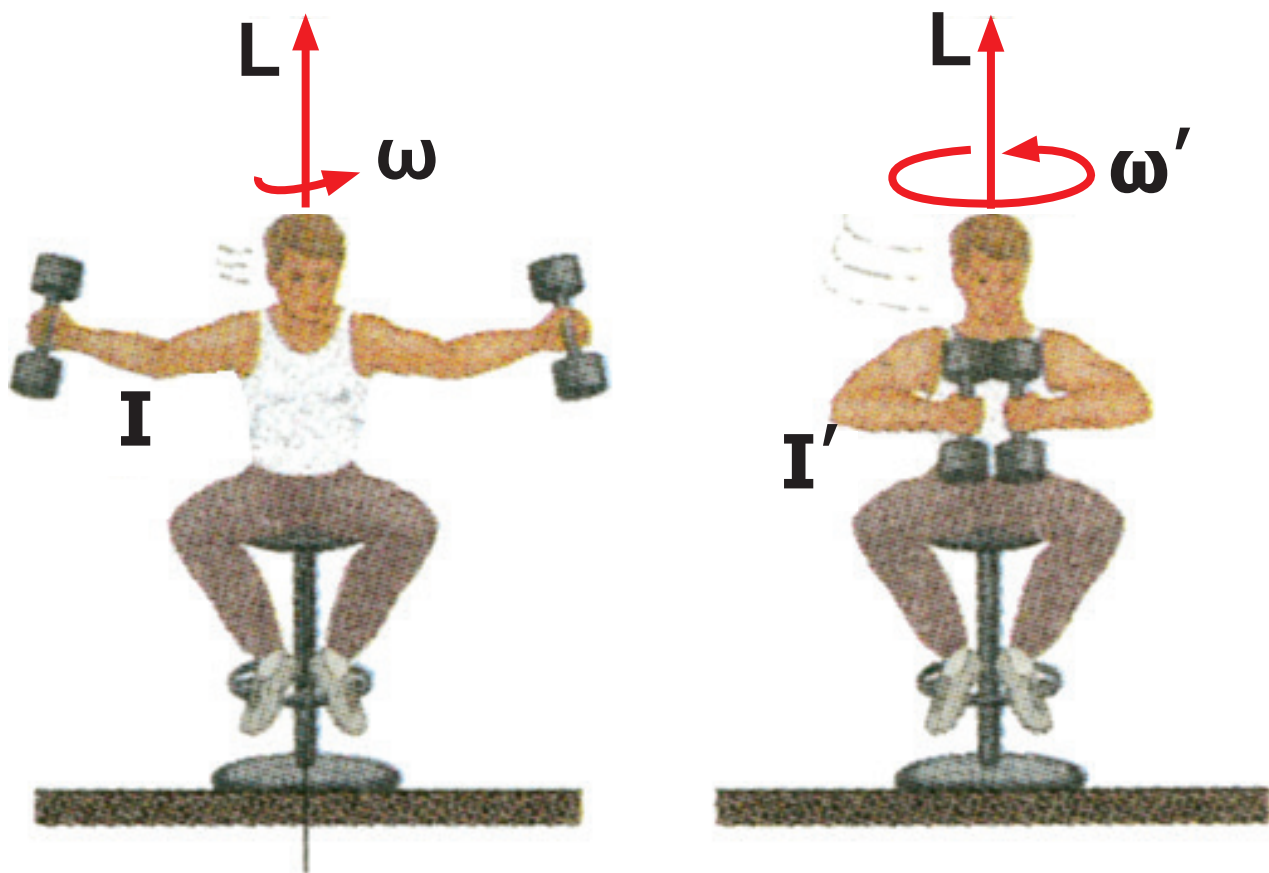
Παράδειγμα 4.11

Ο άνθρωπος στο **σχήμα 4.31**, έχει τα χέρια του τεντωμένα και στο κάθε χέρι του κρατάει ένα βαράκι μάζας **$M = 4 \text{ kg}$** . Εξαιτίας μιας ώθησης που δέχτηκε, ο άνθρωπος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **$\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$** . Με ποια γωνιακή ταχύτητα θα στρέφεται αν συμπτύξει τα χέρια του;

Το κάθισμα πάνω στο οποίο κάθεται, ο άνθρωπος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα, που είναι ο άξονας συμμετρίας. Η ροπή αδράνειας του ανθρώπου (χωρίς τα βαράκια που κρατάει) όταν έχει τα χέρια του τεντωμένα είναι **$3,25 \text{ kgm}^2$** και όταν συμπτύσσει τα χέρια του είναι **$2,5 \text{ kgm}^2$** .

Κάθε βαράκι απέχει από τον άξονα περιστροφής **1 m** , στην αρχή και

0,2m στο τέλος. Η ροπή αδράνειας του καθίσματος είναι αμελητέα.



Άξονας περιστροφής

Σχήμα 4-31.

Απάντηση:

Η αρχική ροπή αδράνειας I_1 του συστήματος ως προς τον άξονα

περιστροφής, όταν ο άνθρωπος είχε τα χέρια του τεντωμένα, ήταν το άθροισμα της ροπής αδράνειας του ανθρώπου και της ροπής αδράνειας των σωμάτων που κρατάει.

$$I_1 = I_1^{\text{ανθρ}} + I_1^{\text{βαρ}} = I_1^{\text{ανθρ}} + 2MR_1^2 = 11,25 \text{ kg m}^2$$

Η ροπή αδράνειας I_2 του συστήματος, όταν ο άνθρωπος κατεβάσει τα χέρια του είναι η νέα ροπή αδράνειας του ανθρώπου και η ροπή αδράνειας των σωμάτων.

$$I_2 = I_2^{\text{ανθρ}} + I_2^{\text{βαρ}} = I_2^{\text{ανθρ}} + 2MR_2^2 = 2,82 \text{ kg m}^2$$

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργούν εξωτερικές ροπές ως προς τον

άξονα περιστροφής, η στροφορμή του διατηρείται. Δηλαδή ισχύει:

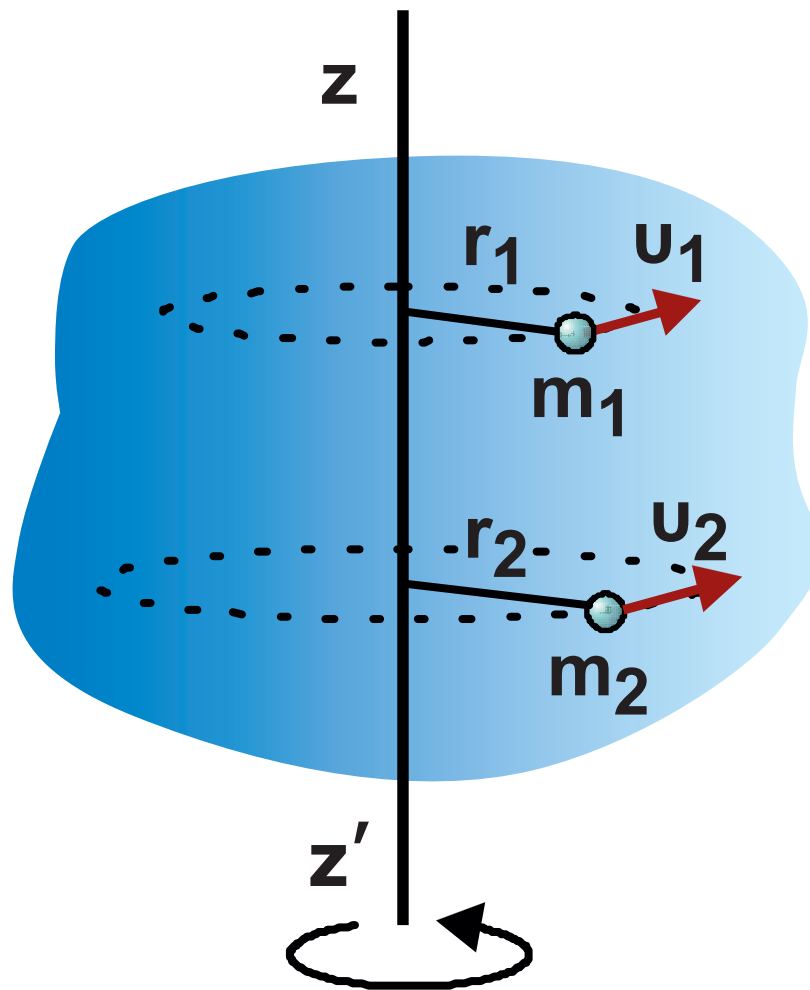
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \text{ ή } \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = 16 \text{ rad/s}$$

(4.9.) Κινητική Ενέργεια Λόγω Περιστροφής

Το σώμα του σχήματος 4.32, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από τον άξονα $z'z$, έχει κινητική ενέργεια.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος, το χωρίζουμε σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots$. Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμικές ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1 = \omega r_1, v_2 = \omega r_2, \dots \quad (4.20)$$



Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα των ενεργειών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται.

Σχήμα 4-32.

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται, δηλαδή

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots$$

Η σχέση αυτή γίνεται, από την (4.20)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \dots = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2 \end{aligned}$$

Όμως $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = I$

και επομένως

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

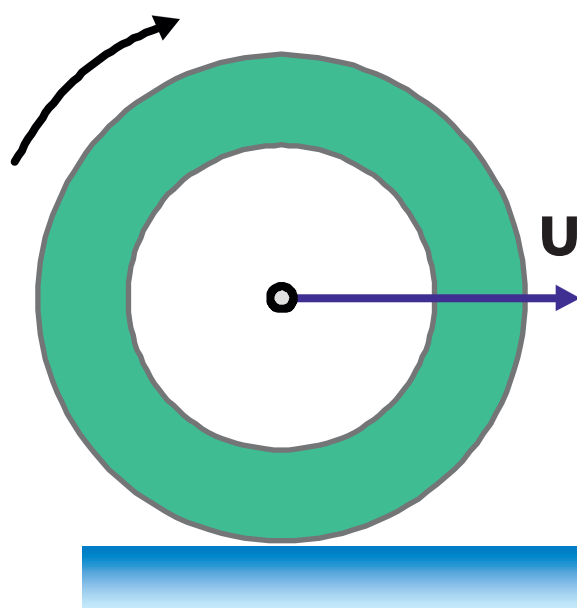
Πρέπει να τονιστεί ότι η ενέργεια αυτή δεν είναι μια νέα μορφή ενέργειας. Η σχέση στην οποία καταλήξαμε αποτελεί απλά μια βολική έκφραση για την κινητική ενέργεια ενός σώματος που στρέφεται.

Αν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως

ο τροχός του **σχήματος 4.33** η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης

$$K = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

όπου **M** η μάζα του σώματος και **u_{cm}** η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.



Ο τροχός έχει κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και λόγω περιστροφικής κίνησης
Σχήμα 4-33.

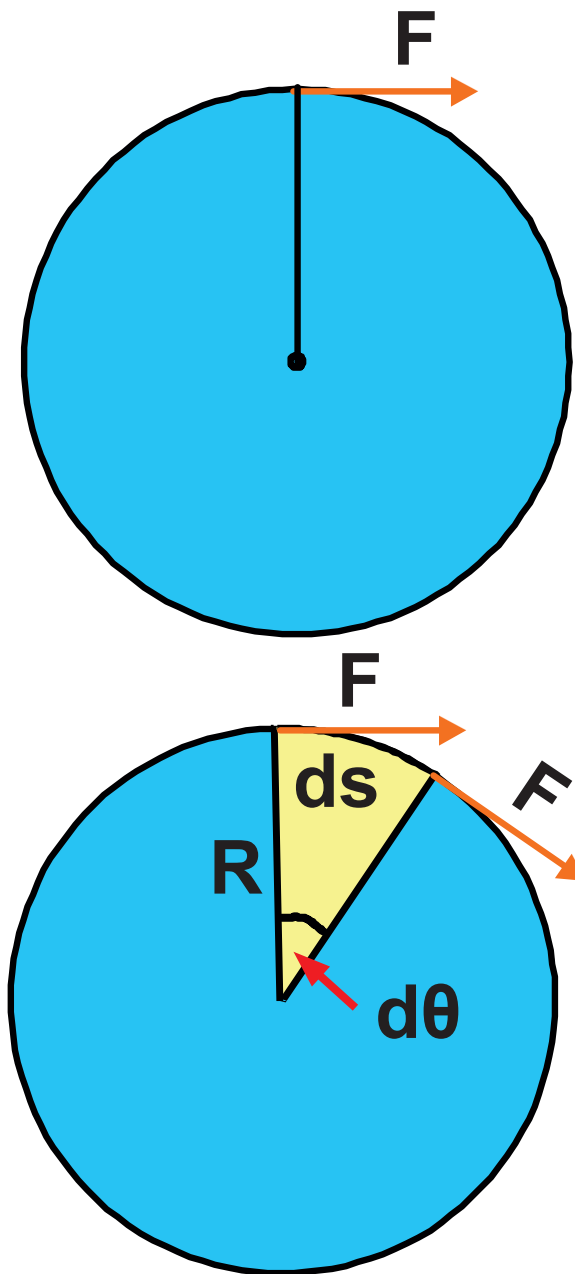
(4.10.) Έργο Κατά τη Στροφική Κίνηση

Όταν πατάμε τα πετάλια του ποδηλάτου ασκούμε δύναμη και παράγουμε έργο. Έργο παράγεται και από τη μηχανή του αυτοκινήτου καθώς στρέφει τον άξονα των τροχών. Το έργο μιας δύναμης που στρέφει ένα σώμα μπορούμε να το εκφράσουμε σε συνάρτηση με τη ροπή της.

Έστω ότι η δύναμη F ασκείται στην περιφέρεια ενός τροχού ακτίνας R , κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης (σχ. 4.35). Κατά την απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία $d\theta$ η δύναμη παράγει έργο

$$dW = F ds$$

Αν η γωνία μετριέται σε ακτίνια τότε $ds = R d\theta$ και $dW = F R d\theta$



Με την επίδραση της δύναμης F το σώμα στρέφεται κατά γωνία $d\theta$. Το σημείο εφαρμογής της F μετατοπίζεται κατά $ds = R d\theta$.

Σχήμα 4-34.

Το γινόμενο FR είναι η ροπή τ της δύναμης.

Επομένως

$$dW = \tau d\theta \quad (4.21)$$

Για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης καθώς ένα σώμα στρέφεται κατά γωνία θ χωρίζουμε τη γωνία σε απειροστά μικρές γωνίες $d\theta_1, d\theta_2, \dots$ και αθροίζουμε τα αντίστοιχα έργα. Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, όπως στην περίπτωση του σχήματος 4.35, από το άθροισμα προκύπτει

$$W = \tau \theta$$

Από την (4.21) παίρνουμε

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου $\frac{dW}{dt}$ είναι η ισχύς P της δύναμης και το $\frac{d\theta}{dt}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος, επομένως

$$P = \tau\omega$$

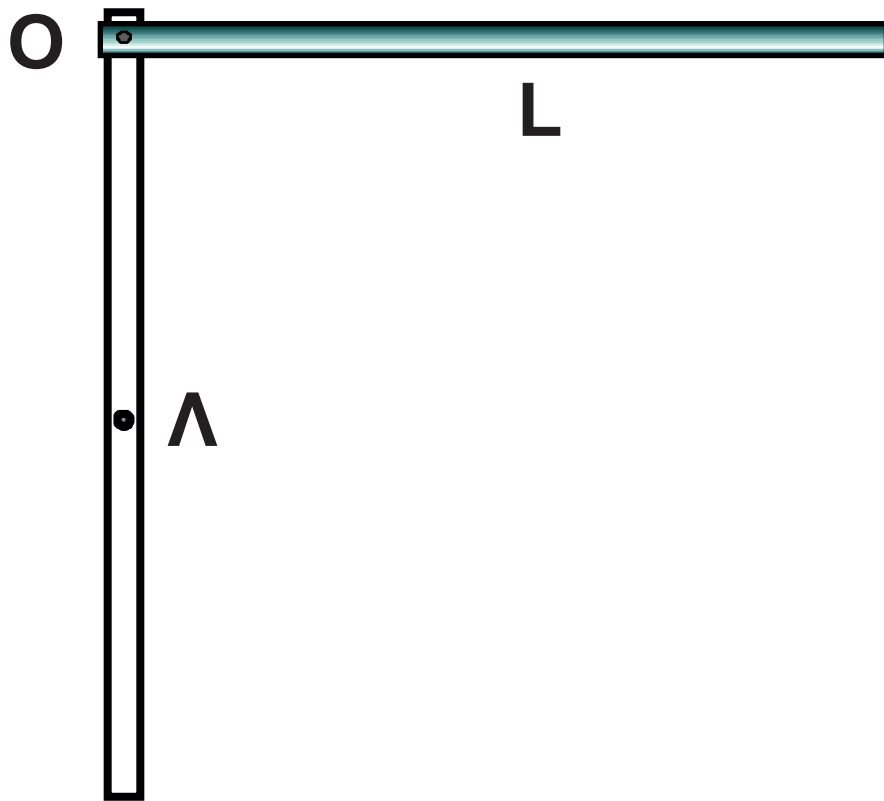
Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Έτσι, στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου – ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\sum W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.

Παράδειγμα 4.12

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $L=0,3\text{ m}$ και μάζας M , στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα O που διέρχεται από το ένα άκρο της. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητά της τη στιγμή που θα περάσει από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα O είναι $\frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$.



Σχήμα 4-35.

Απάντηση:

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον της ράβδου Λ όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Το μέσον της ράβδου είναι το κέντρο μάζας της.

Όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση έχει δυναμική ενέργεια

$$Mg \frac{L}{2}$$

Όταν η ράβδος περάσει από την κατακόρυφη θέση, θα έχει κινητική ενέργεια $\frac{1}{2} I \omega^2$, όπου I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα O .

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει

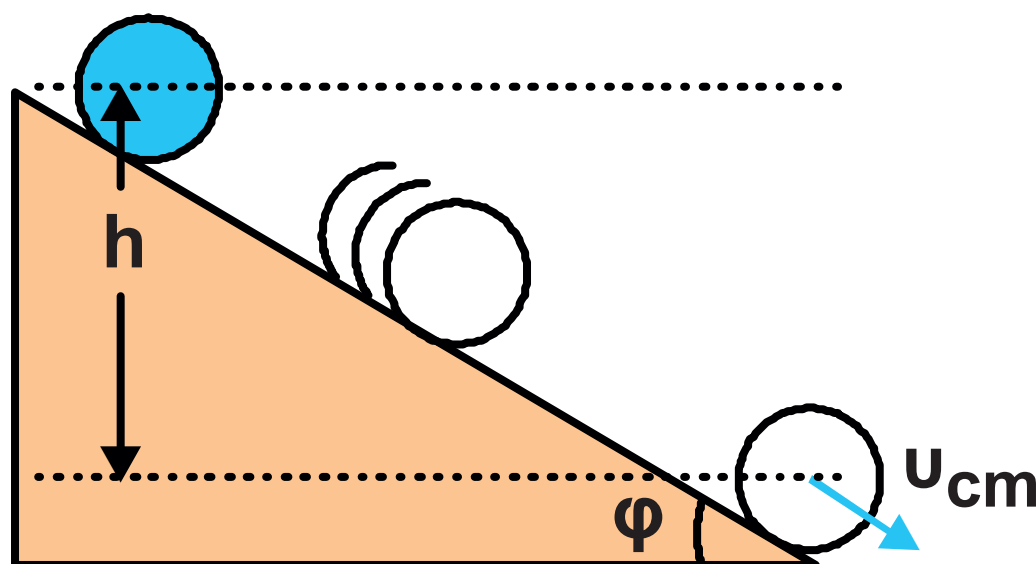
$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 \text{ ή } Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} ML^2 \omega^2$$

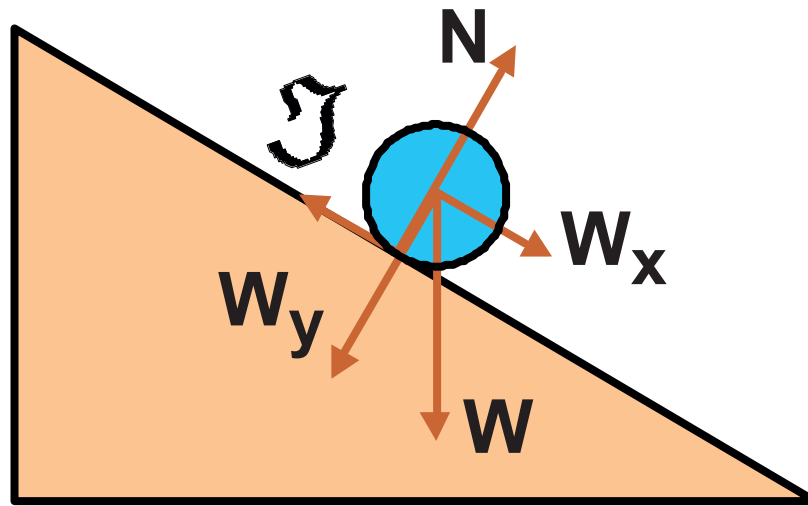
$$\text{από όπου } \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 10 \text{ rad/s}$$

Παράδειγμα 4.13

Ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει κατά μήκος πλάγιου επιπέδου γωνίας φ . Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η κατακόρυφη μετατόπισή του είναι h .

Η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) θεωρείται γνωστή. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$.





Σχήμα 4-36.

Απάντηση:

Η κύλιση του κυλίνδρου οφείλεται στην τριβή. Η ροπή της τριβής ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου είναι αυτή που περιστρέφει τον κύλινδρο. Η τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου. Πρόκειται, δηλαδή, για στατική τριβή. Επομένως η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου διατηρείται.

Αν θεωρήσουμε ότι στην κατώτερη θέση του η δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου είναι ίση με μηδέν, στην ανώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει δυναμική ενέργεια Mgh .

Στην κατώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια, που ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς $\left(\frac{1}{2} M u_{cm}^2\right)$ και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής $\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$Mgh = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{ή } Mgh = \frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

$$\text{ή} \quad gh = \frac{1}{2} u_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{4} R^2 \omega^2 \quad (4.22)$$

Όμως η ταχύτητα u_{cm} του κέντρου μάζας είναι

$$u_{\text{cm}} = \omega R \quad (4.23)$$

Η (4.22) γίνεται από την (4.23)

$$gh = \frac{1}{2} u_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{u_{\text{cm}}}{R} \right)^2$$

$$\text{από όπου} \quad gh = \frac{1}{2} u_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{4} u_{\text{cm}}^2$$

και τελικά

$$u_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

Αντιστοίχιση της Μεταφορικής Κίνησης Στερεού με τη Στροφική Κίνηση

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Θέση x	Γωνία θ
Ταχύτητα $u = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση $a = \frac{du}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$
Δύναμη F	Ροπή τ
Μάζα m	Ροπή αδράνειας I
Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής $\Sigma F = ma$	Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης $\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu}$

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Ορμή $p = mu$	Στροφορμή $L = I\omega$
Δεύτερος νόμος του Newton $\Sigma F = \frac{dp}{dt}$	Δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$
Διατήρηση της ορμής αν $\Sigma F_{\text{εξ}} = 0$ $p = \text{σταθερό}$	Διατήρηση της στροφορμής Αν $\Sigma \tau_{\text{εξ}} = 0$ $L = \text{σταθερό}$
Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς $K = \frac{1}{2}mu^2$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K = \frac{1}{2}I\omega^2$

Πίνακες Σταθερών - Χρήσιμα Μεγέθη

Θεμελιώδεις Φυσικές Σταθερές

118 / 259

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Ταχύτητα του φωτός	c	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$
Φορτίο ηλεκτρονίου (απόλυτη τιμή)	e	$1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Βαρυτική σταθερά (σταθερά της παγκόσμιας έλξης)	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$
Σταθερά Planck	h	$6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Σταθερά Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Σταθερά Avogadro	N_A	$6,023 \times 10^{23} \text{ μόρια/mol}$
Σταθερά των αερίων	R	$8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
Μάζα ηλεκτρονίου	m_e	$9,1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Μάζα νετρονίου	m_n	$1,675 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
Μάζα πρωτονίου	m_p	$1,673 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
Διηλεκτρική σταθερά του κενού	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$
Σταθερά Coulomb	K_C	$9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb}/\text{A} \cdot \text{m}$

Άλλες Χρήσιμες Σταθερές

Μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας

$$4,186 \text{ J/cal}$$

Κανονική ατμοσφαιρική πίεση

$$1 \text{ atm} \quad 1,013 \times 10^5 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$

Απόλυτο μηδέν

$$0 \text{ K} \quad -273 \text{ }^\circ\text{C}$$

Ηλεκτρονιοβόλτ

$$1 \text{ eV} \quad 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Ενέργεια ηρεμίας ηλεκτρονίου

$$mc^2 \quad 0,511 \text{ MeV}$$

Γραμμομοριακός όγκος ιδανικού αερίου (0°C , 1 atm)

$$V_{\text{mol}} \quad 22,4 \text{ L/mol}$$

Λεξιλόγιο Όρων

A

αδρανειακό σύστημα: σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει η αρχή της αδράνειας του Newton.

αεροδύναμη: η δύναμη που δέχεται από τον αέρα η πτέρυγα του αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της πτήσης του.

αιθέρας: υποθετικό αβαρές ελαστικό μέσο, η παρουσία του οποίου θεωρήθηκε απαραίτητη για τη διάδοση του φωτός.

ακτίνες Röntgen: ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-8} και 10^{-13}m . Είναι αποτέλεσμα της επιβράδυνσης των ηλεκτρονίων

που προσπίπτουν σε μεταλλικές επιφάνειες με μεγάλη ταχύτητα ή της αποδιέγερσης των ατόμων του μετάλλου.

ακτίνες γ : ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-10} και 10^{-14} m. Εκπέμπονται από πυρήνες ραδιενεργών στοιχείων.

ακτίνες X: οι ακτίνες Roentgen.

ακτινοβολία: ενέργεια που εκπέμπεται με μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

αμορτισέρ: μηχανισμός που χρησιμοποιείται για την απόσβεση των ταλαντώσεων των αυτοκινήτων.

ανάκλαση κύματος: το φαινόμενο κατά το οποίο όταν το κύμα συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια δυο μέσων επιστρέφει στο πρώτο μέσο ακολουθώντας ορισμένο δρόμο.

άξονας περιστροφής (στερεού σώματος): η ευθεία που ενώνει τα σημεία τα οποία παραμένουν ακίνητα κατά την περιστροφή του σώματος.

απεριοδική ταλάντωση: η κίνηση ενός ταλαντωτή ο οποίος δεν υπερβαίνει τη θέση ισορροπίας, λόγω ισχυρών αποσβέσεων.

απομάκρυνση: η απόσταση σώματος που ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας.

αρμονική ταλάντωση: η ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση του ταλαντωτή είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

αρχική φάση: η τιμή που έχει τη χρονική στιγμή μηδέν η φάση ενός μεγέθους που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

Γ

γενική θεωρία της σχετικότητας: η θεωρία της σχετικότητας που συμπεριλαμβάνει και μη αδρανειακά συστήματα - θεωρία για τη βαρύτητα.

γωνία εκτροπής: η γωνία που σχηματίζει με την αρχική της διεύθυνση η μονοχρωματική δέσμη που βγαίνει από μια οπτική διάταξη.

γωνιακή συχνότητα: μέγεθος που χαρακτηρίζει τα περιοδικά φαινόμενα, ανάλογο προς τη συχνότητα. Στην ομαλή κυκλική κίνηση συμπίπτει με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.

Δ

δείκτης διάθλασης (υλικού): ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητά του στο υλικό αυτό.

δεσμός στάσιμου κύματος: ένα σημείο που παραμένει ακίνητο όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει δημιουργείται στάσιμο κύμα.

δευτέριο: ισότοπο του υδρογόνου με μαζικό αριθμό δύο.

διάθλαση κύματος: η αλλαγή πορείας ενός κύματος κατά τη μετάβασή του από ένα μέσο σε ένα άλλο στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα.

διακρότημα: η αυξομείωση του πλάτους της ταλάντωσης που εκτελεί ένα σώμα όταν μετέχει σε δυο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, που έχουν το ίδιο πλάτος και συχνότητες που παρουσιάζουν μικρή διαφορά.

διάμηκες κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται στη διεύθυνση της διάδοσής του.

διαμόρφωση πλάτους (AM): η τροποποίηση του πλάτους του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διαμόρφωση συχνότητας (FM): η τροποποίηση της συχνότητας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διασκεδασμός (του φωτός): η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης ενός υλικού από το μήκος κύματος.

διαστολή του χρόνου: Η φαινομενική επιβράδυνση του χρόνου

(αύξηση του χρονικού διαστήματος)
σε σώμα που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

δίδυμη γένεση: η μετατροπή ενός φωτονίου σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.

διέγερση (ατόμου): η μετάβαση ενός ηλεκτρονίου του ατόμου σε στιβάδα με ενέργεια μεγαλύτερη από την αρχική.

διεγέρτης: το σώμα που προκαλεί εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός ταλαντωτή- που προσφέρει περιοδικά ενέργεια σε ένα σώμα που ταλαντώνεται.

δύναμη επαναφοράς: η δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να ταλαντώνεται- που τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας.

δυναμική άνωση: η συνισταμένη της αεροδύναμης η κάθετη στην ταχύτητα.

Ε

εγκάρσιο κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση της διάδοσής του.

ειδική θεωρία της σχετικότητας: θεωρία που διατύπωσε ο Einstein για αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Βασικές της παραδοχές είναι: α) η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από τη ταχύτητα του παρατηρητή, β) οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

έκκεντρη κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες.

ελαστική κρούση: η κρούση κατά την οποία διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.

ελεύθερη ταλάντωση: η ταλάντωση ενός σώματος το οποίο εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

έλλειμμα μάζας: η διαφορά της μάζας ενός πυρήνα από τη μάζα των συστατικών του.

ενέργεια σύνδεσης (πυρήνα): το ποσό της ενέργειας που πρέπει να προσφερθεί στον πυρήνα για να διασπαστεί στα συστατικά του.

ενέργεια ηρεμίας: το ποσό της ενέργειας (mc^2) που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

ένταση ακτινοβολίας: η ενέργεια που περνάει από τη μονάδα επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου.

εξαναγκασμένη ταλάντωση: η ταλάντωση που γίνεται με την περιοδική προσφορά ενέργειας στο ταλαντούμενο σύστημα.

εξίσωση κύματος: η σχέση που δίνει την απομάκρυνση των σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα κάθε χρονική στιγμή.

εξίσωση συνέχειας: η σχέση μεταξύ της ταχύτητας ενός ασυμπίεστου ρευστού και της διατομής του σωλήνα στον οποίο κινείται.

εσωτερική τριβή ρευστού: η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των μορίων του ρευστού λόγω της κίνησής του.

έργο εξαγωγής: η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να πάρει ένα ηλεκτρόνιο για να εγκαταλείψει την επιφάνεια ενός μετάλλου.

Η

ηλεκτρική ταλάντωση: εναλλασσόμενο ρεύμα μεγάλης συχνότητας που παίρνουμε από κύκλωμα LC όταν φορτίσουμε τον πυκνωτή.

ηλεκτρομαγνητικό κύμα: η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου στο χώρο.

Ι

ιδιομήκος (αντικειμένου): βλ. «μήκος ηρεμίας».

ιδιόχρονος (αδρανειακού συστήματος): ο χρόνος που μετράει ένα ρολόι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα.

ιξώδες: η εσωτερική τριβή μεταξύ των μορίων ενός ρευστού- συντελεστής που δείχνει πόσο παχύρρευστο είναι ένα υγρό.

Κ

κβαντισμένο μέγεθος: κάθε μέγεθος που παίρνει διακριτές τιμές που είναι πολλαπλάσια μιας ελάχιστης.

κέντρο μάζας (σώματος): το σημείο στο οποίο μπορεί να θεωρηθεί συγκεντρωμένη όλη η μάζα ενός σώματος.

κοιλία στάσιμου κύματος: ένα σημείο που ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει σχηματίζεται στάσιμο κύμα.

κρίσιμη γωνία: η μέγιστη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφανών υλικών για την οποία το φως περνάει από το πρώτο υλικό στο δεύτερο στο οποίο το φως διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

κρούση κεντρική: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

κύμα μηχανικό: μια διαταραχή που μεταδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο.

κυματοπακέτο: κύμα περιορισμένο στο χώρο.

M

μάζα ηρεμίας: η μάζα που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

μέλαν σώμα: σώμα που απορροφά όλες τις ακτινοβολίες που πέφτουν πάνω του.

μετασχηματισμοί Lorentz: οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης και χρόνου ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση.

μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου: οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

μεταφορική κίνηση (στερεού σώματος): η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.

μήκος ηρεμίας (αντικειμένου): το μήκος ενός αντικειμένου, όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ηρεμεί.

μήκος κύματος De Broglie: το μήκος του κύματος που αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο.

μήκος κύματος: η απόσταση στην οποία φτάνει το κύμα σε χρόνο μιας

περιόδου- η μικρότερη απόσταση δύο σημείων, στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, που βρίσκονται σε φάση.

μικροκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκη κύματος μεταξύ **1mm** και **30cm**. Χρησιμοποιούνται στα ραντάρ.

μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας: όργανο που επιτρέπει να απεικονίσουμε αγώγιμες επιφάνειες σε ατομική κλίμακα. Η λειτουργία του βασίζεται στο φαινόμενο σήραγγας.

N

νευτώνεια ρευστά: τα ρευστά στα οποία η εσωτερική τριβή είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας ροής.

Ο

ολική εσωτερική ανάκλαση: η ανάκλαση μιας φωτεινής δέσμης που δε συνοδεύεται από διάθλαση. Γίνεται στην επιφάνεια που διαχωρίζει ένα διαφανές μέσον από ένα άλλο με μικρότερο δείκτη διάθλασης, όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία.

ορμή (υλικού σημείου): το διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας και μέτρο ίσο με το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί το μέτρο της ταχύτητάς του.

ουράνιο τόξο: το φωτεινό τόξο που εμφανίζεται στον ουρανό, ως αποτέλεσμα της ανάκλασης και του διασκεδασμού του ηλιακού φωτός στα σταγονίδια της βροχής.

Π

poise (πουάζ): μονάδα μέτρησης του ιξώδους ενός ρευστού, ισοδύναμη με 10^{-1} Nsm^{-2} .

παροχή (σωλήνα ή ρευματικής φλέβας): το πηλίκο του όγκου dV του ρευστού που περνάει από μια διατομή του σωλήνα (ή της φλέβας) σε χρόνο dt προς το χρόνο αυτό.

περίοδος (φαινομένου): το πηλίκο του χρόνου μέσα στον οποίο ολοκληρώνονται N εναλλαγές του φαινομένου με τον αριθμό N - ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικές όμοιες φάσεις του φαινομένου.

πλάγια κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε τυχαία διεύθυνση.

πλαστική κρούση: η κρούση που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων.

ποζιτρόνιο: το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου - σωματίδιο με μάζα ίση με τη μάζα του ηλεκτρονίου και φορτίο $+e$.

πυρηνική σύντηξη: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας πυρήνες μικρού ατομικού αριθμού συντήκονται και δίνουν βαρύτερους πυρήνες, με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνική σχάση: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας ένας πυρήνας μεγάλου ατομικού αριθμού χωρίζεται σε δυο πυρήνες μικρότερου ατομικού αριθμού με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνικός αντιδραστήρας: η διάταξη στην οποία πραγματοποιούνται ελεγχόμενες πυρηνικές αντιδράσεις.

P

ραδιοκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα που προκύπτουν από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες.

ρευματική γραμμή: η γραμμή που συνδέει τις διαδοχικές θέσεις ενός μορίου του ρευστού.

ρευστά: σώματα που δεν έχουν δικό τους σχήμα- τα υγρά και τα αέρια.

ροπή αδράνειας (ως προς άξονα): το μέτρο της αδράνειας των σωμάτων στη στροφική κίνηση- ορίζεται ως το άθροισμα $\sum m_i \cdot r_i^2$, όπου m_i μια στοιχειώδης μάζα του σώματος και r_i η απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς άξονα):
διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση του άξονα και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της συνιστώσας της δύναμης που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα επί την απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς σημείο):
διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το σημείο και ο φορέας της δύναμης και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του σημείου από τον φορέα της δύναμης.

Σ

σταθερά απόσβεσης: η σταθερά αναλογίας στη σχέση που συνδέει τη δύναμη η οποία προκαλεί την απόσβεση μιας ταλάντωσης με την ταχύτητα του ταλαντωτή.

στάσιμο κύμα: η κίνηση που κάνει ένα μέσο στο οποίο διαδίδονται ταυτόχρονα, με αντίθετη φορά, δυο κύματα της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους.

στιγμιότυπο κύματος: η εικόνα που παρουσιάζει μια χρονική στιγμή το ελαστικού μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα - η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x, t)$ για ορισμένη τιμή του t .

στρόβιλοι: περιοχές στις οποίες το ρευστό κάνει περιστροφική κίνηση.

στροφική κίνηση: η κίνηση ενός στερεού γύρω από άξονα- η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

στροφορμή στερεού σώματος: το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών τμημάτων που απαρτίζουν το στερεό.

στροφορμή συστήματος σωμάτων: το άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

στροφορμή υλικού σημείου (που κάνει κυκλική κίνηση): διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς με μέτρο το γινόμενο του μέτρου της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα της τροχιάς του.

στρωτή ροή: η κίνηση ενός ρευστού, όταν δε σχηματίζονται στρόβιλοι.

συμβολή κυμάτων: η ταυτόχρονη διάδοση δυο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου.

συμβολόμετρο: όργανο που μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε με μεγάλη ακρίβεια τη θέση των κροσσών συμβολής του φωτός.

σύνθεση ταλαντώσεων: η μελέτη της κίνησης ενός σώματος που μετέχει σε περισσότερες από μια ταλαντώσεις.

συντονισμός: το φαινόμενο κατά το οποίο ένα σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με το μέγιστο πλάτος.

συστολή του μήκους: Η φαινομενική σμίκρυνση ενός σώματος που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

συχνότητα κατωφλίου: η ελάχιστη συχνότητα που πρέπει να έχει μια φωτεινή δέσμη για να προκαλέσει εκπομπή φωτοηλεκτρονίων από ένα μέταλλο.

συχνότητα (φαινομένου): ο αριθμός των επαναλήψεων του φαινομένου στη μονάδα του χρόνου.

Τ

ταλάντωση (μηχανική): Παλινδρομική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας.

πλάτος ταλάντωσης: η μεγαλύτερη τιμή της απομάκρυνσης του ταλαντωτή.

τάση αποκοπής: η τιμή της τάσης μεταξύ των ηλεκτροδίων ενός φωτοκύτταρου για την οποία διακόπτεται το ρεύμα.

τυρβώδης ροή: η ροή ενός ρευστού όταν σχηματίζονται στρόβιλοι.

Υ

υδροστατική πίεση: η πίεση των υγρών που οφείλεται στο βάρος τους.

υπεριώδης ακτινοβολία: αόρατη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος από **60 nm** μέχρι **380 nm**.

Φ

φαινόμενο Compton: ο σκεδασμός της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τα σωματίδια της ύλης. Συνοδεύεται από αύξηση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας.

φαινόμενο Doppler: η εμφάνιση διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα του εκπεμπόμενου κύματος και της συχνότητας που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής όταν μεταβάλλεται η απόστασή του από την πηγή του κύματος.

φαινόμενο σήραγγας: η διέλευση σωματιδίων μέσα από ένα φράγμα δυναμικού χωρίς να έχουν την απαραίτητη ενέργεια, όπως απαιτεί η κλασική θεωρία.

φωτοηλεκτρικό φαινόμενο: η απόσπαση ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο όταν στην επιφάνειά του

προσπίπτει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατάλληλης συχνότητας.

φλέβα: το σχήμα που ορίζεται από τις ρευματικές γραμμές που αντιστοιχούν στα σημεία του περιγράμματος μιας επιφάνειας που βρίσκεται στη ροή του ρευστού.

φώραση: η διαδικασία με την οποία διαχωρίζεται το μικροφωνικό ρεύμα από το φέρον κύμα.

φωτοκύτταρο: διάταξη με την οποία οι αυξομειώσεις στην ένταση μιας φωτεινής δέσμης, κατάλληλης συχνότητας, μετατρέπονται σε αυξομειώσεις ηλεκτρικού ρεύματος.

φωτόνιο: το κβάντο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Σωματίο μηδενικής μάζας ηρεμίας.

Αλφαβητικό Ευρετήριο

A

αδρανειακό σύστημα	Z' 34
ακτίνες Röntgen	B' 102, Θ' 37
ακτίνες γ	B' 102
ακτίνες X	B' 102, Θ' 37
ακτινοβολία μέλανος σώματος	Θ' 7
ανάκλαση του φωτός	B' 104
ανάλυση του φωτός	Γ' 18
αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας	H' 22
απεριοδική ταλάντωση	A' 71
απομάκρυνση	A' 24
αρμονική ταλάντωση	A' 24
αρχή διατήρησης της στροφορμής	E' 92

αρχή της αβεβαιότητας	Θ' 57
αρχή του Pascal	Δ' 12
αρχική φάση	Α' 30

Γ

γενική θεωρία της σχετικότητας	Η' 104
γωνία εκτροπής	Γ' 20
γωνιακή επιτάχυνση	Ε' 14
γωνιακή συχνότητα	Α' 21

Δ

δείκτης διάθλασης (υλικού)	Β' 112
δεσμός στάσιμου κύματος	Β' 56
διάθλαση του φωτός	Β' 110
διακρότημα	Α' 114, Α' 116
διάμηκες κύμα	Β' 14
διαμόρφωση κατά πλάτος	Β' 83
διασκεδασμός (του φωτός)	Γ' 18

διαστολή του χρόνου
διαφορικό
δίδυμη γένεση
διεγέρτης
δύναμη επαναφοράς

H' 30
ΣΤ' 103
H' 79
Α' 82
Α' 35

Ε

εγκάρσιο κύμα
έκκεντρη κρούση
ελαστική κρούση
ελεύθερη ταλάντωση
έλλειμμα μάζας
ενέργεια σύνδεσης
ενέργεια ηρεμίας
εξαναγκασμένη ταλάντωση
(ηλεκτρ.)
εξαναγκασμένη ταλάντωση
(μηχαν.)

B' 12
Z' 14
Z' 18, Z' 24
Α' 80
H' 78
H' 85
H' 77
Α' 94
Α' 82

εξίσωση Schrödinger	Θ' 69
εξίσωση Bernoulli	Δ' 39
εξίσωση κύματος	Β' 23
εξίσωση στάσιμου κύματος	Β' 53
εξίσωση συνέχειας	Δ' 27
εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	ΣΤ' 84
επαλληλία κυμάτων	Β' 28
έργο εξαγωγής	Θ' 28
εσωτερική τριβή	Δ' 52

Η

ηλεκτρική ταλάντωση	Α' 51
ηλεκτρομαγνητικό κύμα	Β' 65
ηχοκαρδιογράφημα Doppler	Ζ' 139

Θ

θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης	Ε' 63
---------------------------------------	-------

θεώρημα Steiner

Ε' 56

θεώρημα Torricelli

Δ' 44

I

ιδανικά υγρά

Δ' 19

ιδιομήκος

Η' 44

ιδιοσυχνότητα

Α' 80

ιδιόχρονος

Η' 30

ιξώδες

Δ' 52

K

καμπύλωση του χωροχρόνου **Η' 115**

κβαντικός αριθμός **Θ' 17**

κέντρο μάζας (συστήματος) **Z' 55**

κέντρο μάζας (σώματος) **Ε' 20**

κιβώτιο ταχυτήτων **ΣΤ' 93**

κίνηση του κέντρου μάζας **Z' 58**

κινητική ενέργεια:

- στην αρμονική ταλάντωση	A' 45
- στη στροφική κίνηση	E' 101
κοιλία στάσιμου κύματος	B' 56
κρίσιμη γωνία	Γ' 8
κρούση κεντρική	Z' 13
κύλιση τροχού	E' 17
κύμα ελαστικότητας	B' 8
κυματοπακέτο	Θ' 60
κυματοσυνάρτηση	Θ' 69

M

μάζα ηρεμίας	H' 77
μέλαν σώμα	Θ' 12
μετασχηματισμοί Lorentz	H' 48, H' 60
μετασχηματισμοί έντασης ηλεκτρικού - μαγνητικού πεδίου	H' 91
μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου	Z' 49

μεταφορική κίνηση	Ε' 8
μήκος ηρεμίας	Η' 44
μήκος κύματος	Β' 18
μήκος κύματος De Broglie	Θ' 52
μηχανικά κύματα	Β' 8
μικροκύματα	Β' 95
μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας	Θ' 131
μιόνιο	Η' 35

N

νευτώνεια ρευστά	Δ' 57
νόμος μετατόπισης του Wien	Θ' 14
νόμος του Snell	Β' 113

O

ολική εσωτερική ανάκλαση	Γ' 7
ουράνιο τόξο	Γ' 23

Π

poise (πουάζ)	Δ' 56
παράδοξο των διδύμων	Η' 164
παροχή	Δ' 23, Δ' 24
πείραμα Michelson- Morley	Η' 11
περίοδος	Α' 19
περίοδος ηλεκτρικής ταλάντωσης	Α' 58
πηγάδι δυναμικού	
- με άπειρο βάθος	Θ' 80
- με ορισμένο βάθος	Θ' 86
πλάγια κρούση	Ζ' 14, Ζ' 25
πλαστική κρούση	Ζ' 19, Ζ' 31
πλάτος ταλάντωσης	Α' 25
ποζιτρόνιο	Η' 81
προώθηση πυραύλου	Ζ' 67

Ρ

ραδιοκύματα	Β' 94
ρευματική γραμμή	Δ' 20

ρευστά	Δ' 19
ροπή αδράνειας (ως προς άξονα)	Ε' 51
ροπή δύναμης (ως προς άξονα)	Ε' 28
ροπή δύναμης (ως προς σημείο)	Ε' 33

Σ

σταθερά απόσβεσης	Α' 68
σταθερά επαναφοράς	Α' 35
στάσιμο κύμα	Β' 48
στιγμιότυπο κύματος	Β' 31
στροφική κίνηση	Ε' 12
στροφορμή στερεού σώματος	Ε' 81
στροφορμή συστήματος	Ε' 86
στροφορμή υλικού σημείου	Ε' 78
στρωτή ροή	Δ' 20
συμβολή κυμάτων	Β' 34

συμβολόμετρο	H' 14
σύνθεση ταλαντώσεων	A' 104
σύνθετη κίνηση στερεού	E' 14
συνθήκη ισορροπίας στερεού	E' 44
συνθήκη κανονικοποίησης	Θ' 72
συντονισμός	A' 85
συντονισμού εφαρμογές	A' 97
σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας	Z' 55
συστολή του μήκους	H' 44
συχνότητα	A' 20
συχνότητα κατωφλίου	Θ' 34
σχετικιστική ορμή	H' 70
σχετικιστική ενέργεια	H' 77
σωλήνας	Δ' 22

T

ταλάντωση (μηχανική)	A' 23
τάση αποκοπής	Θ' 27

Υ

υδροστατική πίεση	Δ' 10
υπέρθεση κυμάτων	Β' 28
υπεριώδης ακτινοβολία	Β' 100

Φ

φαινόμενο Compton	Θ' 37
φαινόμενο Doppler	Ζ' 72
φαινόμενο σήραγγας	Θ' 93
φάση ταλάντωσης	Α' 30
φέρουσα συχνότητα	Β' 82
φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση	Α' 78
φθίνουσα ταλάντωση	Α' 64
φλέβα ρευματική	Δ' 22
φώραση	Β' 90
φωτοηλεκτρικό φαινόμενο	Θ' 22
φωτοκύτταρο	Θ' 23
φωτόνιο	Θ' 29

Χ

χωροχρόνος	Η' 24
------------	-------

Βιβλιογραφία

1. Πανεπιστημιακή Φυσική Hugh D. Young Εκδόσεις Παπαζήση.
2. Physics for scientists & engineers Serway.
3. Φυσική Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
4. Halliday - Resnick - Walker Fundamentals of Physics Extended (fifth edition).
5. F.J.Keller - W.E.Gettys - M.J.Skove Physics (second edition).
6. Κεφάλαια σύγχρονης Φυσικής Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
7. Οι έννοιες της Φυσικής Paul G. Hewitt Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

- 8. Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική David J. Griffiths
Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.**
- 9. Μαθήματα Φυσικής (Ηλεκτρισμός - Μαγνητισμός) πανεπιστήμιο Berkley Edward Purcell
μετάφραση και έκδοση ομάδα καθηγητών ΕΜΠ.**
- 10. Κλασσική και σύγχρονη Φυσική Kenneth W. Ford Εκδόσεις Πνευματικός.**
- 11. Κβαντομηχανική Ι. Στέφανος Τραχανάς Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.**
- 12. Η Φυσική σήμερα Ε.Ν. Οικονόμου Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.**

- 13. Η εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική
Einstein - Infeld Εκδόσεις Δω-
δώνη.**
- 14. Η ελαφρότητα της Βαρύτητας
Jayant Narlikar Εκδόσεις
Τροχαλία.**
- 15. Ιστορία της Φυσικής Emilio Segre
Εκδόσεις Δίαυλος.**
- 16. Φυσική Β΄ Ενιαίου Λυκείου (ειδί-
κευση) Υπουργείο Παιδείας Κύ-
προς.**
- 17. Κ.Δ. Αλεξόπουλος - Δ.Ι. Μαρίνος
Γενική Φυσική. Εκδόσεις ΟΛΥ-
ΜΠΙΑ.**
- 18. Κβαντικό σύμπαν Tony Hey &
Patrick Walters, εκδόσεις Κάτο-
πτρο.**

**19. 3000 solved problems in physics
Alvin Halpern, Ph.D Schaum's
Mc Graw Hill.**

**20. Echocardiography Harvey
Feigenbaum fourth edition Lea
& Febigep.**

**21. String and sticky tape
experiments by R.D.Edge.**

**22. Turning the World Inside Out by
Robert Ehrlich.**



Περιεχόμενα

4	Μηχανική στερεού σώματος	—
	Εισαγωγή	6
	Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων	8
	Ροπή δύναμης	26
	Ισορροπία στερεού σώματος	43
	Ροπή αδράνειας	51
	Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης	63
	Στροφορμή	78
	Διατήρηση στροφορμής	89
	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής	101
	Έργο κατά τη στροφική κίνηση	105

Παραρτήματα ---

Πίνακες Σταθερών	118
Λεξιλόγιο Όρων	122
Αλφαβητικό Ευρετήριο	148
Βιβλιογραφία	159





Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.