

Φυσική
Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών

Β' τάξη
Γενικού Λυκείου
5ος τόμος

5ος τόμος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

**Ιωάννης Α. Βλάχος, Διδάκτορας,
Σχολικός Σύμβουλος του κλάδου
ΠΕ4.**

**Ιωάννης Γ. Γραμματικάκης, Επίκου-
ρος Καθηγητής Φυσικής στο Πανε-
πιστήμιο Αθηνών.**

**Βασίλης Α. Καραπαναγιώτης, Φυσι-
κός, Καθηγητής Πειραματικού Σχο-
λείου Πανεπιστημίου Αθηνών.**

**Περικλής Εμ. Περιστερόπουλος, Φυ-
σικός, Υποψήφιος Διδάκτορας, Κα-
θηγητής στο 3ο Λύκειο Βύρωνα.**

**Γιώργος Β. Τιμόθεου, Φυσικός,
Λυκειάρχης στο 2ο Λύκειο Αγ. Παρα-
σκευής.**

Αλέκος Ιωάννου

Γιάννης Ντάνος

Άγγελος Πήπτας

Σταύρος Ράπτης

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΓΡΑΦΙΚΗΣ ΟΜΑΔΑΣ

Παναγιώτης Β. Κόκκοτας, Καθηγητής της Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τον Ιωάννη Βαγιωνάκη, Φυσικό, για τη συμβολή του στη συγγραφή ασκήσεων και ερωτήσεων, για τις παρατηρήσεις και υποδείξεις του, καθώς και για τη βοήθειά του στην επιμέλεια έκδοσης.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ

**Φλυτζάνης Νικόλαος (Πρόεδρος),
Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του
Πανεπιστημίου Κρήτης.
Καλοψικάκης Εμμανουήλ, Φυσικός,
τ. Σχολικός Σύμβουλος.**

**Ξενάκης Χρήστος, Δρ. Φυσικός,
Σχολικός Σύμβουλος Φθιώτιδος.
Πάλλας Δήμος, Φυσικός, Υποδιευ-
θυντής 1ου Λυκείου Λαμίας.
Στεφανίδης Κωνσταντίνος, Δρ. Φυ-
σικός, Σχολικός Σύμβουλος Πειραιά.**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
(Ι.Ε.Π.)**

**Μετατροπή: Φλεμοτόμου Ιουστίνα
Επιμέλεια: Γελαστοπούλου Μαρία**

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠ/ΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΒΛΑΧΟΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ Γ. ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΚΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ Α. ΚΑΡΑΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Β. ΚΟΚΚΟΤΑΣ
ΠΕΡΙΚΛΗΣ ΕΜ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ Β. ΤΙΜΟΘΕΟΥ**

**ΑΛΕΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΤΑΝΟΣ
ΑΓΓΕΛΟΣ ΠΗΤΤΑΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΡΑΠΤΗΣ**

**ΦΥΣΙΚΗ
Ομάδα Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών**

**Β' τάξη Γενικού Λυκείου
5ος τόμος**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»**

5 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



- 5.1 Εισαγωγή
- 5.2 Ένταση ηλεκτρικού πεδίου
- 5.3 Ηλεκτρική ροή
- 5.4 Ο νόμος του Gauss

- 5.5 Δυναμικό –
 Διαφορά δυναμικού**
- 5.6 Η δυναμική ενέργεια
 πολλών σημειακών φορτίων**
- 5.7 Σχέση έντασης και διαφοράς
 δυναμικού στο ομογενές
 ηλεκτροστατικό πεδίο**
- 5.8 Κινήσεις φορτισμένων
 σωματιδίων σε ομογενές
 ηλεκτροστατικό πεδίο**
- 5.9 Πυκνωτής και χωρητικότητα**
- 5.10 Ενέργεια αποθηκευμένη σε
 φορτισμένο πυκνωτή**
- 5.11 Πυκνωτής και διηλεκτρικά**
- 5.12 Το βαρυτικό πεδίο**
- 5.13 Το βαρυτικό πεδίο της Γης**
- 5.14 Ταχύτητα διαφυγής –
 Μαύρες τρύπες**
- 5.15 Σύγκριση ηλεκτροστατικού –
 βαρυτικού πεδίου**

5-1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το «πεδίο» μπήκε στο λεξιλόγιο των φυσικών στις αρχές του περασμένου αιώνα από τον Michael Faraday (Φαραντέι), που προσπαθούσε να εξηγήσει πώς αλληλεπιδρούν σώματα που δεν βρίσκονται σε επαφή.

Πεδίο (δυνάμεων) είναι η περιοχή του χώρου μέσα στην οποία το κατάλληλο υπόθεμα δέχεται δύναμη.

Πεδίο μπορεί να δημιουργήσει μια μάζα (βαρυτικό πεδίο), ένα ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο (ηλεκτροστατικό πεδίο) ή ένα φορτίο που κινείται (μαγνητικό πεδίο).

Σε όλες τις περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε τι δύναμη θα δέχεται το υπόθεμα όταν το

φέρουμε σε συγκεκριμένο σημείο του πεδίου. Η ανάγκη αυτή οδήγησε στην εισαγωγή του διανυσματικού μεγέθους ένταση που την ορίσαμε ως τη δύναμη ανά μονάδα υποθέματος.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιορισθούμε στη μελέτη του ηλεκτροστατικού και του βαρυτικού πεδίου. Το μαγνητικό πεδίο θα το δούμε ξεχωριστά, στο επόμενο κεφάλαιο.

Το κοινό ανάμεσα στο ηλεκτροστατικό και το βαρυτικό πεδίο είναι ότι η δύναμη που δέχεται το υπόθεμα έχει την ίδια διεύθυνση με την ένταση και ότι το έργο της δύναμης του πεδίου δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, είναι δηλαδή διατηρητικά πεδία.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με το νόμο του Gauss, που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του φορτίου και του

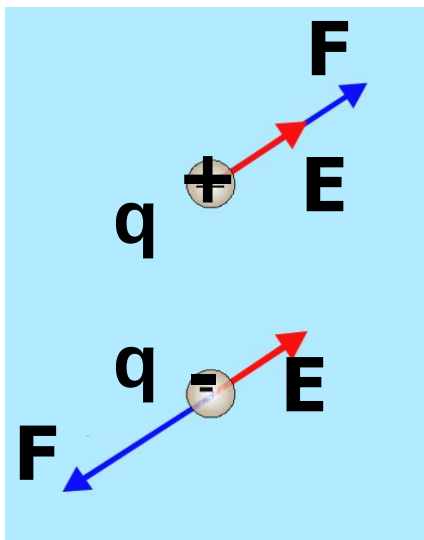
ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί, στη συνέχεια με το δυναμικό, μέγεθος που περιγράφει με διαφορετικό (συμπληρωματικό) τρόπο, το ηλεκτρικό πεδίο και, τέλος, με το πεδίο βαρύτητας.

5-2 ΕΝΤΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Υπενθυμίζουμε ότι ένταση σ' ένα σημείο Α ενός ηλεκτροστατικού πεδίου είναι το σταθερό πηλίκο της δύναμης που ασκείται από το πεδίο σ' ένα φορτίο q (υπόθεμα), που θα βρεθεί στο σημείο Α, προς το φορτίο αυτό.

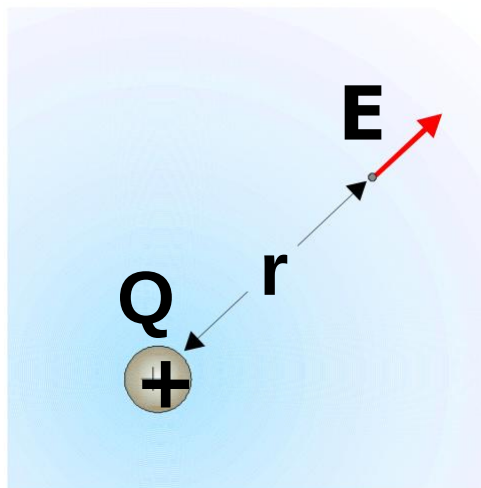
$$E = \frac{F}{q}$$

Η ένταση είναι διανυσματικό μέγεθος που έχει την κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται σε ένα θετικό φορτίο.



Σχ. 5.1 Εάν σ' ένα σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το ηλεκτροστατικό πεδίο βρεθεί ένα φορτίο q θα δεχθεί δύναμη.

Εάν το q είναι θετικό η δύναμη θα είναι ομόρροπη της έντασης, ενώ αν το q είναι αρνητικό αντίρροπη.



Σχ. 5.2 Ένα ακίνητο σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q δημιουργεί γύρω του στο χώρο ηλεκτροστατικό πεδίο.

Εάν το πεδίο δημιουργείται από σημειακό φορτίο Q και η απόσταση του σημείου A από το Q είναι r η δύναμη που θα δεχθεί το φορτίο q

σύμφωνα με το νόμο του Coulomb

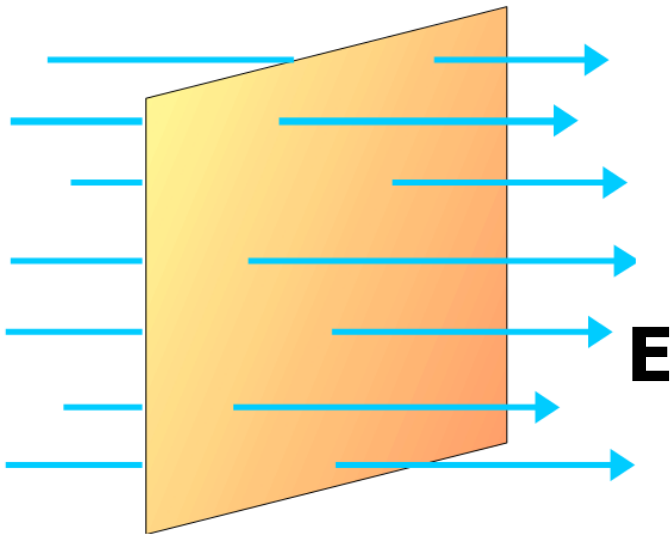
θα έχει μέτρο $F = K_c \frac{|Qq|}{r^2}$. Από τον

ορισμό της έντασης προκύπτει για την ένταση πεδίου σημειακού φορτίου Q ότι

$$E = K_c \frac{|Q|}{r^2}$$

Η σχέση ανάμεσα στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και στις πηγές του (φορτία) μπορεί να εκφραστεί με ένα αξιοσημείωτα απλό τρόπο. Για να γίνει αυτό χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε ένα νέο μέγεθος, που ονομάζεται ηλεκτρική ροή.

5-3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ

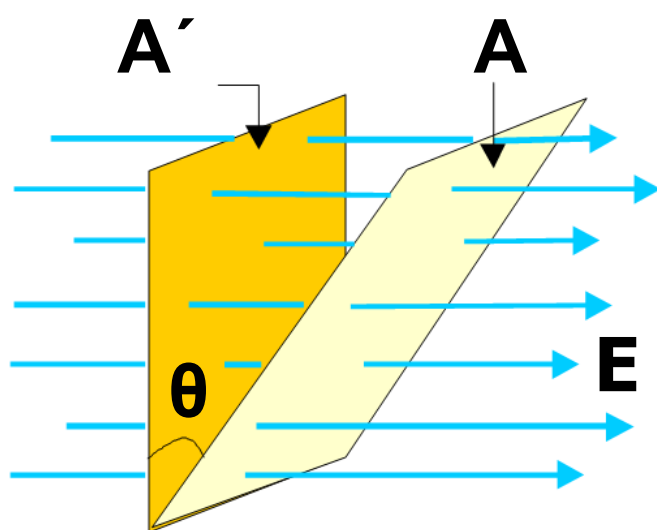


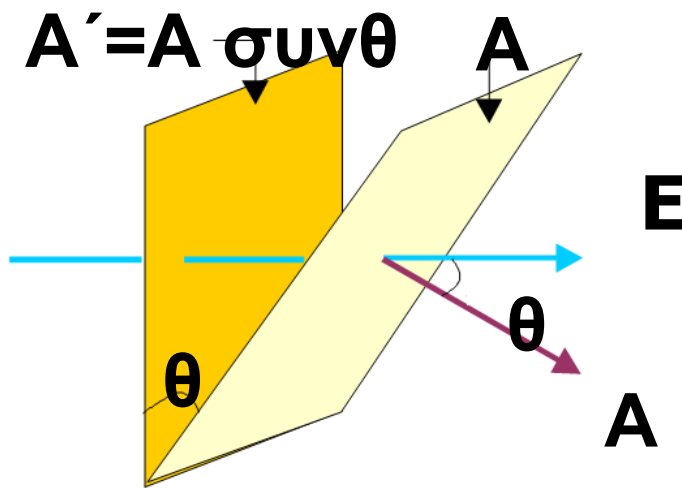
Σχ. 5.3 Η επιφάνεια είναι τοποθετημένη κάθετα στις δυναμικές γραμμές, ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και μια επιφάνεια εμβαδού A , κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου (σχ. 5.3). Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου σχεδιάζονται έτσι ώστε ο αριθμός τους που διαπερνά κάθετα τη μοναδιαία επιφάνεια να είναι ανάλογος με το μέτρο της έντασης του πεδίου. Ο συνολικός αριθμός των γραμμών που διαπερ-

νούν την επιφάνεια A είναι ανάλο-
γος με το γινόμενο EA . Το γινόμενο
αυτό το ονομάζουμε ηλεκτρική ροή
που διέρχεται από την επιφάνεια A
και το συμβολίζουμε με Φ_E .

Αν η επιφάνεια A δεν είναι κάθε-
τη στις δυναμικές γραμμές, (σχ.5.4),
ο αριθμός των δυναμικών γραμμών
που διέρχονται από την επιφάνεια
 A είναι ίσος με τον αριθμό των δυ-
ναμικών γραμμών που διέρχονται
από την προβολή της επιφάνειας
σε ένα επίπεδο κάθετο στις
δυναμικές γραμμές.





Σχ. 5.4 Από τις επιφάνειες A και A' περνάει η ίδια ηλεκτρική ροή αφού από τις δύο επιφάνειες διέχεται ο ίδιος αριθμός δυναμικών γραμμών.

Από το σχήμα 5.4 βλέπουμε ότι $A' = A \cos \theta$. Εφόσον ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από την A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών που διέρχονται από την A' , η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια A είναι ίση με τη ροή που διέρχεται από την επιφάνεια A' . Επειδή $A' = A \cos \theta$ και $EA' = EA \cos \theta$

η ροή που διέρχεται από την επιφάνεια A είναι $\Phi_E = EA \cos\theta$

Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια A , ας το συμβολίσουμε με $\mathbf{A}$, με τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών (σχ. 5.4).

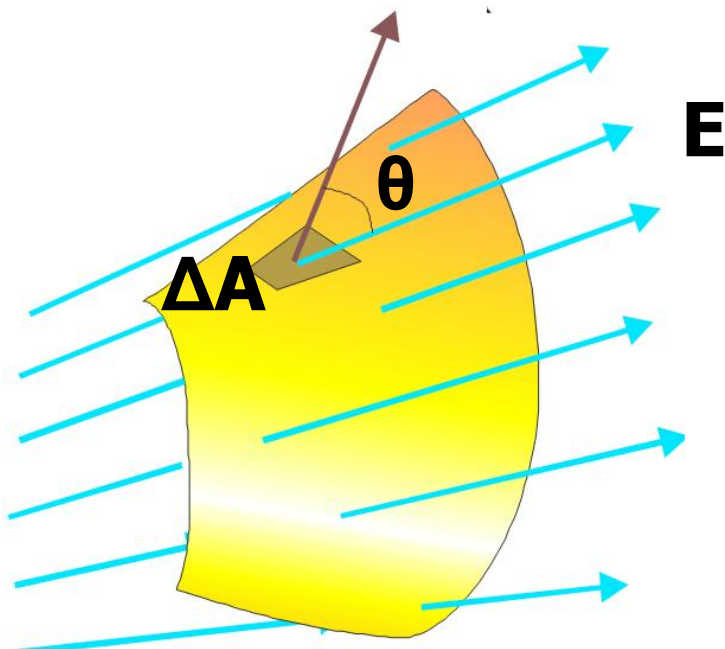
Πήραμε ένα κάθετο διάνυσμα και όχι απλά την κάθετη στην επιφάνεια επειδή μια επιφάνεια έχει δύο όψεις και, αντίστοιχα, η ηλεκτρική ροή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Επομένως

Η ηλεκτρική ροή Φ_E που διέρχεται από μια επίπεδη επιφάνεια, εμβαδού A , η οποία βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E , είναι ίση με

$$\Phi_E = EA \cos\theta \quad (5.1)$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα $\mathbf{A}$ με τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών.

Η ηλεκτρική ροή στο SI μετριέται σε $\text{N m}^2/\text{C}$.



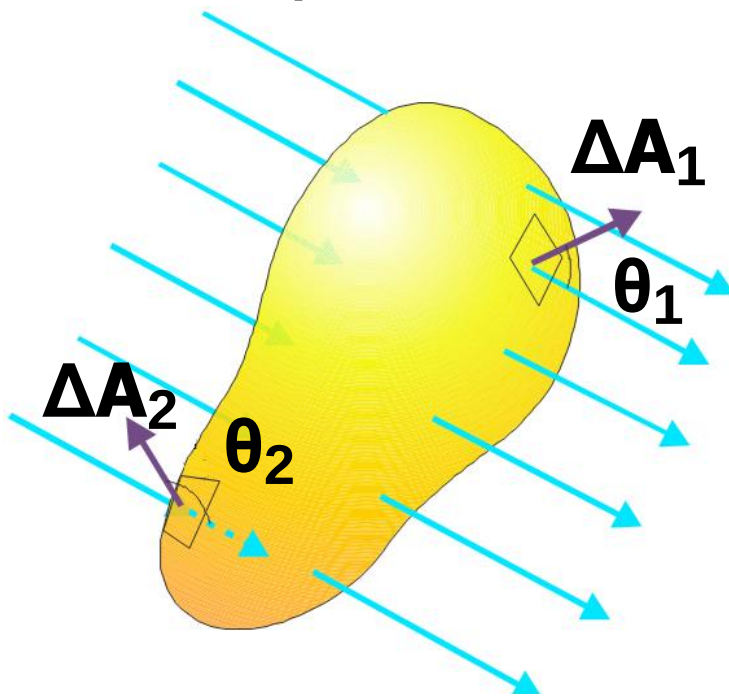
Σχ. 5.5 Για να βρούμε την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια τυχαίου σχήματος χωρίζουμε την επιφάνεια σε μικρά τμήματα.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου η επιφάνεια A δεν είναι επίπεδη και βρίσκεται μέσα σε ανομοιογενές

ηλεκτρικό πεδίο, επειδή ούτε οι γραμμές του πεδίου τέμνουν παντού την επιφάνεια με την ίδια γωνία, ούτε η ένταση έχει παντού την ίδια τιμή, για να βρούμε την ηλεκτρική ροή πρέπει να χωρίσουμε την επιφάνεια σε μικρά τμήματα ΔA , τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη επιφάνεια και σε καθένα από αυτά η ένταση του πεδίου να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Η ηλεκτρική ροή $\Delta\Phi_E$ που διέρχεται από μια στοιχειώδη επιφάνεια ΔA είναι $\Delta\Phi_E = E\Delta A \cos\theta$ και η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από ολόκληρη την επιφάνεια A προκύπτει από το άθροισμα αυτών των όρων

$$\Phi_E = \sum E_i \Delta A_i \cos\theta_i$$

όπου E_i , θ_i οι τιμές των E και θ για κάθε ΔA_i .



Σχ. 5.6 Κλειστή επιφάνεια μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Τα κάθετα διανύσματα ΔA εξ ορισμού κατευθύνονται προς τα έξω.

Συνήθως μας ενδιαφέρει η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια. Θεωρήστε ένα ηλεκτρικό πεδίο και μέσα σ' αυτό μια κλειστή επιφάνεια σαν μπαλόνι (σχ. 5.6) ή με οποιοδήποτε άλλο σχήμα. Για να υπολογίσουμε την

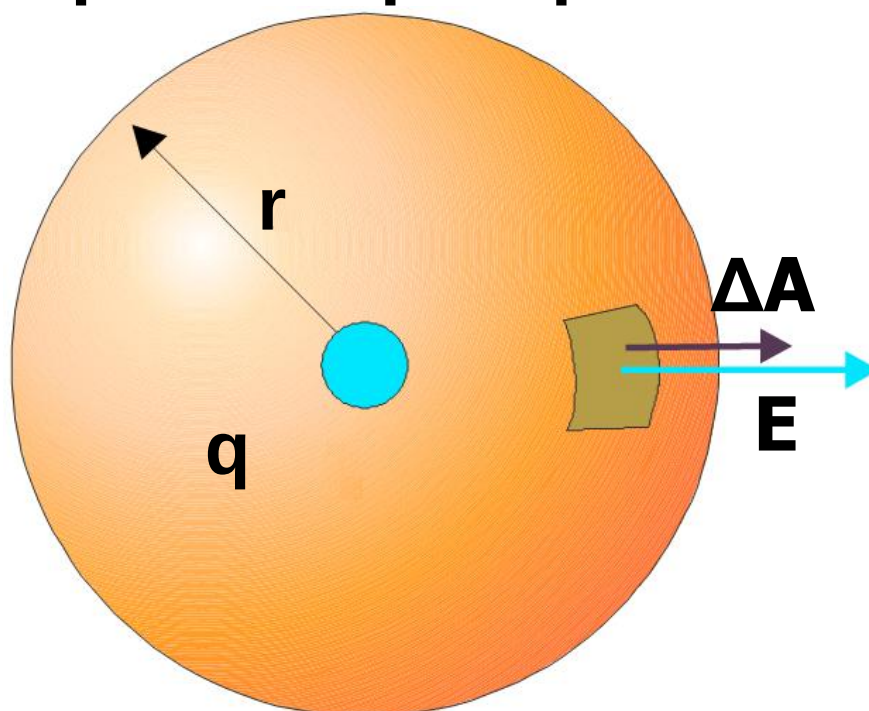
ηλεκτρική ροή που διέρχεται από αυτή την κλειστή επιφάνεια, ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω. Χωρίζουμε την επιφάνεια σε πολύ μικρά τμήματα ΔA , υπολογίζουμε την ηλεκτρική ροή $\Delta\Phi_E$ που διέρχεται από κάθε ένα από αυτά και, τέλος, αθροίζουμε όλους τους όρους. Το κάθετο διάνυσμα σε κάθε μικρό στοιχείο επιφάνειας ΔA , λαμβάνεται με φορά προς τα έξω. Αν σε ένα στοιχείο επιφάνειας όπως το ΔA_1 οι δυναμικές γραμμές κατευθύνονται προς τα έξω, η γωνία θ_1 είναι μικρότερη των 90° , το συνημίτονο της γωνίας είναι θετικό και επομένως και η ηλεκτρική ροή $\Delta\Phi_1$ που διέρχεται από το τμήμα αυτό της επιφάνειας είναι θετική. Σε άλλα τμήματα επιφάνειας, όπως το ΔA_2 όπου οι δυναμι-

κές γραμμές κατευθύνονται προς τα μέσα, $\theta_2 > 90^\circ$, και επομένως $\Delta\Phi_2 < 0$.

Αν από την επιφάνεια εξέρχονται περισσότερες γραμμές από όσες εισέρχονται, η ολική ροή είναι θετική ενώ αν εισέρχονται περισσότερες από όσες εξέρχονται, αρνητική. Στο σχήμα 5.6 ο αριθμός των γραμμών που εισέρχονται είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών που εξέρχονται, επομένως η ολική ροή είναι μηδέν.

5-4 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS (Γκάους)

Ο νόμος αυτός συνδέει την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια με το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια.



Σχ. 5.7 Το σημειακό φορτίο q βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας ακτίνας r .

Έστω ένα σημειακό θετικό φορτίο q . Ας φανταστούμε μια σφαίρα ακτίνας r , όπως στο σχήμα 5.7, που έχει κέντρο το σημείο στο

οποίο βρίσκεται το φορτίο. Θα υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την σφαίρα. Γνωρίζουμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας έχει μέτρο

$$E = K_c \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (5.2)$$

διεύθυνση ακτινική και φορά προς τα έξω.

Χωρίζουμε την επιφάνεια της σφαίρας σε στοιχειώδη τμήματα ΔA , τόσο μικρά ώστε το καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου που δημιουργεί το q τέμνουν κάθετα κάθε στοιχειώδη επιφάνεια ΔA και το κάθετο διάνυσμα ΔA σε κάθε τέτοια επιφάνεια είναι παράλληλο με τις δυναμικές γραμμές. Η ολική ροή που διέρχεται

από την επιφάνεια της σφαίρας
είναι

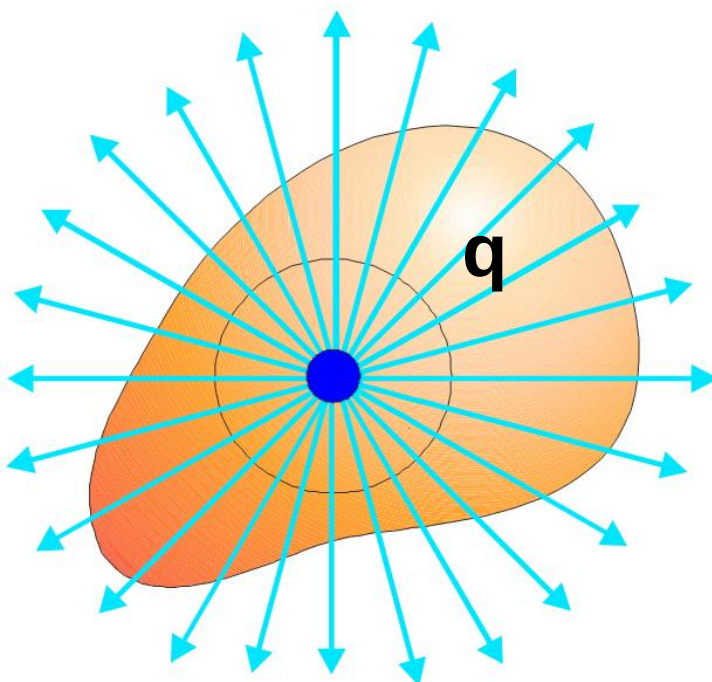
$$\Phi_E = \sum E_i \Delta A_i \cos \theta_i = \sum E \Delta A = E \sum \Delta A \quad (5.3)$$

Ο όρος $\sum \Delta A$ δίνει το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας που είναι ίσο με $4\pi r^2$. Από τις σχέσεις (5.3) και (5.2) παίρνουμε

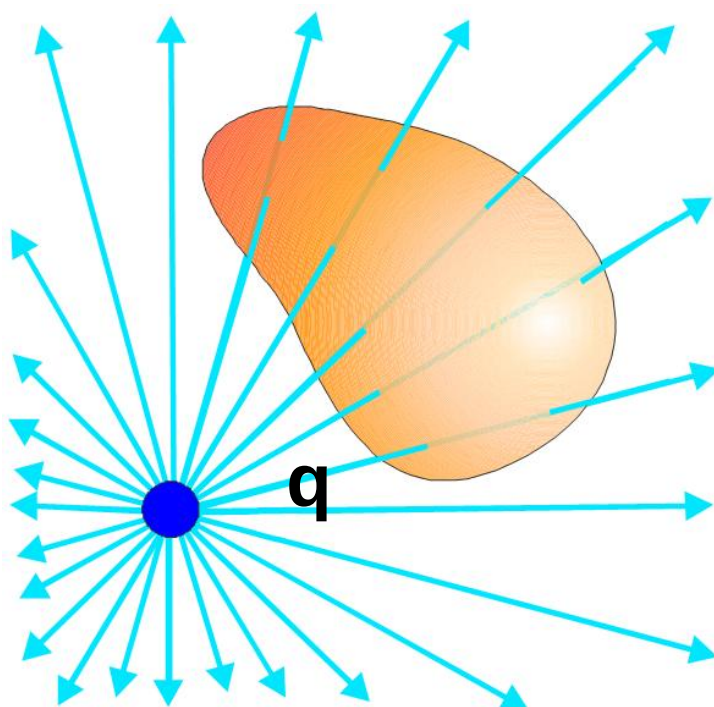
$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η ηλεκτρική ροή (Φ_E) είναι ανεξάρτητη της ακτίνας r της σφαίρας που επιλέξαμε. Αυτό είναι λογικό γιατί, το πλήθος των δυναμικών γραμμών που περνά από οποιαδήποτε σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το φορτίο είναι ίδιο ανεξάρτητα από την ακτίνα της. Στην πραγματικότητα

η επιφάνεια δεν χρειάζεται να είναι σφαιρική. Από οποιαδήποτε κλειστή επι-φάνεια, που περικλείει το φορτίο q , (σχ. 5.8) θα περνάει ίδιος αριθμός δυναμικών γραμμών.



Σχ. 5.8 Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από τις δύο επιφάνειες είναι ίδια



Σχ. 5.9 Το φορτίο q βρίσκεται έξω από την επιφάνεια. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου που δημιουργεί και εισέρχονται σ' αυτή εξέρχονται από κάποιο άλλο σημείο απ' αυτή. Η συνολική ηλεκτρική ροή που περνάει από την επιφάνεια είναι ίση με μηδέν.

Επομένως, η ηλεκτρική ροή για κάθε κλειστή επιφάνεια που περι-κλείει το φορτίο q είναι ίση με αυτή που βρήκαμε για τη σφαίρα, δηλαδή

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Το συμπέρασμα στο οποίο κατά-
λήξαμε γενικεύεται και στην περί-
πτωση που έχουμε πολλά σημεια-
κά φορτία, ή φορτισμένα σώματα.
Με την αρχή της επαλληλίας απο-
δεικνύεται ότι η ηλεκτρική ροή που
διέρχεται από μια οποιαδήποτε
κλειστή επιφάνεια είναι ίση με
 $Q_{\text{εγκ}}/\epsilon_0$ όπου $Q_{\text{εγκ}}$ το φορτίο που
περικλείεται από την κλειστή επι-
φάνεια. Η παραπάνω πρόταση
αποτελεί το νόμο του Gauss για το
ηλεκτρικό πεδίο. Σύμφωνα με
αυτόν**

**η ηλεκτρική ροή που διέρχεται
από μια κλειστή επιφάνεια ισού-
ται με το πηλίκο του ολικού
φορτίου που περικλείει η επιφά-
νεια, προς τη σταθερά ϵ_0 .**

$$\Phi_E = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_0} \quad (5.4)$$



Εικ.5.1 Karl Friedrich Gauss. (1777-1855). Γερμανός, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των αιώνων.

Την κλειστή επιφάνεια που επιλέγουμε για να εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss θα την ονομάζουμε **επιφάνεια Gauss**.

Κατά την εφαρμογή του νόμου του Gauss πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Ενώ το φορτίο $Q_{\varepsilon\gamma\kappa}$ στη σχέση (5.4) είναι το φορτίο που βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια Gauss, το E είναι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται τόσο σε φορτία που βρίσκονται μέσα στην

επιφάνεια όσο και σε φορτία που βρίσκονται έξω από αυτήν.

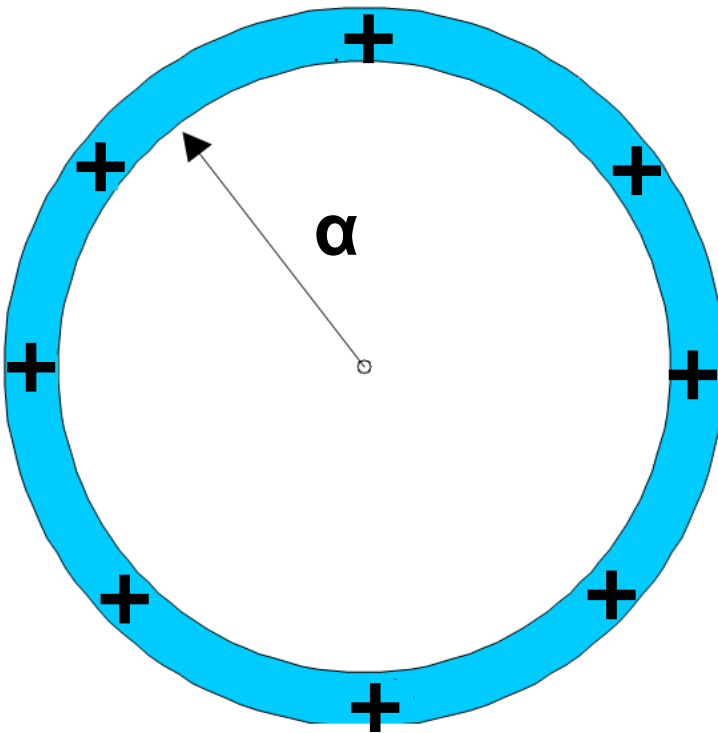
Ο νόμος του Gauss είναι θεμελιώδους σημασίας στην ηλεκτροστατική. Η σημασία του είναι ανάλογη με αυτήν του νόμου του Coulomb. Στην πραγματικότητα ο νόμος του Gauss και ο νόμος του Coulomb δεν είναι δυο ανεξάρτητοι φυσικοί νόμοι, αλλά ο ίδιος νόμος που εκφράζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο νόμος του Gauss δίνει εύκολα την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε περιπτώσεις όπου έχουμε συμμετρική κατανομή φορτίου.

Εφαρμογές του νόμου του Gauss

Όπως είπαμε, με το νόμο του Gauss μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε περιπτώσεις που το ηλεκτρικό φορτίο κατανέμεται συμμετρικά. Στις περιπτώσεις αυτές επιλέγουμε μια επιφάνεια (επιφάνεια Gauss) που έχει την ίδια συμμετρία με εκείνη της κατανομής του φορτίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-1

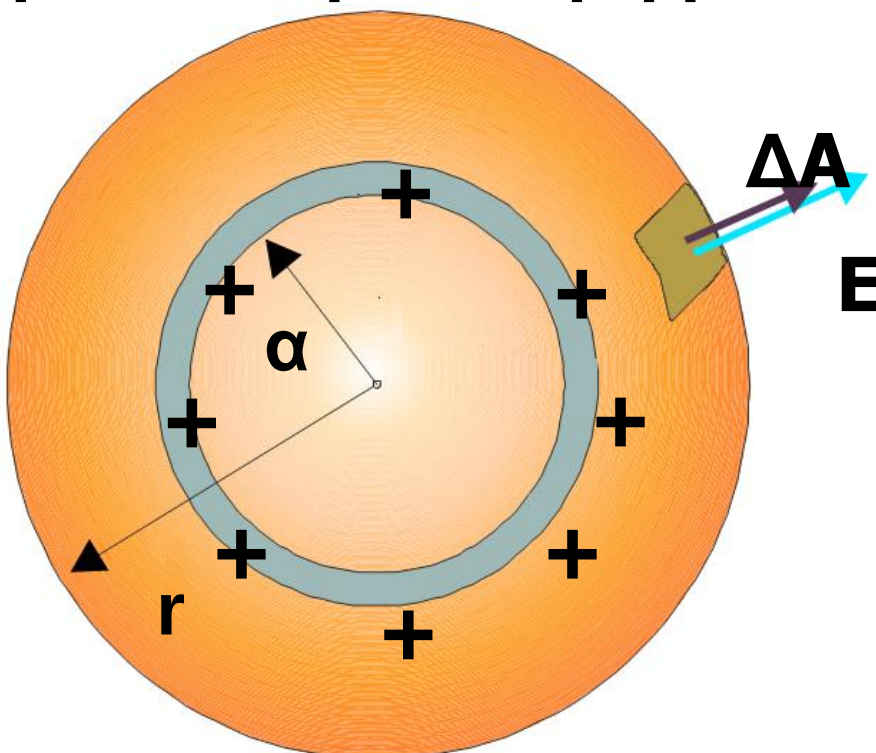


Σχ. 5.10 Το ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο σφαιρικό κέλυφος

Ένα σφαιρικό κέλυφος που θεωρούμε ότι έχει αμελητέο πάχος (σχ.5.10) έχει ακτίνα α και φέρει φορτίο Q , ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του. Βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εξωτερικό και στο εσωτερικό του σφαιρικού κελύφους.

Απάντηση :

Επειδή το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια του κελύφους, το πεδίο που δημιουργεί το κέλυφος έχει ακτινική διεύθυνση και η ένταση έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία που απέχουν το ίδιο από το κέντρο του κελύφους. Για τους λόγους αυτούς επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαιρική επιφάνεια, ομόκεντρη με το κέλυφος .



Σχ. 5.11 Η επιφάνεια Gauss είναι σφαίρα ομόκεντρη με το κέλυφος με

ακτίνα μεγαλύτερη ή ίση της ακτίνας του κελύφους

A) Η επιφάνεια Gauss έχει ακτίνα r μεγαλύτερη ή ίση της ακτίνας του κελύφους, $r \geq a$.

Χωρίζουμε την επιφάνεια σε πολύ μικρά τμήματα. Έστω ένα από αυτά, εμβαδού ΔA . Η κάθετη ΔA στην επιφάνεια ΔA και η ένταση του πεδίου σ' αυτή την περιοχή, έχουν την ίδια κατεύθυνση, (σχ. 5.11) επομένως η ροή που διέρχεται από την επιφάνεια ΔA είναι

$$\Delta\Phi_E = E\Delta A \cos 0 = E\Delta A$$

Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο τμήμα ΔA της επιφάνειας Gauss.

Άρα η συνολική ροή είναι

$$\Phi_E = \sum E\Delta A = E \sum \Delta A = E4\pi r^2 \quad (5.5)$$

Όμως από το νόμο του Gauss έχουμε

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5.6)$$

Από (3.5) και (3.6) έχουμε

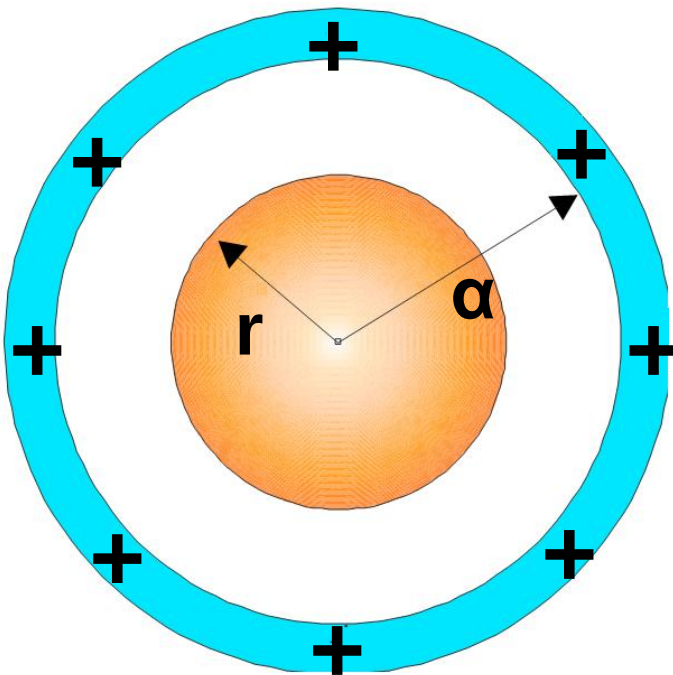
$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{επομένως}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Αυτή όμως είναι η σχέση που δίνει την ένταση του πεδίου που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο Q , σε απόσταση r . Επομένως ο σφαιρικός φλοιός συμπεριφέρεται, στον εξωτερικό του χώρο, σαν να ήταν ένα σημειακό φορτίο συγκεντρωμένο στο κέντρο του.

Ας δούμε όμως τι συμβαίνει στο εσωτερικό

B) Επιλέγουμε και πάλι μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ομόκεντρη με το κέλυφος που τώρα έχει ακτίνα $r < \alpha$.



Σχ. 5.11 Η επιφάνεια Gauss είναι σφαίρα ομόκεντρη με το κέλυφος και με μικρότερη ακτίνα

Αν, όπως και πριν, φανταστούμε την επιφάνεια χωρισμένη σε στοιχειώδη τμήματα, θα καταλήξουμε πάλι στη σχέση

$$\Phi_E = \sum E \Delta A = E \sum \Delta A = E 4\pi r^2 \quad (5.7)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss

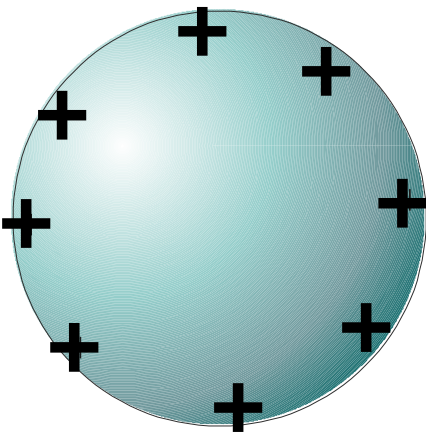
$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0} \quad \text{όμως } Q_{\text{εγκ}} = 0 \text{ επομένως}$$

$$\Phi_E = 0 \quad (5.8)$$

Από (5.7) και (5.8) προκύπτει $E=0$

Δηλαδή στο εσωτερικό του κελύφους δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο.

Παρατήρηση



Σχ. 5.13 Όλο το φορτίο του σφαιρικού αγωγού βρίσκεται στην επιφάνειά του. Εξωτερικά ο αγωγός συ-

μπεριφέρεται σαν όλο του το φορτίο να είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο του (σαν σημειακό φορτίο). Στο εσωτερικό του αγωγού το πεδίο είναι μηδέν.

Σε κάθε σώμα υπάρχει και θετικό και αρνητικό φορτίο. Στα ηλεκτρικά ουδέτερα σώματα, το ποσό του θετικού φορτίου είναι ίσο με το ποσό του αρνητικού φορτίου. Αν ένα σώμα είναι φορτισμένο πλεονάζει το θετικό ή το αρνητικό φορτίο. Σε ένα φορτισμένο αγωγό οι απωστικές δυνάμεις μεταξύ των φορτίων που πλεονάζουν είναι ισχυρότερες από τις ελκτικές δυνάμεις που δέχονται από τα φορτία που έχουν αντίθετο πρόσημο. Έτσι τα φορτία που πλεονάζουν τείνουν να απομακρυνθούν μεταξύ τους και συγκεντρώνονται στην επιφάνεια του αγω-

γού.¹ Αν ο αγωγός είναι σφαιρικός το πλεονάζον φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια του αγωγού. Επομένως το πεδίο που δημιουργεί ένας στατικά φορτισμένος σφαιρικός αγωγός είναι όμοιο με το πεδίο ενός φορτισμένου σφαιρικού κελύφους.

¹ Στην πραγματικότητα τα φορτία που μετακινούνται στον αγωγό είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2

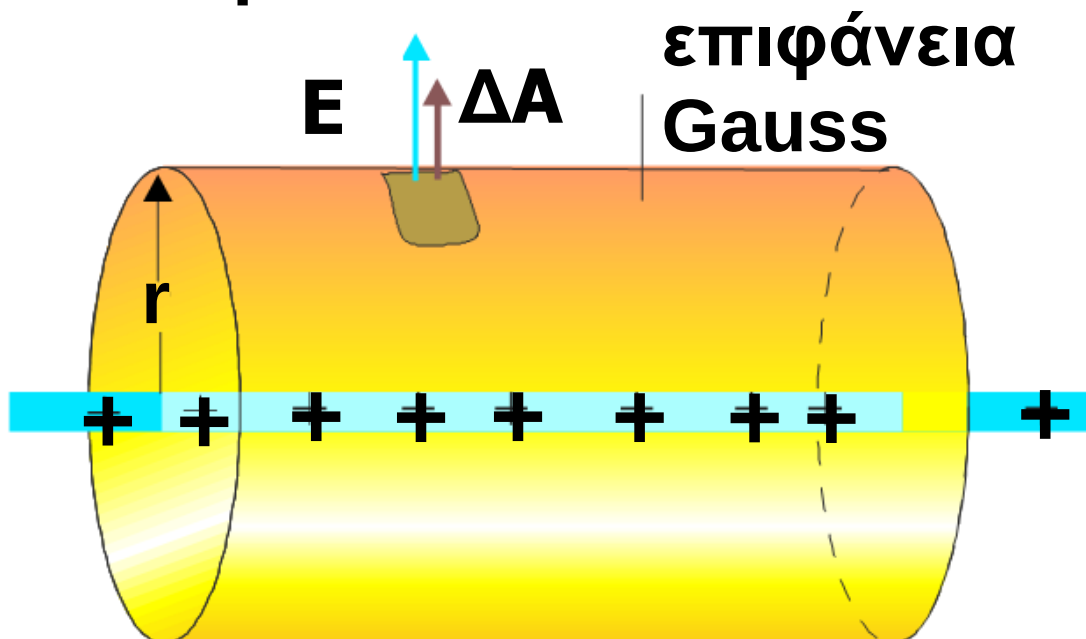
Ένα πολύ μεγάλο (απείρου μήκους) σύρμα είναι ομοιόμορφα φορτισμένο. Αν το φορτίο που φέρει ανά μονάδα μήκους είναι λ (ονομάζεται και «γραμμική πυκνότητα φορτίου»), να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί.

Απάντηση :

Για λόγους συμμετρίας, το πεδίο που δημιουργεί ένα τέτοιο σύρμα είναι ακτινικό και η τιμή της έντασης είναι ίδια σε όλα τα σημεία που απέχουν το ίδιο από το σύρμα. Τα σημεία αυτά αποτελούν μια κυλινδρική επιφάνεια.

Για να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του πεδίου, επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια κυλίνδρου που έχει άξονα το φορτισμένο σύρμα, μήκος L και βάσεις που έχουν ακτίνα r .

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το σύρμα είναι κάθετη και έχει το ίδιο μέτρο σε κάθε σημείο της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.



Σχ. 5.14 Επιλέγουμε επιφάνεια Gauss μια κυλινδρική επιφάνεια ομοαξονική με το σύρμα.

Η ροή που διαπερνά τις βάσεις του κυλίνδρου είναι μηδέν, γιατί η ένταση είναι παράλληλη με τις πλευρές αυτές. Αν χωρίσουμε την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου σε στοι-

χειώδη τμήματα, η κάθετη σε κάθε τέτοιο στοιχειώδες τμήμα είναι παράλληλη με την ένταση του πεδίου. Η ολική ροή που διέρχεται από τον κύλινδρο είναι :

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \Phi_{\text{ΣΤΙΣ ΒΑΣΕΙΣ}} + \\ &+ \Phi_{\text{ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ}} = \\ &= \Phi_{\text{ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ}}\end{aligned}$$

όμως

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ}} &= \sum E \Delta A = \\ &= E \sum \Delta A = E 2\pi r L\end{aligned}$$

επομένως

$$\Phi_E = E 2\pi r L \quad (5.9)$$

Το ολικό φορτίο που περικλείει η κυλινδρική επιφάνεια είναι λL . Επομένως ο νόμος του Gauss γράφεται

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Αντικαθιστώντας την ηλεκτρική ροή από την (5.9) έχουμε

$$E2\pi rL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \text{από όπου} \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r},$$

δηλαδή

η ένταση σε ένα σημείο του πεδίου που δημιουργεί το σύρμα είναι αντίστροφα ανάλογη της απόστασης από αυτό.

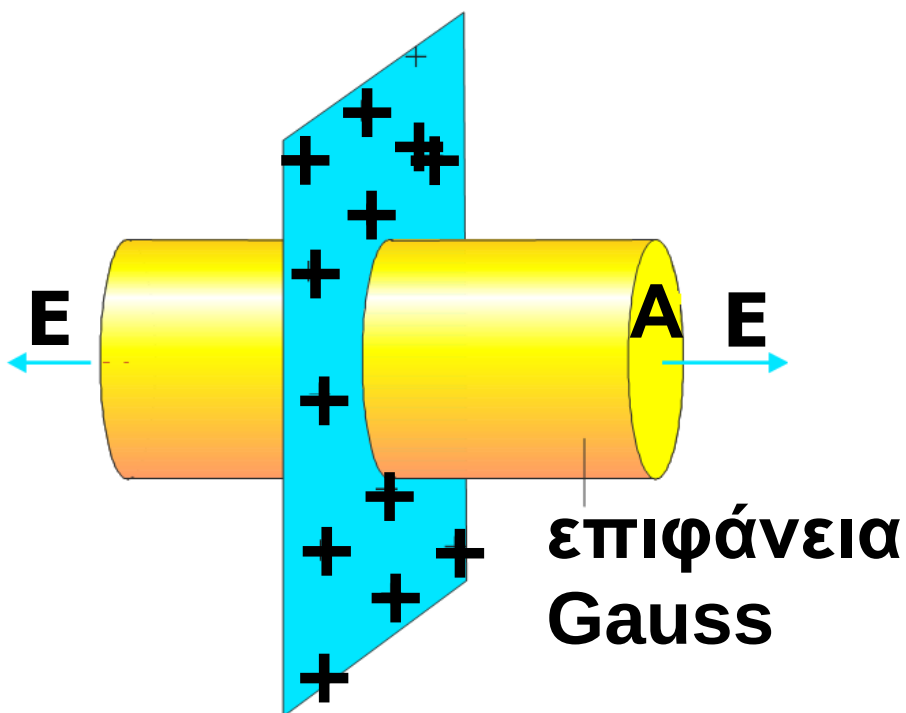
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3

Έστω ένα επίπεδο φύλλο άπειρων διαστάσεων, που είναι ομοιόμορφα φορτισμένο. Το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας είναι σ (λέγεται και «επιφανειακή πυκνότητα φορτίου»). Ζητάμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η φορτισμένη επιφάνεια.

Απάντηση :

Η ένταση του πεδίου, για λόγους συμμετρίας, έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του φορτισμένου φύλλου και το ίδιο μέτρο σε δύο σημεία που απέχουν εξίσου από το φορτισμένο φύλλο και βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές.

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια ενός κυλίνδρου που έχει τον άξονά του κάθετο στο φορτισμένο φύλλο και τις δύο βάσεις του, εμβαδού A , να ισαπέχουν από το φορτισμένο επίπεδο.



Σχ. 5.15 Επιλέγουμε επιφάνεια Gauss μια κυλινδρική επιφάνεια. Ο άξονας του κυλίνδρου είναι κάθετος στο φορτισμένο φύλλο και οι βάσεις του ισαπέχουν από αυτό.

Η ροή που διέρχεται από την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου είναι μηδέν αφού κάθε στοιχειώδες τμήμα της είναι παράλληλο με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετη στις βάσεις του κυλίνδρου και το μέτρο της είναι ίδιο και στις δύο βάσεις. Η ροή που διέρχεται από κάθε βάση είναι EA . Η ολική ροή που διέρχεται από τον κύλινδρο είναι

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \Phi_{\text{ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ}} + \\ &+ \Phi_{\text{ΣΤΙΣ ΒΑΣΕΙΣ}} = \Phi_{\text{ΣΤΙΣ ΒΑΣΕΙΣ}} = 2EA\end{aligned}\quad (5.10)$$

Το ολικό φορτίο που περιέχεται στην κυλινδρική επιφάνεια είναι σA . Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0} \quad \text{ή} \quad \Phi_E = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (5.11)$$

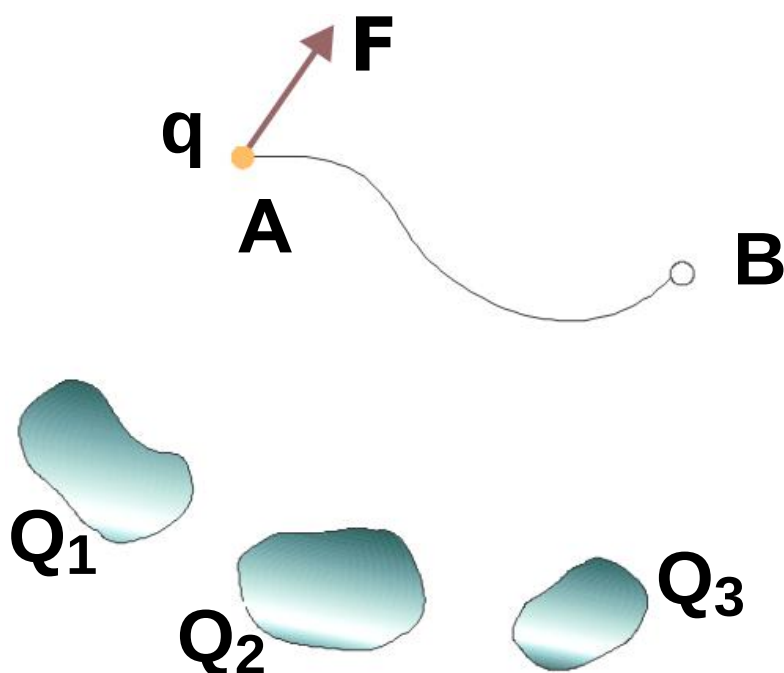
Από (3.11) και (3.10) προκύπτει

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{ή} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (5.12)$$

Από το αποτέλεσμα προκύπτει ότι η τιμή της έντασης είναι ανεξάρτητη της απόστασης από το φορτισμένο φύλλο.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το φορτισμένο φύλλο απείρων διαστάσεων είναι ομογενές σε κάθε περιοχή του χώρου που ορίζεται από αυτό.

5-5 ΔΥΝΑΜΙΚΟ – ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ



Σχ. 5.16 Ο χώρος γύρω από τα φορτισμένα σώματα είναι ηλεκτρικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δύναμη F σε ένα φορτίο.

Υποθέστε ότι έχουμε μερικά ακίνητα φορτισμένα σώματα (σχ.5.16). Τα σώματα αυτά δημιουργούν γύρω τους ηλεκτρικό πεδίο. Αν σε κάποιο σημείο A του ηλεκτρικού πεδίου τοποθετήσουμε ένα σωματίδιο με φορτίο q , το πεδίο θα ασκήσει

στο φορτίο δύναμη $F=Eq$. Αν μετακινήσουμε το φορτίο q από το σημείο A , σε ένα άλλο σημείο B , του ηλεκτρικού πεδίου, σε όλη τη διάρκεια της διαδρομής το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί στο φορτίο q δύναμη. Η δύναμη αυτή, κατά τη μετακίνηση του φορτίου, παράγει ή καταναλώνει έργο.

Αποδεικνύεται ότι το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση του φορτίου q , από το σημείο A στο σημείο B του ηλεκτρικού πεδίου, είναι το ίδιο, όποια διαδρομή και αν επιλέξουμε (τέτοια πεδία ονομάζονται διατηρητικά). Αν μάλιστα το έργο αυτό διαιρεθεί με το φορτίο που μετακινείται, τότε το πηλίκο W/q , που εκφράζει το έργο ανά μονάδα φορτίου, είναι ανεξάρτητο όχι μόνο από τη δια-

δρομή αλλά και από το φορτίο που μετακινείται κάθε φορά.

Την ιδιότητα αυτή του ηλεκτρικού πεδίου την εκμεταλλευόμαστε για να ορίσουμε ένα νέο μέγεθος, το δυναμικό. Συγκεκριμένα :

Ονομάζουμε δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο του A το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης που ασκεί το πεδίο σε φορτίο q , κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από το σημείο A στο άπειρο, προς το φορτίο που μετακινείται.

$$V_A = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{q} \quad (5.13)$$

Το δυναμικό είναι μονόμετρο μέγεθος. Η μονάδα του στο σύστημα SI είναι το 1 Volt (V), που ισοδυναμεί με 1 J/C.

Τη διαφορά των δυναμικών μεταξύ δύο σημείων A και B την ονομάζουμε διαφορά δυναμικού ή τάση των σημείων A και B.

Η διαφορά δυναμικού, $V_A - V_B$ ανάμεσα σε δύο σημεία A και B του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίση με το πηλίκο του έργου που παράγει ή καταναλώνει η δύναμη του πεδίου κατά τη μετακίνηση ενός φορτίου q από το σημείο A στο σημείο B προς το φορτίο q.

$$V_A - V_B = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q} \quad (5.14)$$

Το έργο της δύναμης του πεδίου όταν μετατοπίζεται φορτίο q ανάμεσα σε δύο σημεία που παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού, είναι

$$W_{A \rightarrow B} = (V_A - V_B)q$$

Αν το φορτίο που μετακινείται είναι το στοιχειώδες φορτίο ($e=1,6 \cdot 10^{-19}$ C) και η διαφορά δυναμικού που παρουσιάζουν τα σημεία A και B είναι 1V, το έργο της δύναμης του πεδίου είναι $W=1V \times 1,6 \times 10^{-19}$ C = $1,6 \times 10^{-19}$ J. Το έργο αυτό το ονομάζουμε ηλεκτρονιοβόλτ και το συμβολίζουμε με 1 eV.

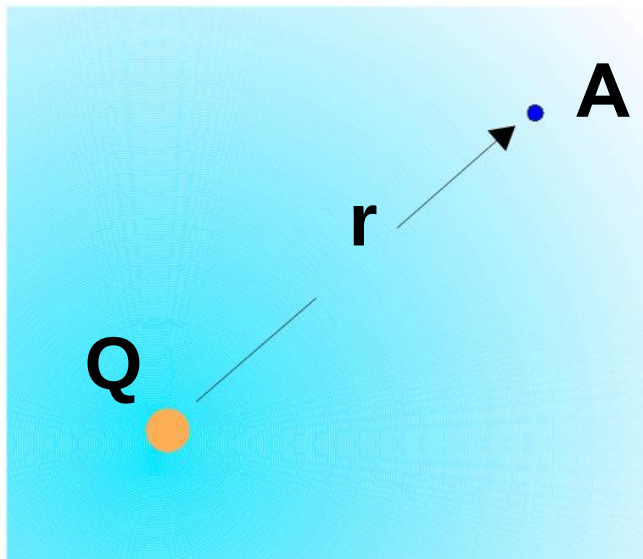
$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Η διαφορά δυναμικού εκφράζει το έργο της δύναμης του πεδίου, ανά μονάδα φορτίου, κατά τη μετακίνηση ενός φορτίου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Επειδή το δυναμικό σχετίζεται με το έργο, είναι ένα μέγεθος εξαιρετικά χρήσιμο για τη μελέτη ενός προβλήματος από ενεργειακή άποψη.

Αν αφήσουμε σε ένα σημείο A του ηλεκτρικού πεδίου ένα θετικό φορτίο αυτό θα κινηθεί στην κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται από το πεδίο. Το έργο αυτής της δύναμης είναι θετικό και επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ του σημείου A και ενός άλλου σημείου B στη διαδρομή του φορτίου ($V_A - V_B$) είναι θετική, δηλαδή το δυναμικό στο σημείο B είναι μικρότερο από το δυναμικό στο σημείο A.

Το ηλεκτρικό πεδίο αναγκάζει τα θετικά φορτία που αφήνονται ($u_0=0$) σε ένα σημείο του να κινούνται στην κατεύθυνση στην οποία τα δυναμικά μικραίνουν. Αντίθετα, τα αρνητικά φορτία κινούνται προς την κατεύθυνση στην οποία τα δυναμικά αυξάνονται.

Το δυναμικό πεδίου που οφείλεται σε σημειακό φορτίο



Σχ. 5.17 Σημειακό φορτίο Q δημιουργεί στο χώρο ηλεκτρικό πεδίο. Το δυναμικό στο σημείο A του πεδίου είναι $V_A = K_c \frac{Q}{r}$.

Αποδεικνύεται ότι το δυναμικό του πεδίου που οφείλεται σε σημειακό φορτίο Q , σε ένα σημείο που απέχει από το φορτίο απόσταση r , έχει τιμή

$$V = K_c \frac{Q}{r} \quad (5.15)$$

Παρατηρήσεις

1. Στη σχέση (5.15) το φορτίο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Αντίστοιχα, το δυναμικό είναι θετικό ή αρνητικό.

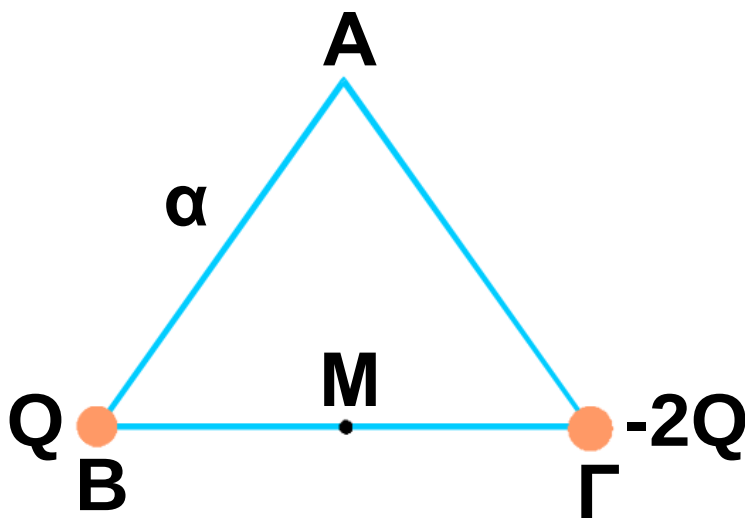
2. Όταν το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από πολλά σημειακά φορτία $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$, για να υπολογίσουμε το δυναμικό στο σημείο A (V_A), στηριζόμαστε στην αρχή της επαλληλίας. Σύμφωνα με αυτή το δυναμικό του πεδίου που δημιουργούν στο σημείο A όλα τα φορτία ισούται με το άθροισμα των δυναμικών των πεδίων που θα δημιουργούσε το κάθε φορτίο Q_1, Q_2 κλπ στο σημείο A , δηλαδή

$$V_A = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

Δυναμικό φορτισμένου αγωγού

Ένας στατικά φορτισμένος αγωγός, δηλαδή ένας αγωγός που φέρει ακίνητα φορτία, έχει παντού το ίδιο δυναμικό, διότι αν το δυναμικό δεν ήταν ίδιο παντού δε θα είχαμε φορτία ακίνητα -σε ισορροπία- αλλά φορτία σε κίνηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4



Σχ. 5.18

Στις κορυφές B και Γ νοητού ισόπλευρου τριγώνου ABΓ πλευράς α , έχουν τοποθετηθεί τα σημειακά

φορτία Q και $-2Q$, αντίστοιχα. Να υπολογιστούν:

α) Το δυναμικό του πεδίου στην κορυφή A .

β) Το δυναμικό του πεδίου στο σημείο M , μέσον της $B\Gamma$.

γ) Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση ενός ηλεκτρονίου από το σημείο A στο M .

Απάντηση :

α) Αν το φορτίο Q ήταν μόνο του, το πεδίο που θα δημιουργούσε θα είχε στο A δυναμικό $V_1^A = K_c \frac{Q}{a}$

Αντίστοιχα, το πεδίο που θα δημιουργούσε το φορτίο $-2Q$ θα είχε στο A δυναμικό $V_2^A = K_c \frac{-2Q}{a}$

Το πεδίο που δημιουργούν και τα δύο φορτία μαζί στο σημείο A έχει δυναμικό:

$$V_A = V_1^A + V_2^A = -K_c \frac{Q}{\alpha} \quad (5.16)$$

β) Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε το δυναμικό του σημείου M.

$$V_1^M = K_c \frac{Q}{\alpha/2} = 2K_c \frac{Q}{\alpha},$$

$$V_2^M = K_c \frac{-2Q}{\alpha/2} = -4K_c \frac{Q}{\alpha}$$

$$V_M = V_1^M + V_2^M = -2K_c \frac{Q}{\alpha} \quad (5.17)$$

$$\gamma) V_A - V_M = \frac{W_{A \rightarrow M}}{-e} \quad \text{επομένως}$$

$$W_{A \rightarrow M} = (V_A - V_M)(-e)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του δυναμικού από τις (5.16) και (5.17) παίρνουμε

$$W_{A \rightarrow M} = -K_c \frac{Qe}{\alpha}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5

Ένα πρωτόνιο βάλλεται από μεγάλη απόσταση, με ταχύτητα $u=400\text{m/s}$, προς ακίνητο πυρήνα άνθρακα. Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση από τον πυρήνα στην οποία θα φτάσει το πρωτόνιο. Δίνονται: το στοιχειώδες φορτίο $e = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$, η μάζα του πρωτονίου $m_p = 1,6 \times 10^{-27}\text{kg}$, ο ατομικός αριθμός του άνθρακα : 6, η σταθερά του Coulomb $K_c=9 \times 10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2$. Θα υποθέσετε ότι ο πυρήνας παραμένει ακίνητος σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου.

Απάντηση :

Το φορτίο του πυρήνα του άνθρακα είναι $Q=6e$.

Στο σημείο A, το πλησιέστερο προς τον πυρήνα σημείο στο οποίο φτάνει το πρωτόνιο, η ταχύτητά του

στιγμιαία μηδενίζεται.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το πρωτόνιο, κατά την κίνησή του από το άπειρο μέχρι τη θέση A.

$$W_{\infty \rightarrow A} = K_{\infty} - K_A \quad \text{ή}$$

$$W_{\infty \rightarrow A} = 0 - \frac{1}{2} m_p v^2 \quad (5.18)$$

Όμως

$$W_{\infty \rightarrow A} = -W_{A \rightarrow \infty} = -V_A e \quad (5.19)$$

όπου V_A το δυναμικό που δημιουργεί ο πυρήνας στο σημείο A. Αν το σημείο A απέχει από τον πυρήνα απόσταση r

$$V_A = K_c \frac{Q}{r} = K_c \frac{6e}{r} \quad (5.20)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.19) και (5.20) στην (5.18) έχουμε

$$-K_c \frac{6e^2}{r} = -\frac{1}{2} m_p v^2 \text{ επομένως}$$

$$r = \frac{12K_c e^2}{m_p v^2} \quad \text{από όπου}$$

$$r = 10,8 \times 10^{-6} \text{ m}$$

5-6 Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΟΛΛΩΝ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

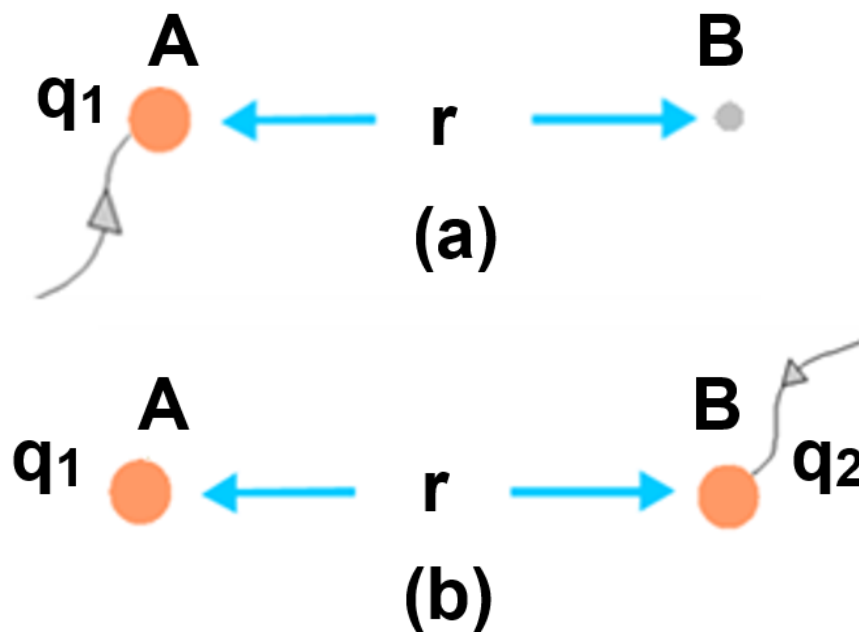


Σχ.5.19 Σύστημα δύο σημειακών φορτίων.

Έστω ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σημειακά φορτία, τα q_1 , και q_2 (σχ. 5.19). Ας ονομάσουμε A και B τις θέσεις τους και r την απόστασή τους. Επειδή τα φορτία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, το σύστημα έχει δυναμική ενέργεια. Δεν

θα είχαν ενέργεια αν βρίσκονταν σε άπειρη απόσταση το ένα από το άλλο ώστε να μην αλληλεπιδρούν.

Η ενέργεια που έχει το σύστημα των δύο φορτίων είναι ίση με το έργο που απαιτείται για να μεταφερθούν από πολύ μακριά και να τοποθετηθούν στις θέσεις τους. Ας φανταστούμε μια τέτοια διαδικασία.



Σχ.5.20 Αρχικά τοποθετούμε το q_1 στο σημείο A (a), στη συνέχεια το q_2 στο σημείο B (b)

Στις θέσεις A και B δεν υπάρχουν φορτία. Τα q_1 και q_2 βρίσκονται πολύ μακριά και σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους.

Το φορτίο q_1 μπορεί να μεταφερθεί στο A, χωρίς παραγωγή ή δαπάνη έργου. Στη συνέχεια μεταφέρεται το q_2 στο B. Το φορτίο q_2 κινείται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο του που έχει δημιουργηθεί από το q_1 . Το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά του είναι αντίθετο του έργου της δύναμης του πεδίου. Είναι:

$$-W_{\infty \rightarrow B} = W_{B \rightarrow \infty} = V_B q_2 = K_c \frac{q_1 q_2}{r} \quad (5.21)$$

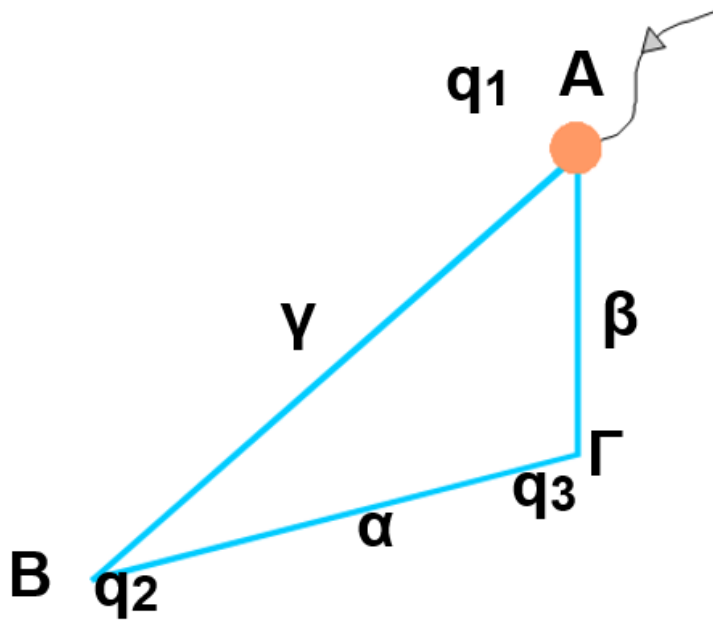
Επομένως, το έργο που απαιτείται για να τοποθετηθούν τα δύο φορτία στις θέσεις τους είναι

$$W = K_c \frac{q_1 q_2}{r} \quad (5.22)$$

Τόση είναι και η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων.

$$U = K_c \frac{q_1 q_2}{r} \quad (5.23)$$

Από τη σχέση (5.23) προκύπτει ότι αν τα φορτία είναι ομώνυμα η δυναμική τους ενέργεια είναι θετική. Αυτό είναι συνέπεια των απωστικών δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους. Για να μεταφερθούν τα φορτία από πολύ μακριά και να πλησιάσουν σε απόσταση r πρέπει να προσφερθεί έργο στο σύστημα. Αντίθετα, αν τα φορτία είναι ετερόνυμα έλκονται και απαιτείται αρνητικό έργο για να τοποθετηθούν σε απόσταση r μεταξύ τους. Επομένως η δυναμική τους ενέργεια είναι αρνητική.



Σχ. 5.21
Σύστημα τριών
σημειακών
φορτίων

Με τον τρόπο που περιγράψαμε βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια και στις περιπτώσεις που ένα σύστημα αποτελείται από περισσότερα σημειακά φορτία. Στο σχήμα 5.21 παριστάνεται ένα σύστημα αποτελούμενο από τρία σημειακά φορτία. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το έργο που απαιτείται για να μεταφερθούν αυτά τα φορτία από πολύ μακριά και να τοποθετηθούν ένα-ένα στις θέσεις τους. Βρίσκουμε έτσι ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος αυτού είναι

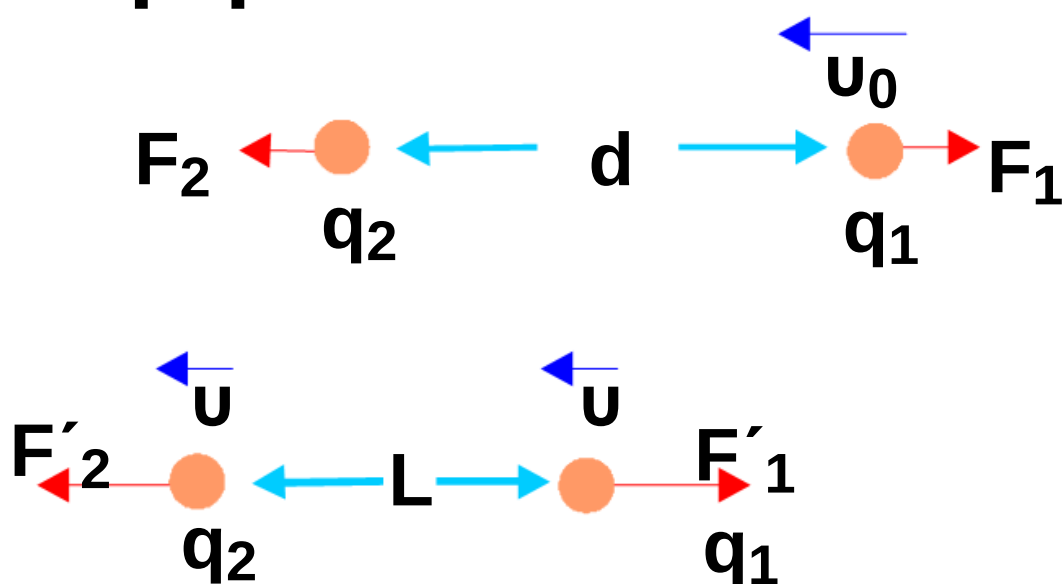
$$U = K_c \frac{q_1 q_2}{\gamma} + K_c \frac{q_1 q_3}{\beta} + K_c \frac{q_2 q_3}{\alpha} \quad (5.24)$$

Παρατηρείστε ότι στη σχέση αυτή η ενέργεια του συστήματος είναι άθροισμα των ενεργειών που έχουν τα φορτία ανά ζεύγη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6

Σφαιρίδιο μάζας $m_1 = 22 \times 10^{-5} \text{ kg}$ φορτισμένο με θετικό φορτίο $q_1 = 11 \times 10^{-7} \text{ C}$ βάλλεται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 30 \text{ m/s}$ προς δεύτερο σφαιρίδιο με μάζα $m_2 = 2m_1$ και φορτίο $q_2 = 2q_1$ που είναι αρχικά ακίνητο σε απόσταση $d = 2 \text{ m}$ από το πρώτο. Αν τα σφαιρίδια βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο, λείο και μονωτικό δάπεδο να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση L στην οποία θα πλησιάσουν. Δίνεται $K_c = 9 \times 10^9 \text{ N} \times \text{m}^2 / \text{C}^2$.

Απάντηση :



Σχ. 5.22

Οι δυνάμεις ανάμεσα στα σφαιρίδια είναι απωστικές. Έτσι το σώμα μάζας m_1 επιβραδύνεται και το σώμα μάζας m_2 επιταχύνεται. Όσο η ταχύτητα του m_1 είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του m_2 η απόσταση μεταξύ των σωμάτων μικραίνει. Κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους θα γίνουν ίσες και στη συνέχεια η ταχύτητα του m_1 θα γίνει μεγαλύτερη από την ταχύτητα του m_2 (τότε η απόσταση μεταξύ τους θα μεγαλώνει). Τα σώματα θα βρεθούν στην

ελάχιστη δυνατή απόσταση μεταξύ τους τη στιγμή κατά την οποία οι ταχύτητές τους θα εξισωθούν $u_1 = u_2 = u$.

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Αν θεωρήσουμε ως αρχική θέση τη θέση από την οποία βάλλεται το σφαιρίδιο m_1 και ως τελική τη θέση που τα σφαιρίδια βρίσκονται στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους θα ισχύει

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

$$\text{οπότε } \frac{1}{2} m_1 u_0^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{d} =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{L}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 u_0^2 + K_c \frac{2q_1^2}{d} = \frac{3}{2} m_1 u^2 + K_c \frac{2q_1^2}{L}$$

(5.27)

Επειδή στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, η ορμή του συστήματος διατηρείται.

$$P_{\alpha\rho\chi}=P_{\tau\epsilon\lambda}$$

Θεωρώντας θετική κατεύθυνση την αρχική φορά κίνησης του m_1 η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά

$$m_1 u_0 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad \text{ή} \quad m_1 u_0 = 3m_1 u$$

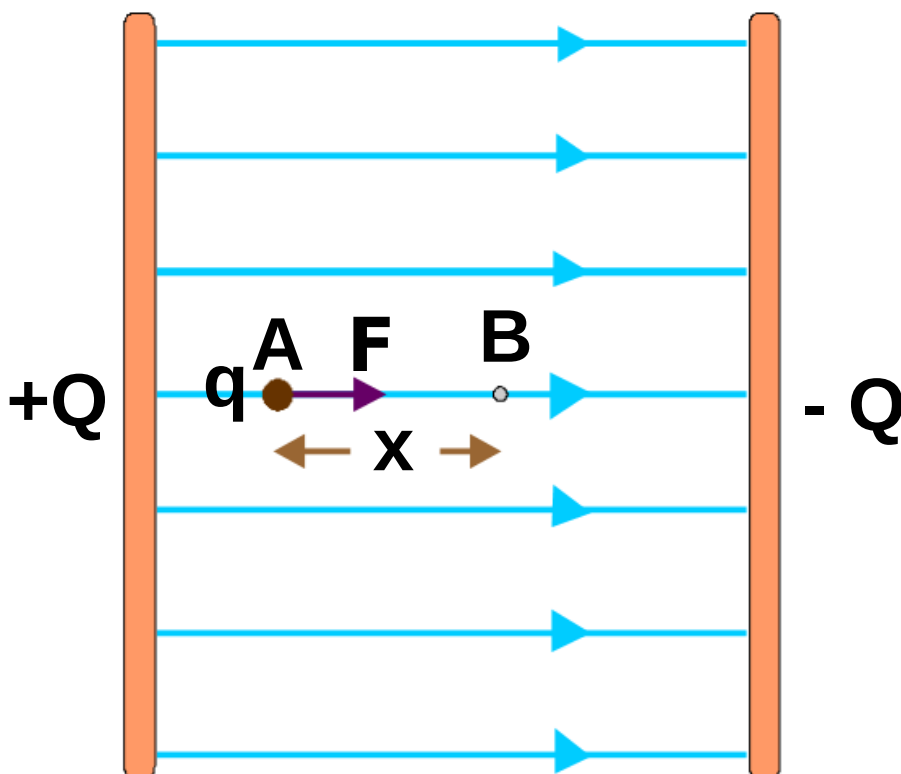
οπότε
$$u = \frac{u_0}{3}$$

αντικαθιστώντας στην (5.27) και λύνοντας ως προς L προκύπτει

$$L = \frac{6dK_c q_1^2}{dm_1 u_0^2 + 6K_c q_1^2} = 0,28 \text{ m}$$

Παρατήρηση: Για τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιήσαμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Όμως, το πεδίο που δημιουργείται από κινούμενα φορτία είναι ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και όταν, όπως συμβαίνει στο πρόβλημά μας τα φορτία επιταχύνονται ένα μέρος της ενέργειάς τους μεταφέρεται με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο περιβάλλον.

5-7 ΣΧΕΣΗ ΕΝΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΤΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Σχ. 5.23 Θετικό σημειακό φορτίο q αφήνεται στο σημείο A ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Το πεδίο ασκεί δύναμη που έχει την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών.

Η ένταση και το δυναμικό είναι μεγέθη που περιγράφουν το ηλεκτρικό πεδίο. Λογικό είναι, λοιπόν,

τα δύο μεγέθη να σχετίζονται. Πράγματι υπάρχει μια γενική σχέση ανάμεσα στην ένταση και το δυναμικό η οποία όμως απαιτεί μαθηματικά που ξεφεύγουν από το επίπεδο αυτού του βιβλίου. Εμείς θα δούμε πώς σχετίζονται αυτά τα δύο μεγέθη στην περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές.

Έστω το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του σχήματος 5.23. Αν στο σημείο A αφεθεί ένα θετικό φορτίο q , θα δεχτεί δύναμη $F=Eq$ στην κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών και θα κινηθεί κατά μήκος της δυναμικής γραμμής στην οποία βρίσκεται. Έστω ότι B είναι ένα άλλο σημείο, πάνω στην ίδια δυναμική γραμμή που απέχει από το σημείο A απόσταση x . Το έργο της δύναμης F κατά τη μετακίνηση του φορτίου από το σημείο A στο σημείο B είναι

$$W = Fx = Eqx \quad (5.28)$$

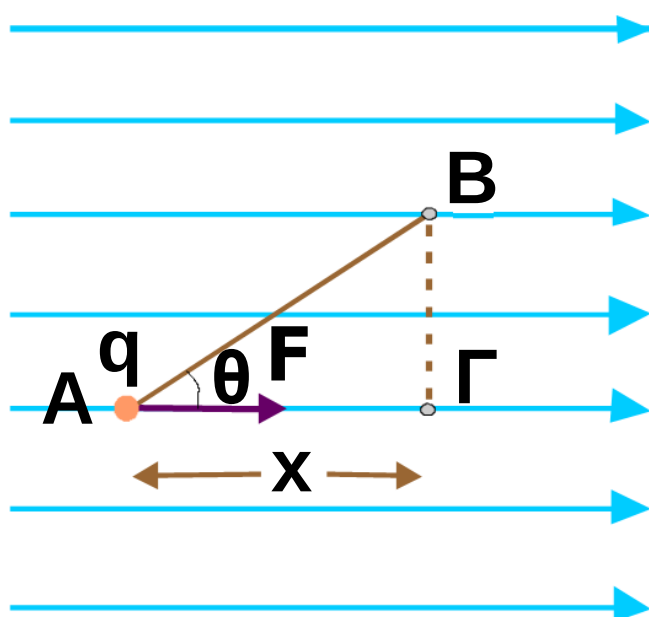
Γνωρίζουμε όμως ότι $W = (V_A - V_B)q$

Έτσι, η σχέση (5.28) γίνεται

$$Eqx = (V_A - V_B)q \quad \text{ή} \quad E = \frac{(V_A - V_B)}{x} \quad \text{ή}$$

$$E = \frac{V}{x} \quad (5.29)$$

όπου με V συμβολίσαμε τη διαφορά δυναμικού των σημείων A και B .



Σχ. 5.24 Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνησή του από το A στο B είναι ίσο με το έργο κατά τη μετακίνησή του από το A στο Γ .

Ας εξετάσουμε τώρα τη γενικότερη περίπτωση στην οποία τα σημεία A και B δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια δυναμική γραμμή (σχ. 5.24). Αν αναγκάσουμε ένα φορτίο q, να κινηθεί από το σημείο A στο B κατά μήκος της ευθείας AB το έργο της δύναμης του πεδίου είναι

$$W = F_{AB} \cos \theta = F_{AB} \frac{AG}{AB} = F_{AG} = Eqx$$

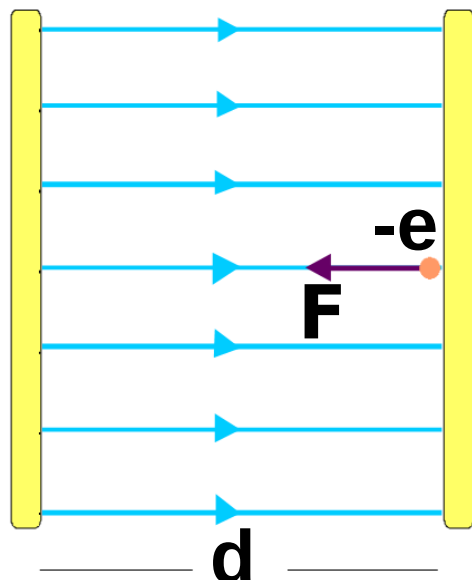
και επειδή $W = (V_A - V_B)q$

προκύπτει πάλι η σχέση (5.29)

Γενικεύοντας το συμπέρασμα της (5.29) μπορούμε να πούμε ότι η ένταση στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι ίση με το πηλίκο της διαφοράς δυναμικού δύο οποιωνδήποτε σημείων του ηλεκτρικού πεδίου προς την απόστασή τους x,

μετρημένη κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής.

5-8 ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Σχ. 5.25 Ένα ηλεκτρόνιο αφήνεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες φορτισμένες με αντίθετα φορτία, όπως στο σχήμα, δημιουργούν ανάμεσά τους ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Αν μέσα σ' αυτό το πεδίο

βρεθεί ένα φορτισμένο σωματίδιο
θα δεχτεί σταθερή δύναμη $F=Eq$ και
θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση
 $a = \frac{Eq}{m}$.

A. Κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα

Ένα ηλεκτρόνιο (σχ. 5.25) αφήνεται πολύ κοντά στην αρνητική πλάκα. Το ηλεκτρόνιο θα δεχτεί από το πεδίο δύναμη σταθερού μέτρου $F=Ee$ (E : η ένταση του πεδίου και e : το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο) αντίρροπη της E και θα κινηθεί ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, με επιτάχυνση $a=F/m_e$.

Η κίνηση του ηλεκτρονίου περιγράφεται από τις σχέσεις

$$a = F/m_e = Ee/m_e$$

$$v = at$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε :

1. Πόσο χρόνο χρειάζεται το ηλεκτρόνιο για να φτάσει στην απέναντι πλάκα;

Αν η απόσταση ανάμεσα στις πλάκες είναι d από τη σχέση

$$d = \frac{1}{2} a t_1^2$$

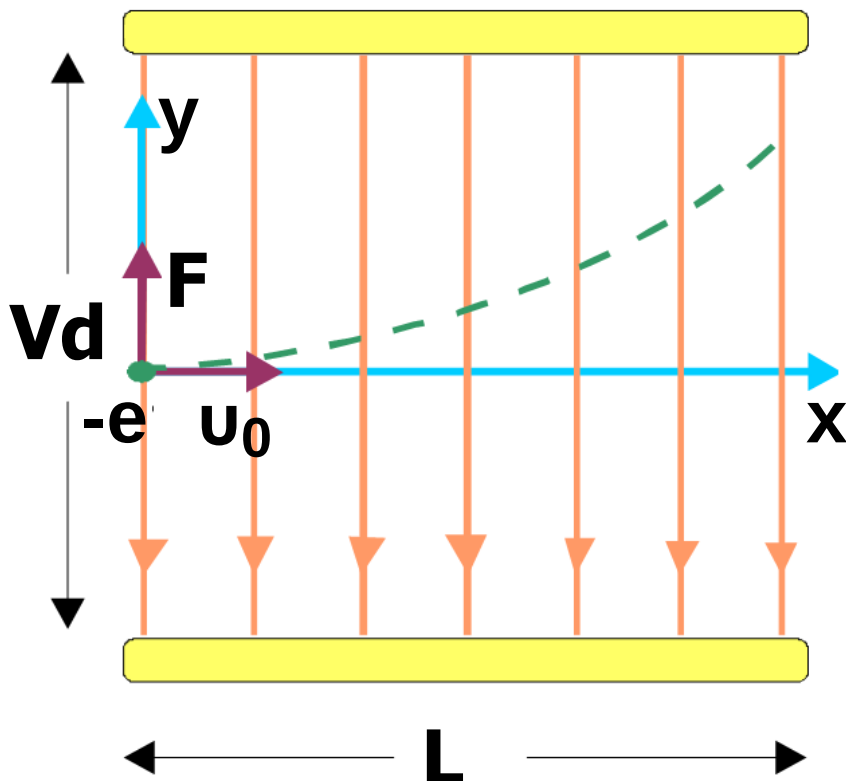
βρίσκουμε $t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a}}$.

2. Με ποια ταχύτητα φτάνει το ηλεκτρόνιο στη θετική πλάκα;

Αντικαθιστώντας στη σχέση $v = a t$ το χρόνο που βρήκαμε παραπάνω βρίσκουμε $v_1 = \sqrt{2ad}$.

Ας κάνουμε μια αριθμητική εφαρμογή για να δούμε για ποιας

τάξης μεγέθους ταχύτητες και χρόνους μιλάμε.



Σχ. 5.26 Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο με ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Η δύναμη που δέχεται από το πεδίο το αναγκάζει να διαγράψει παραβολική τροχιά.

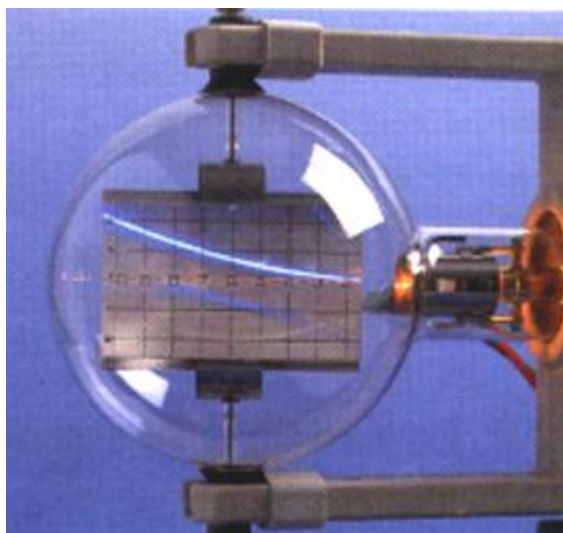
Αν η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις μεταλλικές πλάκες είναι $V=1\text{kV}$ και η απόσταση

μεττους $d=5\text{ mm}$ η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του θα είναι $E=2\times 10^5\text{ N/C}$, η δύναμη που θα δεχθεί το ηλεκτρόνιο θα έχει μέτρο $F=3,2\times 10^{-14}\text{ N}$ ($e=1,6\times 10^{-19}\text{ C}$), η επιτάχυνση θα είναι $a=3,5\times 10^{16}\text{ m/s}^2$ ($m_e=9,1\times 10^{-31}\text{ kg}$), ο χρόνος για να φτάσει στον απέναντι οπλισμό $t_1=5,3\times 10^{-10}\text{ s}$ και η τελική του ταχύτητα $u_1=1,9\times 10^7\text{ m/s}$.

Διατάξεις που χρησιμοποιούν τον παραπάνω μηχανισμό (επιτάχυνση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο) έχουν ευρεία εφαρμογή σε μια σειρά από συσκευές όπως ο φασματογράφος μάζας, ο καθοδικός σωλήνας και άλλες.

B. Κίνηση με αρχική ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές

Θεωρούμε ότι οι παράλληλες μεταλλικές πλάκες του σχήματος 3.26 είναι φορτισμένες με φορτία $+q$ και $-q$, έχουν μήκος L , απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και η διαφορά δυναμικού τους είναι V . Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται με αρχική ταχύτητα u_0 κάθετη στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς πεδίου που σχηματίζεται ανάμεσα στις πλάκες. Το ηλεκτρόνιο κατά την κίνησή του μέσα στο ομογενές πεδίο δέχεται σταθερή δύναμη F .



Εικ. 5.2 Πειραματική διάταξη για τη μελέτη της απόκλισης μιας δέσμης ηλεκτρονίων μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Για τη μελέτη μιας τέτοιας κίνησης θα εφαρμόσουμε την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων.

Διαλέγουμε δύο άξονες πάνω στους οποίους αναλύουμε την κίνηση. Εδώ θα επιλέξουμε έναν άξονα παράλληλο στις δυναμικές γραμμές κι έναν κάθετο σ' αυτές.

Αφού η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις φορτισμένες πλάκες είναι V , η ένταση του ηλεκτρικού

πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου μεταξύ των πλακών θα είναι $E = \frac{V}{d}$ (ομογενές πεδίο).

Στον άξονα x το ηλεκτρόνιο δεν δεχεται δύναμη και έτσι θα κινηθεί ευθύγραμμα ομαλά, διατηρώντας την αρχική του ταχύτητα u_0 .

Στον άξονα y δέχεται καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης μια δύναμη σταθερή, κατακόρυφη με φορά

προς τα πάνω $F = Ee$ ή επειδή $E = \frac{V}{d}$,

$F = \frac{Ve}{d}$. Το ηλεκτρόνιο θα εκτελέσει

σ' αυτό τον άξονα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση

$$a_y = \frac{F}{m_e} = \frac{Ee}{m_e} = \frac{Ve}{dm_e} \quad (5.30)$$

Τελικά, στον άξονα x θα ισχύουν :

$$u_x = u_0 \quad (5.31)$$

$$x = u_0 t \quad (5.32)$$

ενώ στον y :

$$u_y = a_y t \quad (5.33)$$

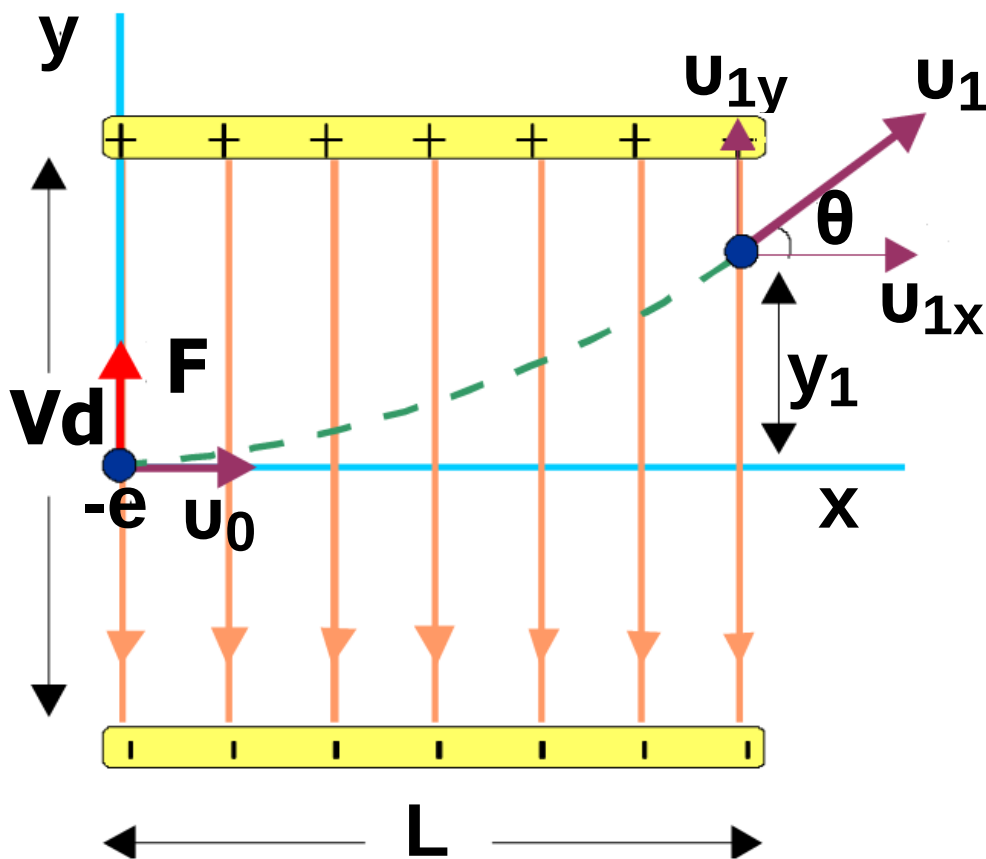
$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (5.34)$$

Από τις σχέσεις αυτές μπορούν να υπολογισθούν:

1. Χρόνος παραμονής στο πεδίο

Το ηλεκτρόνιο θα εξέλθει από το πεδίο όταν, στον άξονα x θα έχει μετα-τοπιστεί κατά L. Αν στην σχέση (5.32) θέσουμε όπου x το L και λύ-σουμε ως προς t προκύπτει:

$$t_1 = \frac{L}{u_0} \quad (5.35)$$



Σχ. 5.27 Όταν το ηλεκτρόνιο εξέρχεται από το πεδίο έχει αποκλίνει κατά y_1 από την αρχική του διεύθυνση και η ταχύτητα του είναι συνισταμένη της αρχικής ταχύτητας u_0 και της ταχύτητας u_{1y}

2. Απόκλιση από την αρχική διεύθυνση κίνησης στην έξοδο

Εάν στη σχέση (5.34) θέσουμε στη θέση του t το χρόνο παραμονής

στο πεδίο βρίσκουμε την κατακόρυφη απόκλιση y του ηλεκτρονίου από την αρχική του θέση, κατά την έξοδό του από το πεδίο.

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 \quad \text{ή} \quad y_1 = \frac{1}{2} \frac{Ve}{dm_e} \left(\frac{L}{u_0} \right)^2$$

(5.36)

3. Ταχύτητα εξόδου από το πεδίο

Κατά την έξοδό του από το πεδίο, η ταχύτητα του ηλεκτρονίου στον άξονα x θα είναι $u_{1x} = u_0$ ενώ στον y θα είναι $u_{1y} = a_y t_1$ και από τις (5.30)

και (5.35)
$$u_{1y} = \frac{Ve}{dm_e} \frac{L}{u_0}$$

Η ταχύτητα που θα έχει το ηλεκτρόνιο κατά την έξοδό του θα είναι

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} \text{ οπότε}$$

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{VeL}{dm_e u_0} \right)^2}$$

$$\text{και } \epsilon\phi\phi = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{VeL}{dm_e u_0^2} \quad (5.37)$$

4. Η εξίσωση της τροχιάς του ηλεκτρονίου

Η εξίσωση της τροχιάς του ηλεκτρονίου είναι η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις του στους άξονες x και y.

Λύνουμε την (5.32) ως προς t και αντικαθιστούμε στην (5.34) λαμβάνοντας υπόψη και την (5.30). Βρίσκουμε έτσι μια σχέση $y=f(x)$

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad \text{ή} \quad y = \frac{1}{2} \frac{V_e}{dm_e} \frac{x^2}{u_0^2} \quad \text{ή}$$

$$y = \frac{V_e}{2dm_e u_0^2} x^2$$

Πρόκειται για μια σχέση της μορφής $y=ax^2$, άρα η τροχιά του ηλεκτρονίου είναι παραβολική.

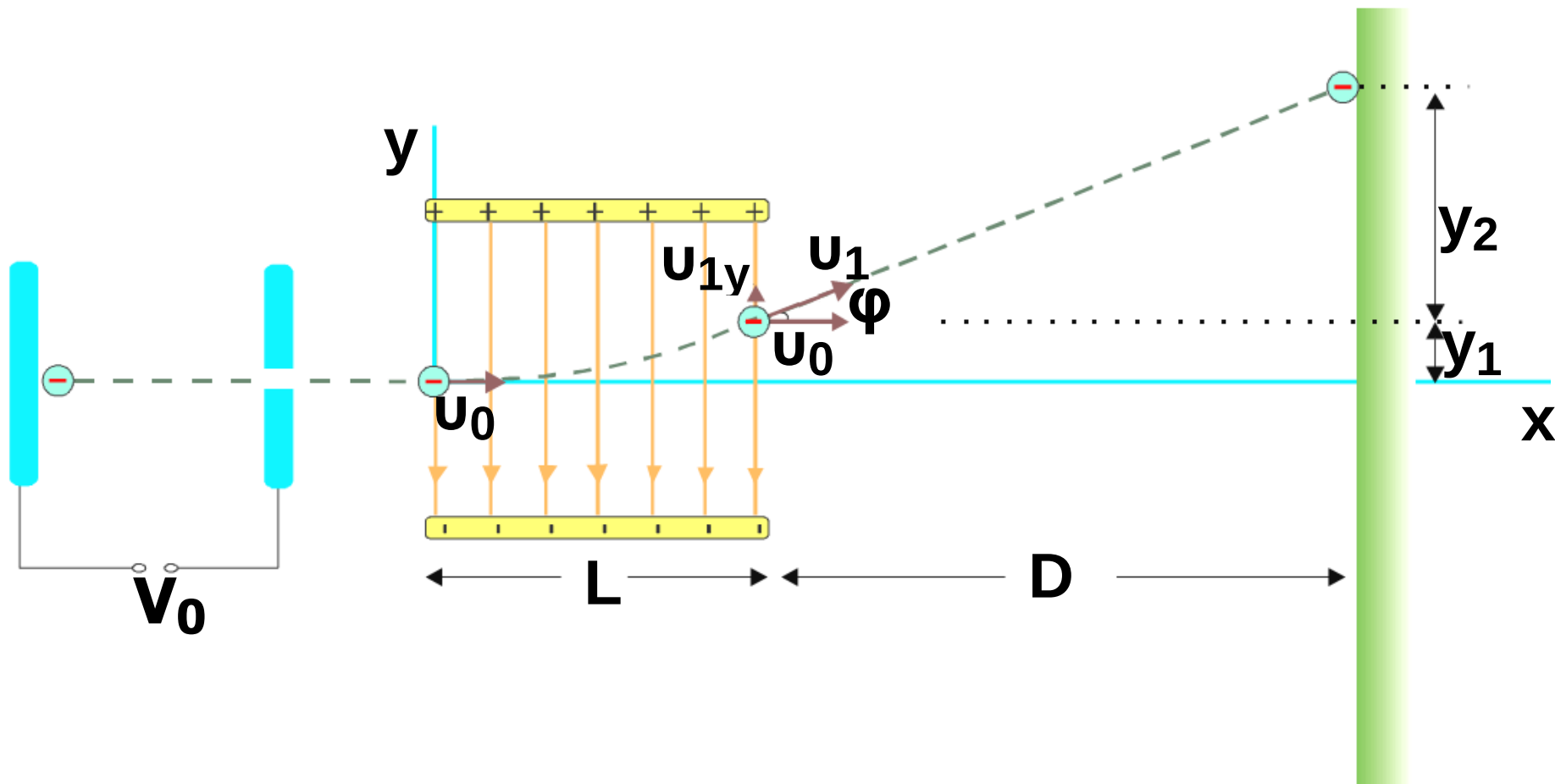
Στη μελέτη της κίνησης του ηλεκτρονίου μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δε λάβαμε καθόλου υπόψη το βάρος του. Αυτό έγινε γιατί το βάρος είναι αμελητέο συγκριτικά με την F . Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το βάρος ενός ηλεκτρονίου είναι $w_e = 8,9 \times 10^{-30}$ N ενώ η ηλεκτρική δύναμη που δέχεται ένα ηλεκτρόνιο στο εσωτερικό ενός ομογενοῦς ηλεκτρικού πεδίου σαν αυτό που περιγράψαμε με διαφορά δυναμικού $V=1$ kV και απόσταση μεταξύ των πλακών $d=5$ mm είναι

$F=3,2 \times 10^{-14}$ N, δηλαδή 36×10^{14} φορές μεγαλύτερη του βάρους. Το συμπέρασμα αυτό, ότι το βάρος είναι αμελητέο συγκρινόμενο με την ηλεκτρική δύναμη, ισχύει και για τα άλλα στοιχειώδη σωματίδια - πρωτόνια, πυρήνες, ιόντα- όταν κινούνται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7

Δέσμη ηλεκτρονίων επιταχύνεται από την ηρεμία από διαφορά δυναμικού V_0 . Στη συνέχεια μπαίνει σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζεται ανάμεσα σε δυο φορτισμένες πλάκες (πλακίδια απόκλισης) κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις πλάκες είναι V και η μεταξύ τους απόσταση d . Το

μήκος των πλακών είναι L . Τα ηλεκτρόνια βγαίνοντας από το ομογενές πεδίο προσκρούουν σε φθορίζουσα οθόνη που είναι τοποθετημένη κάθετα στην αρχική διεύθυνση κίνησης. Η οθόνη απέχει απόσταση D από τα πλακίδια απόκλισης. Η όλη διάταξη βρίσκεται μέσα σ' ένα σωλήνα υψηλού κενού ώστε να αποφεύγονται οι συγκρούσεις των ηλεκτρονίων με τα μόρια του αέρα. Να βρεθεί η θέση στην οποία θα πέσει η δέσμη πάνω στη φθορίζουσα οθόνη. Δίνονται το στοιχειώδες φορτίο e και η μάζα του ηλεκτρονίου m_e .



$\Sigma x.$ 5.28

Απάντηση :

Τα ηλεκτρόνια επιταχυνόμενα από τη διαφορά δυναμικού V_0 αποκτούν κινητική ενέργεια που δίνεται από το θεώρημα έργου - ενέργειας.

$$\frac{1}{2}m_e u_0^2 = eV_0 \quad \text{οπότε}$$
$$u_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}} \quad (5.38)$$

Η κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα πλακίδια απόκλισης, μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Όταν τα ηλεκτρόνια εξέλθουν από τα πλακίδια απόκλισης θα έχουν εκτραπεί από την αρχική τους πορεία κατά y_1 . Η απόκλιση αυτή υπολογίστηκε στην (5.36) επομένως

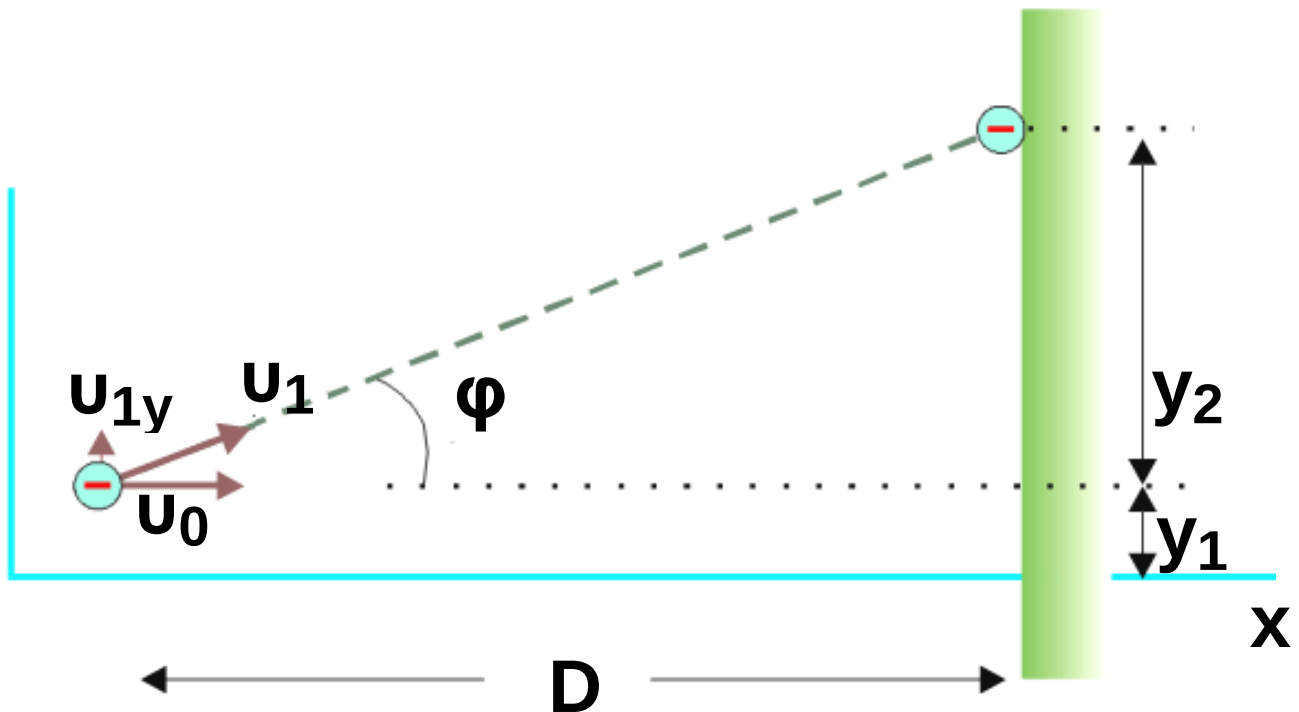
$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{Ve}{dm_e} \left(\frac{L}{u_0} \right)^2 \quad (5.39)$$

Η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα εξόδου των ηλεκτρονίων με την αρχική διεύθυνση κίνησης, επίσης υπολογίστηκε από τη σχέση

$$\epsilon\phi\phi = \frac{VeL}{dm_e u_0^2} \quad (5.40)$$

Τα ηλεκτρόνια βγαίνοντας από το ομογενές πεδίο των πλακιδίων κινούνται ευθύγραμμα ομαλά με u_1 . Μεγεθύνοντας την περιοχή εξόδου (σχ. 5.29) βλέπουμε ότι σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τις D και y_2 και υποτείνουσα την τροχιά των ηλεκτρονίων. Ισχύει

$$\epsilon\phi\phi = \frac{y_2}{D} \quad \text{οπότε} \quad y_2 = D\epsilon\phi\phi$$



Σχ. 5.29

Αντικαθιστώντας την (5.40) βρίσκουμε

$$y_2 = \frac{DVeL}{dm_e u_0^2} \quad (5.41)$$

Η θέση της δέσμης στην οθόνη απέχει απόσταση $y_1 + y_2$ από την αρχική διεύθυνση της δέσμης. Από τις (5.38), (5.39) και (5.41) βρίσκουμε:

$$y_1 + y_2 = \frac{VL}{2V_0 d} \left(D + \frac{L}{2} \right)$$

Ο ΚΑΘΟΔΙΚΟΣ ΣΩΛΗΝΑΣ

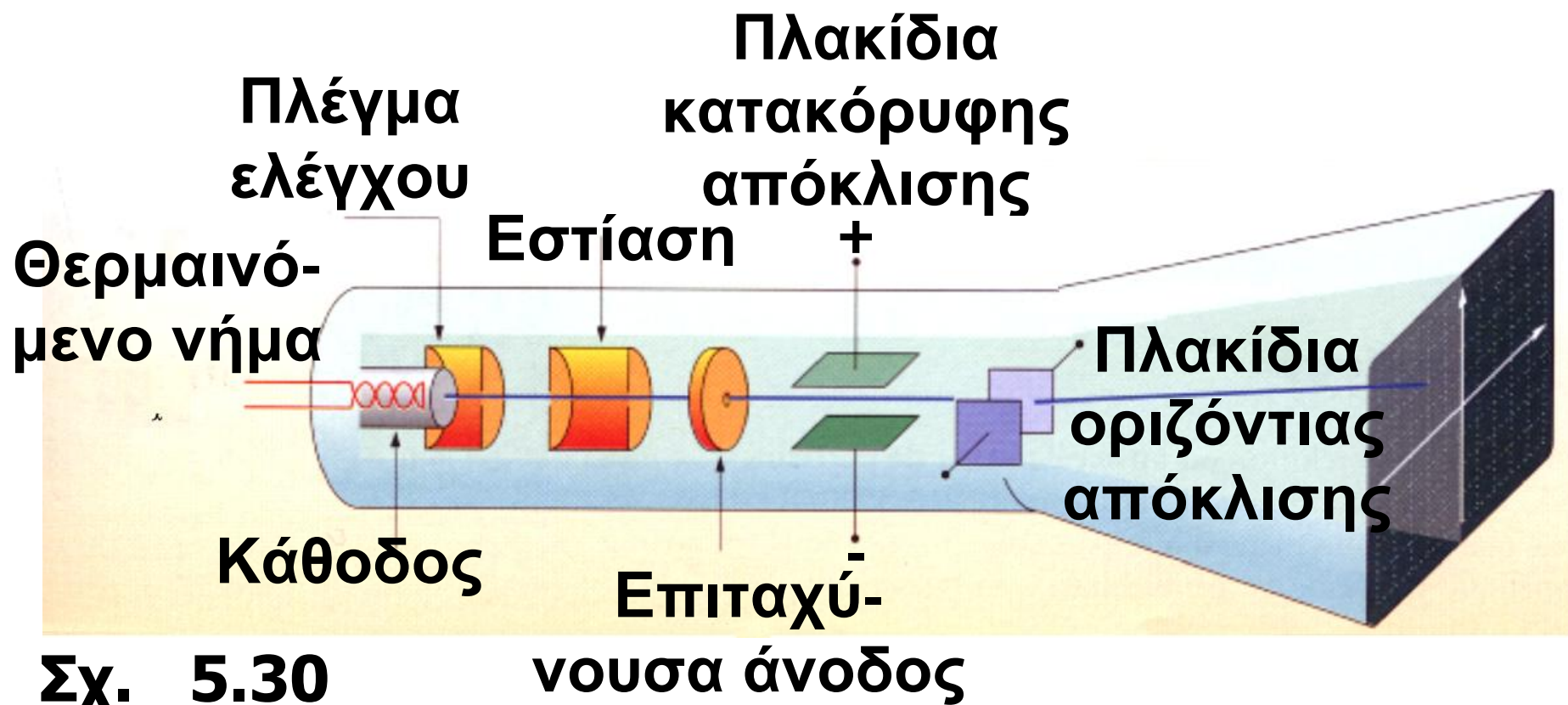
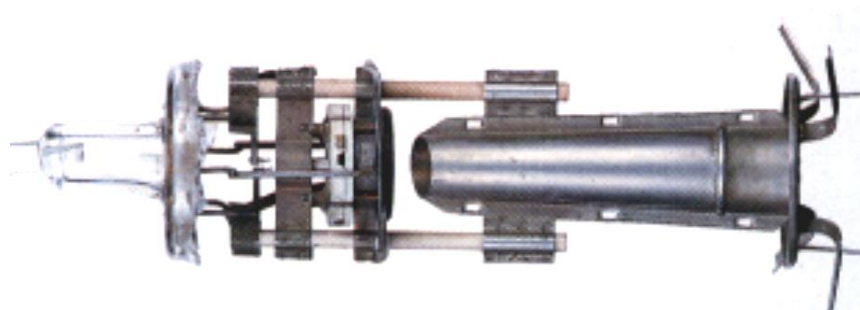
Ο καθοδικός σωλήνας, (σχ. 5.30), είναι ένας γυάλινος "σωλήνας" το εσωτερικό του οποίου βρίσκεται σε υψηλό κενό. Η λειτουργία του στηρίζεται σε τρεις διαδοχικές διατάξεις.

Η πρώτη ονομάζεται τηλεβόλο ηλεκτρονίων και είναι υπεύθυνη για την παραγωγή, επιτάχυνση και εστίαση μιας δέσμης ηλεκτρονίων.

Η δεύτερη είναι ένας συνδυασμός ομογενών πεδίων. Μεταβάλλοντας την ένταση των πεδίων κατευθύνουμε τη δέσμη των ηλεκτρονίων.

Η τρίτη είναι η οθόνη στην οποία παρατηρούμε τη θέση όπου προσπίπτουν τα ηλεκτρόνια. Ο σωλήνας απέναντι από το τηλεβόλο είναι επιστρωμένος με ειδικό υλικό που έχει την ιδιότητα να φθορίζει, δη-

λαδή να εκπέμπει φως, όταν πάνω του προσπίπτουν σωματίδια με μεγάλη ταχύτητα. Πάνω σ' αυτό το τμήμα του σωλήνα, που αποτελεί την οθόνη, πέφτουν με μεγάλη ταχύτητα τα ηλεκτρόνια της δέσμης. Στο σημείο στο οποίο πέφτουν τα ηλεκτρόνια η οθόνη φθορίζει έντονα και δημιουργείται μια φωτεινή κηλίδα.



Εικ. 5.3 Τηλεβόλο ηλεκτρονίων.

Στο αριστερό άκρο του σχήματος 5.30 φαίνεται το τηλεβόλο. Τα ηλεκτρόνια παράγονται εκεί με τη θέρμανση ενός μεταλλικού νήματος (κάθοδος). Θερμαίνοντας ένα μέταλλο δίνουμε σε κάποια από τα ελεύθερα ηλεκτρόνιά του κινητική ενέργεια αρκετή για να το εγκαταλείψουν. Στη συνέχεια τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται ανάμεσα στην κάθοδο και σε ένα άλλο ηλεκτρόδιο (άνοδος). Η άνοδος βρίσκεται σε δυναμικό υψηλότερο από το δυναμικό της καθόδου και φέρει οπή. Τα περισσότερα ηλεκτρόνια που επιταχύνονται προς την άνοδο προσκρούουν σ' αυτή. Όσα από αυτά περνάνε από την οπή σχηματίζουν δέσμη και κινούνται προς

την οθόνη με την οριζόντια ταχύτητα που απέκτησαν. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου είναι μερικά kV. Έτσι, η ταχύτητα που αποκτούν τα ηλεκτρόνια είναι της τάξεως των 10^7 m/s.

Στο τηλεβόλο, υπάρχουν διατάξεις που επιτρέπουν τον έλεγχο του αριθμού των ηλεκτρονίων που κατευθύνονται προς την οθόνη και την εστίαση της δέσμης.

Το εσωτερικό του καθοδικού σωλήνα βρίσκεται σε υψηλό κενό (περίπου 10^{-7} atm). Έτσι ελαχιστοποιούνται οι κρούσεις των ηλεκτρονίων της δέσμης με τα μόρια του αέρα που περιέχονται σ' αυτόν.

Η δέσμη των ηλεκτρονίων διέρχεται στη συνέχεια ανάμεσα από

δύο ζεύγη μεταλλικών πλακιδίων (πλακίδια απόκλισης). Στο ένα ζεύγος τα μεταλλικά πλακίδια είναι οριζόντια και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται ανάμεσά τους εκτρέπει τη δέσμη των ηλεκτρονίων κατάκόρυφα. Το άλλο ζεύγος πλακιδίων είναι κατακόρυφο και εκτρέπει τη δέσμη των ηλεκτρονίων οριζόντια. Οι σχέσεις (5.39), (5.41) δείχνουν ότι η απόκλιση είναι ανάλογη της διαφοράς δυναμικού που εφαρμόζεται μεταξύ των πλακιδίων. Έτσι το σημείο της οθόνης στο οποίο προσπίπτει η δέσμη εξαρτάται από τις τάσεις που εφαρμόζουμε σε κάθε χρονική στιγμή στα δύο ζεύγη πλακιδίων. Εάν η διαφορά δυναμικού και στα δύο ζεύγη πλακιδίων απόκλισης είναι μηδενική τα ηλεκτρόνια της δέσμης κινούνται

χωρίς να αποκλίνουν από την ευθύγραμμη τροχιά τους και προσκρούουν στο κέντρο της οθόνης.

Μετά την έξοδο από τα πεδία των πλακιδίων απόκλισης και μέχρι την πρόσκρουση στη φθορίζουσα οθόνη τα ηλεκτρόνια κινούνται ευθύγραμμα ομαλά.



Εικ. 5.4 Παλμογράφος.

Ο καθοδικός σωλήνας αποτελεί το βασικό στοιχείο του παλμογράφου.

Πιο σύνθετες παραλλαγές του, πάντως όμως στην ίδια αρχή λειτουργίας, αποτελούν οι οθόνες της τηλεόρασης και του υπολογιστή.

ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟΣ

Μια ειδική εφαρμογή του καθοδικού σωλήνα είναι ο παλμογράφος. Το κύριο στοιχείο ενός παλμογράφου είναι ένας καθοδικός σωλήνας του οποίου η οθόνη είναι βαθμολογημένη ώστε να μας επιτρέπει να κάνουμε μετρήσεις.

Εξωτερικά ο παλμογράφος είναι ένα κουτί με μια οθόνη στην μπροστινή πλευρά και διάφορους ρυθμιστές (κουμπιά). Με τους ρυθμιστές υπάρχει η δυνατότητα:

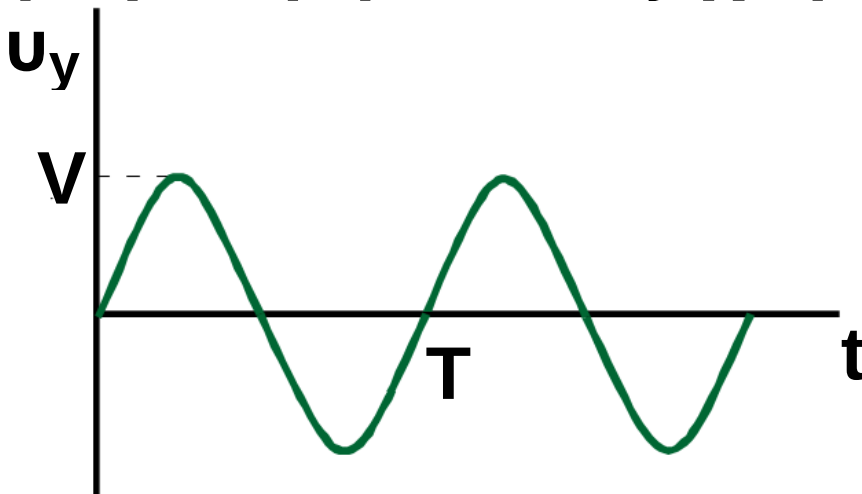
α) Να ρυθμίζεται η φωτεινότητα της κηλίδας. Η ρύθμιση αυτή αντιστοιχεί

σε μεταβολή της τάσης που επιτα-
χύνει τα ηλεκτρόνια στο τηλεβόλο.

β) Να ρυθμίζεται η τάση "σάρωσης"
για την οποία θα μιλήσουμε πιο κά-
τω.

γ) Να εφαρμόζεται εξωτερικά τάση
στα πλακίδια οριζόντιας και κατά-
κόρυφης απόκλισης.

δ) Να εστιάζεται η δέσμη ώστε η κη-
λίδα να γίνεται όσο το δυνατό
μικρότερη και να ξεχωρίζει καθαρά.

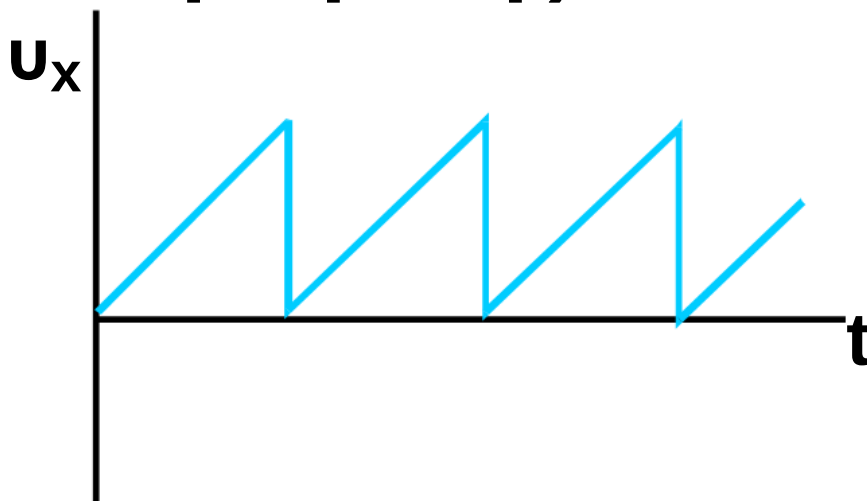


Σχ. 5.31 Εναλλασσόμενη τάση.

Εάν μεταξύ των πλακιδίων
κατακόρυφης εκτροπής εφαρμόσουμε

μια τάση που μεταβάλλεται με τον χρόνο, έστω μια τάση της μορφής $u_y = V \sin \omega t$ (εναλλασσόμενη τάση) (σχ. 5.31) και στα πλακίδια οριζόντιας εκτροπής δεν εφαρμόζεται τάση η φωτεινή κηλίδα θα κινείται πάνω- κάτω σύμφωνα με τις αυξομειώσεις της u_y . Για εναλλασσόμενες τάσεις όπως αυτή του δικτύου της ΔΕΗ η κηλίδα κινείται τόσο γρήγορα (50 φορές το δευτερόλεπτο) ώστε το μάτι να τη βλέπει σαν μια κατακόρυφη γραμμή.

Τάση σάρωσης.



Σχ. 5.32 Πριονωτή τάση.

Εάν μεταξύ των πλακιδίων οριζόντιας εκτροπής εφαρμόσουμε τάση u_x η οποία αυξάνεται γραμμικά και στη συνέχεια ελαττώνεται απότομα (πριονωτή τάση σχ. 5.32) η κηλίδα στην οθόνη θα κινείται οριζόντια και ισοταχώς από τα αριστερά προς τα δεξιά και θα επιστρέφει απότομα πίσω, για να ξαναρχίσει πάλι την ίδια κίνηση. Αυτή η παλινδρομική οριζόντια κίνηση της κηλίδας ονομάζεται

σάρωση της οθόνης. Την τάση σάρωσης την εφαρμόζει ο ίδιος ο παλμογράφος και υπάρχει δυνατότητα ρύθμισης της συχνότητας της u_x ώστε να επιτυγχάνουμε γρήγορη ή αργή σάρωση.

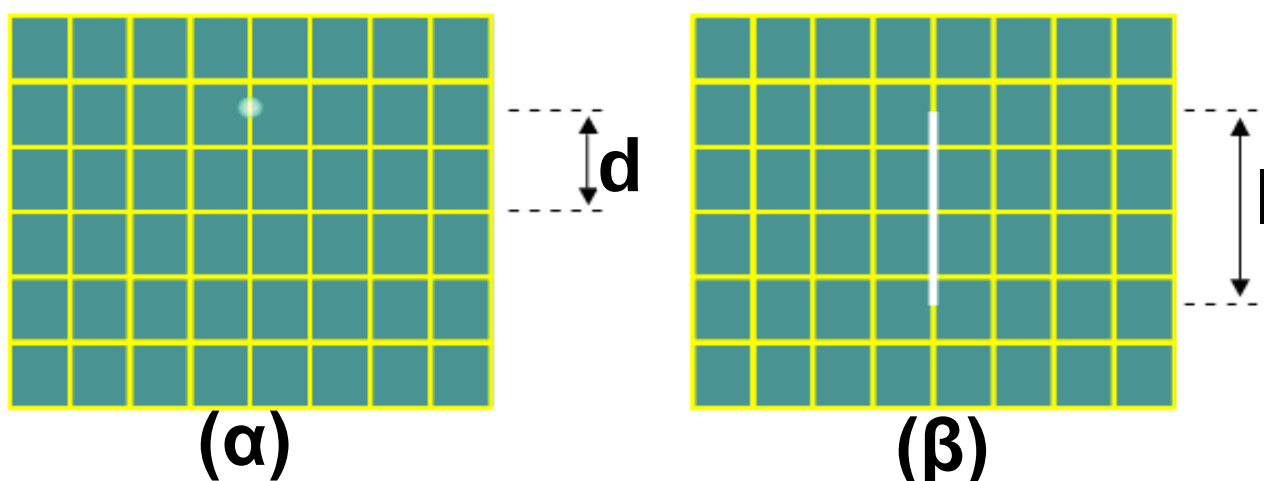
Μερικές από τις πιο απλές χρήσεις του παλμογράφου είναι.

α) Μέτρηση συνεχούς τάσεως

Απενεργοποιούμε την τάση σάρωσης και εφαρμόζουμε την τάση V που θέλουμε να μετρήσουμε στα πλακίδια κατακόρυφης απόκλισης. Η κηλίδα αποκλίνει κατακόρυφα (σχ. 5.33α). Από την απόσταση της κηλίδας από το κέντρο της οθόνης μπορούμε να βρούμε την εφαρμοζόμενη συνεχή τάση V .

β) Μέτρηση εναλλασσόμενης τάσης

Απενεργοποιούμε την τάση σάρωσης και στα πλακίδια κατακόρυφης απόκλισης εφαρμόζουμε τάση της μορφής $u_y = V \eta \mu \omega t$ (εναλλασσόμενη τάση) (σχ. 5.31). Η κηλίδα θα ανεβοκατεβαίνει γρήγορα κατακόρυφα και στην οθόνη του παλμογράφου θα σχηματιστεί μια κατακόρυφη γραμμή (σχ. 5.33β). Από το μήκος της γραμμής μπορούμε να υπολογίσουμε το V (πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης). Συγκεκριμένα το μήκος της γραμμής είναι ανάλογο του $2V$.

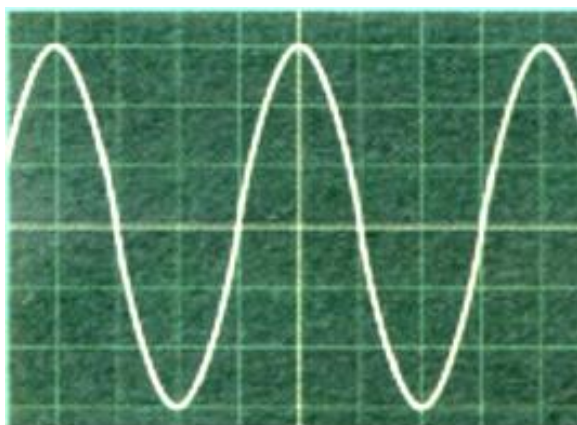


Σχ. 5.33 (α) Συνεχής τάση V εφαρμόζεται στα πλακίδια κατακόρυφης απόκλισης, η απόσταση d της κηλίδας από το κέντρο της οθόνης είναι ανάλογη της τάση V . (β) Εναλλασσόμενη τάση εφαρμόζεται στα πλακίδια κατακόρυφης απόκλισης, το μήκος της γραμμής στην οθόνη είναι ανάλογο του διπλάσιου πλάτους της εναλλασσόμενης τάσης.

γ) Μελέτη κυματομορφών

Εφαρμόζουμε ταυτόχρονα τη u_x (τάση σάρωσης), στα πλακίδια οριζόντιας απόκλισης και τη u_y (εναλ-

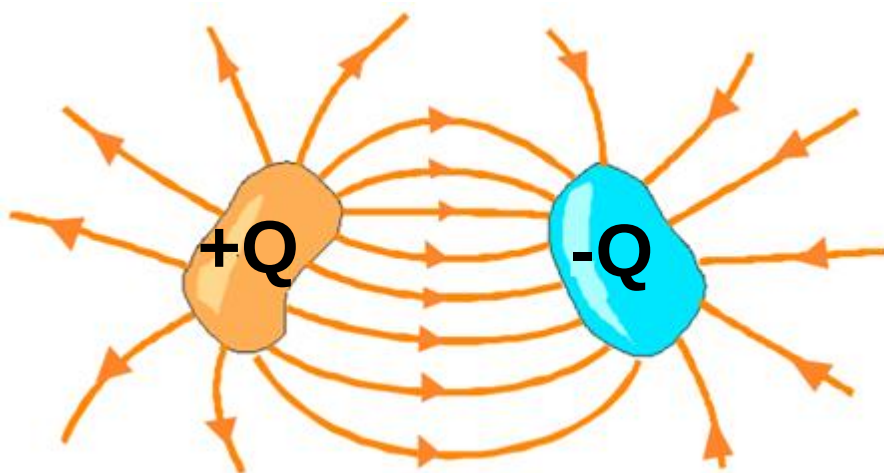
λασσόμενη) στα πλακίδια κατακόρυφης απόκλισης. Αυτό που προκύπτει στην οθόνη είναι μια κυματοειδής γραμμή (εικ. 5.5) που ονομάζεται κυματομορφή της τάσης u_y . Μπορούμε έτσι να παρακολουθήσουμε στην οθόνη του παλμογράφου και να μελετήσουμε τάσεις που μεταβάλλονται με το χρόνο, όπως η εναλλασσόμενη αλλά και πιο σύνθετες.



Εικ. 5.5 Η κυματομορφή μιας εναλλασσόμενης τάσης όπως φαίνεται στην οθόνη του παλμογράφου.

Επειδή τα ηλεκτρόνια έχουν πολύ μικρή μάζα, η απόκλιση της δεσμής των ηλεκτρονίων στον καθοδικό σωλήνα συμβαίνει σχεδόν ακαριαία και ο παλμογράφος έχει τη δυνατότητα να δείξει πολύ γρήγορες μεταβολές στην τάση.

5-9 ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΚΑΙ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ



Σχ. 5.34 Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο γειτονικούς αγωγούς φορτισμένους. Οι αγωγοί φορτίζονται με φορτία $+Q$ και $-Q$.

Ο πυκνωτής είναι μια διάταξη που αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο και ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο αγωγούς που βρίσκονται κοντά και χωρίζονται μεταξύ τους από το κενό, τον αέρα, ή από άλλο μονωτή. Οι αγωγοί του σχήματος 5.34 αποτελούν ένα πυκνωτή. Οι δύο αγωγοί που αποτελούν τον πυκνωτή ονομάζονται οπλισμοί.

Πυκνωτής ονομάζεται σύστημα δύο γειτονικών αγωγών (οπλισμοί), που χωρίζονται μεταξύ τους με κάποιο μονωτικό υλικό. Οι αγωγοί φορτίζονται με φορτία $+Q$ και $-Q$.

Φορτίο του πυκνωτή ονομάζεται το θετικό φορτίο του ενός από τους οπλισμούς του, ενώ τάση του πυ-

κνωτή, ονομάζεται η διαφορά δυναμικού V , μεταξύ των οπλισμών του. Σε έναν πυκνωτή αποθηκεύεται πολύ πιο εύκολα φορτίο, από ότι σε κάθε ένα μεμονωμένο αγωγό από αυτούς που αποτελούν τον πυκνωτή.

Σε κάθε πυκνωτή η τάση του είναι ανάλογη του φορτίου του, δηλαδή το πηλίκο του φορτίου προς την τάση είναι σταθερό. Το πηλίκο αυτό το ονομάζουμε χωρητικότητα του πυκνωτή.

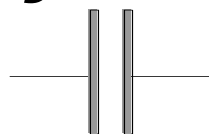
Χωρητικότητα C ενός πυκνωτή ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του φορτίου του (Q) προς την τάση του (V).

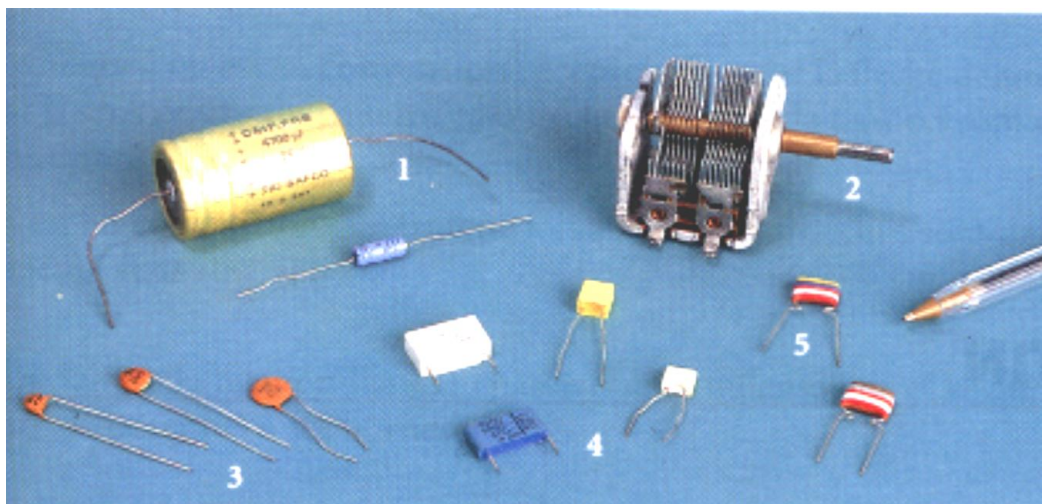
$$C = \frac{Q}{V}$$

Μονάδα χωρητικότητας είναι το Farad, που συμβολίζεται με το F. $1F=1\text{ C/V}$.

Ονομάζεται έτσι προς τιμήν του Michael Faraday, ο οποίος μεταξύ των άλλων, ερεύνησε και το θέμα της χωρητικότητας. Το 1Farad είναι πολύ μεγάλη χωρητικότητα. Οι χωρητικότητες των πυκνωτών που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι της τάξης του μικροφαράντ, ($1\mu F=10^{-6}\text{ F}$), του νανοφαράντ, ($1nF=10^{-9}\text{ F}$) και του πικοφαράντ, ($1pF=10^{-12}\text{ F}$).

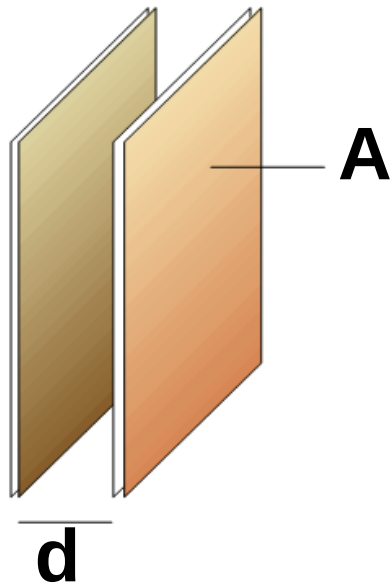
Οι πυκνωτές παριστάνονται με δύο μικρές παράλληλες ισοϋψείς γραμμές, με ακροδέκτες συνδεδεμένους στο μέσον τους.





Εικ.5.6 Τύποι πυκνωτών

Υπάρχουν πολλοί τύποι πυκνωτών. Στην εικόνα 5.6 φαίνονται μερικοί από αυτούς. Συνήθως παίρνουν το όνομά τους από το σχήμα των οπλισμών τους. Ο σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο ομόκεντρους σφαιρικούς αγωγούς και ο κυλινδρικός από δύο ομοαξονικούς κυλινδρικούς αγωγούς.



Σχ. 5.35 Επίπεδος πυκνωτής

Ο επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από δύο επίπεδες παράλληλες, μεταλλικές πλάκες, ίδιας επιφάνειας A , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και βρίσκονται η μια απέναντι στην άλλη.

Η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη της επιφάνειας A των οπλισμών και αντίστροφα ανάλογη της απόστασης d μεταξύ των οπλισμών.

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Γενικότερα η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία της διάταξης (δηλαδή από το μέγεθος, το σχήμα, τις σχετικές θέσεις των δύο αγωγών) και από το είδος του μονωτικού υλικού (ονομάζεται και διηλεκτρικό) ανάμεσα στους οπλισμούς του.

Οι πυκνωτές αποτελούν βασικά στοιχεία των ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών κυκλωμάτων. Όταν γυρίζουμε το κουμπί του ραδιοφώνου για να επιλέξουμε σταθμό μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα ενός πυκνωτή. Το φως που εκπέμπει το φλας της φωτογραφικής μηχανής προέρχεται από την εκφόρτιση ενός πυκνωτή. Οι πυκνωτές

**χρησιμοποιούνται ακόμα στους
καθοδικούς σωλήνες, στα τσιπ των
υπολογιστών και σε χιλιάδες άλλες
εφαρμογές.**



**Εικ. 5.7 Η λειτουργία του φλας της
φωτογραφικής μηχανής στηρίζεται
στην εκφόρτιση ενός πυκνωτή δια
μέσου μιας λυχνίας ξένου. Καθώς
εκφορτίζεται ο πυκνωτής το αέριο
ξένο ιονίζεται με αποτέλεσμα την
έντονη αναλαμπή μικρής διάρκειας**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.8

Οι οπλισμοί ενός επίπεδου πυκνωτή έχουν επιφάνεια $A=4\text{cm}^2$ και η απόστασή τους είναι $d=2\text{mm}$.

Υπολογίστε:

- α) Τη χωρητικότητά του.
- β) Το φορτίο που θα αποκτήσει ο πυκνωτής αν συνδεθεί σε πηγή τάσης $V=12\text{V}$. Δίνεται $\epsilon_0=8,85\times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N m}^2)$

Απάντηση :

Η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$C=\epsilon_0 \frac{A}{d},$$

από την οποία, με αντικατάσταση, βρίσκουμε:

$$C = \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \times \text{m}^2} \right) \frac{4 \times 10^{-4} \text{m}^2}{2 \times 10^{-3} \text{m}} =$$

$$= 17,7 \times 10^{-13} \text{F} = 1,77 \text{pF}$$

Το φορτίο του πυκνωτή, όταν συνδεθεί με την πηγή, θα είναι:

$$Q = CV = 1,77 \text{pF} \cdot 12 \text{V} =$$

$$= 21,24 \text{pC} = 21,24 \times 10^{-12} \text{C}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.9

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα $10 \mu\text{F}$ και φορτίζεται σε πηγή με τάση $V = 100 \text{V}$. Στη συνέχεια, αφού αποσυνδεθεί από την πηγή, οι οπλισμοί του απομακρύνονται έως ότου η απόσταση μεταξύ τους διπλασιαστεί. Να υπολογιστούν:

α) η νέα χωρητικότητα του πυκνωτή και

β) η τάση του μετά την απομάκρυνση των οπλισμών του.

Απάντηση :

Η αρχική χωρητικότητα του πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (5.42)$$

Όταν διπλασιάσουμε την απόσταση των οπλισμών του, η χωρητικότητά του γίνεται

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{2d} \quad (5.43)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.43) και (5.42) παίρνουμε:

$$C = \frac{C_0}{2} = 5\mu\text{F}$$

Το φορτίο στους οπλισμούς του θα παραμείνει ίδιο και μετά την απομάκρυνση των οπλισμών. Εφόσον ο πυκνωτής δε συνδέεται

με κάποιο κύκλωμα οι οπλισμοί του είναι απομονωμένοι αγωγοί και θα διατηρήσουν το φορτίο τους. Αφού με την απομάκρυνση των οπλισμών η χωρητικότητα μεταβάλλεται, αλλά το φορτίο μένει το ίδιο, θα αλλάξει η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή. Αν η νέα τάση του πυκνωτή είναι V' μπορούμε να γράψουμε

$$C = \frac{Q}{V'} \quad (5.44)$$

Πριν την απομάκρυνση των οπλισμών του, η χωρητικότητα του πυκνωτή ήταν :

$$C_0 = \frac{Q}{V} \quad (5.45)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.45) και (5.44) παίρνουμε :

$$\frac{C_0}{C} = \frac{V'}{V} \quad \text{ή} \quad V' = \frac{C_0}{C} V$$

επομένως $V' = 200 \text{ V}$

5-10 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗ ΣΕ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟ ΠΥΚΝΩΤΗ

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι όλες οι διατάξεις φορτίου έχουν ορισμένη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U , ίση με το έργο που απαιτείται για να τοποθετηθούν τα φορτία στις θέσεις τους. Ένας φορτισμένος πυκνωτής έχει δυναμική ενέργεια U η οποία δίνεται από τη σχέση.

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \quad (5.46)$$

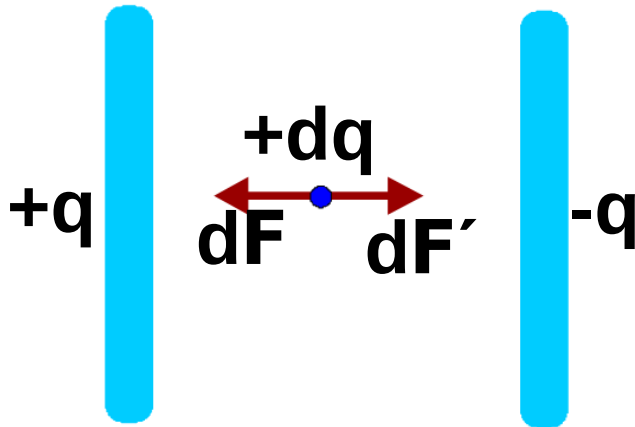
Η ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή αποδίδεται κατά την εκφόρτισή του. Αν ενώσουμε τους δύο οπλισμούς του πυκνωτή με ένα αγωγό θα μετακινηθούν φορτία από τον ένα οπλισμό στον άλλο μέχρι οι δύο οπλισμοί να αποκτήσουν το

ίδιο δυναμικό. Τότε λέμε ότι ο πυκνωτής εκφορτίστηκε. Κατά την εκφόρτιση του πυκνωτή η αποθηκευμένη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα στον αγωγό που συνδέει τους οπλισμούς.

Υπολογισμός της ενέργειας φορτισμένου πυκνωτή

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευμένη ένας φορτισμένος πυκνωτής, ας φανταστούμε μια υποθετική διαδικασία φόρτισης: Σε ένα αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή παίρνουμε μικρές ποσότητες φορτίου $+dq$ από τον ένα οπλισμό και τις τοποθετούμε στον άλλο. Ο οπλισμός από τον οποίο αφαιρείται θετικό φορτίο θα φορτιστεί αρνητικά ενώ ο οπλισμός στον οποίο προσθέτουμε θετικό

φορτίο, θα φορτιστεί θετικά. Έστω q_0 , και V_0 οι τελικές τιμές για το φορτίο και την τάση του πυκνωτή.



Σχ. 5.36 Ο πυκνωτής φορτίζεται με την μεταφορά απειροστά μικρών φορτίων dq από τον ένα οπλισμό στον άλλο.

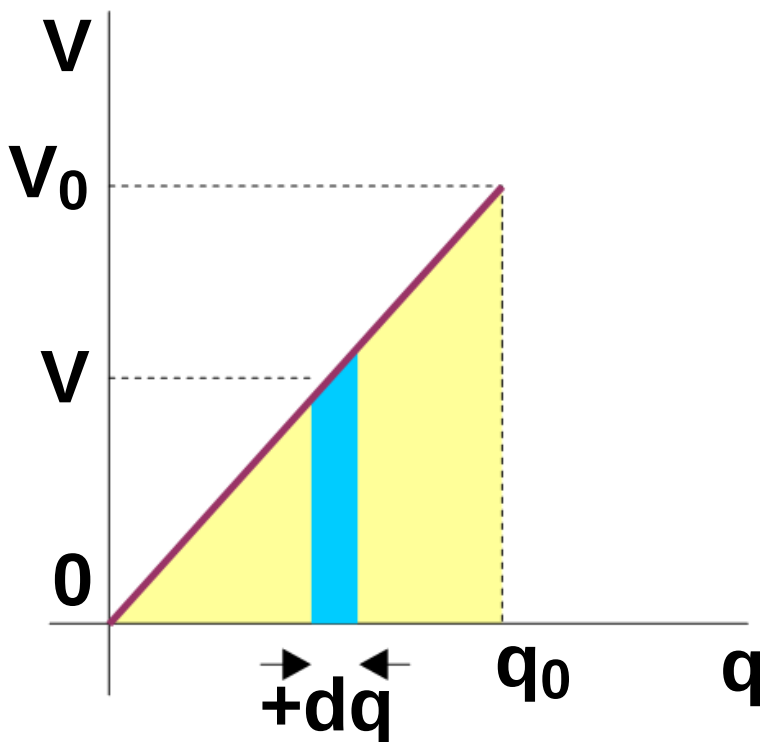
Η μεταφορά του πρώτου φορτίου dq από τον ένα οπλισμό στον άλλο γίνεται χωρίς να καταναλώσουμε έργο. Με την απόσπαση όμως του πρώτου φορτίου $+dq$ από τον ένα οπλισμό και την εγκατάστασή του στον άλλο, ο πρώτος οπλισμός θα έχει φορτίο $-dq$ και ο δεύτερος $+dq$.

Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία πεδίου. Τώρα πια, η μεταφορά νέου φορτίου dq απαιτεί προσπάθεια (έργο), εξ αιτίας της δύναμης $dF' = Edq$ που ασκεί το πεδίο στο φορτίο. Η δύναμη dF που μετακινεί το φορτίο πρέπει να εξουδετερώνει τη δύναμη dF' του πεδίου. Όσο προχωράει η φόρτιση του πυκνωτή, το ηλεκτρικό του πεδίο θα γίνεται πιο ισχυρό και θα απαιτείται ολοένα και μεγαλύτερο έργο για τη μετακίνηση φορτίου dq . Το έργο της δύναμης dF είναι θετικό και ίσο απολύτως με το έργο της δύναμης dF' του πεδίου.

Αν κάποια στιγμή η τάση του πυκνωτή είναι V , το έργο της δύναμης που απαιτείται για τη μετακίνηση φορτίου dq , από τον

ένα οπλισμό στον άλλο είναι
 $dW = V dq$.

Ισχύει $C = \frac{q}{V}$ ή $V = \frac{1}{C} q$



Σχ. 5.37 Από τη γραφική παράσταση της σχέσης $V = q/C$ μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια του πυκνωτή

Η γραφική παράσταση της σχέσης $V = f(q)$ από την στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν

μέχρι να αποκτήσει την τελική του τιμή q_0 , είναι ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων (σχ. 5.37). Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι αν το σχήμα με το μπλε χρώμα μπορεί να θεωρηθεί παραλληλόγραμμο -και μπορεί να θεωρηθεί αν το dq είναι απειροστά μικρό- το εμβαδόν του θα είναι ίσο με $V \cdot dq$ και θα δίνει το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά του φορτίου dq . Το συνολικό έργο που απαιτείται για να φορτιστεί ο πυκνωτής θα είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου από την γραμμή του διαγράμματος μέχρι τον άξονα q , δηλαδή

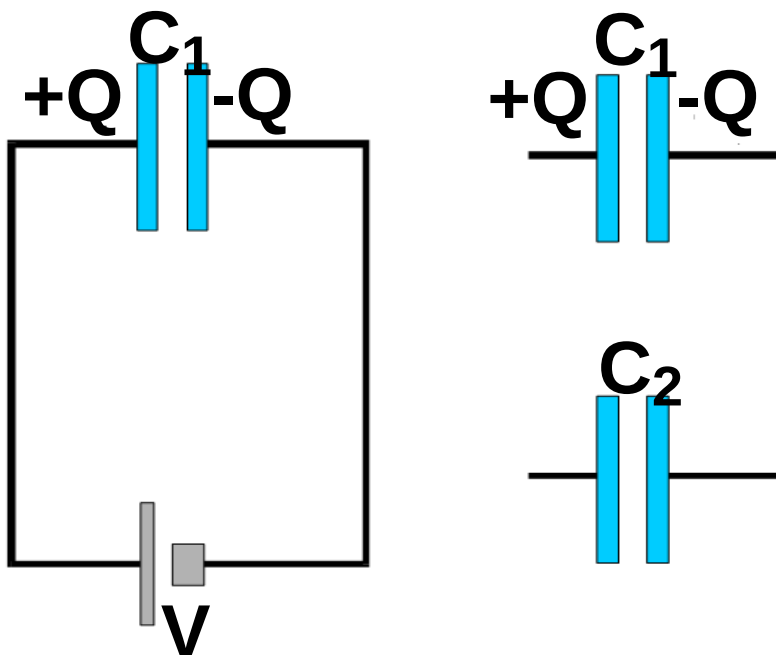
$$W = \frac{1}{2} q_0 V_0 \quad \text{ή} \quad W = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Επομένως η δυναμική ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή είναι

$$U = \frac{1}{2} C V_0^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.10

Πυκνωτής χωρητικότητας $C_1 = 4\mu\text{F}$, φορτίζεται από την πηγή, τάσης $V = 20\text{V}$, με φορτίο Q . Στη συνέχεια ο πυκνωτής αποσυνδέεται από την πηγή και συνδέεται με αφόρτιστο πυκνωτή χωρητικότητας $C_2 = 12\mu\text{F}$ όπως στο σχήμα 5.39 :



Σχ. 5.38

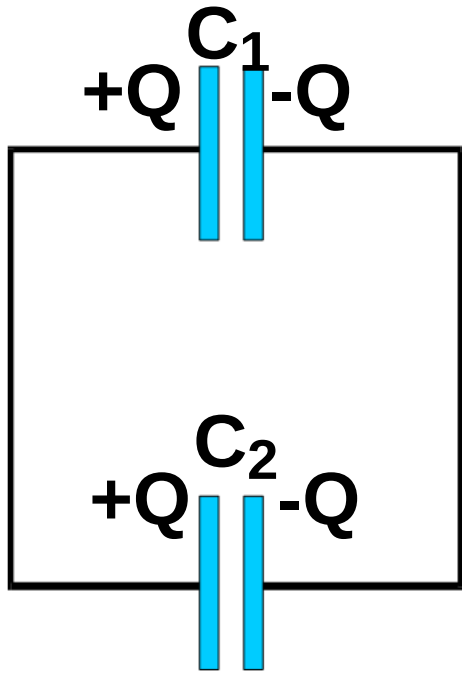
- α) Να υπολογιστεί η κοινή τάση V' που θα αποκτήσουν οι πυκνωτές μετά τη σύνδεσή τους.
- β) Το φορτίο που θα αποκτήσει κάθε πυκνωτής μετά τη σύνδεση.
- γ) Με τη σύνδεση των δυο πυκνωτών μεταβάλλεται η ενέργεια του συστήματος. Πόσο μεταβλήθηκε η ενέργεια; Πού οφείλεται η μεταβολή αυτή ;

Απάντηση :

Ο πυκνωτής χωρητικότητας C_1 , κατά τη σύνδεσή του με την πηγή απέκτησε φορτίο $Q = C_1 V = 80 \mu C$

Μετά την αποσύνδεση της πηγής και τη σύνδεση των δύο πυκνωτών μεταξύ τους, ένα μέρος του φορτίου Q μετακινείται ώστε να φορτιστεί και ο πυκνωτής C_2 . Οι πυκνωτές C_1 και C_2 αποκτούν

φορτία Q_1 και Q_2 , αντίστοιχα και η (κοινή) διαφορά δυναμικού στους οπλισμούς γίνεται V' .



Σχ. 5.39

α) Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης του φορτίου:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (5.47)$$

Για κάθε ένα από τους πυκνωτές ισχύει:

$$Q_1 = C_1 V' \quad \text{και} \quad Q_2 = C_2 V' \quad (5.48)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.48) στην (5.47) έχουμε:

$$Q = C_1 V' + C_2 V' \quad \text{ή} \quad Q = C_1 + C_2 V'$$

$$\text{επομένως} \quad V' = \frac{Q}{C_1 + C_2} = 5V$$

β) Αντικαθιστώντας την τιμή του V' στις σχέσεις (5.48) υπολογίζουμε τα φορτία που απέκτησαν οι πυκνωτές:

$$Q_1 = 20\mu C \quad \text{και} \quad Q_2 = 60mC$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής με τη μεγαλύτερη χωρητικότητα "κρατάει" και το περισσότερο φορτίο.

γ) Η ενέργεια του συστήματος μεταβλήθηκε κατά

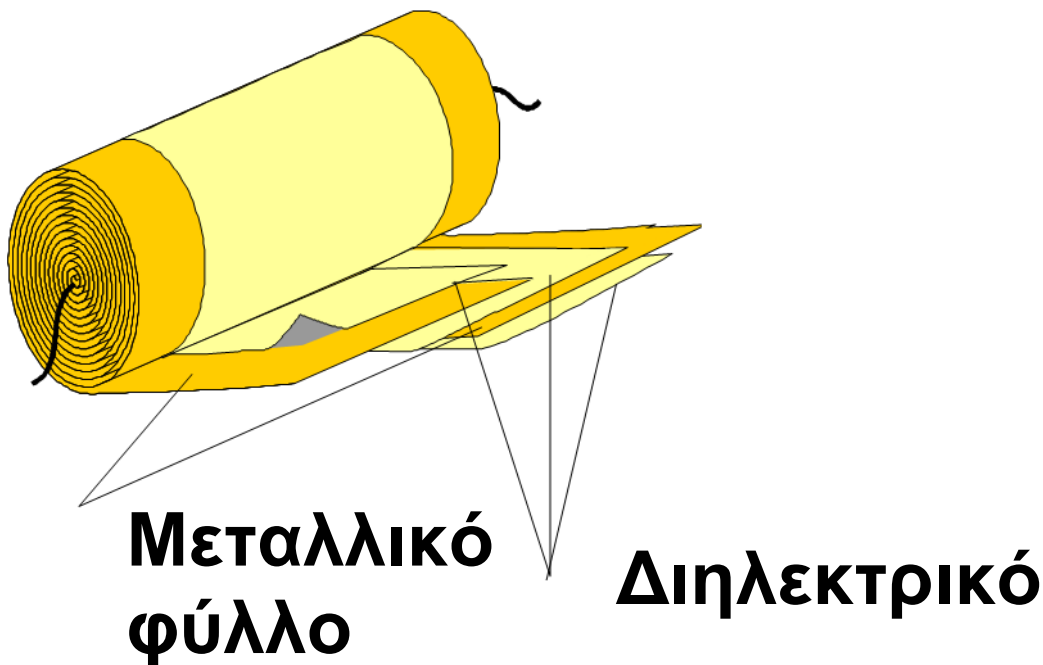
$$\Delta U = U_{\text{μετά}} - U_{\text{πριν}} =$$

$$= \frac{1}{2} C_1 V'^2 + \frac{1}{2} C_2 V'^2 - \frac{1}{2} C_1 V^2 = -6 \times 10^{-4} J$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η ενέργεια του συστήματος ελαττώ-

θηκε. Η ηλεκτρική ενέργεια που χάθηκε από το σύστημα έγινε θερμότητα στους αγωγούς κατά τη μετακίνηση φορτίου από τον ένα πυκνωτή στον άλλο.

5-11 ΠΥΚΝΩΤΕΣ ΚΑΙ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ



Σχ. 5.40 Πυκνωτής “σάντουιτς”. Αποτελείται από δυο μεταλλικά φύλλα που διαχωρίζονται από διηλεκτρικό.

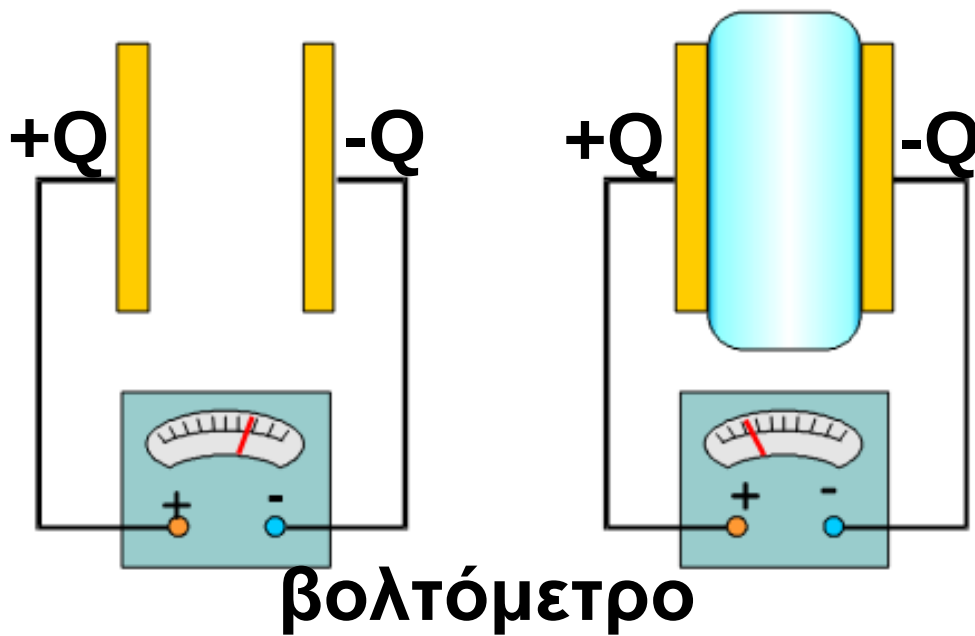
Διηλεκτρικά ή μονωτές ονομάζονται τα υλικά όπως το λάδι, το

γυαλί, το λαδόχαρτο κ.ά., που δεν επιτρέπουν την κίνηση ηλεκτρικών φορτίων στο εσωτερικό τους. Οι περισσότεροι πυκνωτές έχουν ένα διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς τους. Ένας συνηθισμένος τύπος πυκνωτή αποτελείται από δύο μακριές λουρίδες μεταλλικών φύλλων, που είναι οι οπλισμοί, ανάμεσα στις οποίες βρίσκεται ένα φύλλο πλαστικού. Ένα τέτοιο σύστημα “σάντουιτς” (σχ. 5.40) τυλίγεται σε μορφή ρολού και ο πυκνωτής που δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο μπορεί να έχει χωρητικότητα αρκετά μικροφάραντ.

Η τοποθέτηση διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή εξυπηρετεί τρεις λειτουργίες. α) λύνει το πρόβλημα της συγκράτησης των οπλισμών του πυκνωτή σε

μικρή απόσταση μεταξύ τους χωρίς να έρχονται σε επαφή (οι οπλισμοί του πυκνωτή επειδή έχουν αντίθετα φορτία, έλκονται και έχουν την τάση να ακουμπήσουν). β) πολλές φορές τα ηλεκτρικά πεδία που δημιουργούνται ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι πολύ ισχυρά και υπάρχει ο κίνδυνος να δημιουργηθεί σπινθήρας, ο οποίος καταστρέφει τον πυκνωτή. Επειδή πολλοί μονωτές αντέχουν σε ισχυρότερα πεδία από τα πεδία που αντέχει ο αέρας είναι προτιμότερη η χρήση τους. Η μέγιστη ένταση ηλεκτρικού πεδίου στην οποία αντέχει ένας μονωτής ονομάζεται διηλεκτρική αντοχή. γ) με τη χρήση διηλεκτρικού αυξάνεται η χωρητικότητα ενός πυκνωτή.

Το τελευταίο μπορούμε να το παρατηρήσουμε εύκολα ως εξής. Με ένα βολτόμετρο μετράμε τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς ενός φορτισμένου πυκνωτή που έχει αποσυνδεθεί από την πηγή που τον φόρτισε. Έστω ότι μας δείχνει τιμή V_0 . Αν ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή βάλουμε ένα φύλλο διηλεκτρικού - γυαλί, χαρτί, πλαστικό- η διαφορά δυναμικού παίρνει τιμή V μικρότερη από την αρχική. Όταν απομακρύνουμε το διηλεκτρικό η διαφορά δυναμικού επανέρχεται στην αρχική της τιμή V_0 .



Σχ. 5.41 Εάν τοποθετήσουμε διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς φορτισμένου πυκνωτή το βολτόμετρο δείχνει ότι η διαφορά δυναμικού μειώνεται.

Αφού με την εισαγωγή του διηλεκτρικού η τάση ελαττώνεται ενώ το φορτίο παραμένει αμετάβλητο, η χωρητικότητα του πυκνωτή αυξάνεται.

Αν η χωρητικότητα του πυκνωτή με το διηλεκτρικό είναι C ενώ χωρίς

το διηλεκτρικό είναι C_0 , ο λόγος

$$K = \frac{C}{C_0} \quad (5.49)$$

λέγεται διηλεκτρική σταθερά του υλικού.

Η διηλεκτρική σταθερά K είναι καθαρός αριθμός, μεγαλύτερος της μονάδας και χαρακτηρίζει το υλικό.

Η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή με διηλεκτρικό είναι:

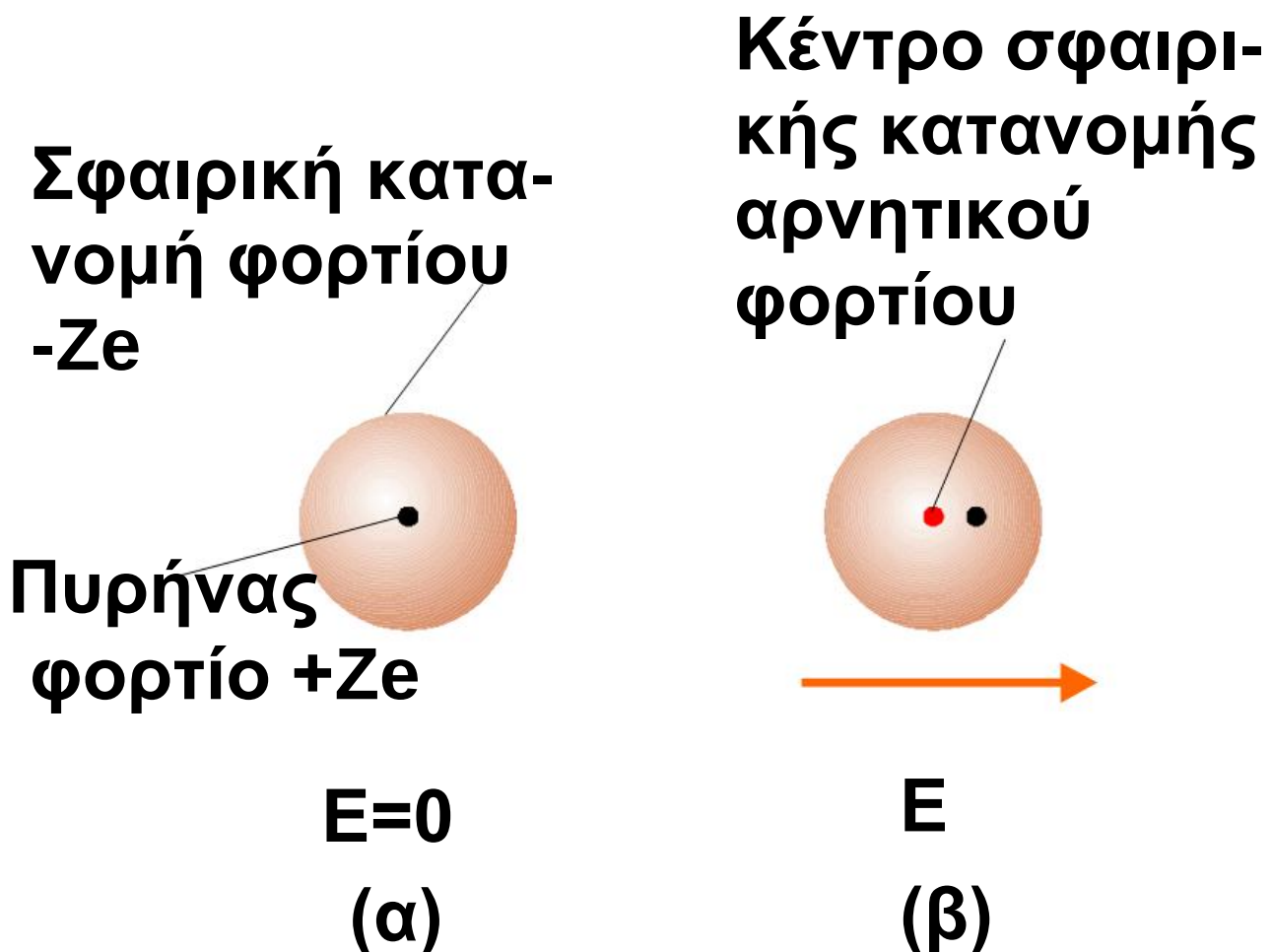
$$C = K C_0 \quad \text{ή} \quad C = K \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

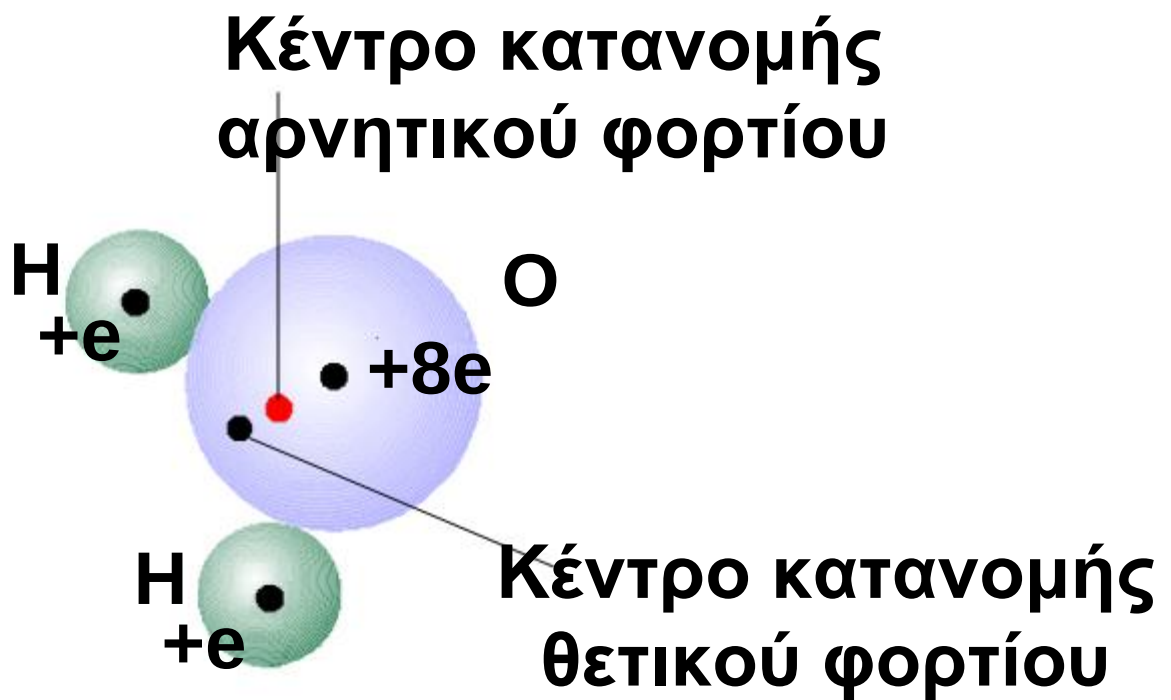
Ας δούμε όμως πού οφείλεται η αύξηση της χωρητικότητας ενός πυκνωτή όταν ανάμεσα στους οπλισμούς του τοποθετηθεί διηλεκτρικό.

Από τη σχέση $C=Q/V$ προκύπτει ότι εφ' όσον το φορτίο παραμένει αμετάβλητο και η χωρητικότητα αυξάνεται κατά τον παράγοντα K με την εισαγωγή του διηλεκτρικού η τάση του πυκνωτή ελαττώνεται κατά τον ίδιο παράγοντα (K). Γνωρίζουμε ότι στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ή ένταση είναι $E=V/d$. Αφού η τάση του πυκνωτή ελαττώνεται κατά τον παράγοντα K και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του γίνεται K φορές μικρότερη. Επομένως τα φορτία που δημιουργούν το πεδίο πρέπει να έχουν μειωθεί. Αν και το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή παραμένει αμετάβλητο, το ηλεκτρι-

κό του πεδίο προκαλεί ανακατανομή στα φορτία του διηλεκτρικού. Το φαινόμενο ονομάζεται πόλωση.

Τα μόρια του διηλεκτρικού ή είναι δίπολα ή γίνονται δίπολα όταν εισάγονται σε ηλεκτρικό πεδίο (σχ. 5.42).

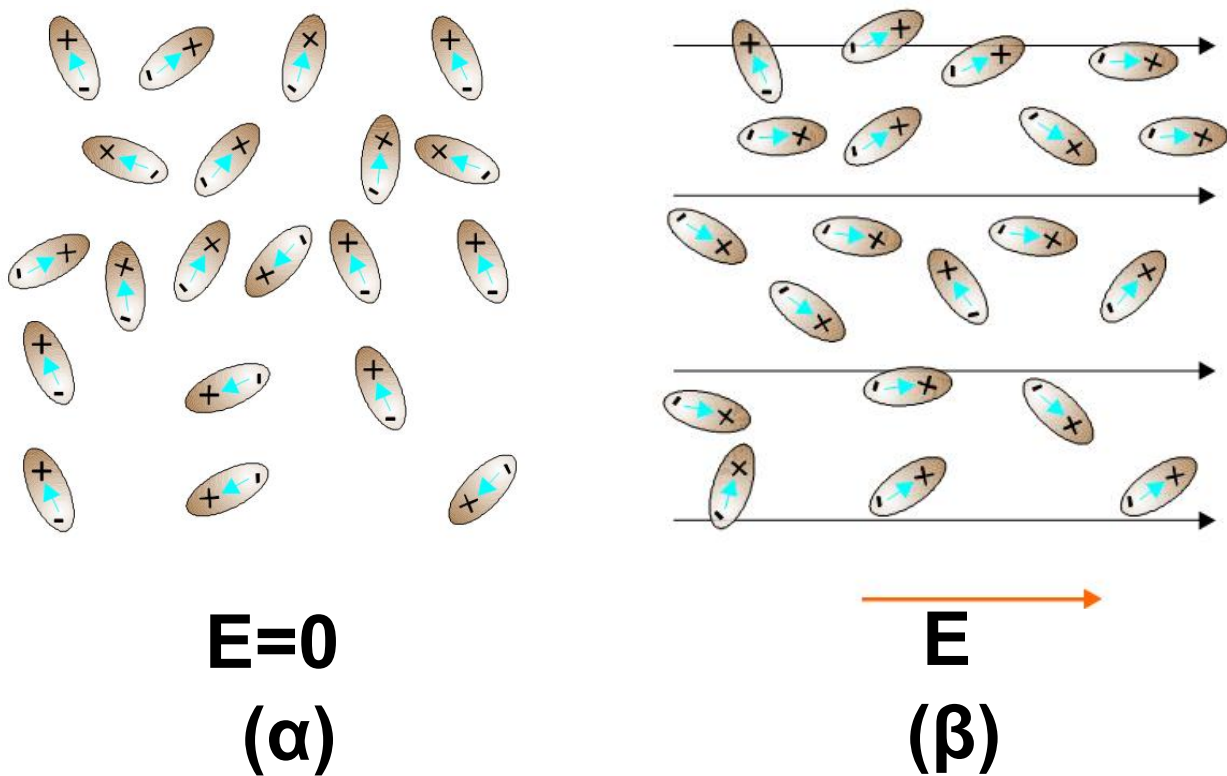




(γ)

Σχ. 5.42 (α) Ένα απλό μονοατομικό μόριο εκτός ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι δίπολο. Το κέντρο της κατανομής του αρνητικού φορτίου συμπίπτει με τον πυρήνα όπου είναι συγκεντρωμένο το θετικό φορτίο. (β) Το ίδιο μόριο όταν βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο μετατρέπεται σε δίπολο. (γ) κάποια μόρια, όπως αυτό του νερού, είναι δίπολα από την κατασκευή τους, είτε βρίσκονται σε ηλεκτρικό πεδίο είτε όχι.

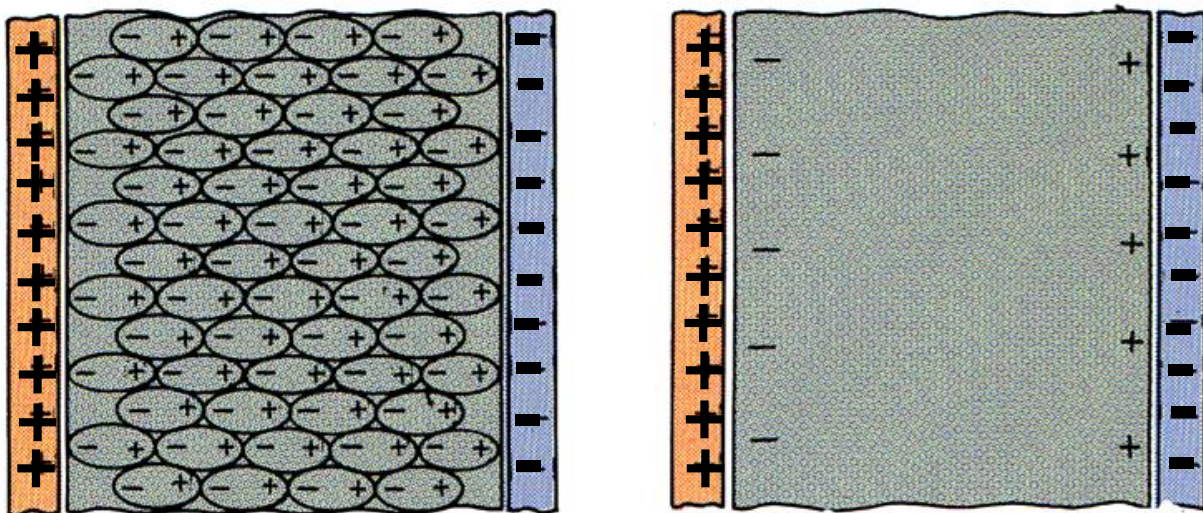
Τα δίπολα αυτά προσανατολίζονται όταν βρεθούν στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή (σχ. 5.43).



Σχ. 5.43 (α) Όταν τα δίπολα βρίσκονται εκτός ηλεκτρικού πεδίου είναι τυχαία προσανατολισμένα. (β) Τα δίπολα που βρίσκονται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο τείνουν να ευθυγραμμισ-

θούν με αυτό. Η ευθυγράμμιση δεν είναι απόλυτη, λόγω της θερμικής κίνησης των μορίων.

Ο προσανατολισμός των διπόλων έχει ως αποτέλεσμα η επιφάνεια του διηλεκτρικού που βρίσκεται σε επαφή με τον θετικό οπλισμό να εμφανίζει αρνητικό φορτίο και η επιφάνεια που βρίσκεται σε επαφή με τον αρνητικό οπλισμό, θετικό φορτίο (σχ. 5.44). Έτσι το συνολικό φορτίο που δημιουργεί το πεδίο είναι μικρότερο από το φορτίο που φέρουν οι οπλισμοί.



Σχ. 5.44 Το διηλεκτρικό μέσα στο ομογενές πεδίο του πυκνωτή πολώνεται. Τα επαγόμενα φορτία στις επιφάνειες του διηλεκτρικού ελαττώνουν το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή.

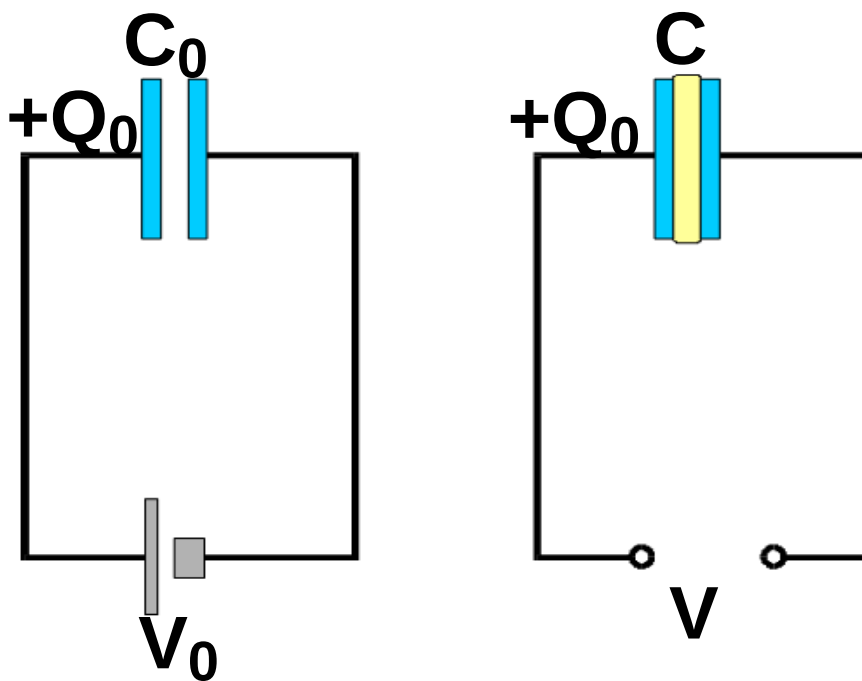
Η διηλεκτρική σταθερά και η διηλεκτρική αντοχή διαφόρων υλικών

Υλικό	Διηλεκτρική σταθερά K	Διηλεκτρικ ή αντοχή (V/m)
Κενό	1	Άπειρη
Αέρας	1,00059	$3 \cdot 10^6$
Γυαλί	5,6	$14 \cdot 10^6$
Νάιλον	3,4	$14 \cdot 10^6$
Χαρτί	3,7	$16 \cdot 10^6$
Λάδι σιλικόνης	2,5	$15 \cdot 10^6$



Εικ.5.8 Καταιγίδα πάνω από το Manhattan. Όταν η ένταση του πεδίου ανάμεσα στα σύννεφα και την επιφάνεια της Γης γίνει μεγαλύτερη από τη διηλεκτρική αντοχή του αέρα ο αέρας γίνεται αγωγίμος. Με τους κεραυνούς μεγάλες ποσότητες φορτίου μεταφέρονται, μέσω του αέρα, στη Γη. Κάθε κεραυνός φέρει περίπου 10^{20} ηλεκτρόνια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.11



Σχ. 5.45

Φορτίζουμε πυκνωτή χωρητικότητας C_0 , σε τάση V_0 . Στη συνέχεια αποσυνδέουμε την πηγή και εισάγουμε ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή διηλεκτρικό με διηλεκτρική σταθερά K . Βρείτε την τάση του πυκνωτή μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού.

Απάντηση :

Το φορτίο που απέκτησε ο πυκνωτής κατά τη φόρτισή του είναι

$$Q_0 = C_0 V_0 \quad (5.50)$$

Μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού, το φορτίο του παραμένει το ίδιο, αφού ο πυκνωτής έχει αποσυνδεθεί από την πηγή, όμως η χωρητικότητα του έγινε

$$C = K C_0 \quad (5.51)$$

Αν V η τάση του πυκνωτή μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού είναι

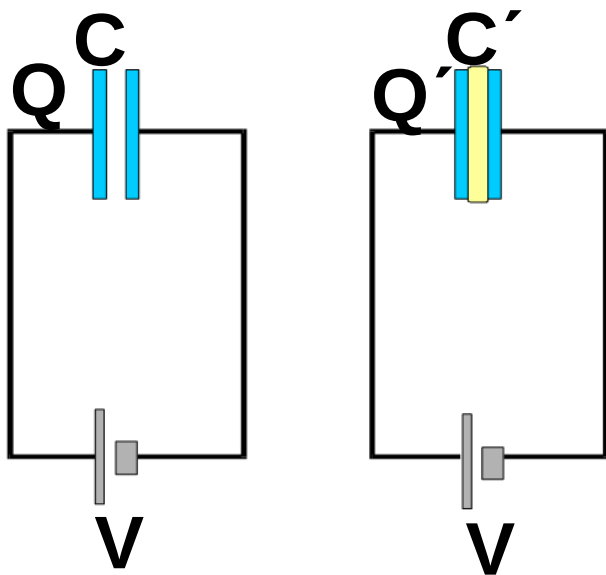
$$V = \frac{Q_0}{C} \quad \text{και λόγω των (5.50) και}$$

$$(5.51) \quad V = \frac{C_0 V_0}{K C_0} = \frac{V_0}{K}$$

Παρατηρούμε ότι η τάση του πυκνωτή είναι K φορές μικρότερη από την αρχική .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.12

Επίπεδος πυκνωτής με χωρητικότητα $C=5\mu\text{F}$, συνδέεται με πηγή τάσης $V=10\text{V}$. Χωρίς να αποσυνδέσουμε τον πυκνωτή από την πηγή, εισάγουμε ανάμεσα στους οπλισμούς του μια πλάκα διηλεκτρικού, διηλεκτρικής σταθεράς $K=5$, που καταλαμβάνει ολόκληρο το χώρο μεταξύ των οπλισμών του. Να υπολογιστεί η αύξηση του φορτίου, που προκάλεσε η εισαγωγή του διηλεκτρικού.



Σχ. 5.46

Απάντηση :

**Το φορτίο του πυκνωτή, πριν
εισαχθεί το διηλεκτρικό, ήταν:**

$$Q=CV=50\mu C$$

**Μετά την εισαγωγή του διηλεκτρι-
κού η χωρητικότητα του πυκνωτή
έγινε C' :**

$$C'=KC=25\mu F$$

**Εφ' όσον ο πυκνωτής παρέμεινε
συνδεδεμένος με την πηγή, η τάση
στους οπλισμούς του έμεινε σταθε-
ρή, ίση με την τάση V της πηγής.**

**Το φορτίο του, μετά την εισαγωγή
του διηλεκτρικού, είναι:**

$$Q'=C' V=250\mu C$$

**Επομένως η αύξηση φορτίου που
προκάλεσε η εισαγωγή του διηλεκ-
τρικού στον πυκνωτή είναι:**

$$Q'-Q=200\mu C$$

5-12 ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Σχ. 5.47 Δυο σημειακές μάζες που απέχουν απόσταση r έλκονται με δύναμη που είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών και αντίστροφα ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους.

Δύο σώματα με πολύ μικρές διαστάσεις (σημειακές μάζες), που έχουν μάζες m_1 και m_2 και βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους, έλκονται με δύναμη που έχει μέτρο

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2 / \text{kg}^2$. Η

δύναμη αυτή, όπως και η δύναμη Coulomb, είναι διατηρητική και κεντρική¹.

Η παραπάνω σχέση δίνει και τη δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο ομογενών σφαιρικών μαζών m_1 και m_2 . Στην περίπτωση αυτή απόσταση r είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των σφαιρών και οι ελκτικές δυνάμεις έχουν σημεία εφαρμογής τα κέντρα των σφαιρών.

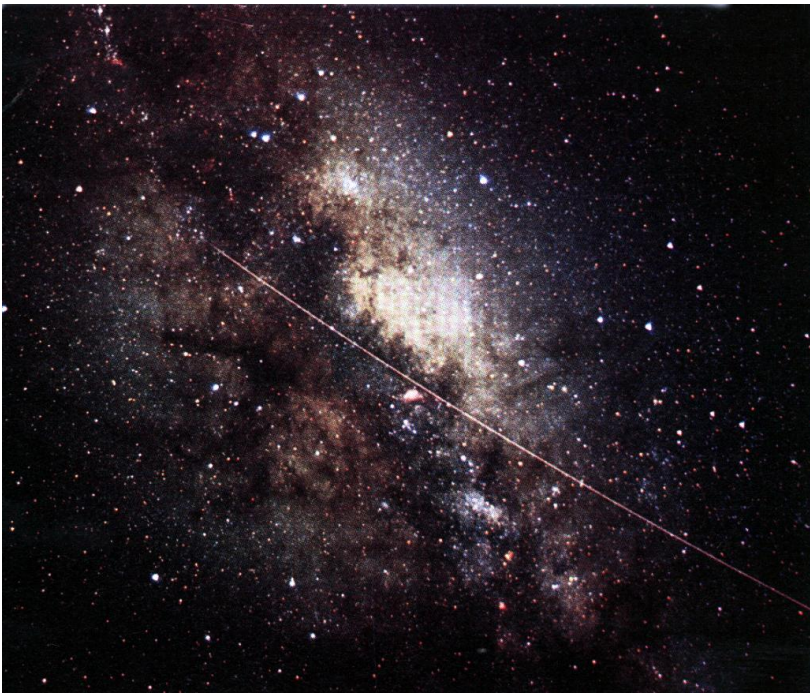
Η έλξη ανάμεσα σε δύο σώματα, με αίτιο το ότι έχουν μάζα, είναι δύναμη από απόσταση.

1 Κεντρικές λέγονται οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο σωμάτων και των οποίων ο φορέας συμπίπτει με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας των σωμάτων.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ μαζών περιγράφεται με την έννοια του πεδίου. Κάθε μάζα δημιουργεί γύρω της πεδίο. Αν κάποια μάζα βρεθεί μέσα στο πεδίο, το πεδίο τής ασκεί δύναμη.

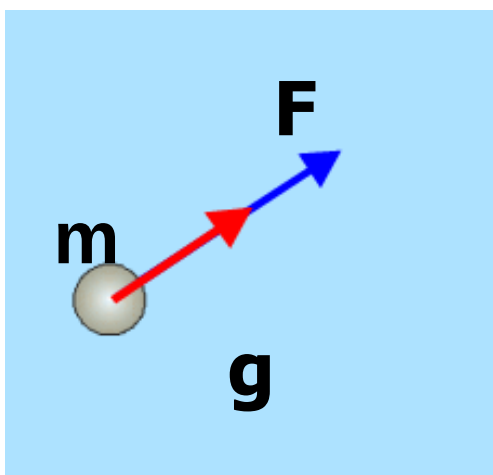
Το πεδίο που δημιουργείται από μάζες ονομάζεται βαρυτικό πεδίο ή πεδίο βαρύτητας.

Βαρυτικό πεδίο ονομάζεται ο χώρος εκείνος στον οποίο κάθε μάζα δέχεται δύναμη.



Εικ.5.9 Τμήμα του γαλαξία μας. Η συγκρότηση και η κίνηση των γαλαξιών οφείλεται σε βαρυτικές δυνάμεις. Η φωτεινή γραμμή που φαίνεται στη φωτογραφία είναι η τροχιά ενός μετεωρίτη που διασχίζει τη γήινη ατμόσφαιρα.

Για την περιγραφή του βαρυτικού πεδίου χρησιμοποιούμε τα μεγέθη ένταση και δυναμικό.



Σχ. 5.48 Εάν σ' ένα σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το βαρυτικό πεδίο βρεθεί μια μάζα m θα δεχθεί δύναμη. Η δύναμη είναι πάντα ομόρροπη της έντασης.

Ένταση (g) του πεδίου βαρύτητας σε ένα του σημείο ονομάζουμε το σταθερό πηλίκο της δύναμης (F) που θα δεχτεί μια μάζα (m) αν βρεθεί σε εκείνο το σημείο, προς τη μάζα αυτή

$$g = \frac{F}{m}$$

(5.52)

Η ένταση έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη. Μονάδα της έντασης είναι το 1N/kg ή 1m/s^2 , δηλαδή μετριέται σε μονάδες επιτάχυνσης.

Η επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα αν αφεθεί ελεύθερο στο πεδίο βαρύτητας είναι $a = \frac{F}{m}$ και από τη (5.52) προκύπτει ότι $g=a$, επομένως :

Στο πεδίο βαρύτητας, η ένταση του πεδίου σε ένα σημείο ταυτίζεται με την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα αν αφεθεί ελεύθερο σε εκείνο το σημείο.

Το πεδίο βαρύτητας, όπως και το ηλεκτροστατικό πεδίο, είναι διατηρητικό. Επομένως για την περιγραφή του είναι χρήσιμο το μέγεθος

δυναμικό που ορίζεται με τρόπο ανάλογο. Συγκεκριμένα :

Δυναμικό (V) του πεδίου βαρύτητας, σε ένα του σημείο A , ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μεταφέρεται μάζα m από το σημείο A στο άπειρο, προς τη μάζα αυτή.

$$V_A = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{m}$$

Μονάδα δυναμικού του βαρυτικού πεδίου είναι το 1J/kg

Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B του πεδίου βαρύτητας ονομάζεται το πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, κατά τη μετακίνηση μιας μάζας m

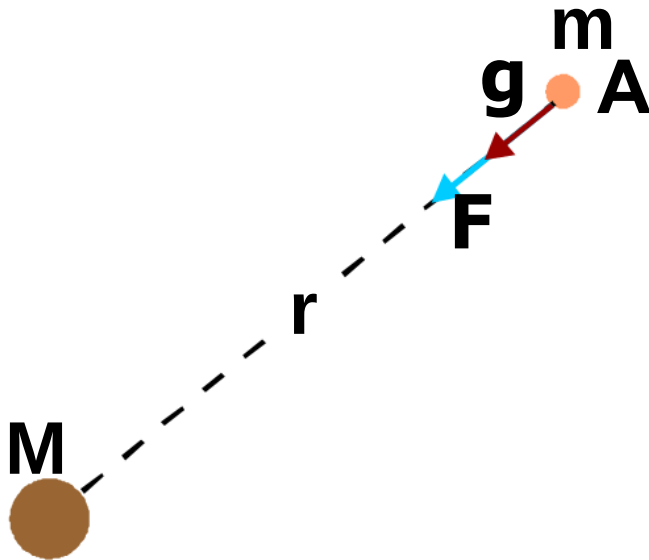
**από το σημείο A στο σημείο B,
προς τη μάζα αυτή.**

$$V_A - V_B = \frac{W_{A \rightarrow B}}{m}$$

**Η διαφορά δυναμικού εκφράζει
το έργο της δύναμης του πεδίου
ανά μονάδα μάζας κατά τη μετακί-
νηση μιας μάζας από το σημείο A
στο σημείο B.**

Το πεδίο που δημιουργείται από σημειακή μάζα

Η ένταση βαρυτικού πεδίου



Σχ. 5.49 Η ένταση του πεδίου που δημιουργεί η σημειακή μάζα M έχει σε κάθε σημείο κατεύθυνση προς τη μάζα.

Έστω μια σημειακή μάζα M . Για να βρούμε την ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η μάζα M σε σημείο A που απέχει απόσταση r απ' αυτήν, τοποθετούμε στο

σημείο αυτό μάζα m .

Η μάζα m δέχεται από την μάζα M δύναμη

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (5.53)$$

Η ένταση του πεδίου στο σημείο A είναι

$$g = \frac{F}{m} \quad (5.54)$$

Αντικαθιστώντας την (5.53) στην (5.54) έχουμε

$$g = G \frac{M}{r^2} \quad (5.55)$$

Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η σημειακή μάζα M σε σημείο A , που απέχει απόσταση r από το υλικό σημείο, έχει τιμή

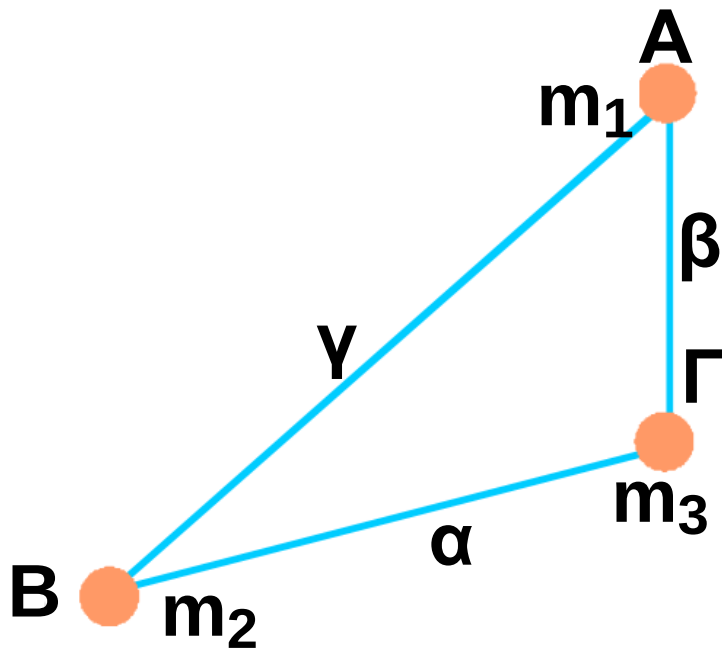
$$V_A = -G \frac{M}{r} \quad (5.56)$$

Η δυναμική ενέργεια συστήματος δύο υλικών σημείων με μάζες m_1 , m_2 , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r , είναι ίση με το έργο που απαιτείται για να μεταφερθούν οι μάζες από πολύ μακριά και να τοποθετηθούν στις θέσεις τους και είναι

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (5.57)$$



Εικ.5.10 Το σύστημα Γη-Σελήνη



Σχ. 5.50 Σύστημα τριών υλικών σημείων.

Η δυναμική ενέργεια συστήματος τριών υλικών σημείων (σχ. 5.50) υπολογίζεται με τρόπο ίδιο με αυτόν που ακολουθήσαμε στην παράγραφο 5-5. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

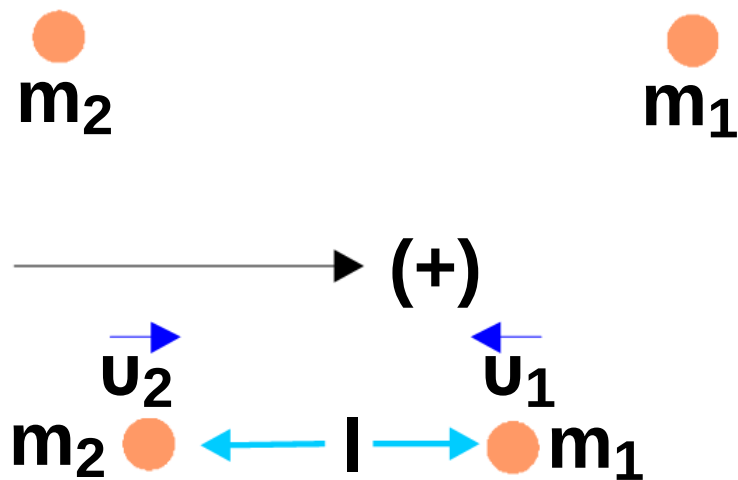
$$U = -G \frac{m_1 m_2}{\gamma} - G \frac{m_1 m_3}{\beta} - G \frac{m_2 m_3}{\alpha}$$

Παρατηρήσεις

1. Μια σφαιρική ομογενής μάζα M συμπεριφέρεται εξωτερικά σαν όλη η μάζα της να είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο. Επομένως οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν πανομοιότυπα και για την περιγραφή του βαρυτικού πεδίου ομογενούς σφαιρικού σώματος μάζας M ακτίνας R , υπό την προϋπόθεση ότι εξετάζουμε το πεδίο στο χώρο έξω από τη μάζα του σώματος ($r \geq R$). Εδώ τις αποστάσεις τις μετράμε από το κέντρο του σφαιρικού σώματος.

2. Το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (5.57) υποδηλώνει ότι για να κάνουμε άπειρη την απόσταση δυο μαζών που βρίσκονται αρχικά σε απόσταση r πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια στο σύστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.13



Σχ. 5.51

Δυο σφαιρικές μάζες m_1 και m_2 ηρεμούν σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης που ασκεί η μια στην άλλη αρχίζουν να κινούνται πλησιάζοντας μεταξύ τους. Αν κατά τη διάρκεια της κίνησής τους δεν ασκείται σε αυτές άλλη δύναμη, να βρείτε τις ταχύτητες των μαζών τη στιγμή που βρίσκονται σε απόσταση l μεταξύ τους. Δίνεται το G .

Απάντηση :

Εφόσον οι μάζες δε δέχονται άλλες δυνάμεις εκτός από τη μεταξύ τους ελκτική δύναμη, το σύστημά τους είναι απομονωμένο και η ορμή του διατηρείται.

Αν θεωρήσουμε ως αρχική θέση τη θέση όπου οι μάζες ηρεμούν και ως τελική αυτή όπου οι μάζες απέχουν μεταξύ τους απόσταση l θα ισχύει :

$$P_{\text{αρχ}} = P_{\text{τελ}}$$

Θεωρώντας θετική την κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$0 = m_2 u_2 - m_1 u_1$$

Λύνοντας ως προς u_1 έχουμε

$$u_1 = u_2 \frac{m_2}{m_1} \quad (5.58)$$

Το πεδίο βαρύτητας είναι διατηρητικό, δηλαδή η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή

$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\epsilon\lambda} + K_{\tau\epsilon\lambda}$$

οπότε

$$0 = -G \frac{m_1 m_2}{l} + \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

αντικαθιστώντας τη u_1 από την (5.58) βρίσκουμε

$$0 = -G \frac{m_1 m_2}{l} + \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1} u_2^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

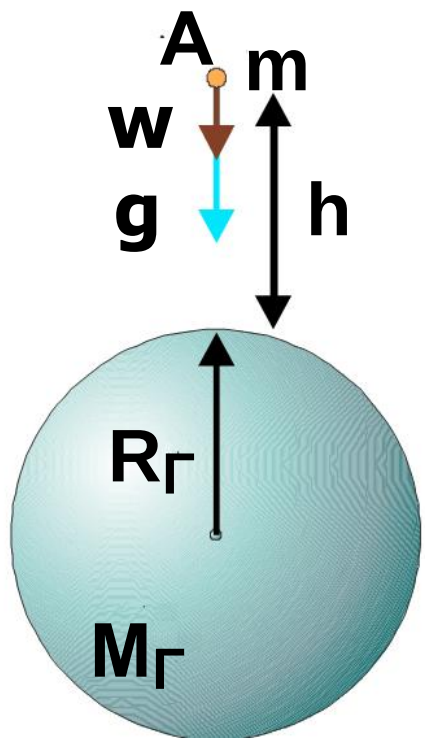
Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$u_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{l (m_1 + m_2)}}$$

και από την (5.58) βρίσκουμε

$$u_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{l (m_1 + m_2)}}$$

5-13 ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ



Σχ. 5.52 Το σημείο A βρίσκεται σε ύψος h , πάνω από την επιφάνεια της Γης.

Με ικανοποιητική προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε τη Γη σαν μια ομογενή σφαίρα ακτίνας $R_{\Gamma}=6,38 \times 10^6 \text{ m}$ και μάζας $M_{\Gamma}=5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$. Το βαρυτικό πεδίο της Γης σε ένα σημείο A, στο

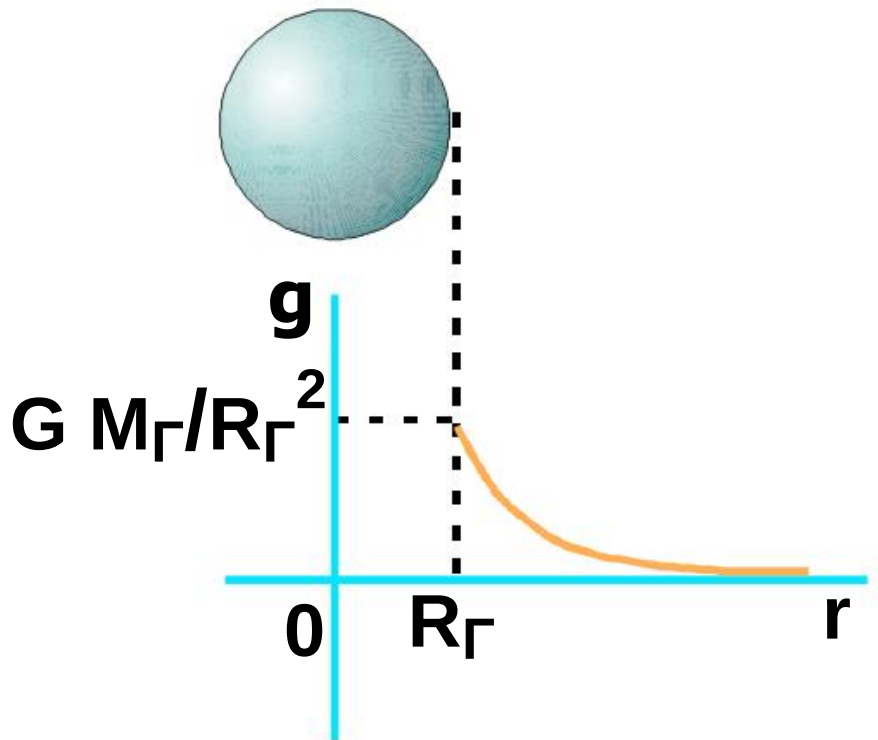
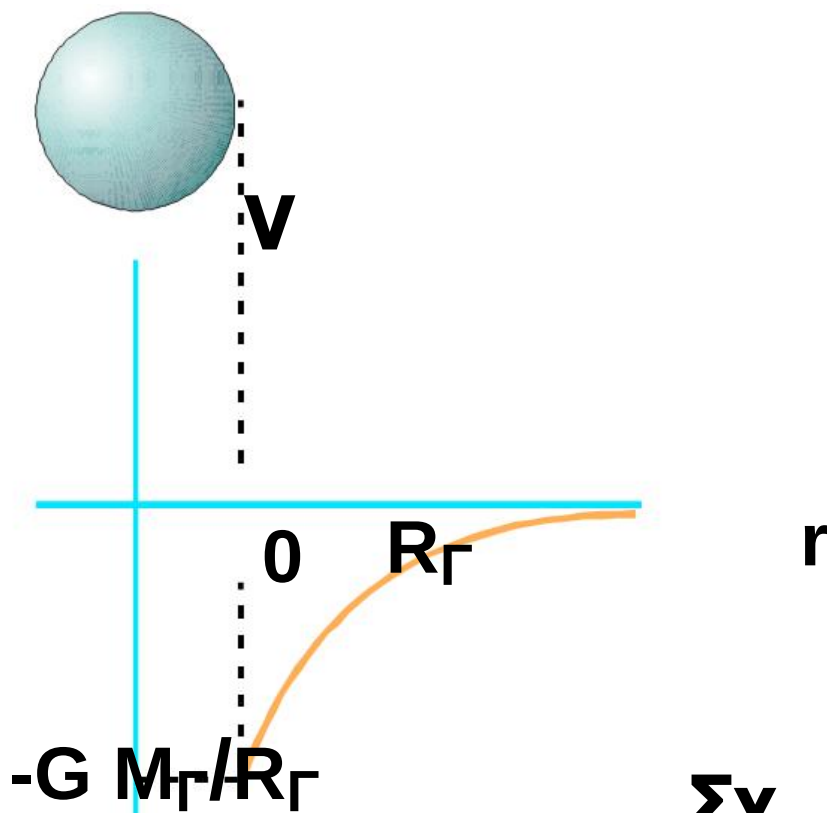
εξωτερικό της θα περιγράφεται από τις σχέσεις (5.55) και (5.56) του πεδίου που δημιουργεί μια σημειακή μάζα. Επειδή συνήθως η θέση ενός σημείου στο πεδίο βαρύτητας της Γης προσδιορίζεται από το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σημείο, είναι σκόπιμο στις σχέσεις αυτές να αντικαταστήσουμε την απόσταση r από το κέντρο της Γης με το άθροισμα $R_{\Gamma} + h$ όπου h το ύψος του σημείου που μας ενδιαφέρει από την επιφάνεια της Γης. Έτσι οι σχέσεις που δίνουν την ένταση και το δυναμικό στο πεδίο βαρύτητας της Γης - πάντα αναφερόμαστε στον εξωτερικό της χώρο- είναι

$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{(R_{\Gamma} + h)^2} \quad (5.59)$$

και

$$V = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}$$

(5.60)



Σχ. 5.53

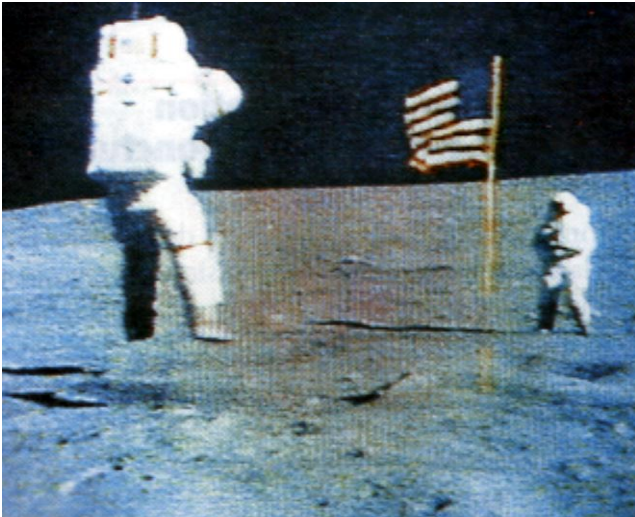
Σχ. 5.53 Γραφικές παραστάσεις του μέτρου της έντασης και του δυναμικού σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο της Γης, για σημεία που βρίσκονται έξω από αυτή.

Παρατήρηση

Εάν στη σχέση της έντασης (5.59) θέσουμε $h = 0$ προκύπτει η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης

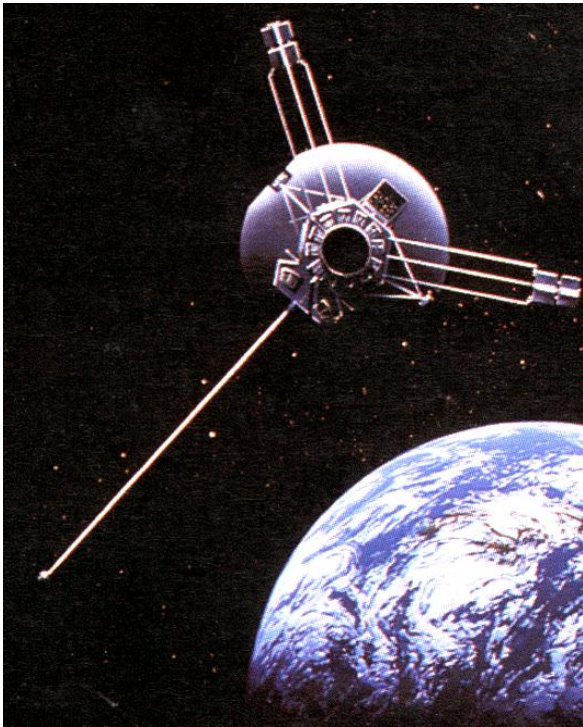
$$g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών βρίσκουμε $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Εικ.5.11 Αστροναύτες στην επιφάνεια της Σελήνης. Παρά τον βαρύ εξοπλισμό τους (180 kg), μπορούν να κάνουν εντυπωσιακά άλματα. Στην επιφάνεια της Σελήνης η ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι έξι φορές μικρότερη από αυτή στην επιφάνεια της Γης.

5-14 ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ – ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ



Εικ.5.12 Το διαστημόπλοιο Pioneer εγκαταλείπει το βαρυτικό πεδίο της Γης. Εκτοξεύθηκε το 1973 και τώρα βρίσκεται έξω από τα όρια του ηλιακού μας συστήματος.

Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί ένα αντικείμενο μάζας m , από την επιφάνεια της Γης ώστε να διαφύγει οριστικά από το πεδίο

βαρύτητας της Γης;

Για να απλουστέψουμε το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ότι η Γη δεν κινείται, θα αγνοήσουμε τις βαρυτικές επιδράσεις από τα άλλα ουράνια σώματα και θα αγνοήσουμε την αντίσταση του ατμοσφαιρικού αέρα.

Εφόσον το βαρυτικό πεδίο είναι διατηρητικό η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων (Γη και σώμα) διατηρείται. Επομένως κατά την κίνηση του σώματος μεταξύ δύο θέσεων θα ισχύει

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (5.61)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια της Γης και για το άπειρο (εκεί όπου δεν υπάρχει πλέον βαρυτική επίδραση και η δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη είναι

μηδέν $U_2=0$). Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε το σώμα είναι εκείνη για την οποία το σώμα θα φτάνει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα, άρα $K_2=0$

Από την (5.61) έχουμε

$$K_1+U_1=0+0 \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{1}{2}mv_{\delta}^2 + \left(-G \frac{M_{\Gamma}m}{R_{\Gamma}} \right) = 0$$

Λύνοντας ως προς v_{δ} βρίσκουμε

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} = 11,2 \text{ km/s} = 40\,320 \text{ km/h}$$

Την ταχύτητα v_{δ} την ονομάζουμε **ταχύτητα διαφυγής** από την επιφάνεια της Γης.

Εάν το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η ταχύτητα διαφυγής δίνεται από τη σχέση

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια άλλων ουράνιων σωμάτων. Έτσι για παράδειγμα για τη Σελήνη βρίσκουμε 2,37 km/s, για τον Άρη 4,97 km/s, για το Δία 59,1 km/s και για τον Ήλιο 618 km/s.

Ας δούμε τώρα το πρόβλημα της ταχύτητας διαφυγής με άλλο τρόπο. Αντί να ψάξουμε να βρούμε με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί ένα

σώμα από την επιφάνεια ενός ουράνιου σώματος μάζας M και ακτίνας R ώστε να διαφύγει από τη βαρυτική του έλξη θα βρούμε τι ακτίνα πρέπει να έχει ένα ουράνιο σώμα μάζας M ώστε να μην επιτρέψει σε τίποτα να διαφύγει από την επιφάνειά του.

Η μεγαλύτερη ταχύτητα στη φύση είναι η ταχύτητα του φωτός $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Αν στη σχέση $u_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ που δίνει την ταχύτητα διαφυγής θέσουμε όπου $u_\delta = c$ και λύσουμε ως προς R βρίσκουμε $R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Η ακτίνα

αυτή είναι γνωστή ως ακτίνα **Schwarzschild**. Ένα ουράνιο σώμα μάζας M με ακτίνα μικρότερη από

αυτή την ακτίνα δεν επιτρέπει σε τίποτε, ούτε καν στο φως, να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητάς του. Ένα τέτοιο σώμα δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμο κάνει όμως αντιληπτή την παρουσία του από τις ισχυρότατες βαρυτικές έλξεις που ασκεί στον περίγυρό του. Τέτοια σώματα στη σύγχρονη φυσική χαρακτηρίζονται μαύρες τρύπες.

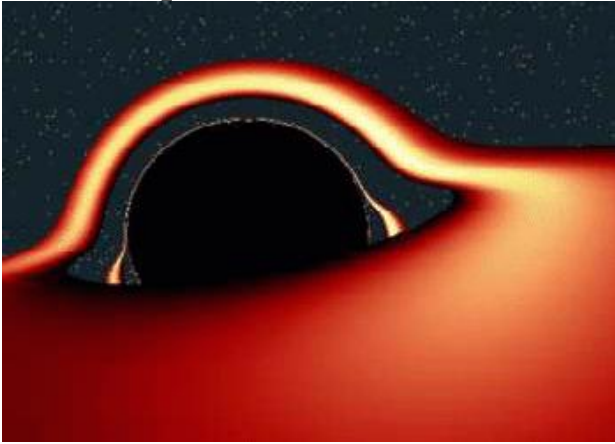
Οι συνθήκες που επικρατούν στην περιοχή μιας μαύρης τρύπας και οι ταχύτητες διαφυγής για τις οποίες μιλάμε είναι πολύ μακριά από αυτό που ο καθένας μας αντιλαμβάνεται σαν πραγματικότητα και δεν περιγράφονται από τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής. Η σχέση που δίνει την ακτίνα Schwarzschild παράγεται λαμβάνοντας υπόψη τις διορθώσεις που

επέφερε η θεωρία της σχετικότητας στην κλασική μηχανική. Το γεγονός όμως ότι συμπίπτει με τη σχέση που βρήκαμε για την ταχύτητα διαφυγής χρησιμοποιώντας το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μάς επιτρέπει μια πρώτη προσέγγιση στο φαινόμενο.

Για να αποκτήσουμε ένα μέτρο της πυκνότητας στην οποία βρίσκεται η ύλη σε μια μαύρη τρύπα αναφέρουμε ότι για να περιπέσει σε κατάσταση μαύρης τρύπας ο Ήλιος πρέπει να συμπιεσθεί σε μια σφαίρα ακτίνας 3km, από $6,96 \times 10^5$ km που είναι σήμερα. Όσο για τη Γη θα έπρεπε να συμπιεσθεί σε μια σφαίρα ακτίνας **9mm**.

Δηλαδή όλη η μάζα της θα έπρεπε να συγκεντρωθεί σ' ένα μπαλάκι

μεγέθους ίσου με αυτό του πινγκ πονγκ.



Εικ. 5.13 Προσομοίωση μαύρης τρύπας σε υπολογιστή. Η ύλη έλκεται από μια μαύρη τρύπα σχηματίζοντας γύρω της ένα περιστρεφόμενο δίσκο. Τα άτομα των αερίων που σχηματίζουν το δίσκο επιταχυνόμενα αποκτούν τόση ενέργεια ώστε μετατρέπονται σε ισχυρότατες πηγές ακτίνων Χ. Σε περιοχές του σύμπαντος όπου ανιχνεύουμε ασυνήθιστα μεγάλης έντασης εκπομπή ακτινοβολίας Χ υποπτευόμαστε την ύπαρξη μιας μαύρης τρύπας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.14

Από το σημείο Α του πεδίου βαρύτητας της Γης, που βρίσκεται σε ύψος $h=R_{\Gamma}$ από την επιφάνεια της Γης (R_{Γ} η ακτίνα της Γης), βάλλεται προς το Διάστημα ένα σώμα με ταχύτητα $u_0=16 \times 10^3 \text{ m/s}$. Να εξετάσετε αν το σώμα θα διαφύγει από τη βαρυτική έλξη της Γης. Αν θα διαφύγει να βρείτε την ταχύτητά του όταν φτάσει σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη. Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_{\Gamma}=6400 \text{ km}$ και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειά της $g_0=10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση :

α) Η ταχύτητα διαφυγής, σε ύψος h , δίνεται από τη σχέση $u_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}+h}}$.

Αν στη θέση του h βάλουμε την ακτίνα της Γης έχουμε

$$u_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{2R_{\Gamma}}} = \sqrt{\frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} \quad (5.62)$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι

$$g_0 = \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \quad \text{οπότε} \quad GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2 \quad (5.63)$$

Αντικαθιστώντας την (5.63) στην (5.62) έχουμε

$$u_{\delta} = \sqrt{g_0 R_{\Gamma}} = 8 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Επειδή $u_0 > u_{\delta}$ το σώμα θα διαφύγει.

β) Έστω u η ταχύτητα με την οποία το σώμα φτάνει στο άπειρο. Για τον υπολογισμό της θα εφαρμόσουμε

το θεώρημα έργου – ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο A μέχρι το άπειρο.

$$W=K_{\infty}-K_A \quad \text{οπότε}$$

$$(V_A-V_{\infty})m=\frac{1}{2}mu^2-\frac{1}{2}mu_0^2 \quad (5.64)$$

Είναι $V_{\infty}=0$ και $V_A=-\frac{GM_{\Gamma}}{2R_{\Gamma}}$ που

λόγω της (5.63) γίνεται

$$V_A=-\frac{g_0R_{\Gamma}}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.64) έχουμε

$$-g_0R_{\Gamma}=u^2-u_0^2 \quad \text{επομένως}$$

$$u=\sqrt{u_0^2-g_0R_{\Gamma}}=8\sqrt{3}\times 10^3 \text{ m/s}$$

5-15 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Η μαθηματική ομοιότητα ανάμεσα στο νόμο του Coulomb και το νόμο της παγκόσμιας έλξης (και οι δύο δυνάμεις είναι αντίστροφα ανάλογες με το τετράγωνο της απόστασης), καθώς και το γεγονός ότι και οι δύο είναι διατηρητικές και κεντρικές, οδηγεί σε σκέψεις ότι υπάρχουν και περαιτέρω αναλογίες ανάμεσα στα δύο πεδία.

Στην πραγματικότητα όμως πρόκειται για δύο πεδία στα οποία οι διαφορές είναι περισσότερες από τις ομοιότητες.

Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες διαφορές.

- Υπάρχουν δύο ειδών ηλεκτρικά φορτία ενώ υπάρχει ένα είδος μάζας.
- Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι είτε απωστικές είτε ελκτικές ενώ οι βαρυτικές μόνο ελκτικές.
- Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις εξαρτώνται από το είδος του υλικού που υπάρχει ανάμεσα στα φορτία, ενώ οι βαρυτικές δυνάμεις δεν εξαρτώνται από το υλικό που υπάρχει ανάμεσα στις μάζες.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 5ου τόμου

5. Ηλεκτρικό πεδίο

5-1 Εισαγωγή	6
5-2 Ένταση ηλεκτρικού πεδίου ..	8
5-3 Ηλεκτρική ροή.....	11
5-4 Ο νόμος του Gauss (Γκάους).....	20
5-5 Δυναμικό – Διαφορά δυναμιμού	45
5-6 Η δυναμική ενέργεια .πολλών σημειακών φορτίων	58
5-7 Σχέση έντασης και διαφοράς δυναμικού στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.....	68
5-8 Κινήσεις φορτισμένων σωματιδίων σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.....	72
5-9 Πυκνωτής και χωρητικότητα	106

5-10	Ενέργεια αποθηκευμένη σε φορτισμένο πυκνωτή.....	118
5-11	Πυκνωτές και διηλεκτρικά.....	128
5-12	Το βαρυτικό πεδίο.....	146
5-13	Το βαρυτικό πεδίο της Γης	162
5-14	Ταχύτητα διαφυγής – Μαύρες Τρύπες	167
5-15	Σύγκριση ηλεκτροστατικού και βαρυτικού πεδίου.....	178

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.