

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.1 – 2.4

**Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία
Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων
σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»**

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος

**Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του
Παιδαγωγ. Ινστιτούτου**

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και
παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με
βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»**

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου

Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου

Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου

Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

**Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό
Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.**

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης**

**ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.1 – 2.4

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Δημ. Αργυράκης, *Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Παναγ. Βουργάνας, *Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Κων/νος Μεντής, *Μαθημ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Σταμ. Τσικοπούλου, *Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Μιχαήλ Χρυσοβέργης, *Σχολ. Σύμβουλος Μαθηματικών*

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Εμμανουήλ Μανατάκης, *Επικ. Καθ.*
Πολυτεχν. Σχολής Παν/μίου Πατρών
Μιχαήλ Σαλίχος, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*
Νικόλαος Παπαευστρατίου,
Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Νικόλαος Μαρουλάκης, *Σκιτσογράφος - Εικονογράφος*

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευγενία Βελάγκου, *Φιλολόγος*

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Δημήτριος Κοντογιάννης, *Σύμβουλος του Παιδαγ.*
Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Παναγιώτης Γράββαλος, *Ζωγράφος*

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

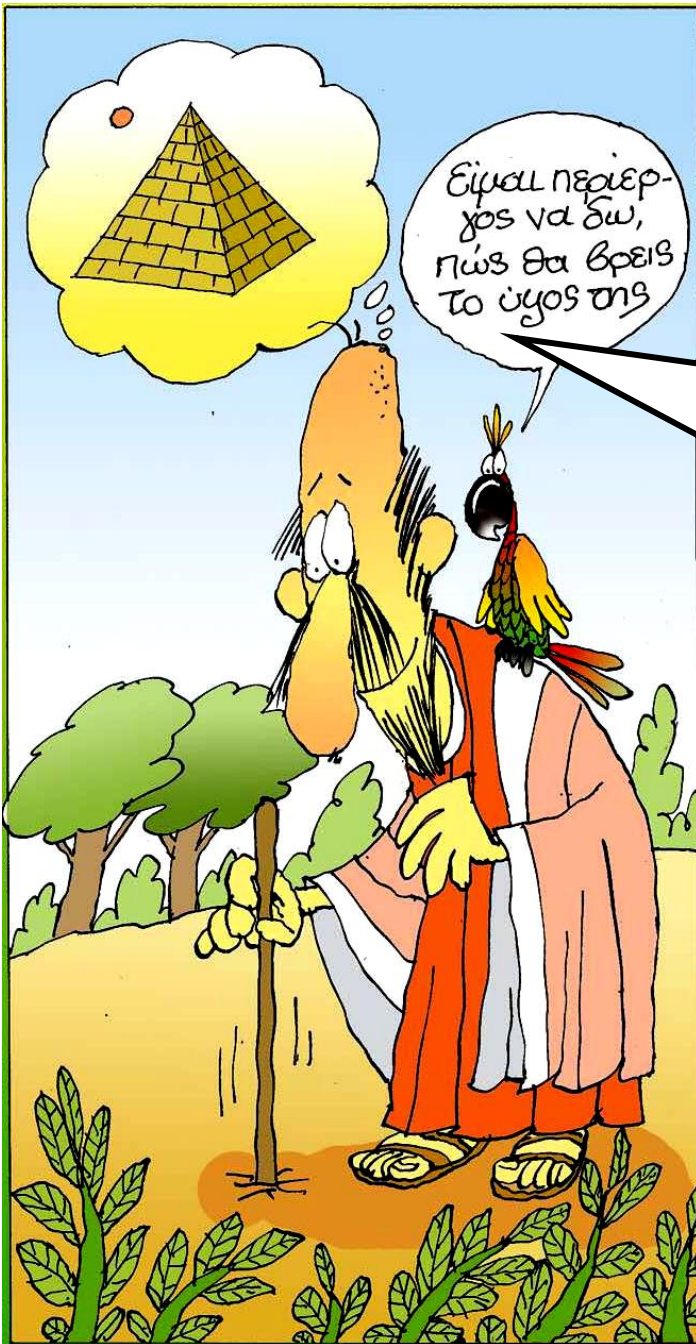
Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

Β' ΜΕΡΟΣ
♦
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ







Είμαι περίεργος να δω,
πώς θα βρεις
το ύψος της

Είμαι περίεργος να δω,
πως θα βρεις
το ύψος της



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 Ισότητα τριγώνων

1.2 Λόχος ευθυγράμμων τμημάτων

1.3 Θεώρημα του Θαλή

1.4 Ομοιοθεσία

1.5 Ομοιότητα

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

Γενικές ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση

1.1. Ισότητα τριγώνων



✓ Θυμάμαι ποια είναι τα στοιχεία ενός τριγώνου (κύρια - δευτερεύοντα) και τα είδη των τριγώνων.

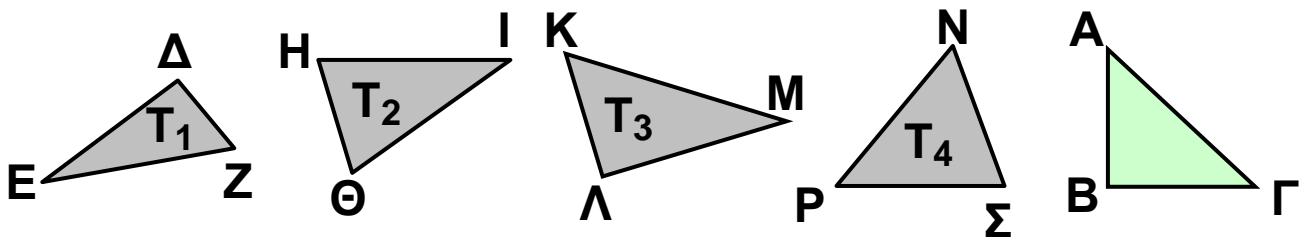
✓ Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

✓ Μαθαίνω ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, χωρίς αυτό να μεταβληθεί, τότε θα ταυτιστεί με ένα από τα τρίγωνα T_1 , T_2 , T_3 , T_4 .



1. Να αποτυπώσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε διαφανές χαρτί και να βρείτε με ποιο από τα τρίγωνα T_1 , T_2 , T_3 , T_4 ταυτίζεται.

2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

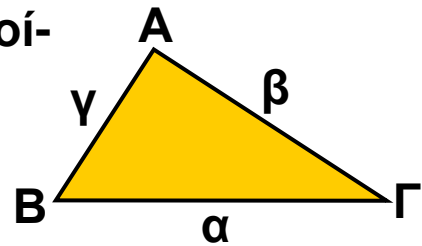
$AB = \dots\dots$, $B\Gamma = \dots\dots$, $\Gamma A = \dots\dots$,

$\hat{A} = \dots\dots$ $\hat{B} = \dots\dots$ και $\hat{\Gamma} = \dots\dots$

Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται κύρια στοιχεία του τριγώνου. Οι πλευρές ενός

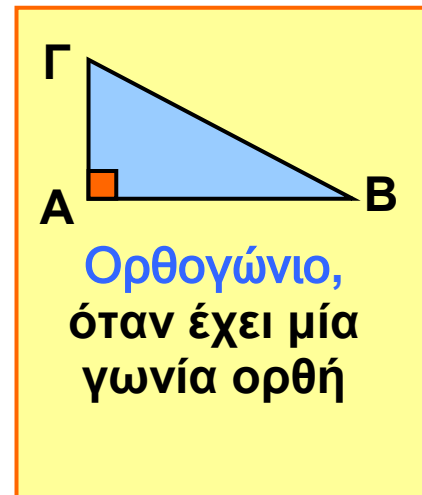
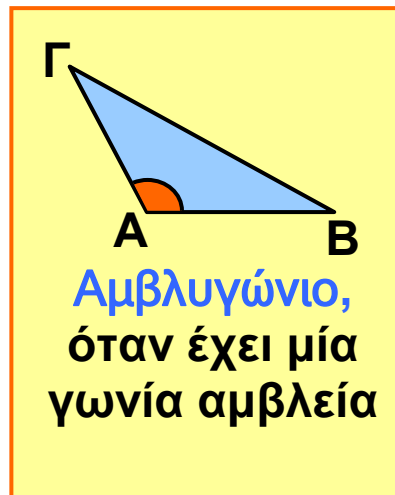
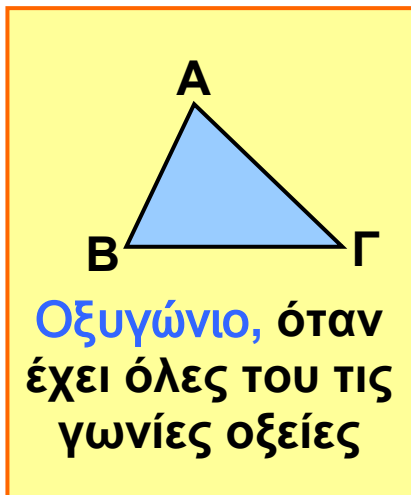
τριγώνου ΑΒΓ που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες του \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$ συμβολίζονται αντιστοίχως α , β , γ .



Για τις γωνίες κάθε τριγώνου ισχύει

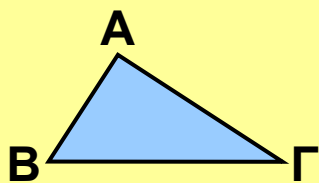
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η γωνία \hat{A} . Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκειμένες** γωνίες της πλευράς αυτής π.χ. προσκειμένες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι \hat{B} και $\hat{\Gamma}$. Ένα τρίγωνο ανάλογο με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:

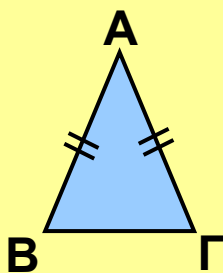


Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

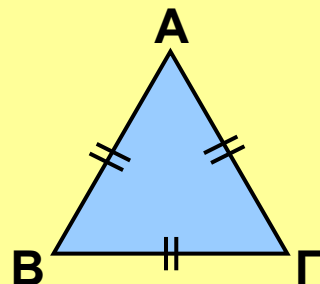
Ένα τρίγωνο ανάλογο με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:



Σκαληνό, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες



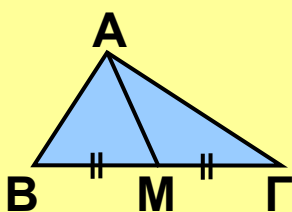
Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές ίσες



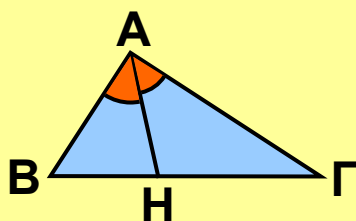
Ισόπλευρο, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ η πλευρά $B\Gamma$ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο A κορυφή του.

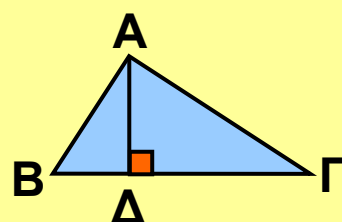
Σ' ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα **δευτερεύοντα στοιχεία**, που είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.



Διάμεσος, ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της πέναντι πλευράς.



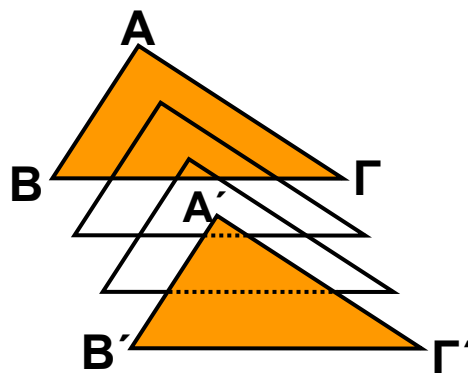
Διχοτόμος, ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



Ύψος, ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.

Ίσα τρίγωνα

Αν μετατοπίσουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ σε μια άλλη θέση και θεωρήσουμε ότι κατά τη μετατόπισή του αυτό δε μεταβάλλεται, τότε οι κορυφές του A, B, Γ θα πάρουν τις θέσεις των σημείων A', B', Γ' αντιστοίχως



και το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα πάρει τη θέση του τριγώνου $A'B'\Gamma'$. Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ταυτίζονται, τότε οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους θα είναι ίσες, αφού και αυτές ταυτίζονται. Έτσι έχουμε:

$$AB = A'B', \quad B\Gamma = B'\Gamma', \quad A\Gamma = A'\Gamma'$$
$$\text{και } \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'.$$

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, για τα οποία ισχύουν οι προηγούμενες ισότητες, λέμε ότι είναι ίσα. Δηλαδή

- Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Ισχύει ακόμη και το αντίστροφο. Δηλαδή

- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Στο εξής σε κάθε μετατόπιση τριγώνου θα θεωρούμε ότι αυτό δε μεταβάλλεται. Αυτό σημαίνει ότι, αν έχουμε δύο ίσα τρίγωνα και μετατοπίσουμε κατάλληλα το ένα από αυτά, τότε τα τρίγωνα ταυτίζονται.

Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα δεν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι έχουν όλες τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία.

Στη συνέχεια, θα μάθουμε προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε ότι και με λιγότερα στοιχεία είναι δυνατόν να διακρίνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Οι προτάσεις αυτές είναι γνωστές ως κριτήρια ισότητας τριγώνων.

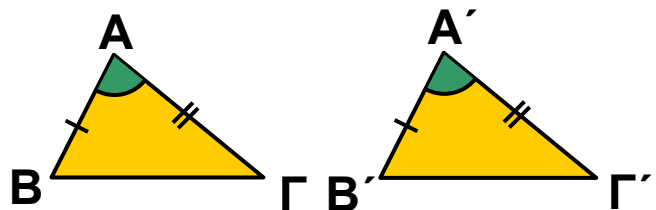
Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π)

Για δύο τρίγωνα ισχύει η παρακάτω βασική ιδιότητα ισότητας

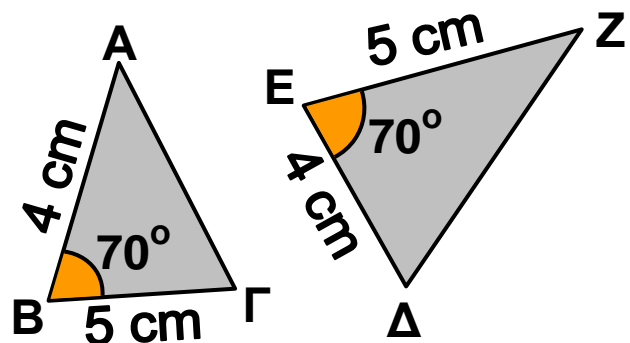
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

Πράγματι, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που να έχουν δύο πλευρές ίσες $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και την περιεχόμενη γωνία τους ίση $\hat{A} = \hat{A}'$.



Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, έτσι ώστε η γωνία \hat{A} να συμπίσει με την ίση της γωνία \hat{A}' και η πλευρά AB να συμπίσει με την ίση της πλευρά $A'B'$, τότε η πλευρά $A\Gamma$ θα συμπίσει με την ίση της πλευρά $A'\Gamma'$ και οι κορυφές B, Γ θα συμπίσουν με τις κορυφές B', Γ' αντιστοίχως. Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ταυτίζονται, οπότε είναι ίσα.

Για παράδειγμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες ($AB = \Delta E = 4 \text{ cm}$, $B\Gamma = EZ = 5 \text{ cm}$) και την περιεχόμε-



νη γωνία τους ίση ($\hat{B} = \hat{E} = 70^\circ$). Επομένως, τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

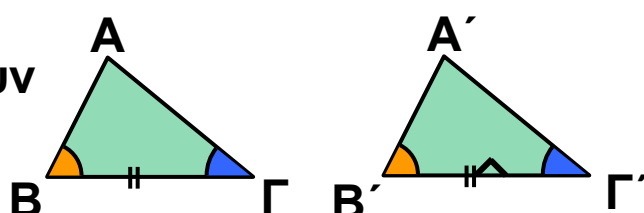
$$ΑΓ = ΔΖ, \hat{\Gamma} = \hat{Z} \text{ και } \hat{\Delta} = \hat{A}.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$, \hat{Z} βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $ΑΒ$, $ΕΔ$. Γενικά:

Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ).

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ που να έχουν μία πλευρά ίση $ΒΓ = Β'Γ'$ και τις προσκείμενες στην

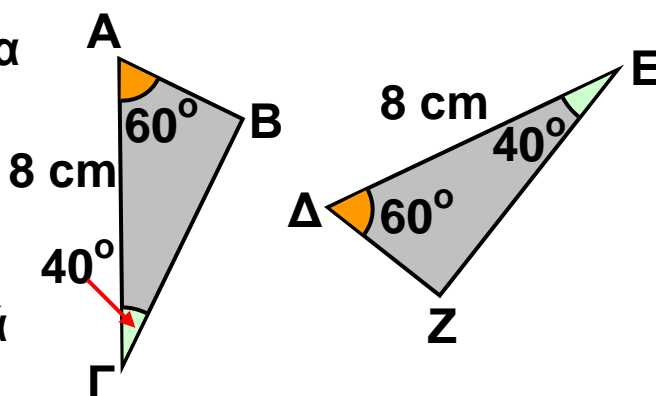


πλευρά αυτή γωνίες ίσες $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. β Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο $ΑΒΓ$, έτσι ώστε η πλευρά του $ΒΓ$ να συμπίσει με την ίση της πλευρά $Β'Γ'$ και η γωνία \hat{B} να συμπίσει με τη ίση της γωνία \hat{B}' , τότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ θα συμπίσει με την ίση της γωνία $\hat{\Gamma}'$ και η κορυφή $Α$ θα συμπίσει με την κορυφή $Α'$.

Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ ταυτίζονται, οπότε είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Για παράδειγμα, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση ($ΑΓ = ΔΕ = 8 \text{ cm}$) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες



($\hat{A} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = \hat{E} = 40^\circ$). Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\hat{B} = \hat{Z}, AB = \Delta Z, B\Gamma = EZ.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές $AB, \Delta Z$ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{E}$. Γενικά:

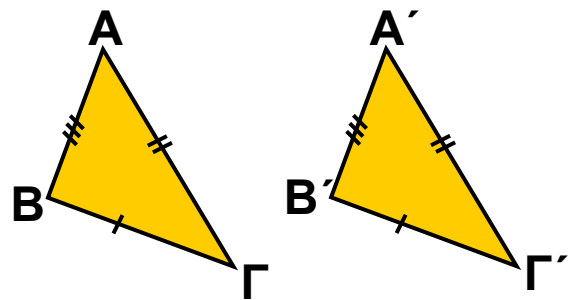
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

3ο κριτήριο ισότητας (Π - Π - Π)

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που να έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες

$$(AB = A'B', B\Gamma = B'\Gamma', A\Gamma = A'\Gamma').$$

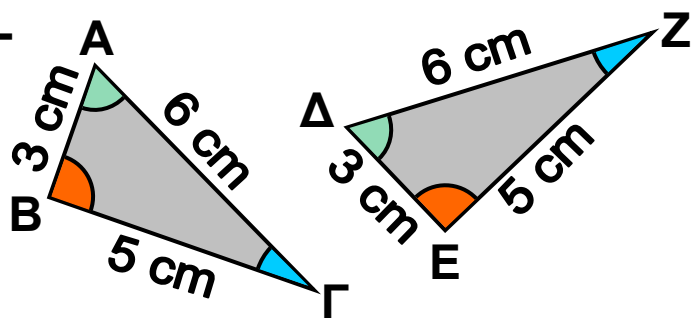
Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο $AB\Gamma$, τότε αυτό ταυτίζεται με το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Για παράδειγμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, $AB = \Delta E = 3 \text{ cm}$,

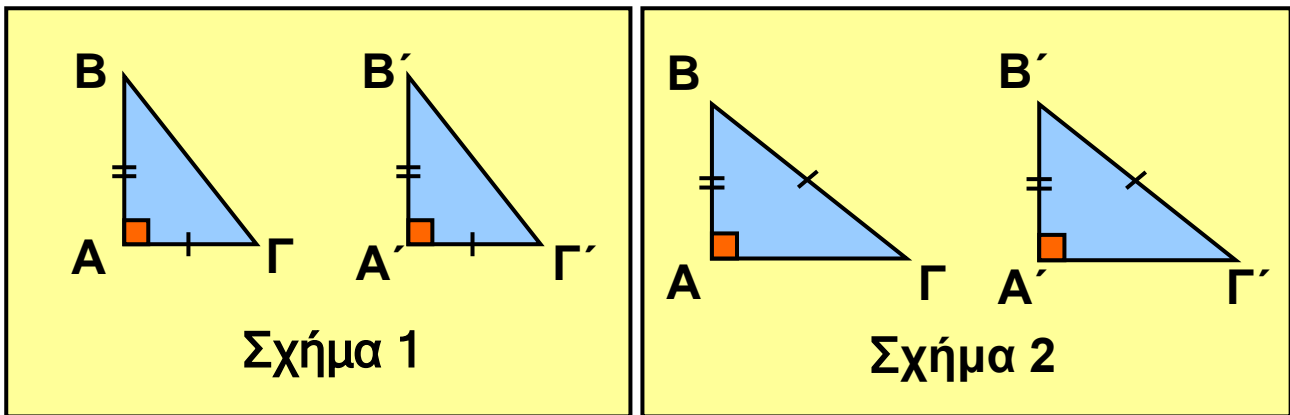


$A\Gamma = \Delta Z = 6 \text{ cm}$ και $B\Gamma = EZ = 5 \text{ cm}$. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{B} = \hat{E} \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{Z}.$$

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας τριγώνων μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ορθογώνια τρίγωνα.

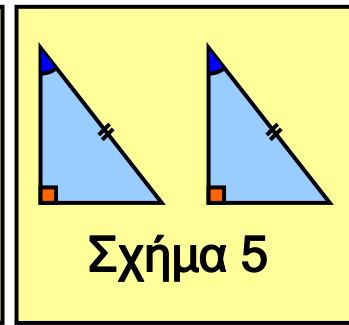
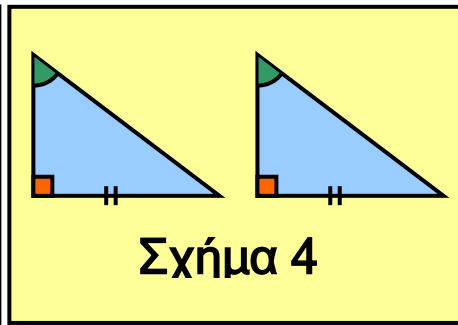
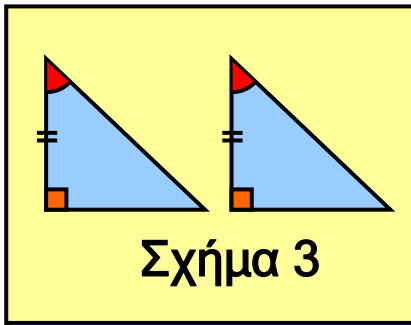


Στο σχήμα 1 τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, αφού αυτή είναι ορθή.

Στο σχήμα 2 τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίση και όπως προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουν και την τρίτη πλευρά τους ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Οι δύο αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Στο σχήμα 3 τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Στα σχήματα 4 και 5 τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Οι τρεις αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

Από τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων διαπιστώνουμε ότι:

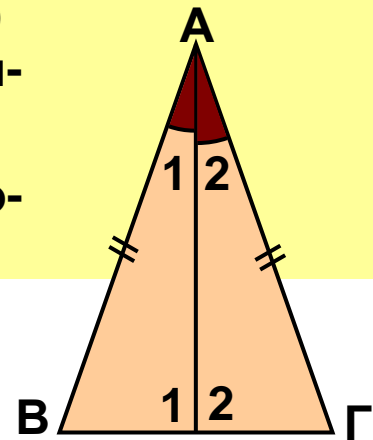
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε τη διχοτόμο AD . α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$.
β) Να αποδειχθεί ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος AD είναι διάμεσος και ύψος.



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $AD = AD$, κοινή πλευρά
- $AB = A\Gamma$ από την υπόθεση
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού AD διχοτόμος της γωνίας \hat{A} . Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.

β) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

Αφού είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε η διχοτόμος AD είναι και ύψος. Η διχοτόμος AD είναι και διάμεσος, αφού $B\Delta = \Delta\Gamma$.

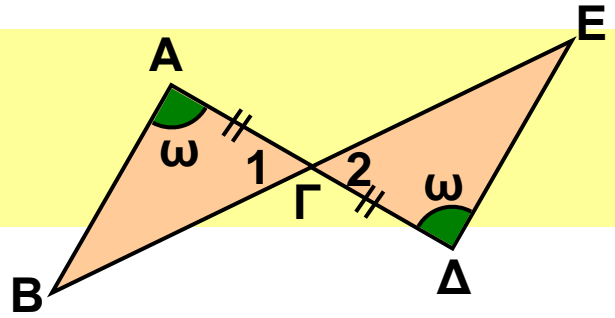
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρνουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

2 Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = \hat{D} = \omega$ και $AG = GD$. Να αποδειχθεί ότι $AB = DE$.



Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABG , GDE και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $AG = GD$ από την υπόθεση
- $\hat{A} = \hat{D}$ από την υπόθεση
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα ABG και GDE είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες ίσες μία προς μία.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $AB = DE$.

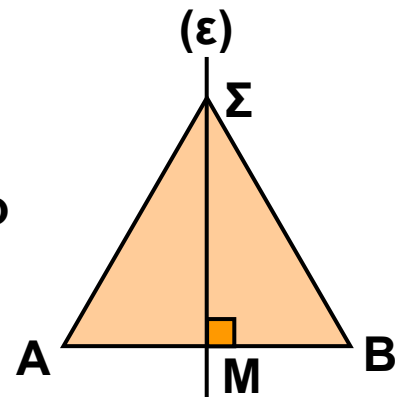
3 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Λύση

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ϵ ενός ευθύγραμμου τμήματος AB που το τέμνει στο σημείο M . Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι $\Sigma A = \Sigma B$. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Sigma$, $BM\Sigma$ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $\Sigma M = \Sigma M$, κοινή πλευρά και
- $AM = MB$, αφού το M είναι μέσον του AB .

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\Sigma A = \Sigma B$.



Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

4 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση

Φέρνουμε τη διχοτόμο Oz της γωνίας \widehat{xOy} και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A . Αν AB , AG είναι οι αποστάσεις του σημείου A από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι $AB = AG$.

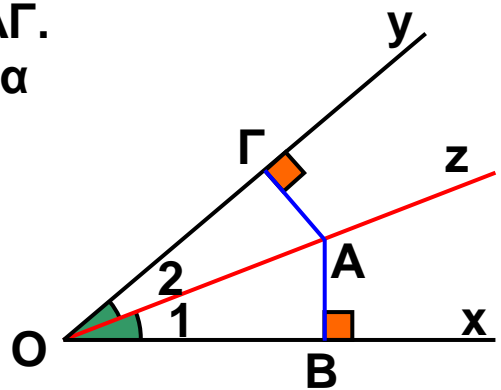
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OAB , OAG και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $OA = OA$ κοινή πλευρά και
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, αφού η Oz είναι

διχοτόμος της γωνίας \widehat{xOy} . Άρα

τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $AB = AG$.



Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

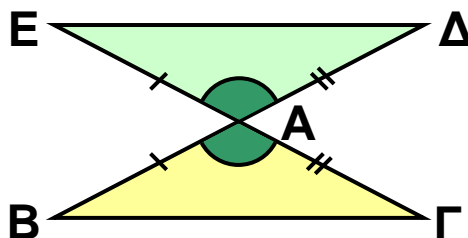
Αποδεικνύεται ακόμη ότι :

Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου της.

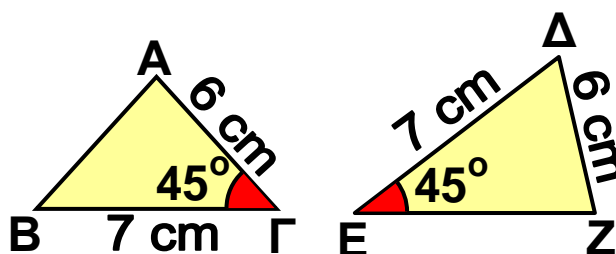
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



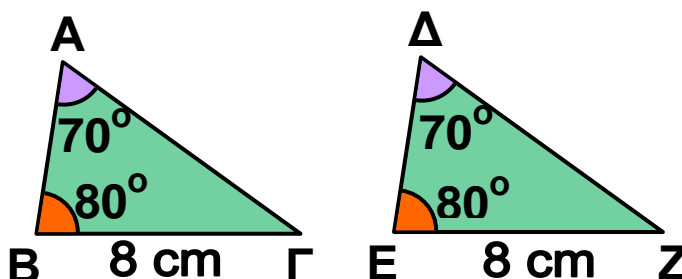
1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ του παρακάτω σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{B} = \dots$, $\hat{\Gamma} = \dots$ και $B\Gamma = \dots$



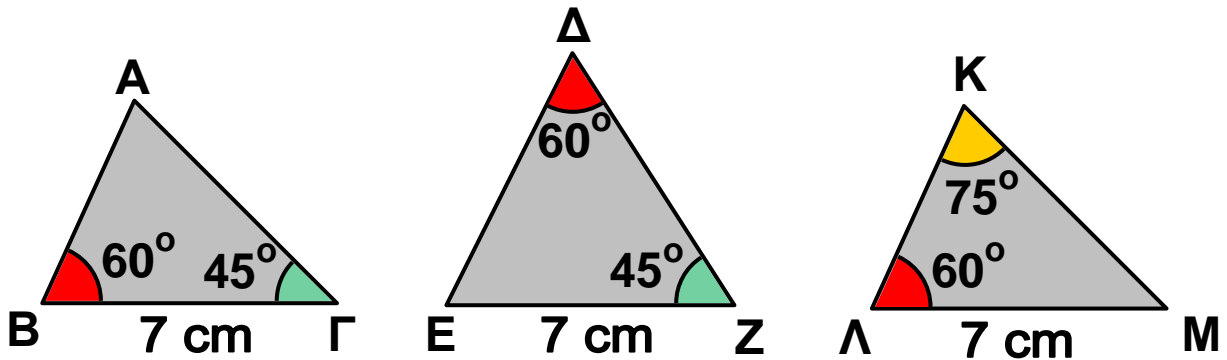
2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



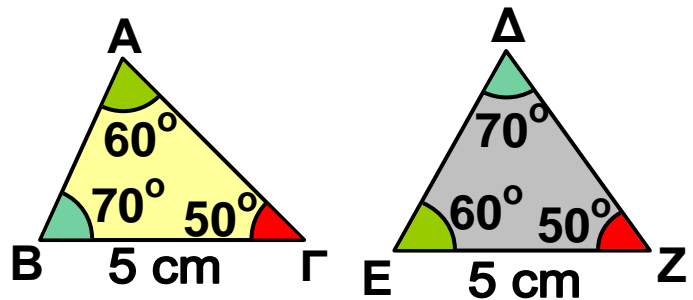
3 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $AB = \dots$ και $A\Gamma = \dots$



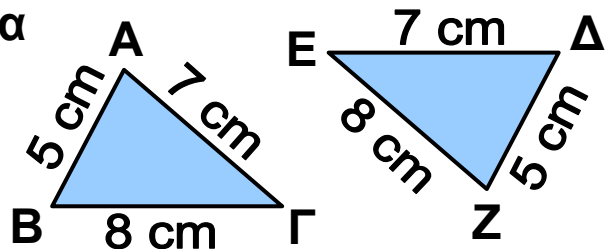
4 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του παρακάτω σχήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5 Είναι ίσα τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του σχήματος της επόμενης σελίδας και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{A} = \dots$, $\hat{B} = \dots$ και $\hat{\Gamma} = \dots$



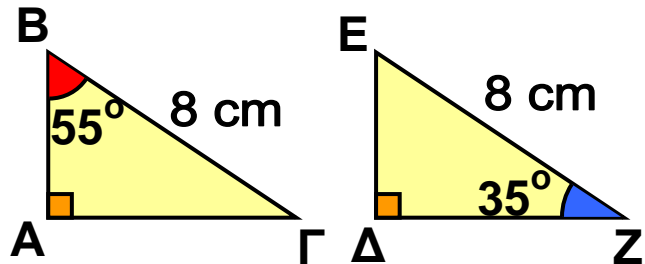
7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

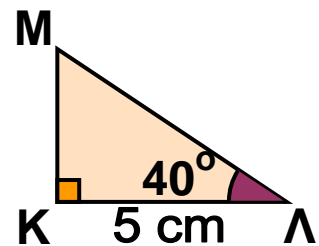
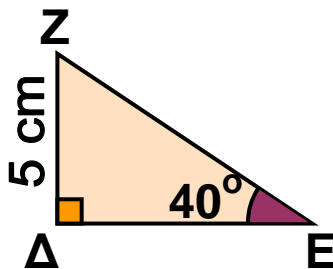
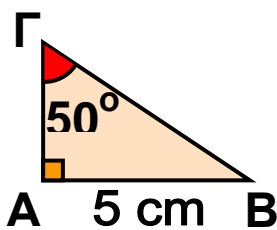
ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.

στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

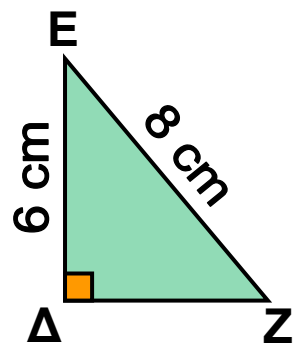
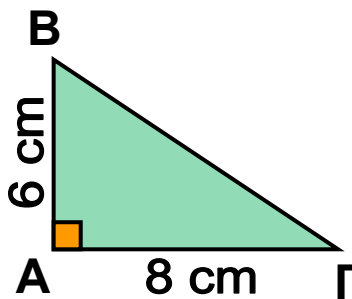
8 Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



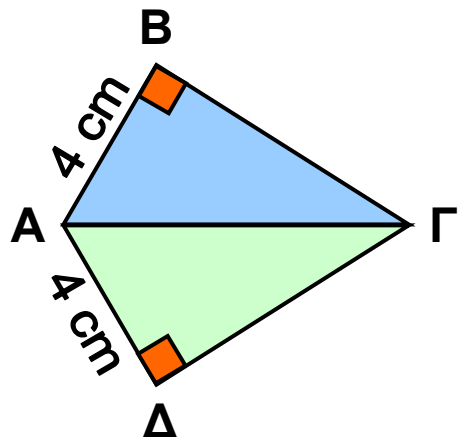
9 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



10 Τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος έχουν δύο πλευρές ίσες. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα.



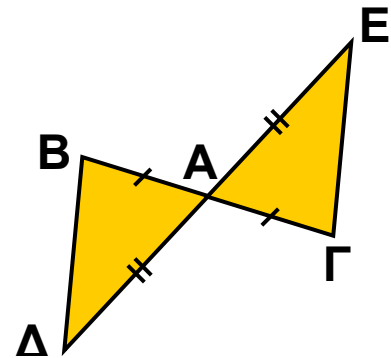
11 Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΓΔ.



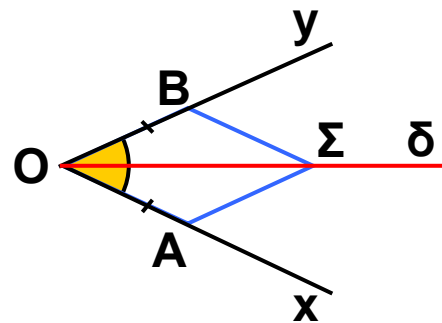


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

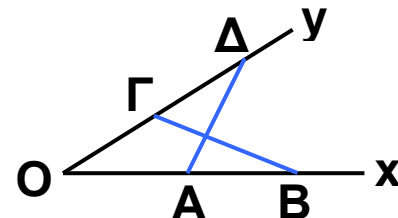
1 Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$ και $AD = AE$. Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.



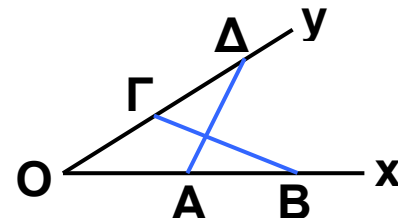
2 Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας \widehat{xOy} . Αν $OA = OB$ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι $SA = SB$.



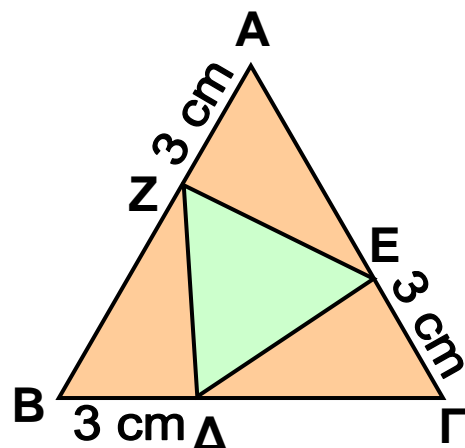
3 Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε $BD = GE$. Να αποδείξετε ότι $AD = AE$.



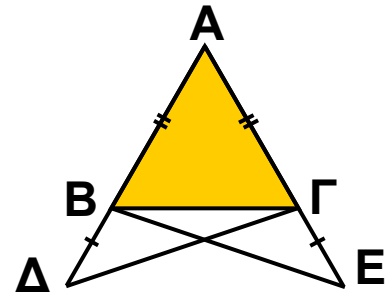
4 Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = OG$ και $OB = OD$. Να αποδείξετε ότι $BΓ = AD$.



5 Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι $ΑΣ = ΒΔ = ΓΕ = 3$ cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



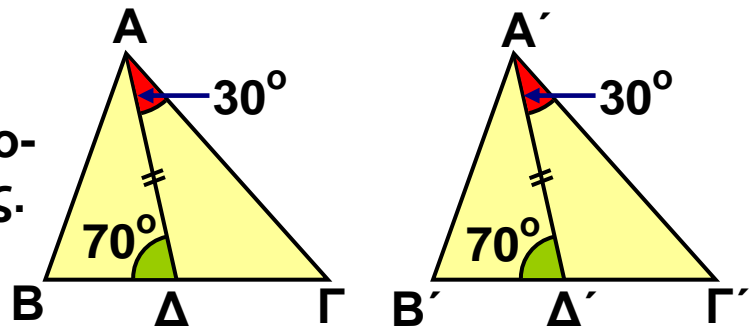
6 Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB, AG ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα $B\Delta = \Gamma E$.
 Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



7 Σ' ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί τις γωνίες \hat{A} και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $AB = A\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$.

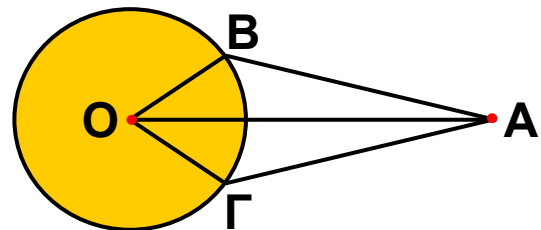
8 Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

9 Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ ίσες. Να αποδείξετε ότι:

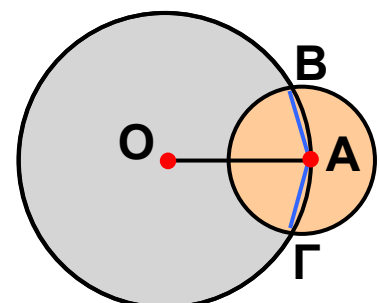


α) $AB = A'B'$
 β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

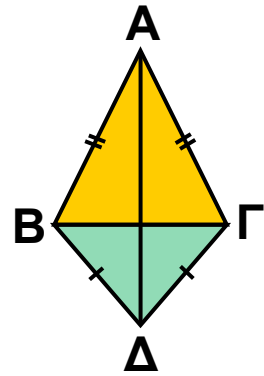
10 Στο διπλανό σχήμα το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο O . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ίσα.



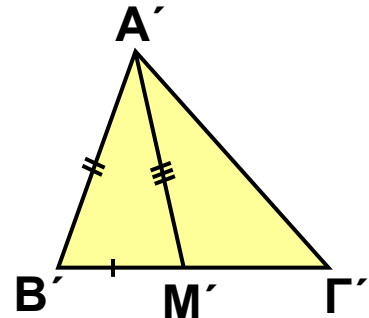
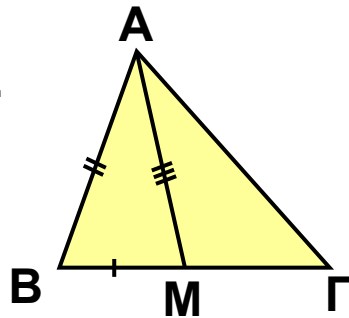
11 Αν O, A είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η AO διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.



12 Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες \hat{A} και $\hat{\Delta}$.



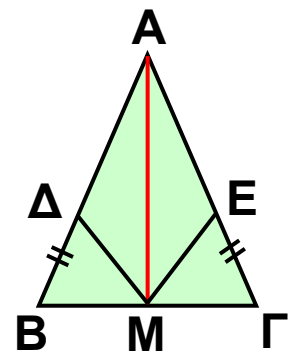
13 Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοι AM και $A'M'$ είναι ίσες. Αν $AB = A'B'$ και $BM = B'M'$, τότε να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{B} = \hat{B}'$.

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

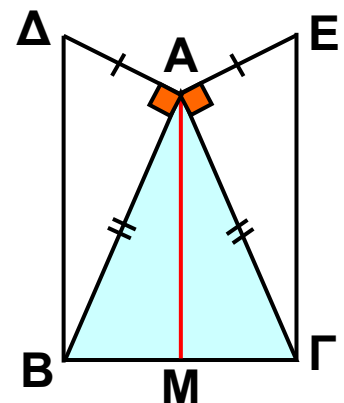
14 Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο M είναι μέσο της βάσης $B\Gamma$. Αν είναι $B\Delta = \Gamma E$, να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές

β) τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AEM είναι ίσα.

15 Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να φέρετε $A\Delta \perp AB$ και $AE \perp A\Gamma$. Αν είναι $A\Delta = AE$, να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

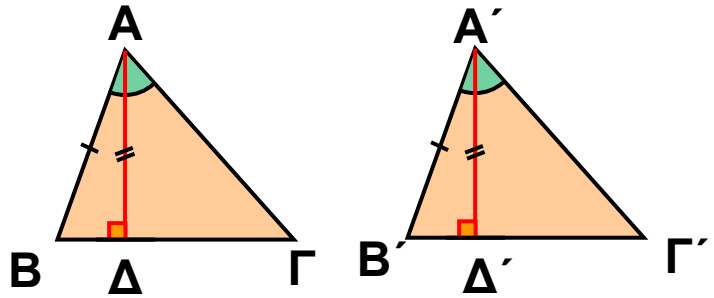


16 Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $AB = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma\Delta$ και ότι η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του $B\Delta$.

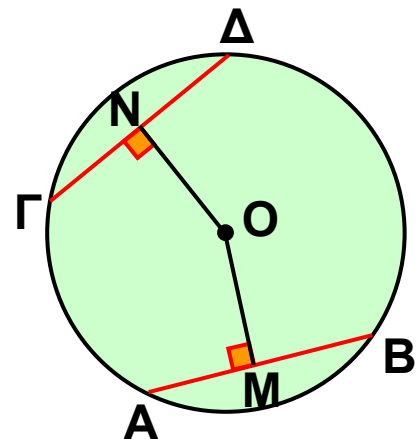
17 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο $B\Delta$. Αν $\Delta E \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AB = BE$.

18 Μια ευθεία (ϵ) διέρχεται από το μέσον M ενός τμήματος AB . Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B ισαπέχουν από την ευθεία (ϵ).

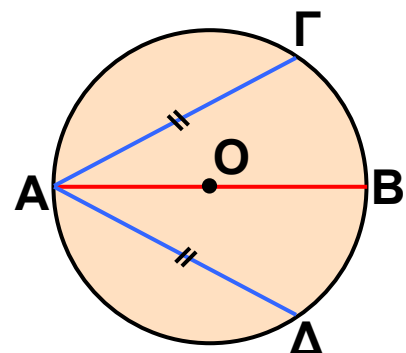
19 Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $AB = A'B'$. Αν τα ύψη τους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:
 α) $\hat{B} = \hat{B}'$
 β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



20 Αν οι χορδές $AB, \Gamma\Delta$ ενός κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματά τους OM, ON είναι ίσα και αντιστρόφως.



21 Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές $A\Gamma$ και $A\Delta$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και οι χορδές $B\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες.

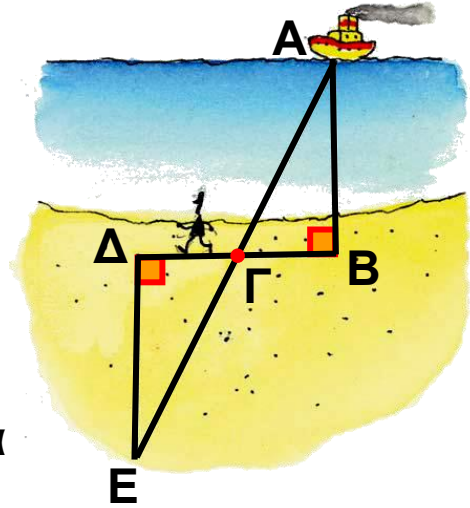


ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά

Αν ένα πλοίο βρίσκεται στη θέση Α στη θάλασσα, εμείς στεκόμαστε στη θέση Β στη στεριά και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση ΑΒ, τότε:



- Ξεκινάμε από το σημείο Β και περπατώντας πάνω στην παραλία κάθετα στην ΑΒ διανύουμε μια απόσταση ΒΓ. Στο σημείο Γ βάζουμε ένα σημάδι, π.χ. στερεώνουμε ένα ραβδί και συνεχίζοντας πάνω στην ίδια ευθεία διανύουμε την απόσταση $ΓΔ = ΒΓ$.
- Στο σημείο Δ αφού βάλουμε ένα σημάδι, π.χ. μια πέτρα, κάνουμε στροφή και περπατώντας κάθετα στη ΒΔ σταματάμε όταν βρεθούμε σ' ένα σημείο Ε, από το οποίο τα σημεία Α και Γ φαίνονται να είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Η ζητούμενη απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση ΔΕ την οποία μπορούμε να μετρήσουμε, αφού είναι πάνω στη στεριά.

Τη μέθοδο αυτή, λέγεται, ότι εφάρμοσε πριν από 2.500 χρόνια περίπου ο Θαλής ο Μιλήσιος.

Πώς ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι $ΑΒ = ΔΕ$; Μπορείτε να το αποδείξετε; Βρείτε τις πέντε προτάσεις που απέδειξε ο Θαλής και σημειώστε ποια απ' αυτές χρησιμοποίησε για να υπολογίσει την απόσταση του πλοίου από τη στεριά.

1.2. Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων



✓ Μαθαίνω πότε παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει.

✓ Μαθαίνω να διαιρώ ένα ευθύγραμμο τμήμα σε n ίσα τμήματα.

✓ Μαθαίνω τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και πώς υπολογίζεται.

✓ Μαθαίνω πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα προς δύο άλλα τμήματα.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

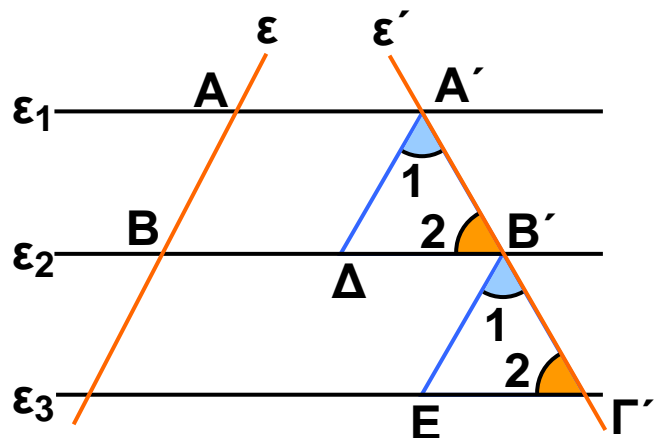
1. Να χαράξετε μια ευθεία ϵ κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να διαπιστώσετε ότι τρεις διαδοχικές γραμμές του τετραδίου ορίζουν στην ευθεία ϵ ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ϵ' που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις προηγούμενες διαδοχικές γραμμές ορίζουν ίσα τμήματα και στην ϵ' ;

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών

Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ που τέμνουν την ευθεία ϵ στα σημεία A, B, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ να είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν μια άλλη ευθεία ϵ' τέμνει τις $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ στα σημεία A', B', Γ' αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα $A'B', B'\Gamma'$ είναι ίσα μεταξύ τους.

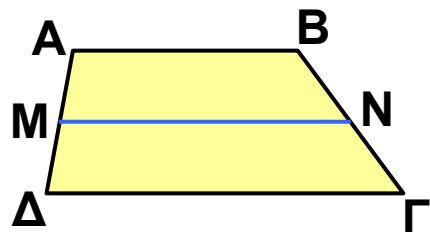


Πράγματι, αν φέρουμε $A'D // \epsilon$, $B'E // \epsilon$ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A'B'D$ και $B'G'E$ παρατηρούμε ότι έχουν:

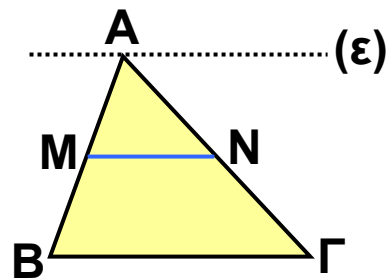
- $A'D = B'E$ γιατί $A'D = AB$, $B'E = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $AA'DB$, $BB'EG$ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε $AB = B\Gamma$.
 - $\hat{B}_2' = \hat{G}_2'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ϵ_2, ϵ_3 που τέμνονται από την ϵ' .
 - $\hat{A}_1' = \hat{B}_1'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A'D, B'E$ που τέμνονται από την ϵ' .
- Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $A'B' = B'G'$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Για παράδειγμα, σ' ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) αν από το μέσο M της $A\Delta$ φέρουμε ευθεία MN παράλληλη προς τις βάσεις του, τότε οι παράλληλες $AB, MN, \Delta\Gamma$, αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην $A\Delta$, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $B\Gamma$. Άρα $BN = N\Gamma$.



Ομοίως, σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, αν από την κορυφή A φέρουμε ευθεία $\epsilon // B\Gamma$ και από το μέσο M της AB φέρουμε $MN // B\Gamma$, τότε οι παράλληλες $\epsilon, MN, B\Gamma$ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην AB , θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $A\Gamma$. Άρα $AN = N\Gamma$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

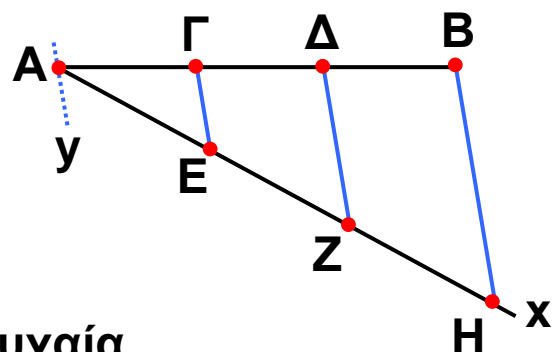


Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε n ίσα τμήματα

Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 5 \text{ cm}$ και θέλουμε να το διαιρέσουμε σε τρία ίσα τμήματα, τότε το μήκος κάθε τμήματος θα είναι $1,66... \text{ cm}$, οπότε καθένα από αυτά δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια.

Μπορούμε όμως να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε τρία ίσα τμήματα με ακρίβεια, αν εργαστούμε με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη ως εξής:



Από το σημείο A φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Ax και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα AE , EZ , ZH . Ενώνουμε τα σημεία B , H και από τα σημεία Z , E , A φέρνουμε $Z\Delta$, $E\Gamma$, Ay παράλληλες προς τη BH . Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Ax ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην AB . Άρα έχουμε $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$.

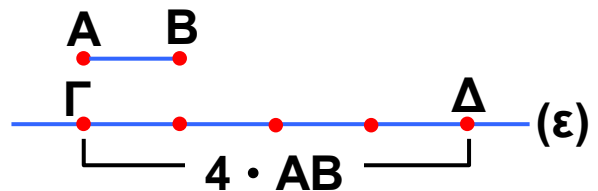
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο AB σε 4 , 5 , 6 , ..., n ίσα τμήματα.

Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων

• Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και σε μια ευθεία ϵ πάρουμε τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που το καθένα είναι ίσο με AB , τότε κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, για το οποίο λέμε ότι είναι ίσο με $4 \cdot AB$ και γράφουμε $\Gamma\Delta = 4 \cdot AB$.

Η ισότητα αυτή γράφεται και ως εξής: $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = 4$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός 4.



• Αν διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμο τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ, τότε λέμε ότι

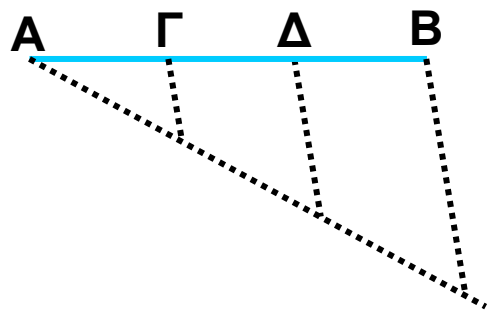
το τμήμα ΑΓ είναι ίσο με $\frac{1}{3} \cdot AB$ και γράφουμε:

$$AG = \frac{1}{3} \cdot AB \quad \text{ή}$$

$$\frac{AG}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Λέμε ακόμη ότι:

$$AD = \frac{2}{3} \cdot AB \quad \text{ή} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$$

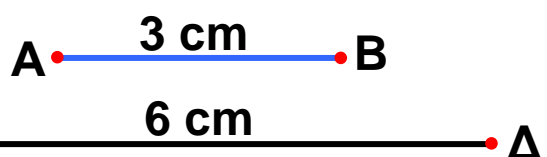


Δηλαδή ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{1}{3}$, ενώ ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{2}{3}$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$.

• Αν πάρουμε τα ευθύγραμμο τμήματα $AB = 3 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 6 \text{ cm}$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι



ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος AB προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι $\frac{1}{2}$, δηλαδή είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους $\frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{1}{2}$.

Γενικά

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Για παράδειγμα, αν έχουμε $\Delta E = 120 \text{ cm}$ και $ZH = 1,5 \text{ m}$, τότε

$$\frac{\Delta E}{ZH} = \frac{120 \text{ cm}}{1.5 \text{ m}} = \frac{120 \text{ cm}}{150 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$$

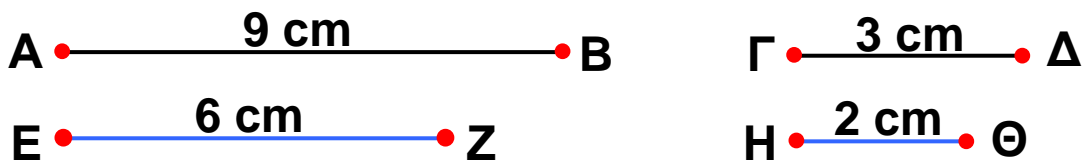
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ένας αριθμός που εκφράζει τη σχέση που συνδέει τα μήκη τους.

Αν γνωρίζουμε λοιπόν το λόγο δύο ευθυγράμμων

τμημάτων π.χ. $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 2$, αυτό σημαίνει ότι το μήκος του

AB είναι διπλάσιο από το μήκος του ΓΔ, αλλά δε γνωρίζουμε το μήκος κάθε τμήματος, αφού είναι δυνατό να είναι $AB = 80 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 40 \text{ cm}$ ή $AB = 18 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 9 \text{ cm}$ κ.τ.λ.

Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα



Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $AB = 9 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 3 \text{ cm}$, τότε ο λόγος του AB προς το ΓΔ είναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 3$.

Ομοίως, αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $EZ = 6 \text{ cm}$ και $H\Theta = 2 \text{ cm}$, τότε ο λόγος του EZ προς το $H\Theta$ είναι

$$\frac{EZ}{H\Theta} = 3.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta} = 3$, δηλαδή ο

λόγος του AB προς το $\Gamma\Delta$ είναι ίσος με το λόγο του EZ προς το $H\Theta$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB, EZ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta, H\Theta$.

Γενικά

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ , όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα α, δ ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα β, γ ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας. Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή ως $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θεωρούμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων.

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\delta = \beta\gamma$$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

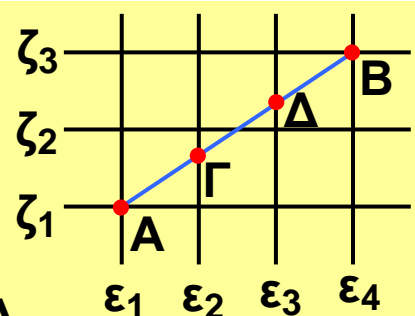
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Σε τετραγωνισμένο χαρτί έχουμε χαράξει το ευθύγραμμο τμήμα AB.

α) Να συγκριθούν τα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.

β) Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$, $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}$, $\frac{ΑΔ}{ΒΓ}$



Λύση

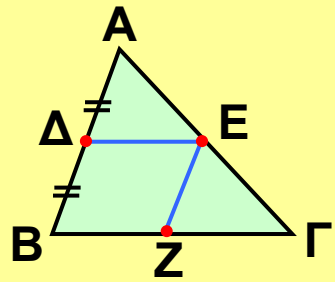
α) Οι παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ ορίζουν ίσα τμήματα στην ευθεία ζ_1 , οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην AB. Άρα $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ$.

β) Αφού τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ είναι ίσα, έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}, \quad \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{3}{2}, \quad \frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{2}{2} = 1$$

2 Σε Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς AB τριγώνου ABΓ, ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:
α) Ζ το μέσον της πλευράς ΒΓ

β) $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε Δ μέσο AB και ΔΕ // ΒΓ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ. Επειδή Ε το μέσο της ΑΓ και ΕΖ // ΑΒ, έχουμε Ζ μέσο ΒΓ.

β) Το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέ-ναντι πλευρές του παράλληλες, άρα ΔΕ = ΒΖ. Όμως ΒΖ = $\frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

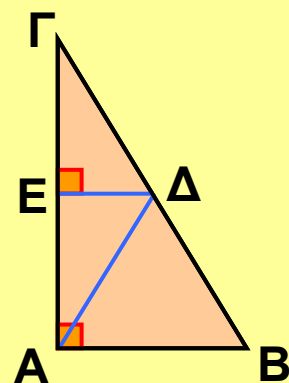
Άμεσα λοιπόν προκύπτει ότι:

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

3 Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΔΕ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ε μέσο της πλευράς ΑΓ

β) $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

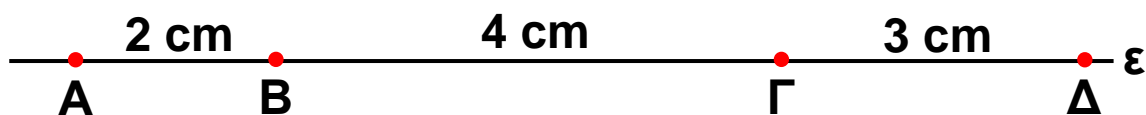
α) Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε Δ μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ.

β) Επειδή $ΔΕ // ΑΒ$ και $ΑΒ ⊥ ΑΓ$, θα είναι $ΔΕ ⊥ ΑΓ$. Άρα, $ΔΕ$ μεσοκάθετος του $ΑΓ$ και από τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου έχουμε $ΑΔ = ΔΓ$. Όμως

$$ΔΓ = \frac{ΒΓ}{2}, \text{ οπότε και } ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}. \text{ Αποδείξαμε λοιπόν ότι:}$$

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

4 Αν $A, B, Γ, Δ$ είναι διαδοχικά σημεία μιας ευθείας ε τέτοια ώστε $ΑΒ = 2 \text{ cm}$, $ΒΓ = 4 \text{ cm}$ και $ΓΔ = 3 \text{ cm}$, να αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ, ΓΔ$ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΓ, ΑΓ$.



Λύση

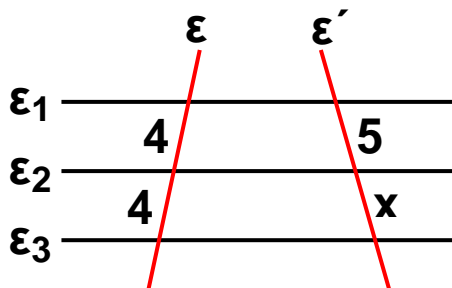
α) Είναι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \frac{1}{2}$ και $\frac{ΓΔ}{ΑΓ} = \frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{1}{2}$.

Άρα έχουμε: $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ που σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ, ΓΔ$ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΓ, ΑΓ$.

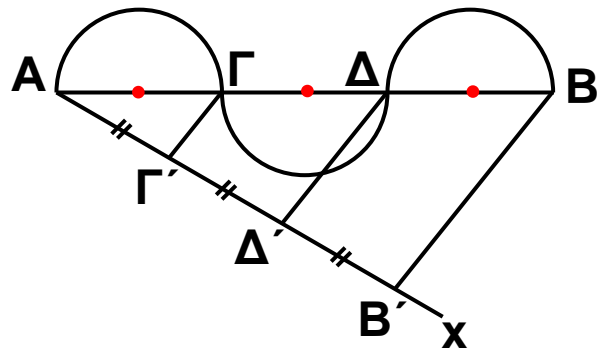
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



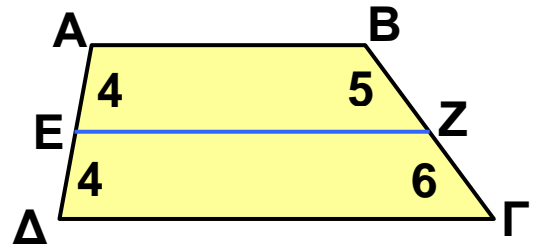
1 Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1 // ε_2 // ε_3$. Να υπολογίσετε το x .



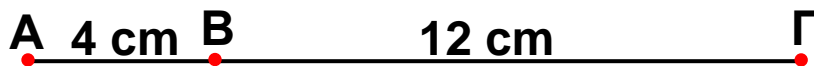
2 Αν $B'B \parallel \Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$ και η διάμετρος $\Gamma\Delta$ του δεύτερου ημικυκλίου είναι 4 cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .



3 Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι η EZ παράλληλη προς τις βάσεις του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



α) $\frac{AB}{BG} = \text{---}$

β) $\frac{BG}{AB} = \text{---}$

γ) $\frac{AB}{AG} = \text{---}$

δ) $\frac{BG}{AG} = \text{---}$

5 Αν $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$ να συμπληρώσετε τις ισότητες:



α) $\frac{AB}{A\Delta} = \text{---}$

β) $\frac{B\Delta}{B E} = \text{---}$

γ) $\frac{A\Gamma}{A E} = \text{---}$

δ) $\frac{A E}{B\Gamma} = \text{---}$

ε) $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \text{---}$

6 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $AB = 8 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 12 \text{ cm}$, τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}$.



β) Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}$, τότε $AB = 2$ και $\Gamma\Delta = 3$.

γ) Ο λόγος δύο πλευρών τετραγώνου είναι ίσος με 1.

δ) Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5}$, τότε το ευθύγραμμο

τμήμα AB είναι μικρότερο από το $\Gamma\Delta$.

ε) Ο λόγος της ακτίνας ενός κύκλου προς τη διάμετρο του είναι 2.

στ) Αν M είναι το μέσο του ευθύγραμμου

τμήματος AB , τότε $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$.

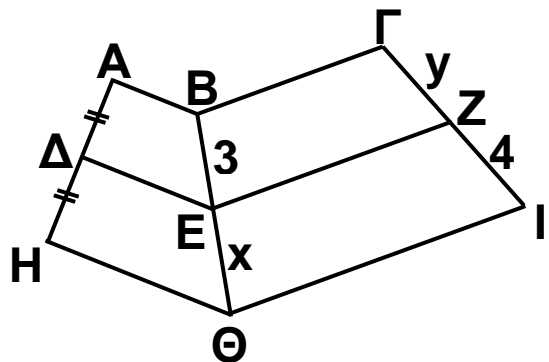
ζ) Ο λόγος μιας πλευράς ισόπλευρου τριγώνου προς την περίμετρο του είναι $\frac{1}{2}$.

7 Βλέποντας την αναλογία $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{4}$ η Μαρία ισχυρίστηκε ότι $AB = 1$ και $\Gamma\Delta = 4$, ενώ η Ελένη ισχυρίστηκε ότι το $\Gamma\Delta$ είναι τετραπλάσιο του AB . Ποια από τις δύο έχει δίκιο;



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel \Delta E \parallel H\Theta$ και $B\Gamma \parallel EZ \parallel \Theta I$. Αν $A\Delta = \Delta H$, να υπολογίσετε το x και το y .



2 α) Με κανόνα και διαβήτη να διαιρέσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 7$ cm σε πέντε ίσα ευθύγραμμα τμήματα και πάνω σε μια ευθεία ϵ να σχεδιάσετε τα

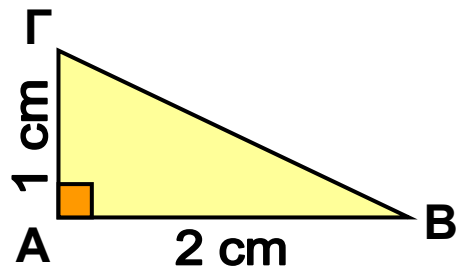
διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta = \frac{2}{5}AB$,
 $\Delta Z = \frac{4}{5}AB$, $ZH = \frac{6}{5}AB$.

β) Να υπολογίσετε τους λόγους:

i) $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ ii) $\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta}$ iii) $\frac{AB}{ZH}$ iv) $\frac{ZH}{\Delta Z}$ v) $\frac{\Gamma\Delta}{ZH}$

3 Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος να βρείτε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{A\Gamma}$ β) $\frac{B\Gamma}{AB}$ γ) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$



4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 6$ cm και $B\Gamma = 10$ cm. Να υπολογίσετε τους λόγους:

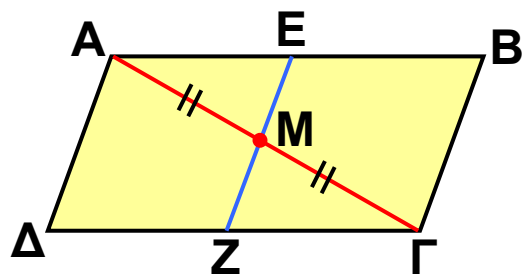
α) $\frac{AB}{B\Gamma}$ β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{AB}{A\Gamma}$

5 Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4 cm. Να υπολογίσετε το λόγο του ύψους του προς την πλευρά του.

6 Από το μέσο M της διαγωνίου $A\Gamma$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να φέρετε $EZ \parallel A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

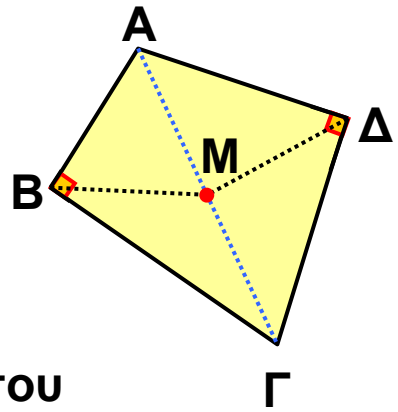
α) Τα σημεία E, Z είναι μέσα των πλευρών $AB, \Delta\Gamma$ αντιστοίχως.

β) Τα τμήματα $AB, A\Gamma$ είναι ανάλογα προς τα τμήματα AE, AM .

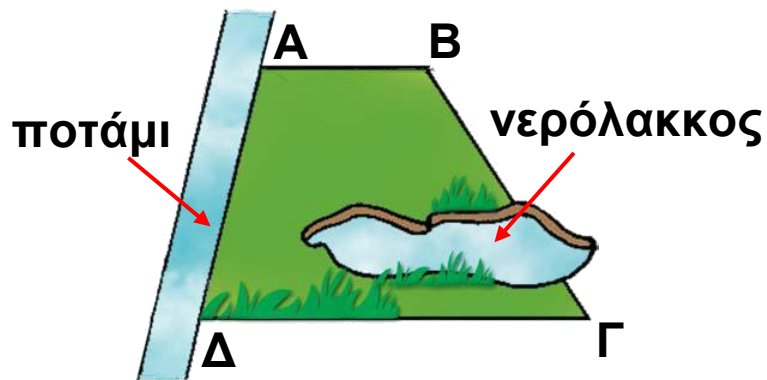


7 Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι

$\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Αν M είναι το μέσον της διαγωνίου $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $BM = M\Delta$.



8 Ένα αγρόκτημα έχει το σχήμα ενός τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. Ο ιδιοκτήτης του θέλει να μετρήσει την περίμετρο του, προκειμένου να το περιφράξει αλλά τη $B\Gamma$ δεν μπορεί να τη μετρήσει γιατί παρεμβάλλεται ένας νερόλακκος που σχηματίστηκε από την τελευταία βροχόπτωση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πώς θα μπορούσε να την υπολογίσει;



1.3. Θεώρημα του Θαλή



✓ Μαθαίνω το θεώρημα του Θαλή και πώς να το χρησιμοποιώ για τον υπολογισμό του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος και του λόγου δύο τμημάτων.



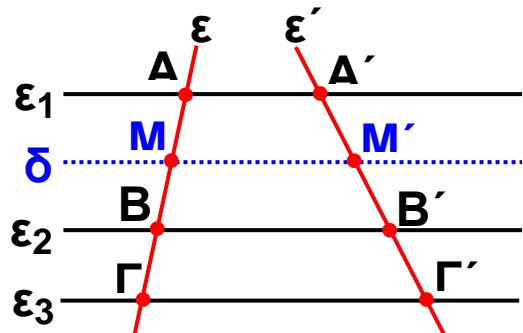
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να χαράξετε μια ευθεία ϵ κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να επιλέξετε τρεις γραμμές του τετραδίου που να ορίζουν στην ϵ δύο ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε το ένα από αυτά να είναι διπλάσιο του άλλου.
2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ϵ' που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις γραμμές που επιλέξατε προηγουμένως ορίζουν και στην ϵ' δύο ευθύγραμμα τμήματα, που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου;

Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ που τέμνουν την ευθεία ϵ στα σημεία A, B, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε $AB = 2 \cdot B\Gamma$.

Αν μια άλλη ευθεία ϵ' τέμνει

τις $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ στα σημεία A', B', Γ' αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και για τα ευθύγραμμα τμήματα $A'B', B'\Gamma'$ ισχύει μια ανάλογη σχέση. Δηλαδή $A'B' = 2 \cdot B'\Gamma'$. Πράγματι, αν από το μέσο M του AB φέρουμε την ευθεία δ παράλληλη προς τις ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, τότε οι παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \delta, \epsilon_2, \epsilon_3$ ορίζουν στην ευθεία ϵ ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ευθεία ϵ' .



Δηλαδή ισχύει $A'M' = M'B' = B'Γ'$ και επομένως $A'B' = 2 \cdot B'Γ'$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αν $AB = 2 \cdot BΓ$ θα ισχύει και $A'B' = 2 \cdot B'Γ'$, οπότε: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2 \cdot BΓ}{2 \cdot B'Γ'}$ ή $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'}$

Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $BΓ$ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα $A'B'$, $B'Γ'$.

Γενικά

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή: αν

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} = \frac{AΓ}{A'Γ'}$$

Η προηγούμενη πρόταση είναι γνωστή ως **θεώρημα του Θαλή**.

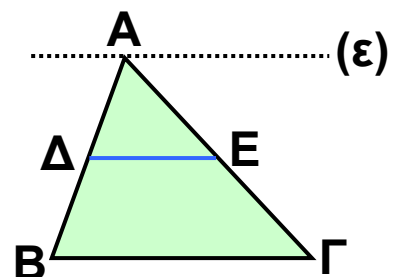
Από την ισότητα των τριών λόγων του Θεωρήματος του Θαλή έχουμε τις εξής αναλογίες

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} \text{ και } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AΓ}{A'Γ'}$$

Αν στις αναλογίες αυτές εναλλάξουμε τους μέσους όρους, τότε προκύπτουν και οι εξής αναλογίες

$$\frac{AB}{BΓ} = \frac{A'B'}{B'Γ'} \text{ και } \frac{AB}{AΓ} = \frac{A'B'}{A'Γ'}$$

Για παράδειγμα, σ' ένα τρίγωνο $ABΓ$, αν $ΔΕ \parallel BΓ$ και από την κορυφή A φέρουμε ευθεία $\varepsilon \parallel BΓ$, τότε οι παράλληλες ευθείες ε , $ΔΕ$, $BΓ$ θα ορίζουν στις πλευρές AB , $AΓ$ τμήματα ανάλογα. Δηλαδή,



$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EG}, \text{ οπότε και } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}.$$

Αποδεικνύεται ακόμη ότι, αν ισχύει $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$ τότε $DE \parallel BG$. Επομένως:

Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν $DE \parallel BG$ τότε $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$.
- Αν $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$ τότε $DE \parallel BG$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



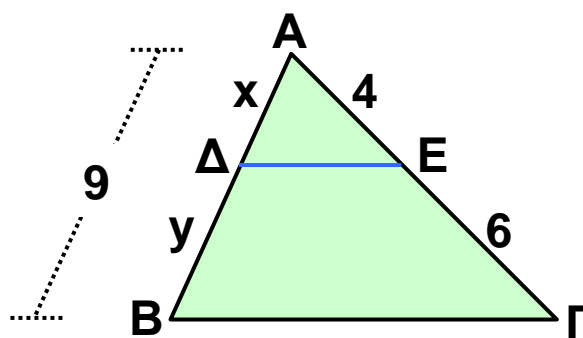
1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = 9$, $AE = 4$ και $EG = 6$. Αν $DE \parallel BG$ να υπολογιστούν τα x , y .

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $DE \parallel BG$, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AG} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{4} = \frac{9}{10}$$

ή $10x = 36$ ή $x = 3,6$. Άρα $y = 9 - 3,6$ οπότε $y = 5,4$.



2 Μέσα από ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος τραπεζίου με $AD = 50$ m και $BG = 60$ m πέρασε ένας δρόμος παράλληλος προς τις πλευρές του ΑΒ, ΓΔ που είχε πλάτος 10 m και χώρισε το οικόπεδο στα δύο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν είναι $AE = 22$ m και $ZD = 18$ m, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΗ, ΘΓ, ΗΘ.

Λύση

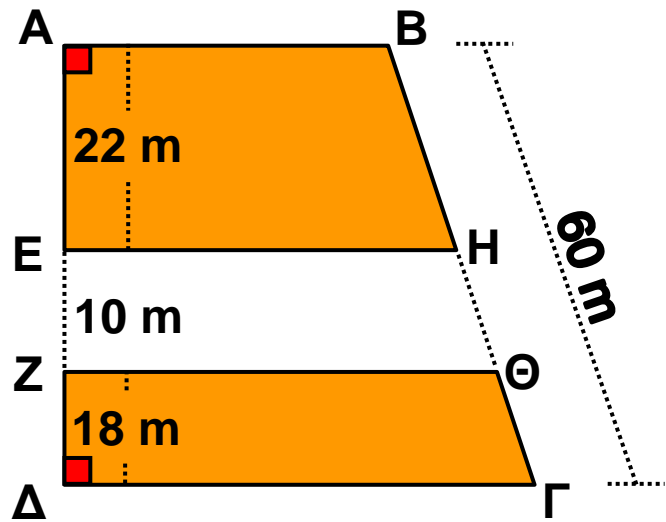
Επειδή $AB \parallel EH \parallel \Delta\Gamma$
από το Θεώρημα Θαλή
έχουμε:

$$\frac{BH}{AE} = \frac{B\Gamma}{\Delta\Delta}$$

$$\text{ή } \frac{BH}{22} = \frac{60}{50} \text{ ή}$$

$$50 \cdot BH = 1320 \text{ ή}$$

$$BH = 26,40 \text{ m.}$$



Επειδή $AB \parallel Z\Theta \parallel \Delta\Gamma$ από το Θεώρημα του Θαλή
έχουμε

$$\frac{\Theta\Gamma}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta\Delta} \text{ ή } \frac{\Theta\Gamma}{18} = \frac{60}{50} \text{ ή } 50 \cdot \Theta\Gamma = 1080 \text{ ή}$$

$$\Theta\Gamma = 21,60 \text{ m. Άρα } H\Theta = 60 - (26,40 + 21,60) \text{ ή}$$

$$H\Theta = 12 \text{ m.}$$

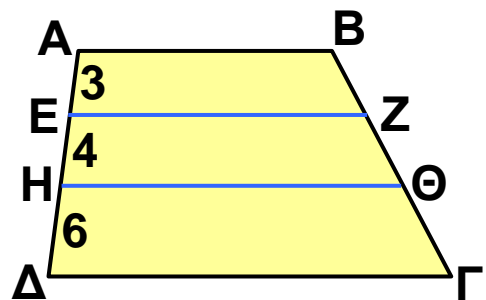
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



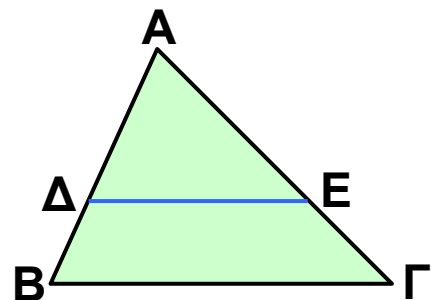
1 Αν $AB, EZ, H\Theta, \Delta\Gamma$ είναι
παράλληλες, να συμπλη-
ρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \text{---}$ β) $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \text{---}$

γ) $\frac{B\Theta}{B\Gamma} = \text{---}$

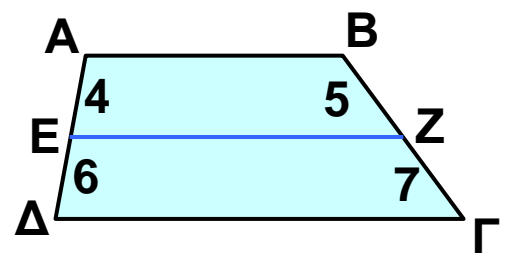


2 Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε
τις προτάσεις της επόμενης
σελίδας με (Σ), αν είναι
σωστές ή με (Λ), αν είναι
λανθασμένες:



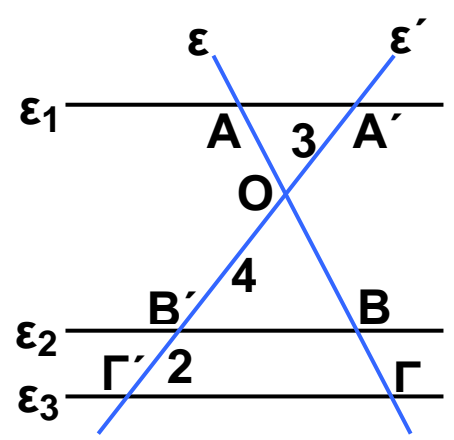
α) $\frac{\Delta B}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$ β) $\frac{\text{ΑΔ}}{\Delta B} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΕ}}$
 γ) $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΕΓ}}$ δ) $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}$

3 Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

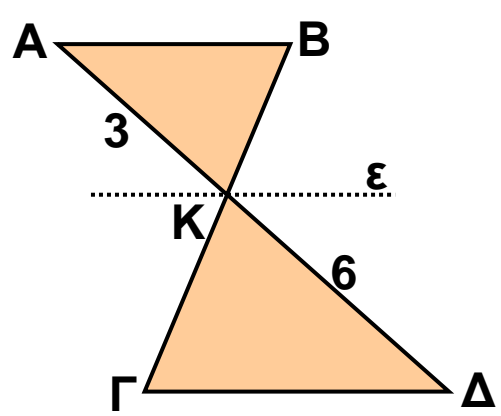


4 Στο διπλανό σχήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΒΓ}}$ β) $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΟΓ}}$
 γ) $\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΒ}}$ δ) $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$



5 Στο διπλανό σχήμα είναι $\text{ΑΒ} \parallel \epsilon \parallel \text{ΓΔ}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε λόγο της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.



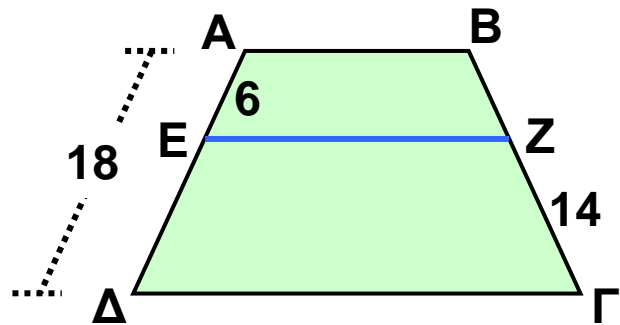
Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΓ}}$	1. $\frac{2}{3}$
β. $\frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΒΓ}}$	2. $\frac{1}{3}$
	3. $\frac{1}{2}$
γ. $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΚ}}$	4. 3

α	β	γ

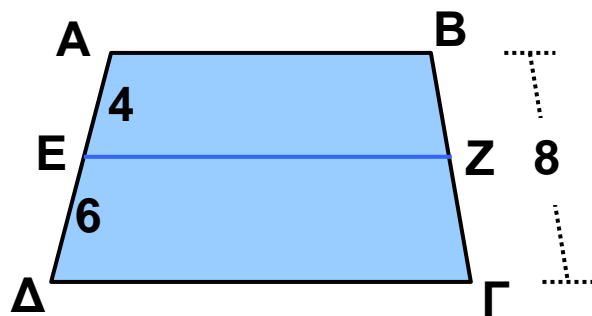
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



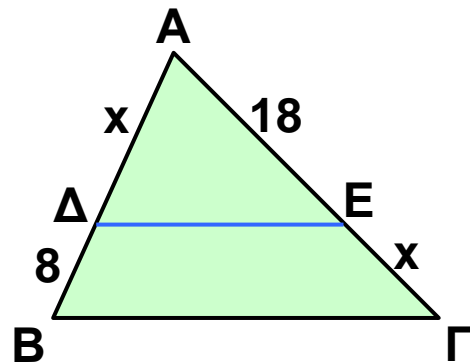
1 Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η EZ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα BZ .



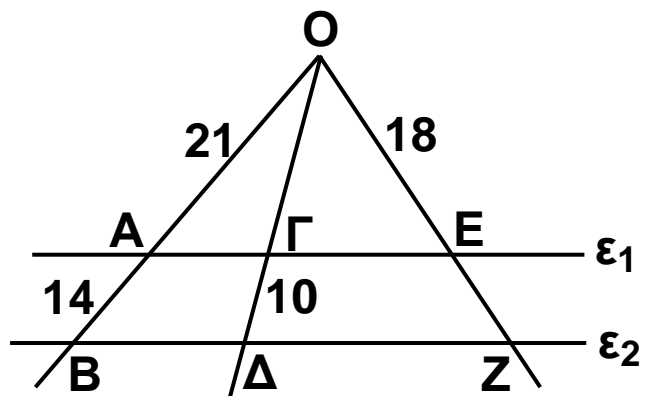
2 Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η EZ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα BZ και $Z\Gamma$.



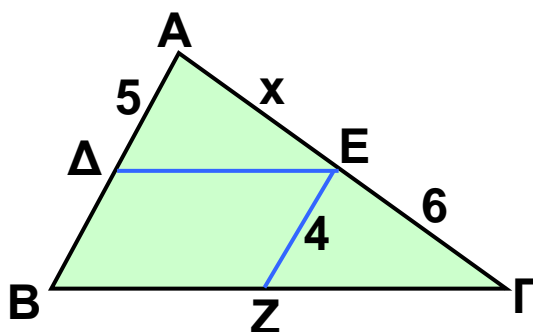
3 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε το x .



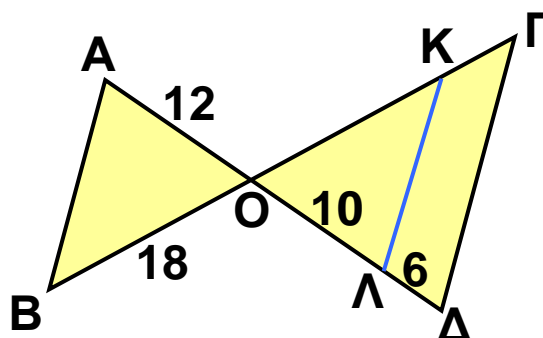
4 Στο διπλανό σχήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$ και EZ .



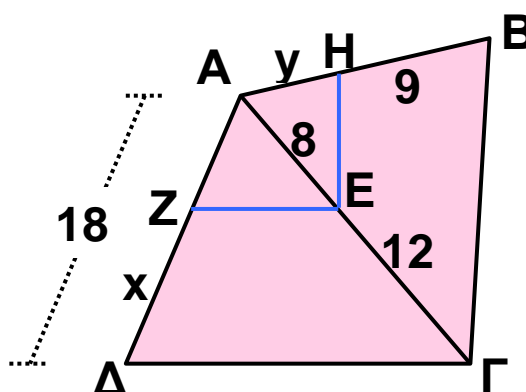
5 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $E Z \parallel AB$. Να υπολογίσετε το x .



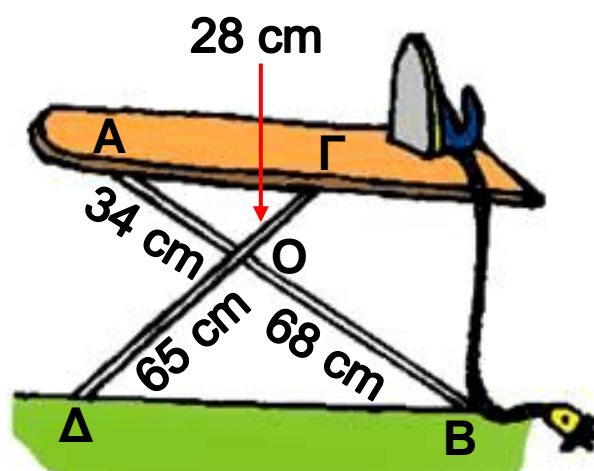
6 Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα OK και $K\Gamma$.



7 Στο διπλανό σχήμα είναι $E Z \parallel \Delta\Gamma$ και $E H \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε τα x, y .



8 Κάποιος συναρμολόγησε μια πτυσσόμενη σιδερώστρα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και διαπίστωσε ότι η σανίδα δεν ήταν οριζόντια. Πού έγινε το λάθος;



1.4. Ομοιοθεσία



- ✓ Μαθαίνω να βρίσκω το ομοιόθετο ενός σχήματος.
- ✓ Γνωρίζω με ποιες σχέσεις συνδέονται τα ομοιόθετα σχήματα.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και στο εσωτερικό του να πάρετε ένα σημείο $Ο$.
2. Πάνω στις ημιευθείες $ΟΑ$, $ΟΒ$, $ΟΓ$, $ΟΔ$ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα $ΟΑ'$, $ΟΒ'$, $ΟΓ'$, $ΟΔ'$ διπλάσια των $ΟΑ$, $ΟΒ$, $ΟΓ$, $ΟΔ$. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο $Α'Β'Γ'Δ'$ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου.
3. Πάνω στις ημιευθείες $ΟΑ$, $ΟΒ$, $ΟΓ$, $ΟΔ$ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα $ΟΑ''$, $ΟΒ''$, $ΟΓ''$, $ΟΔ''$, μισά των $ΟΑ$, $ΟΒ$, $ΟΓ$, $ΟΔ$. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο $Α''Β''Γ''Δ''$ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες τους με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε;

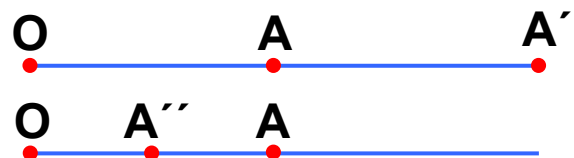
Το ομοιόθετο σημείου

Αν πάρουμε δύο σημεία $Ο$, $Α$ και στην ημιευθεία $ΟΑ$ πάρουμε ένα σημείο $Α'$, τέτοιο ώστε $ΟΑ' = 2 \cdot ΟΑ$, τότε λέμε ότι το σημείο $Α'$ είναι ομοιόθετο του $Α$ με κέντρο $Ο$ και λόγο $\lambda = 2$.

Αν $Α''$ σημείο της ημιευθείας $ΟΑ$, τέτοιο

ώστε $ΟΑ'' = \frac{1}{2} \cdot ΟΑ$, τότε

το $Α''$ είναι ομοιόθετο του $Α$ με κέντρο $Ο$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.



Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο O και λόγο λ ονομάζεται **ομοιοθεσία**. Το σημείο O λέγεται **κέντρο ομοιοθεσίας**, ενώ ο αριθμός λ ονομάζεται **λόγος ομοιοθεσίας**. Είναι φανερό ότι το κέντρο O έχει ομοιόθετο τον εαυτό του.

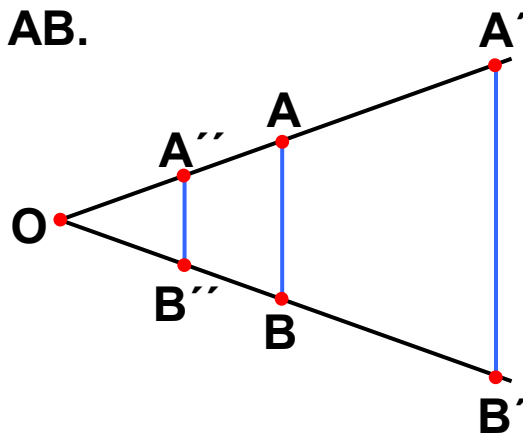
Το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος

Στην ομοιοθεσία με κέντρο O και λόγο $\lambda = 2$ το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος AB είναι το ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$, όπου A', B' τα ομοιόθετα των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Επειδή $OA' = 2 \cdot OA$ και $OB' = 2 \cdot OB$, θα έχουμε

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 2,$$

οπότε $AB \parallel A'B'$.



Επομένως

Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.

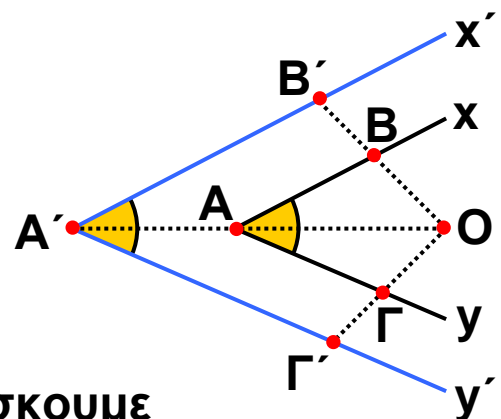
Αν συγκρίνουμε τα τμήματα $A'B'$ και AB , διαπιστώνουμε ότι $A'B' = 2 \cdot AB$ ή $\frac{A'B'}{AB} = 2$.

Αν $A''B''$ είναι ομοιόθετο του AB με κέντρο O και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ τότε: $A''B'' = \frac{1}{2} \cdot AB$ ή $\frac{A''B''}{AB} = \frac{1}{2}$.

Το ομοιόθετο γωνίας

Για να βρούμε το ομοιόθετο μιας γωνίας $\hat{x}Ay$ με κέντρο O και λόγο ένα θετικό αριθμό λ

(π.χ. $\lambda = 2$), παίρνουμε ένα σημείο B στην πλευρά Ax , ένα σημείο Γ στην πλευρά Ay και βρίσκουμε



τα σημεία B', A', Γ' που είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των B, A, Γ . Ορίζεται έτσι η γωνία $\hat{x}'A'y'$, που είναι ομοιόθετη της γωνίας $\hat{x}Ay$. Αν συγκρίνουμε τις δύο γωνίες διαπιστώνουμε ότι είναι ίσες, δηλαδή $\hat{x}Ay = \hat{x}'A'y'$. Επομένως

Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.

Το ομοιόθετο πολυγώνου

Στην ομοιοθεσία με κέντρο O και λόγο $\lambda = 2$, το ομοιόθετο ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$, όπου A', B', Γ', Δ' είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των κορυφών του A, B, Γ, Δ . Οι πλευρές και οι γωνίες του τετραπλεύρου $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι ομοιόθετες με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του $AB\Gamma\Delta$, οπότε ισχύουν:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2$$

$$\text{και } \hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}' = \hat{\Delta}.$$

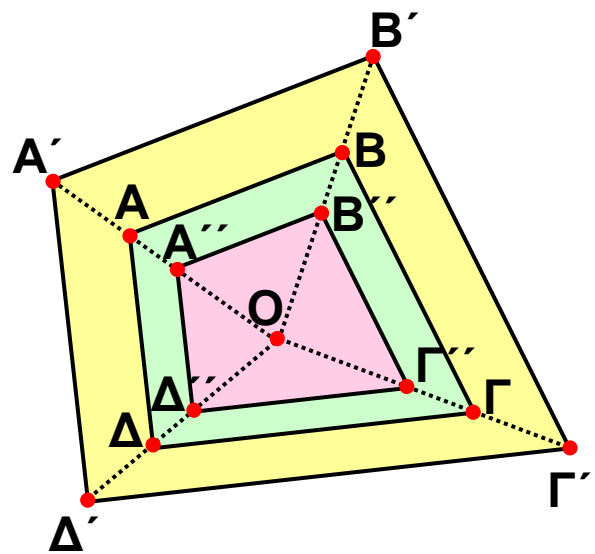
Το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ που είναι ομοιόθετο του $AB\Gamma\Delta$ με λόγο $\lambda = 2$ είναι **μεγέθυνση** του $AB\Gamma\Delta$.

Αν $A''B''\Gamma''\Delta''$ είναι το ομοιόθετο του $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O

και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ ομοίως ισχύουν:

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} = \frac{\Gamma''\Delta''}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta''A''}{\Delta A} = \frac{1}{2}$$

$$\text{και } \hat{A}'' = \hat{A}, \hat{B}'' = \hat{B}, \hat{\Gamma}'' = \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}'' = \hat{\Delta}.$$



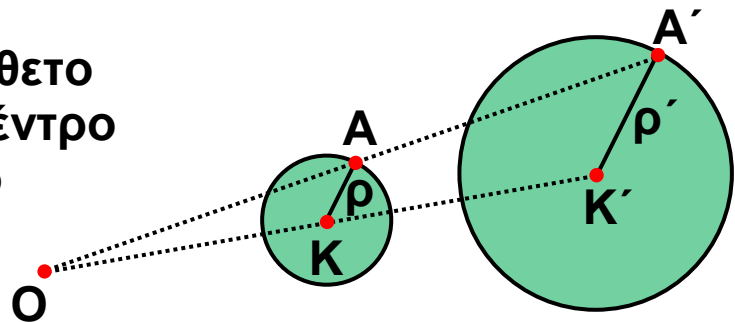
Το τετράπλευρο $A''B''\Gamma''\Delta''$ που είναι ομοιόθετο του $AB\Gamma\Delta$ με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι σμίκρυνση του $AB\Gamma\Delta$.

Γενικά

- Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Οι αντίστοιχες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- Αν το πολύγωνο Π' είναι ομοιόθετο του Π με λόγο λ , τότε το Π' είναι
 - μεγέθυνση του Π , όταν $\lambda > 1$
 - σμίκρυνση του Π , όταν $0 < \lambda < 1$ και
 - ίσο με το Π , όταν $\lambda = 1$.

Το ομοιόθετο κύκλου

Για να βρούμε το ομοιόθετο ενός κύκλου (K, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας O και λόγο ένα θετικό αριθμό λ (π.χ. $\lambda = 2$), βρίσκουμε το ομοιόθετο



του κέντρου K και το ομοιόθετο ενός σημείου A του κύκλου, που είναι τα σημεία K' και A' αντιστοίχως. Ορίζεται έτσι ένας κύκλος (K', ρ') , όπου $\rho' = K'A'$, που είναι ομοιόθετος του κύκλου (K, ρ) . Το ευθύγραμμο τμήμα $K'A'$ είναι ομοιόθετο του KA με κέντρο O και λόγο $\lambda = 2$, οπότε $K'A' = 2 \cdot KA$, δηλαδή $\rho' = 2\rho$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Με κέντρο ομοιοθεσίας ένα εσωτερικό σημείο O τετραγώνου $ΑΒΓΔ$, πλευράς $1,5 \text{ cm}$ και λόγο $\lambda = 3$, να σχεδιαστεί το ομοιόθετο του και να αποδειχτεί ότι είναι τετράγωνο.

Λύση

Στις ημιευθείες $ΟΑ$, $ΟΒ$, $ΟΓ$, $ΟΔ$ παίρνουμε αντιστοίχως τα τμήματα $ΟΑ' = 3 \cdot ΟΑ$, $ΟΒ' = 3 \cdot ΟΒ$, $ΟΓ' = 3 \cdot ΟΓ$, $ΟΔ' = 3 \cdot ΟΔ$. Το τετράπλευρο $Α'Β'Γ'Δ'$ είναι ομοιόθετο του $ΑΒΓΔ$ με κέντρο O και λόγο

$\lambda = 3$, οπότε:

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{Δ'Α'}{ΔΑ} = 3.$$

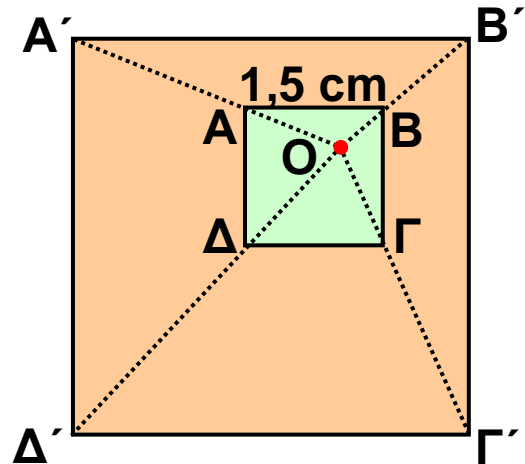
Άρα, $Α'Β' = 3 \cdot ΑΒ = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ cm}$. Ομοίως έχουμε $Β'Γ' = Γ'Δ' = Δ'Α' = 4,5 \text{ cm}$

Επειδή τα ομοιόθετα σχήματα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες του ίσες, το τετράπλευρο $Α'Β'Γ'Δ'$ που είναι ομοιόθετο του $ΑΒΓΔ$ θα έχει τις γωνίες του ορθές.

Επομένως το τετράπλευρο $Α'Β'Γ'Δ'$ είναι τετράγωνο, αφού έχει τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές.

Άρα

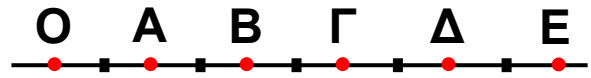
Το ομοιόθετο ενός τετραγώνου είναι τετράγωνο





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά. Στην ομοιοθεσία με κέντρο O και λόγο



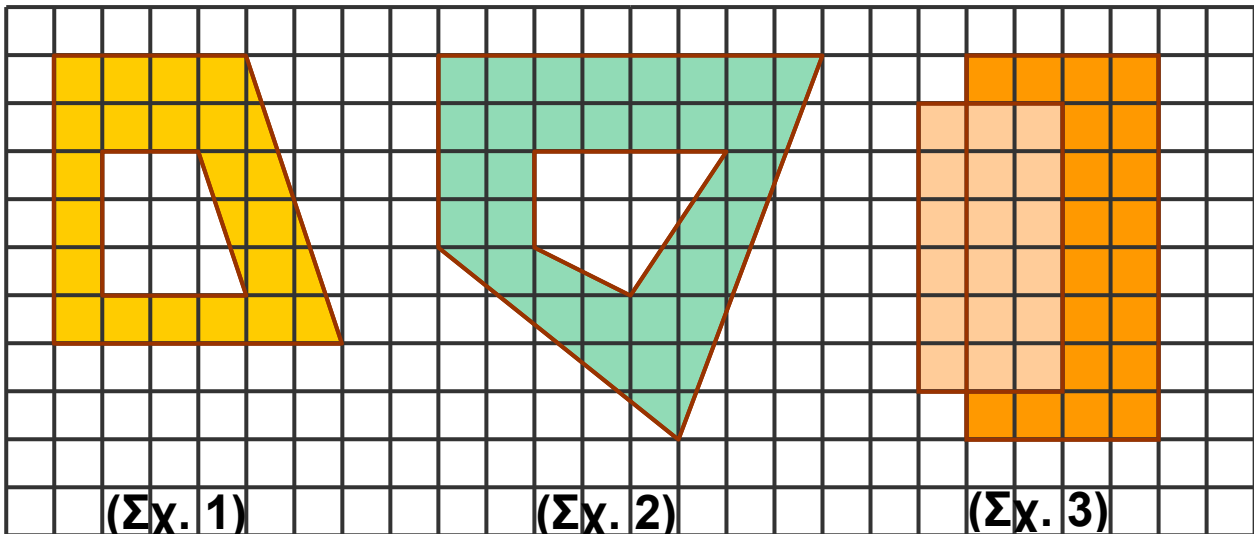
α) $\lambda = 5$ το ομοιόθετο του A είναι το

γ) $\lambda = \frac{1}{3}$ το ομοιόθετο του Γ είναι το

β) $\lambda = 2$ το ομοιόθετο του B είναι το

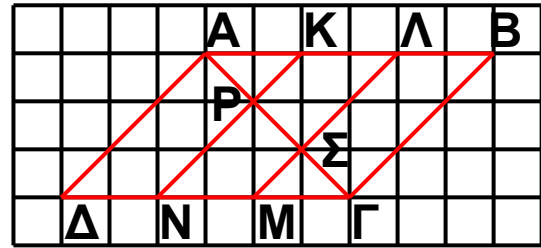
δ) $\lambda = \frac{3}{5}$ το ομοιόθετο του E είναι το

2 Σε ποια από τα παρακάτω σχήματα τα πολύγωνα είναι ομοιόθετα;



3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα της επόμενης σελίδας:

Ευθύγραμμο τμήμα	Κέντρο ομοιοθεσίας	Λόγος ομοιοθεσίας	Ομοιόθετο τμήματος
ΚΡ	Α	3	
ΡΝ	Γ		ΣΜ
ΣΜ			ΑΔ
ΒΓ	Α		ΚΡ
ΒΛ	Β	3	



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 3 cm.

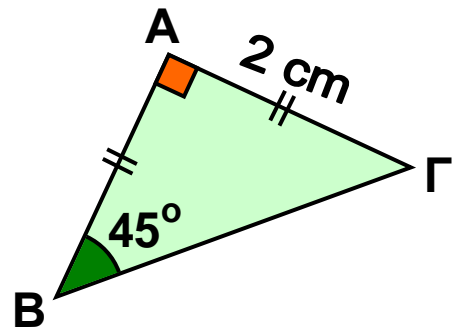
α) Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α

και λόγο: i) $\lambda = \frac{1}{2}$ ii) $\lambda = 2$.

β) Να υπολογίσετε τις πλευρές των τετραγώνων που σχεδιάσατε.

2 Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με κάθετες πλευρές ΑΒ = 12 cm και ΑΓ = 9 cm. Με κέντρο την κορυφή Α και λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$ να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε τις πλευρές του.

3 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο Ο εκτός του τριγώνου και λόγο $\lambda = 3$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του νέου τριγώνου.



4 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο ενός κύκλου (O, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο $\lambda = 3$. Να αποδείξετε ότι ο νέος κύκλος θα έχει τριπλάσιο μήκος και εννεαπλάσιο εμβαδόν.

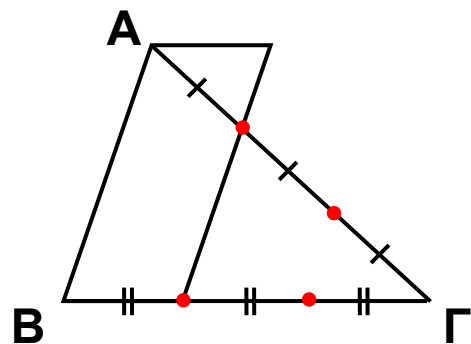
5 Να τοποθετήσετε στο σχήμα τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ αν γνωρίζετε ότι:

- Το Κ είναι ομοιόθετο του Α με κέντρο Γ και λόγο $\frac{1}{3}$.

- Το Α είναι ομοιόθετο του Λ με κέντρο Κ και λόγο 2.

- Το ΛΜ είναι ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο Γ και λόγο $\frac{2}{3}$.

- Το ΑΒ είναι ομοιόθετο του ΚΝ με κέντρο Γ και λόγο 3.



6 Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο 2 και κέντρο ομοιοθεσίας:

α) το σημείο Κ β) το σημείο Α

γ) ένα εξωτερικό σημείο του παραλληλογράμμου.

Να συγκρίνετε τα τρία ομοιόθετα σχήματα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να πάρετε τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$.

α) Να σχεδιάσετε τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ ομοιόθετο του $AB\Gamma$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda = 2$.

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Με ποια σχέση συνδέονται οι συντεταγμένες των κορυφών των δύο τριγώνων;

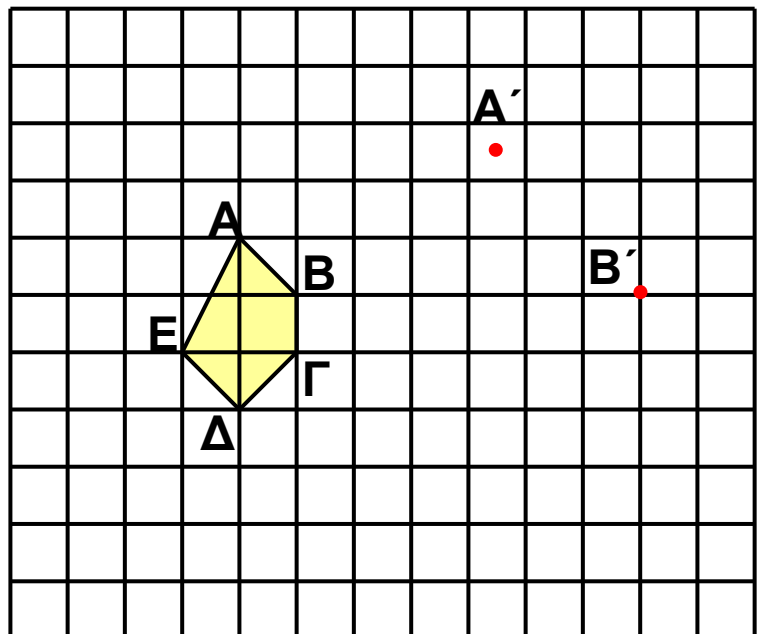
β) Να σχεδιάσετε τρίγωνο $A''B''\Gamma''$ ομοιόθετο του $AB\Gamma$ με κέντρο το σημείο $K(1, 1)$, λόγο $\lambda = 2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Ισχύει η ανάλογη σχέση για τις συντεταγμένες των κορυφών αυτών των τριγώνων;

8 Στις πλευρές AB , $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ να ορίσετε τα

σημεία Δ , E αντιστοίχως, ώστε $A\Delta = \frac{1}{3} AB$ και

$AE = \frac{1}{3} A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{1}{3} B\Gamma$.

9 Να κατασκευάσετε το ομοιόθετο του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ στην ομοιοθεσία κατά την οποία τα σημεία A' , B' είναι ομοιόθετα των κορυφών A , B αντιστοίχως.



1.5. Ομοιότητα



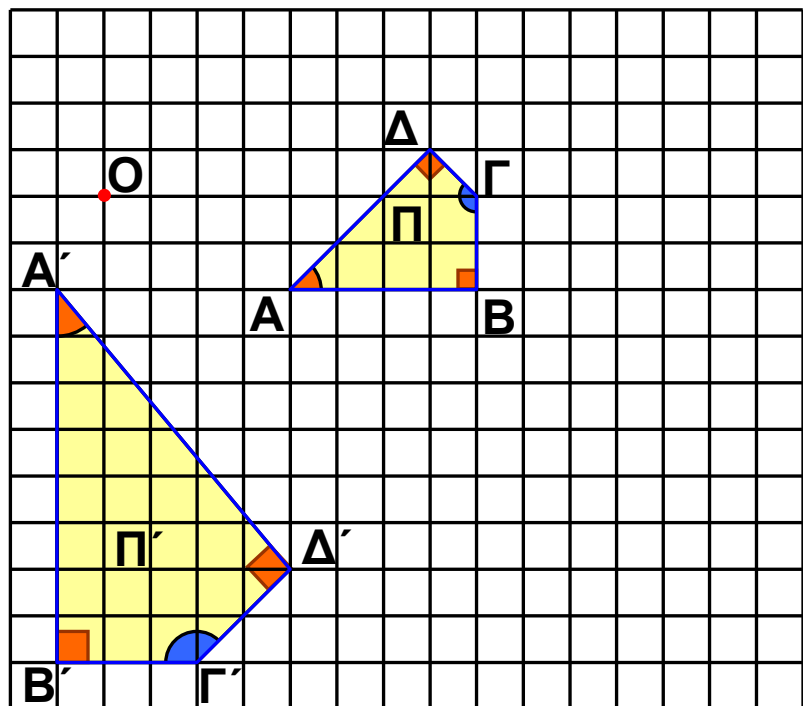
- ✓ Μαθαίνω πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια.
- ✓ Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο παρακάτω σχήμα, οι πλευρές του τετραπλεύρου $A'B'Γ'D'$ (ή Π') έχουν διπλάσιο μέγεθος από τις πλευρές του τετραπλεύρου $ABΓΔ$ (ή Π) και οι αντίστοιχες γωνίες των τετραπλεύρων είναι ίσες.

1. Να σχεδιάσετε το τετράπλευρο $A''B''Γ''Δ''$ (ή Π'') που είναι ομοιόθετο του $ABΓΔ$ με κέντρο O και λόγο $\lambda = 2$.
2. Να συγκρίνετε το τετράπλευρο που σχεδιάσατε με το Π' .
3. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα αρχικά τετράπλευρα Π και Π' ;



Α Όμοια πολύγωνα

Αν έχουμε δύο ομοιόθετα πολύγωνα, τότε το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα. Δύο πολύγωνα Π και Π' που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα τα λέμε **όμοια** και συμβολίζουμε $\Pi \approx \Pi'$. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.

Αν όμως ένα πολύγωνο Π' , δεν είναι ομοιόθετο του Π ή δεν είναι εύκολο να εξηγήσουμε ότι είναι ομοιόθετο του Π , τότε πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι ομοιό του; Ας πάρουμε δύο τετράπλευρα $ΑΒΓΔ$ (ή Π) και $Α'Β'Γ'Δ'$ (ή Π'), ώστε οι πλευρές του Π' να είναι διπλάσιες των πλευρών του Π και οι αντίστοιχες γωνίες τους να είναι ίσες. Αν σχεδιάσουμε ένα τετράπλευρο $Α''Β''Γ''Δ''$ (ή Π'') ομοιόθετο του Π με λόγο $\lambda = 2$, τότε τα τετράπλευρα Π' και Π'' είναι ίσα, γιατί έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους ίσες. Το Π'' ως ομοιόθετο του Π , με λόγο 2 είναι μεγέθυνση του, άρα και το ίσο του πολυγώνο Π' είναι μεγέθυνση του Π , οπότε τα τετράπλευρα Π και Π' είναι όμοια. Το ίδιο θα συνέβαινε αν το Π' ήταν σμίκρυνση του Π .

Τα αρχικά τετράπλευρα $ΑΒΓΔ$ και $Α'Β'Γ'Δ'$ τα σχεδιάσαμε, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{Δ'Α'}{ΔΑ} = 2 \quad (1)$$

$$\text{και } \hat{Α}' = \hat{Α}, \hat{Β}' = \hat{Β}, \hat{Γ}' = \hat{Γ}, \hat{Δ}' = \hat{Δ}. \quad (2)$$

και διαπιστώσαμε ότι είναι όμοια.

Γενικά

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολύγωνων έχουν τον ίδιο λόγο (π.χ. $\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = 2$), γι' αυτό λέγονται ομόλογες και ο λόγος τους λέγεται λόγος ομοιότητας.

Είδαμε λοιπόν ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν είναι ή μπορεί να γίνουν ομοιόθετα και επομένως θα ισχύουν

και γι' αυτά οι ιδιότητες των ομοιοθέτων σχημάτων, δηλαδή:

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Από τη σχέση (1) και γνωστή ιδιότητα των αναλογιών έχουμε:

$$\lambda = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} =$$
$$= \frac{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'A'}{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A} = \frac{\text{περίμετρος } \Pi'}{\text{περίμετρος } \Pi} \quad \cdot \text{ Άρα}$$

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας τους

Λόγος ομοιότητας - Κλίμακα

Οι χάρτες συνήθως παρουσιάζουν μια γεωγραφική περιοχή σε σμίκρυνση, δηλαδή παρουσιάζουν ένα σχήμα όμοιο με το πραγματικό. Το μέγεθος της σμίκρυνσης καθορίζεται από την κλίμακα του χάρτη που αναγράφεται πάνω σ' αυτόν. Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.

Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 2000000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στο χάρτη προς το πραγματικό είναι $\lambda = \frac{1}{2000000}$ οπότε 1 cm στο χάρτη είναι 20 km στην πραγματικότητα.

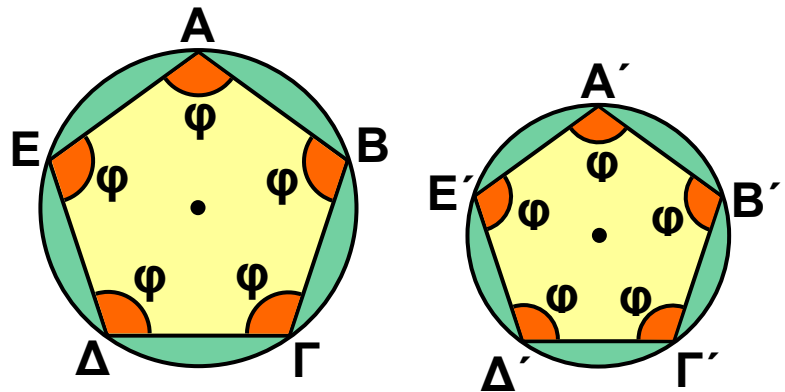


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να αποδειχτεί ότι δύο κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια.

Λύση

Οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Άρα τα κανονικά πεντάγωνα $ΑΒΓΔΕ$ και $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ έχουν



τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΕΑ}{Ε'Α'} \quad \text{αφού και οι αριθμητές}$$

και οι παρονομαστές είναι μεταξύ τους ίσοι.

Τα κανονικά πεντάγωνα έχουν και τις γωνίες τους ίσες εφόσον καθεμιά από αυτές είναι

$$\varphi = 180^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Άρα τα κανονικά πεντάγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε είναι όμοια.

Γενικά

Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

2 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αεροφωτογραφία ενός αγροκτήματος που έχει σχήμα ορθογωνίου και έχει περιφραχτεί με συρματόπλεγμα μήκους 270 m. Να βρεθούν



οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος. Με ποια κλίμακα έχει φωτογραφηθεί το αγρόκτημα;

Λύση

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ της αεροφωτογραφίας είναι σμίκρυνση του πραγματικού αγροκτήματος Α'Β'Γ'Δ', οπότε είναι όμοιο προς αυτό.

$$\text{Άρα ισχύει } \frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = λ \quad (1).$$

Ο λόγος ομοιότητας λ είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους. Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι $2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 18 \text{ cm}$, ενώ του Α'Β'Γ'Δ' είναι ίση με το μήκος του συρματοπλέγματος, δηλαδή 270 m ή 27000 cm.

$$\text{Άρα } λ = \frac{18}{27000} = \frac{1}{1500} \text{ οπότε } \frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = \frac{1}{1500} .$$

Επομένως έχουμε:

$$Α'Δ' = 1500 \cdot ΑΔ = 1500 \cdot 4 = 6000 \text{ cm ή } Α'Δ' = 60 \text{ m.}$$

$$Δ'Γ' = 1500 \cdot ΔΓ = 1500 \cdot 5 = 7500 \text{ cm ή } Δ'Γ' = 75 \text{ m.}$$

Δηλαδή, οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος είναι 60 m και 75 m. Η κλίμακα φωτογράφισης είναι ίση

με το λόγο ομοιότητας $λ = \frac{1}{1500}$ δηλαδή 1 : 1500.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο τετράγωνα είναι όμοια.

β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια.

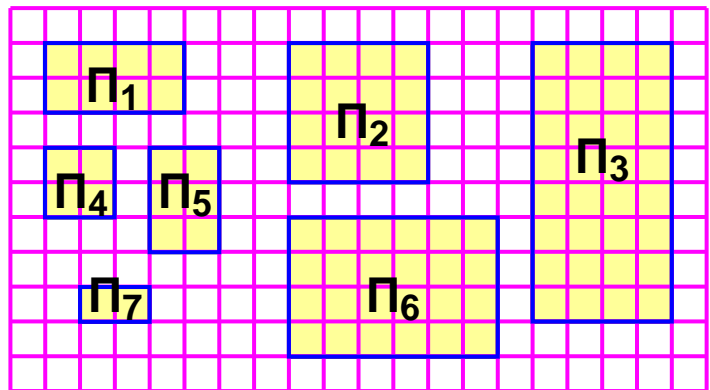
γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια.

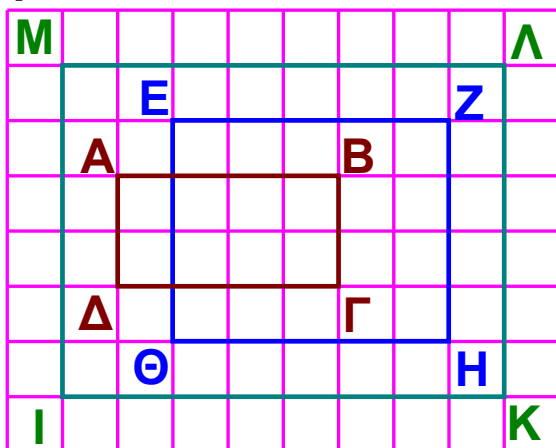
ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια.

στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια. □

2 Ποια από τα πολύγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια;

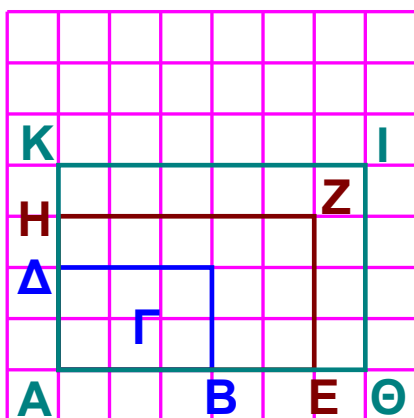


3 Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις διαστάσεις των αντιστοίχων παραλληλογράμμων και να βρείτε ποια απ' αυτά είναι όμοια.



1 μον

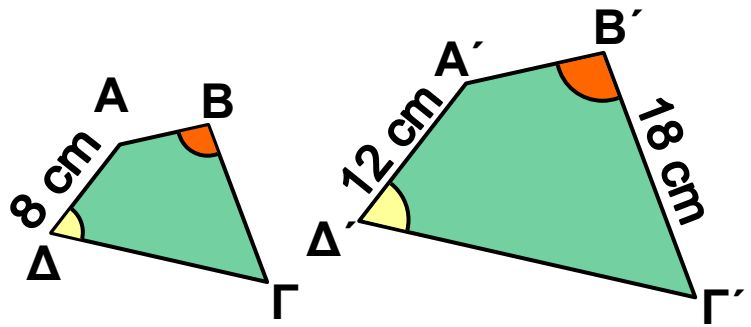
	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΕΖΗΘ		
ΙΚΛΜ		



1 μον

	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΕΖΗΘ		
ΑΘΙΚ		

4 Αν τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τις προτάσεις:



α) Ο λόγος ομοιότητας του $AB\Gamma\Delta$ προς το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι.....

β) Ο λόγος ομοιότητας του $A'B'\Gamma'\Delta'$ προς το $AB\Gamma\Delta$ είναι

γ) Αν η γωνία B είναι 110° , τότε και η γωνία είναι 110° .

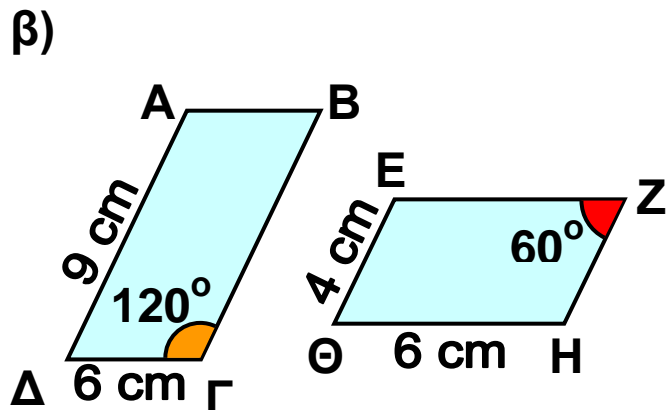
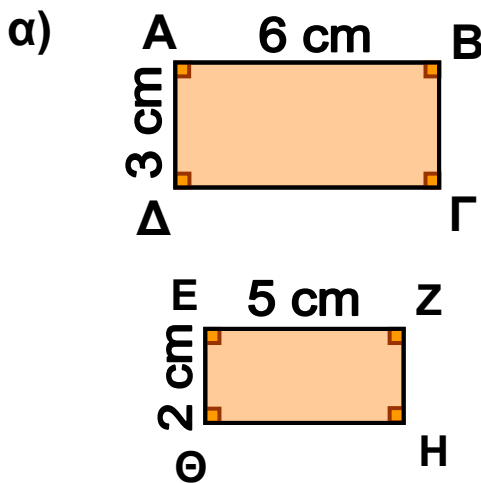
δ) Ο λόγος $\lambda = \frac{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'A'}{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}$ είναι ίσος με

ε) Η πλευρά $B\Gamma$ είναι ίση με.....cm.



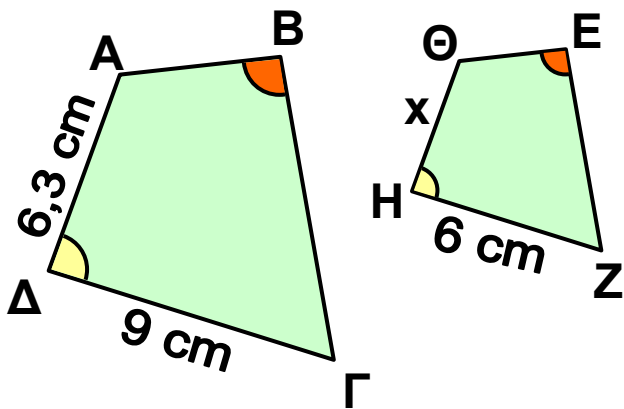
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

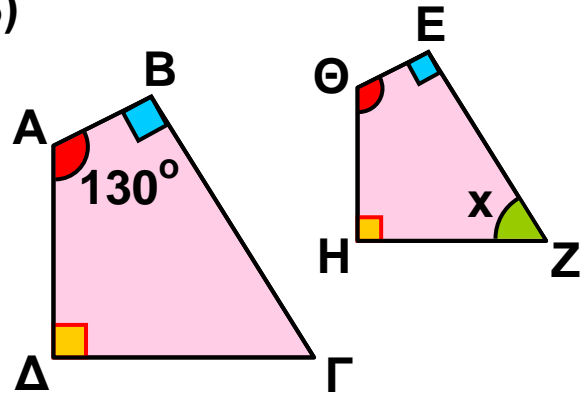


2 Αν τα τετράπλευρα $ΑΒΓΔ$ και $ΕΖΗΘ$ είναι όμοια, να βρείτε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α)



β)



3 Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 24 cm και 18 cm. Ένας μαθητής θέλοντας να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο όμοιο μ' αυτό αλλά που να έχει τη μεγαλύτερη πλευρά 20 cm, σκέφτηκε να μειώσει και την άλλη πλευρά κατά 4 cm. Ήταν σωστή η σκέψη του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4 Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Κ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που προκύπτει αν ενώσουμε τα μέσα των $ΚΑ$, $ΚΒ$, $ΚΓ$, $ΚΔ$ είναι παραλληλόγραμμο όμοιο με το $ΑΒΓΔ$.

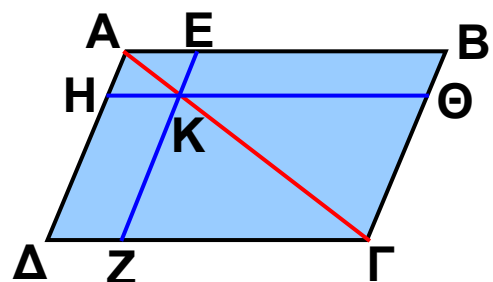
5 Στο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$

είναι $ΑΚ = \frac{1}{4} ΑΓ$, $ΕΖ \parallel ΑΔ$ και

$ΗΘ \parallel ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το παραλληλόγραμμο $ΑΕΚΗ$ είναι όμοιο με το $ΑΒΓΔ$.

β) Το παραλληλόγραμμο $ΑΕΚΗ$ είναι όμοιο με το $ΚΘΓΖ$.



6 Ένας μαθητής ξεκίνησε το πρωί από το σπίτι του M και αφού ακολούθησε τη διαδρομή που φαίνεται στο σχέδιο της επόμενης σελίδας έφτασε στο σχολείο του

Άρα το τρίγωνο $ΑΒ'Γ'$ είναι ομοιόθετο του $ΑΒΓ$ στην ομοιοθεσία με κέντρο $Α$ και λόγο $\frac{2}{3}$, οπότε

$ΑΒ'Γ' \approx ΑΒΓ$. Επειδή τα τρίγωνα $ΔΕΖ$, $ΑΒ'Γ'$ είναι ίσα, θα είναι και $ΔΕΖ \approx ΑΒΓ$. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Είδαμε λοιπόν, ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.



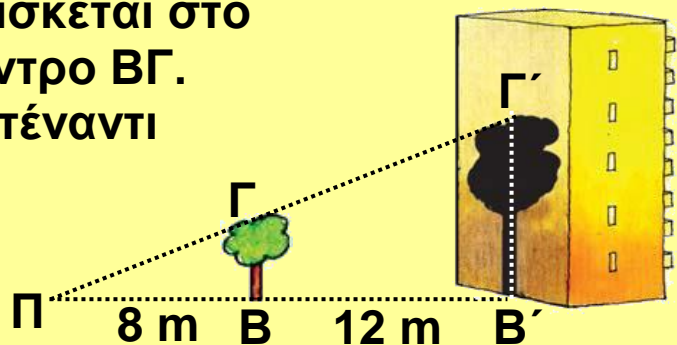
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Ένας προβολέας $Π$ βρίσκεται στο έδαφος και φωτίζει ένα δέντρο $ΒΓ$.

Η σκιά του δέντρου στο απέναντι κτίριο φτάνει μέχρι την οροφή του 4ου ορόφου.

Αν το ισόγειο και κάθε όροφος έχουν ύψος

3 m και η απόσταση του δέντρου από τον προβολέα είναι 8 m, ενώ από το κτίριο είναι 12 m, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.



Λύση

Τα τρίγωνα $ΠΒΓ$ και $ΠΒ'Γ'$ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\hat{\Pi}$ κοινή. Επομένως, έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

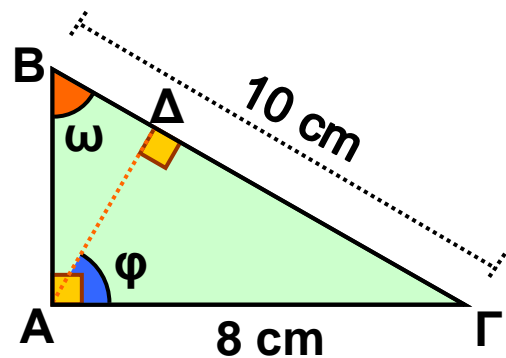
$$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΠΒ}{Π'Β'} \quad (1).$$

Η σκιά καλύπτει το ισόγειο και 4 ορόφους, οπότε θα έχει ύψος $B'Γ' = 5 \cdot 3 = 15$ m. Άρα η ισότητα (1) γίνεται $\frac{BΓ}{15} = \frac{8}{8 + 12}$ ή $20 \cdot BΓ = 120$, οπότε το ύψος του δέντρου είναι $BΓ = 6$ m.

2 Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με υποτείνουσα $BΓ = 10$ cm και $AΓ = 8$ cm να χαραχθεί το ύψος $AΔ$. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $AΔΓ$ είναι όμοια και να γραφούν οι ίσοι λόγοι. Να υπολογιστούν τα τμήματα $ΔΓ$ και $ΔB$.

Λύση

Τα τρίγωνα $ABΓ$ και $AΔΓ$ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή. Δηλαδή, έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.



Ίσες γωνίες	$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$	$\hat{\Gamma}$ κοινή	$\hat{\omega} = \hat{\phi}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $ABΓ$	$BΓ$	AB	$AΓ$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $AΔΓ$	$AΓ$	$AΔ$	$ΔΓ$

Άρα έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ}$ (1).

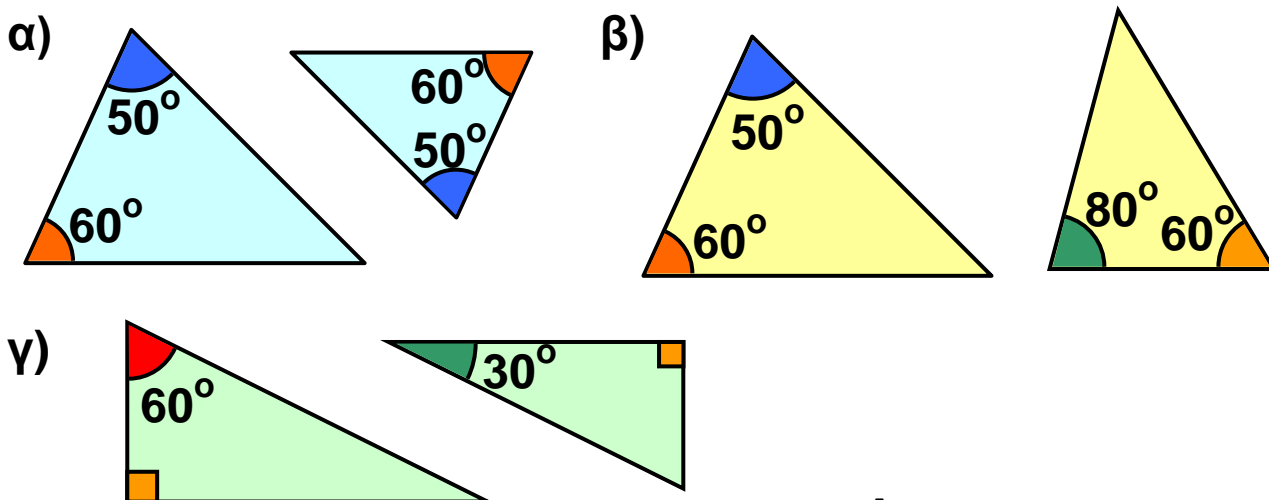
Από τις ισότητες (1) έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ}$ ή $\frac{10}{8} = \frac{8}{ΔΓ}$.

Άρα $10 \cdot ΔΓ = 64$, οπότε $ΔΓ = 6,4$ cm. Επειδή $ΒΓ = 10$ cm και $ΔΓ = 6,4$ cm έχουμε $ΒΔ = 10 - 6,4$ δηλαδή $ΒΔ = 3,6$ cm.

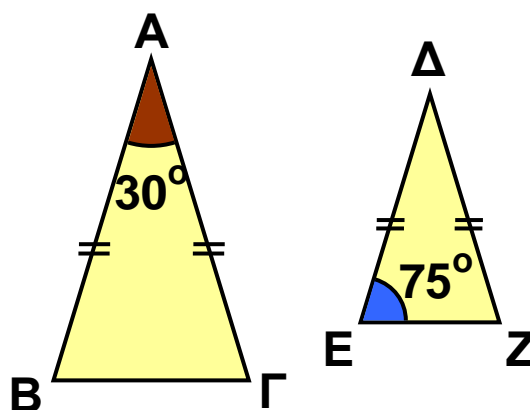
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια;



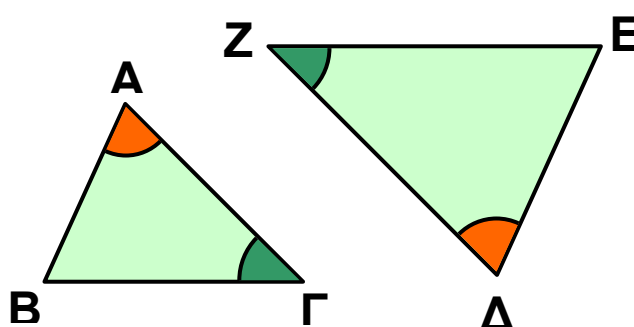
2 Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια.



3 Να γράψετε τους ίσους λόγους στα παρακάτω ζεύγη των ομοίων τριγώνων.

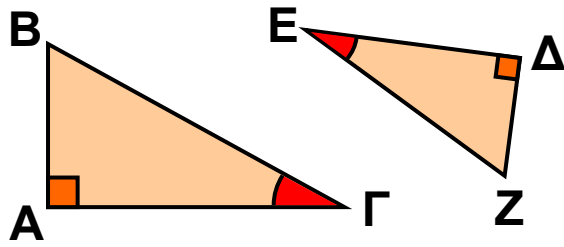
α)

_____ = _____ = _____



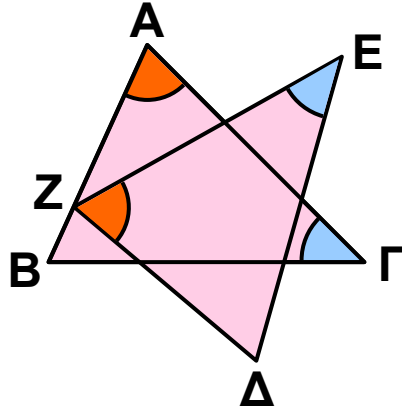
β)

_____ = _____ = _____



γ)

_____ = _____ = _____



4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.

β) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια.

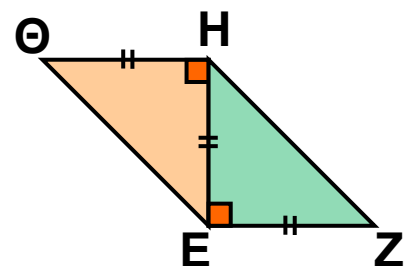
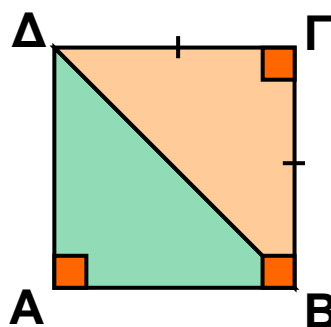
γ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

δ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.

ε) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μία γωνία 40° , είναι όμοια.

στ) Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων τριγώνων, είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

5 α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ABΔ και EΣΗ είναι όμοια.



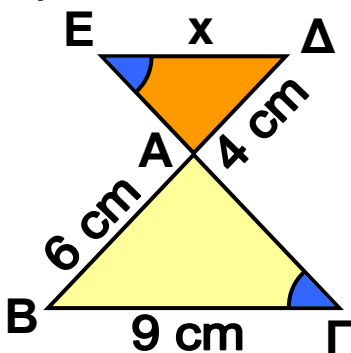
β) Αν δύο πολύγωνα αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό ομοίων τριγώνων, είναι πάντοτε όμοια;



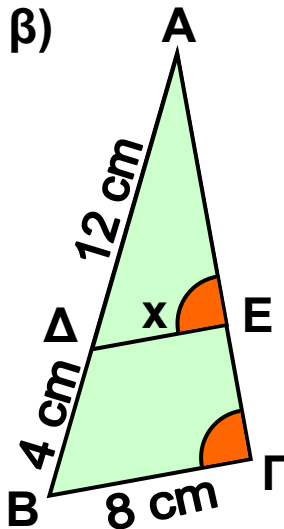
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

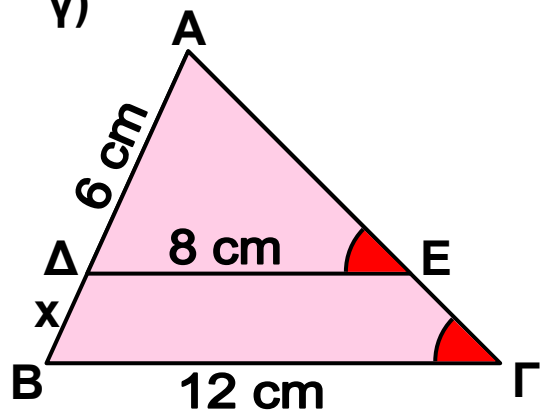
α)



β)



γ)



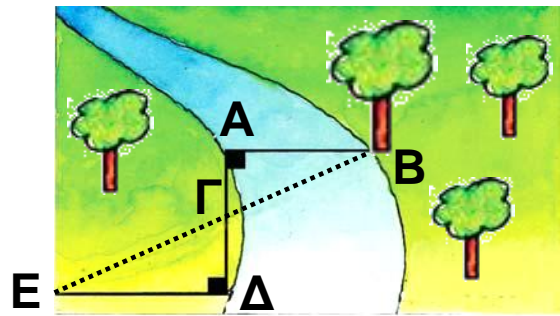
2 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $ΑΔ$ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι όμοια. Αν $ΔΒ = 4 \text{ cm}$ και $ΔΓ = 9 \text{ cm}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος $ΑΔ$.

3 Στις κάθετες πλευρές $ΑΒ = 8 \text{ cm}$ και $ΑΓ = 12 \text{ cm}$ ενός ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία $Δ$ και $Ε$, ώστε $ΑΔ = 2 \text{ cm}$ και $ΑΕ = 3 \text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι:

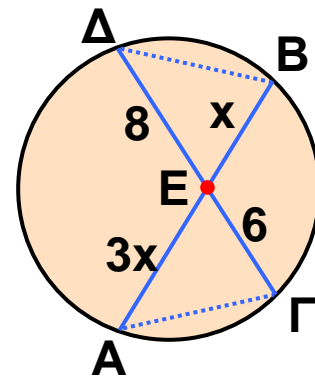
α) $ΔΕ \parallel ΒΓ$

β) τα τρίγωνα $ΑΔΕ$, $ΑΒΓ$ είναι όμοια.

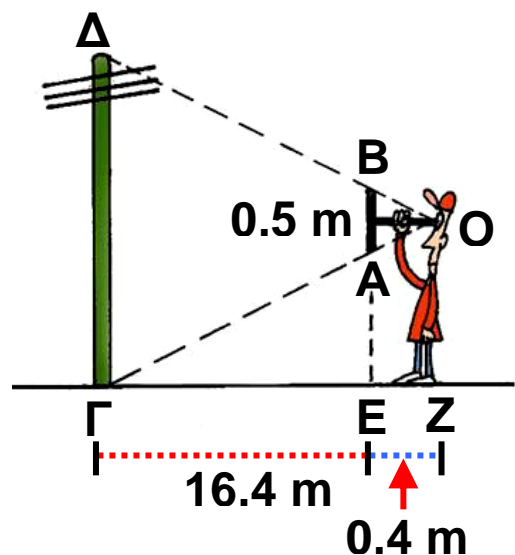
4 Να βρείτε το πλάτος AB του ποταμού, αν $AG = 12$ m, $GD = 15$ m, $ED = 60$ m και $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$.



5 Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΕΓ$, $ΒΕΔ$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x .

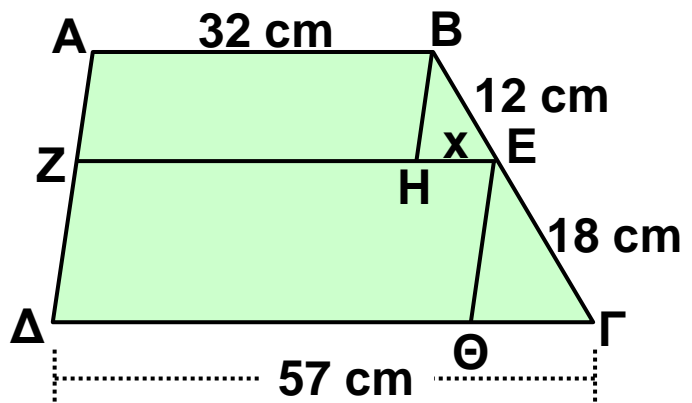


6 Μπροστά στο μάτι μας και σε απόσταση $0,4$ m κρατάμε κατακόρυφα ένα ραβδί $AB = 0,5$ m. Αν μετακινηθούμε και σταθούμε σε ένα σημείο Z τέτοιο, ώστε οι ευθείες OA , OB να καταλήγουν στη βάση και στην κορυφή της κεραίας ενός ραδιοφωνικού σταθμού, διαπιστώνουμε ότι η απόστασή μας από την κεραία είναι $\Gamma Z = 16,8$ m.

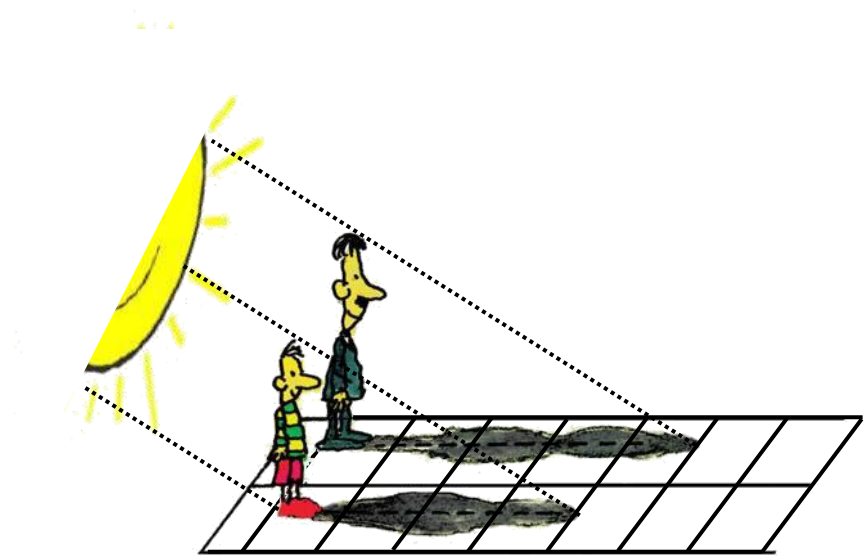


Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας;

7 Στο τραπέζιο $ABΓΔ$ είναι $EZ \parallel ΔΓ$, $BH \parallel ΑΔ$ και $EΘ \parallel ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BHE , $EΘΓ$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x .

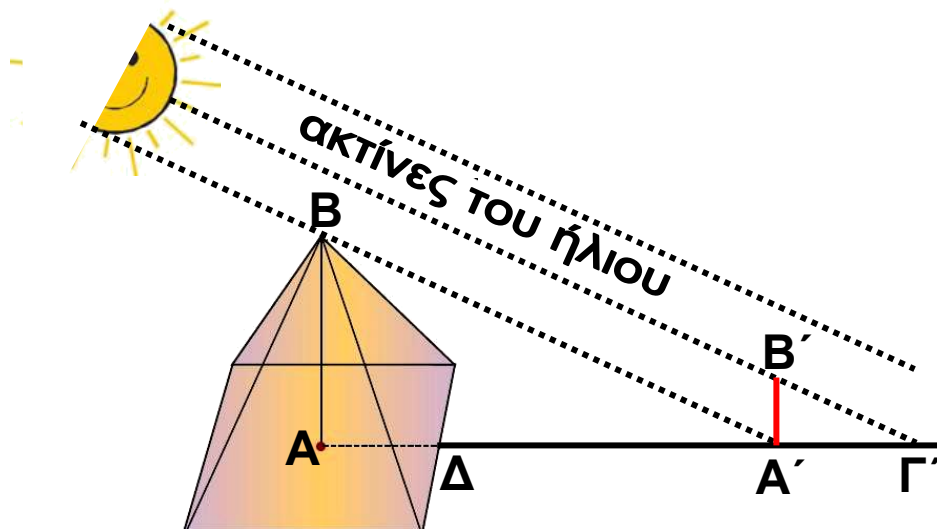


8 Ο γιος έχει ύψος 1,36 m. Ποιο είναι το ύψος του πατέρα του;



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7ου αιώνα π.Χ. Με τη βοήθεια της θεωρίας αυτής ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624 - 547 π.Χ.), ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της, αποσπώντας το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου, του Άμασι. Δε γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σ' αυτό το επίτευγμα του. Ο Πλούταρχος, ωστόσο, μας διηγείται τα εξής:



«Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δύο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ο ίδιος με το λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

Ο Διογένης ο Λαέρτιος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι ο Θαλής μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν το μήκος της ράβδου έγινε ίσο με το μήκος της σκιάς της.

Μπορείτε να εξηγήσετε, πώς ο Θαλής υπολόγισε τελικά το ύψος τι πυραμίδας, αφού μπορούσε να μετρήσει το μήκος της πλευράς της τετραγωνικής βάσης της πυραμίδας και της σκιάς $\Delta A'$;

1.6. Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων



✓ Μαθαίνω τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά ομοίων πολυγώνων.



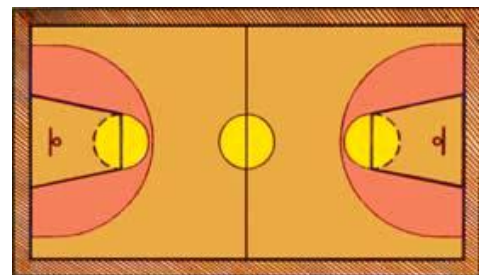
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε ένα γήπεδο μπάσκετ με κλίμακα 1 : 50. Το σχέδιο είχε διαστάσεις 60 cm x 30 cm.

1. Να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου.

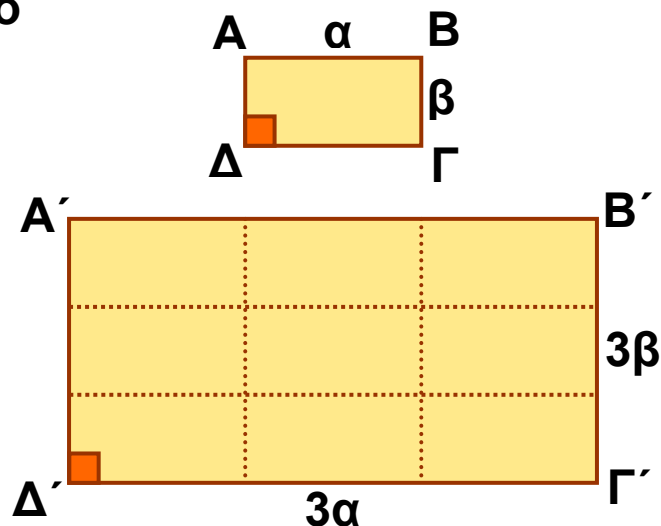
2. Να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του σχεδίου προς το αντίστοιχο εμβαδά του γηπέδου.

3. Να συγκρίνετε το λόγο που βρήκατε με το τετράγωνο της κλίμακας του σχεδίου.



Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α, β.

Αν σχεδιάσουμε και το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' με τριπλάσιες διαστάσεις, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι όμοιο προς το αρχικό με λόγο ομοιότητας λ = 3. Τα εμβαδά Ε', Ε των δύο ορθογωνίων είναι:



$$Ε' = 3α \cdot 3β \text{ και } Ε = α \cdot β$$

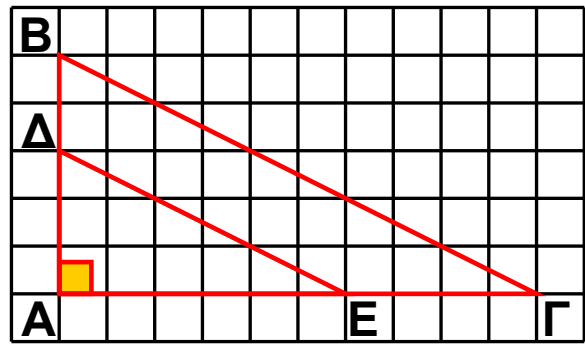
οπότε ο λόγος τους είναι:

$$\frac{Ε'}{Ε} = \frac{3α \cdot 3β}{α \cdot β} = 3^2$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ο λόγος των εμβαδών των ομοίων αυτών ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Ομοίως, αν στις κάθετες πλευρές AB , AG ενός ορθογωνίου τριγώνου $ABΓ$ πάρουμε τα σημεία Δ , E αντιστοίχως, ώστε

$$A\Delta = \frac{3}{5} AB \text{ και } AE = \frac{3}{5} AG,$$



τότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$, που είναι ομοίθετο του $AB\Gamma$ με κέντρο ομοιοθεσίας A και λόγο $\frac{3}{5}$. Άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{5}$.

Για τα εμβαδά ($A\Delta E$) και ($AB\Gamma$) των ομοίων αυτών τριγώνων ισχύει:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot AE}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AG} = \frac{A\Delta}{AB} \cdot \frac{AE}{AG} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος των εμβαδών των ομοίων τριγώνων $A\Delta E$, $AB\Gamma$ είναι και πάλι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Γενικά

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

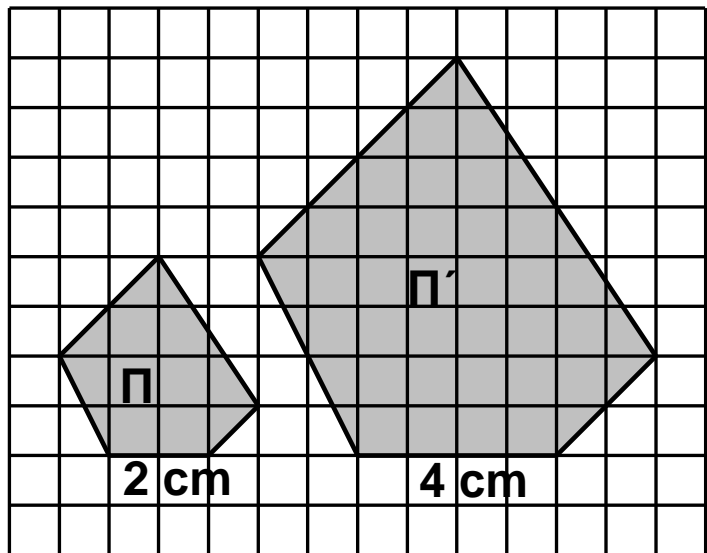
Για παράδειγμα, στο σχήμα της επόμενης σελίδας το πολύγωνο (Π) είναι όμοιο με το πολύγωνο (Π') και δύο ομόλογες πλευρές τους είναι 2 cm και 4 cm αντιστοίχως.

Ο λόγος ομοιότητας του (Π) προς το (Π') είναι $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

οπότε για τα εμβαδά

τους Ε και Ε' ισχύει

$$\frac{E}{E'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$



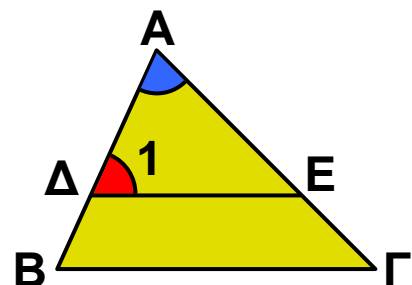
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{2}{3} AB$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 18 cm^2 , να βρεθεί το εμβαδόν του τραπέζιου ΔΕΓΒ.

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία \hat{A} κοινή και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$, γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Δηλαδή, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια με



λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$. Άρα για τα εμβαδά

$$(A\Delta E) \text{ και } (A\text{B}\Gamma) \text{ ισχύει } \frac{(A\Delta E)}{(A\text{B}\Gamma)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{(A\Delta E)}{18} = \frac{4}{9}$$

ή $(A\Delta E) = 8 \text{ cm}^2$. Το τραπέζιο ΔΕΓΒ έχει εμβαδόν $(\Delta E\Gamma B) = 18 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$.

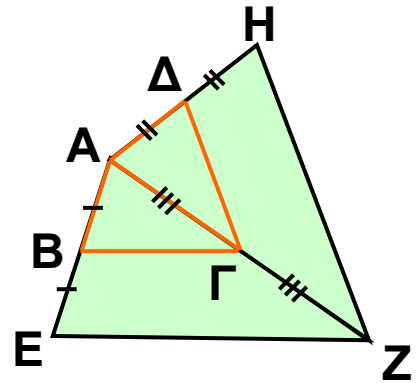
2 Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κατά ίσα τμήματα και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΕΖΗ. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΖΗ από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ;

Λύση

Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι ομοίωτο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο 2.

Άρα $ΑΕΖΗ \approx ΑΒΓΔ$, οπότε

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΕΖΗ)} = \left(\frac{ΑΒ}{ΑΕ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

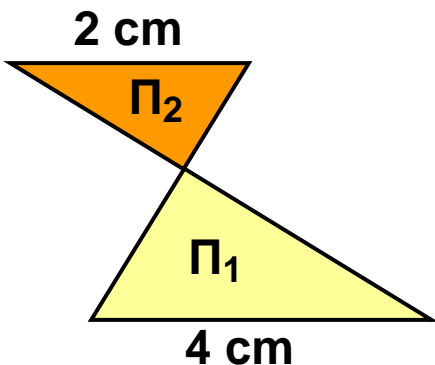


Επομένως, $(ΑΕΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ)$, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΕΖΗ έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

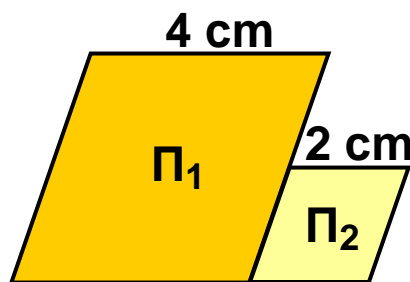


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

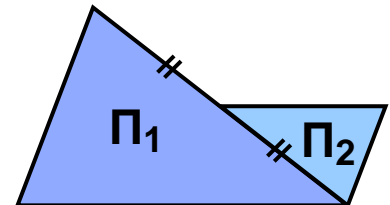
1 Αν τα πολύγωνα Π_1, Π_2 είναι όμοια, να συμπληρώσετε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά τους E_1, E_2 .



$E_1 = \dots E_2$



$E_1 = \dots E_2$



$E_1 = \dots E_2$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν τριπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται φορές μεγαλύτερο.

β) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται φορές μεγαλύτερο.

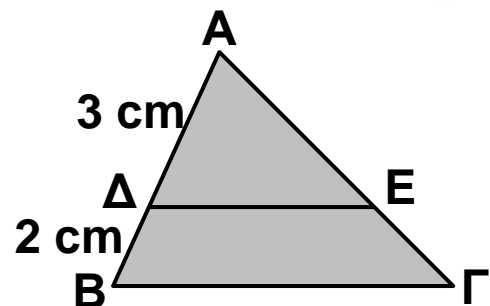
γ) Αν ένας ρόμβος έχει πλευρά 6 cm και ένας άλλος όμοιος του ρόμβος έχει πλευρά 3 cm, τότε ο δεύτερος ρόμβος έχει εμβαδόν φορές μικρότερο από το εμβαδόν του πρώτου ρόμβου.

3 Ένα ορθογώνιο Π_1 είναι όμοιο με το ορθογώνιο Π_2 με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$. Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του Π_1 , είναι το 16% του εμβαδού του Π_2 . Έχει δίκιο;

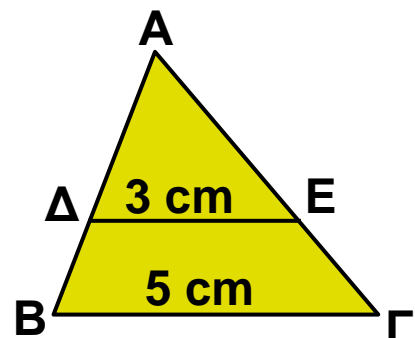
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{AB\Gamma}$



2 Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Αν το τρίγωνο $A\Delta E$ έχει εμβαδόν 18 cm^2 , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



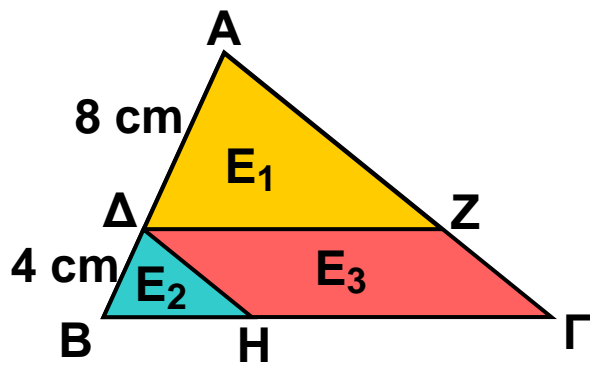
3 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = 1 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 5 \text{ cm}$, οι διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο O . Να υπολογίσετε πόσες φορές το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma\Delta$ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

4 Αν Δ , E , Σ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA , AB τριγώνου $AB\Gamma$ αντιστοίχως, τότε να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{(AZE)}{(AB\Gamma)}$ β) $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}$

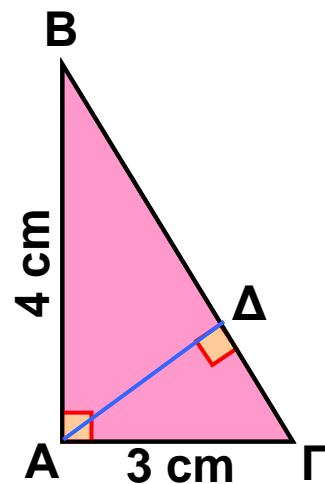
5 Αν E το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, $\Delta Z \parallel B\Gamma$ και $\Delta H \parallel A\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι για τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 ισχύουν:

$$E_1 = \frac{4}{9} E, \quad E_2 = \frac{1}{9} E, \quad \text{και} \quad E_3 = E_1.$$



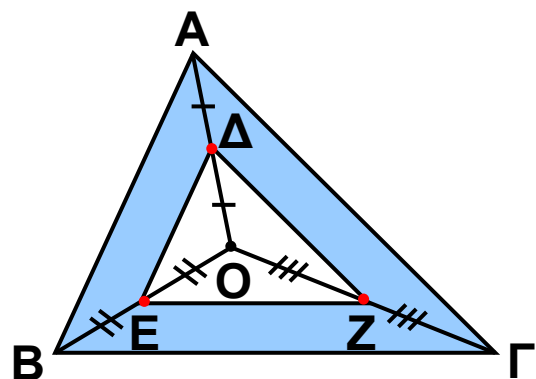
6 Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ να φέρετε το ύψος $A\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$ β) $\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)}$



7 Στο εσωτερικό τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε τυχαίο σημείο O . Αν Δ , E , Z είναι αντιστοίχως τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔEZ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$.



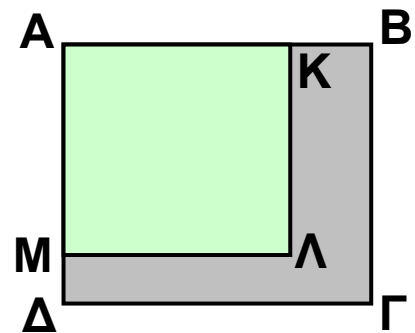
β) το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας είναι ίσο με τα $\frac{3}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

8 Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 40 cm^2 . Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα προκύψει, αν φωτοτυπηθεί:

α) μεγέθυνση 120% β) σμίκρυνση 75%.

9 Αν κάθε πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 30%, τότε να βρείτε πόσο % θα αυξηθεί το εμβαδόν του.

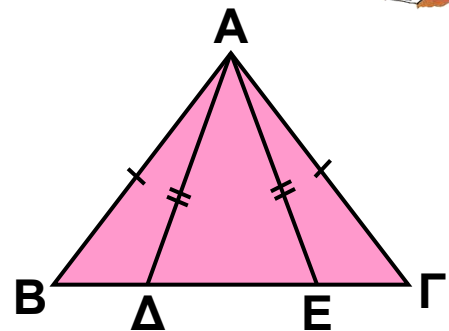
10 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου οικοπέδου μειώθηκαν κατά 20%, γιατί αυξήθηκε το πλάτος των διπλανών δρόμων. Να βρείτε πόσο % μειώθηκε το εμβαδόν του οικοπέδου.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



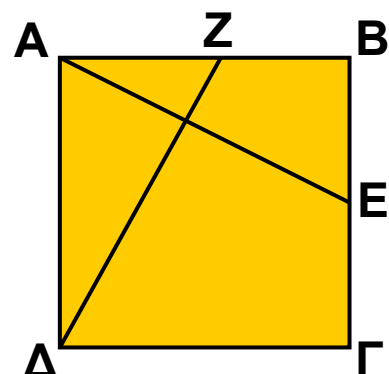
1 Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελή, να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.



2 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ζ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως, τέτοια ώστε $AZ = BE$.

Να αποδείξετε ότι:

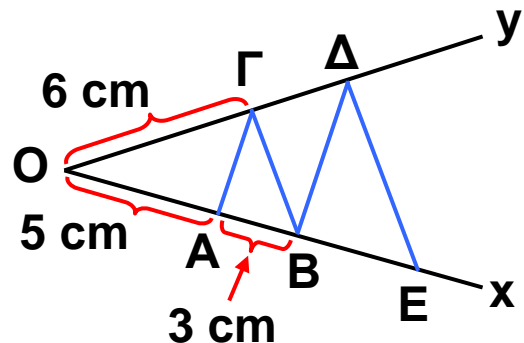
α) $\Delta Z = AE$ β) $\Delta Z \perp AE$.



3 Σε ευθεία ϵ να πάρετε τα διαδοχικά σημεία A , B και Γ . Προς το ίδιο μέρος της ευθείας να κατασκευάσετε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABZ και $B\Gamma H$. Να αποδείξετε ότι $AH = \Gamma Z$.

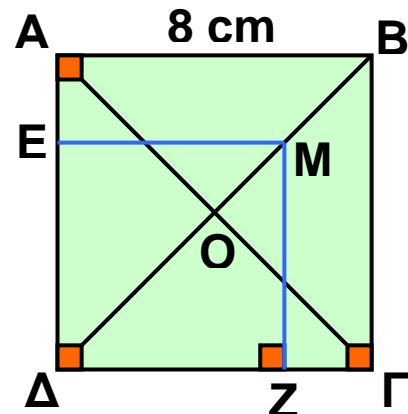
4 Σε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και οι διχοτόμοι BM και $B'M'$ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

5 Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Delta \parallel A\Gamma$ και $\Delta E \parallel \Gamma B$.
 α) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Delta$ και $O\epsilon$.
 β) Να αποδείξετε ότι $OB^2 = OA \cdot O\epsilon$.



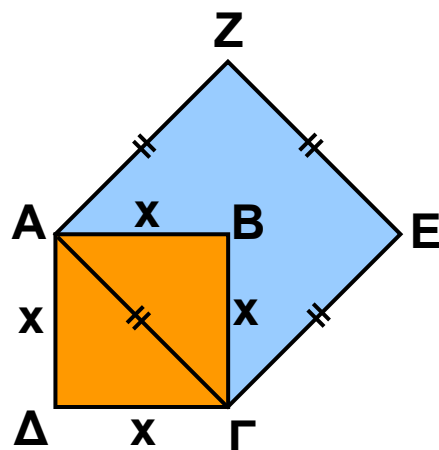
6 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 6 cm. Να βρείτε την πλευρά ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν.

7 Οι διαγώνιοι τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο O . Από το μέσον M του OB να φέρετε $ME \perp A\Delta$ και $MZ \perp \Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $ME\Delta Z$.



8 Με πλευρά τη διαγώνιο $A\Gamma$, τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ πλευράς x , να σχηματίσετε το τετράγωνο $A\Gamma E Z$.

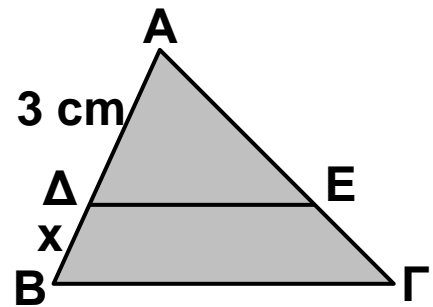
α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(A\Gamma E Z)}{(AB\Gamma\Delta)}$.



β) Αν $(ΑΓΕΖ) = 200 \text{ cm}^2$, να υπολογίσετε την πλευρά x .

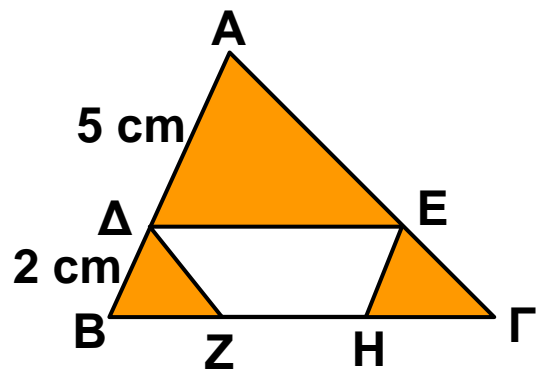
9 Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του διπλανού σχήματος είναι $ΔΕ // ΒΓ$ και $(ΑΔΕ) = \frac{9}{16} (ΑΒΓ)$.

Να υπολογίσετε το x .



10 Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του διπλανού σχήματος είναι $ΔΕ // ΒΓ$, $ΔΣ // ΑΓ$ και $ΕΗ // ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $BZ = ΓΗ$

β) $(ΔΕΗΖ) = \frac{16}{49} \cdot (ΑΒΓ)$



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

- **Ίσα τρίγωνα** λέγονται τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- **Κριτήρια ισότητας τριγώνων.** Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
 - Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (Π - Γ - Π).
 - Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Γ - Π - Γ).
 - Τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π - Π - Π).

- **Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
 - Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.
 - Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Β. ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

- Παράλληλες ευθείες, αν ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
- **Λόγος** ενός ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ προς το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ , όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.
- **Θεώρημα Θαλή.** Τρεις ή περισσότερες ευθείες, αν τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

Γ. ΟΜΟΙΘΕΣΙΑ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

- **Ομοιόθετο ενός σημείου A** ως προς το κέντρο O και λόγο λ ονομάζεται το σημείο A' της ημιευθείας OA για το οποίο ισχύει $OA' = \lambda \cdot OA$.
- Τα **ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα** που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.
- Οι **ομοιόθετες γωνίες** είναι ίσες.
- Δύο **ομοιόθετα πολύγωνα** έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

- **Όμοια πολύγωνα** λέγονται τα πολύγωνα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.
- Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και αντιστρόφως.
- Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.
- Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:
 - Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.
 - Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

2.4 Νόμος ημιτόνων - νόμος συνημιτόνων

Γενικές ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση

2.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$



✓ Θυμάμαι πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.



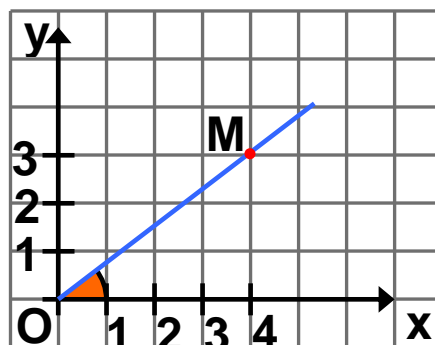
✓ Γνωρίζω πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.

✓ Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε την ημιευθεία OM , που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ω .

1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου M και να υπολογίσετε την απόσταση του M από την αρχή O .
2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



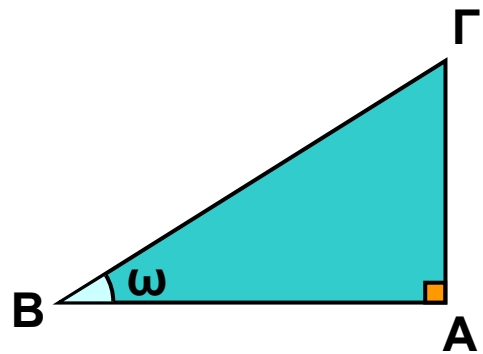
Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

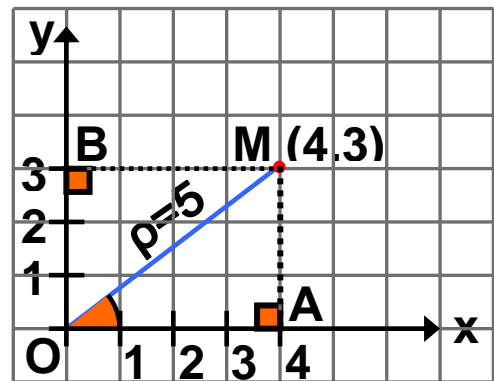
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρουμε το σημείο $M(4, 3)$ και φέρουμε $MA \perp x'x$ και



$MB \perp y'y$, τότε έχουμε $OA = 4$ και $OB = AM = 3$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = \widehat{x\hat{O}M}$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση $\rho = OM$ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.



Άρα

$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

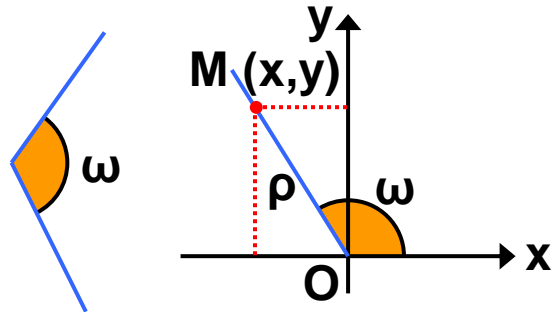
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία. Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω , τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy , έτσι ώστε η κορυφή της να συμπίπτει με την αρχή O , η μία πλευρά της να συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη

της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$, διαφορετικό από το O , τότε για την απόσταση $\rho = OM$ ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:



$$\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho} \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho} \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

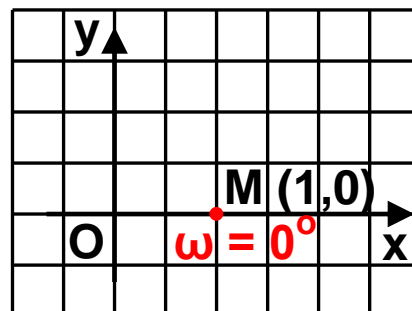
- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε είναι $x > 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, $\epsilon\phi\omega > 0$.
- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι $x < 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, $\epsilon\phi\omega < 0$.

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 90^\circ$ ή $\omega = 180^\circ$. Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0° , 90° και 180° .

Αν M σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το M(1,0), τότε $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0 \quad \sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

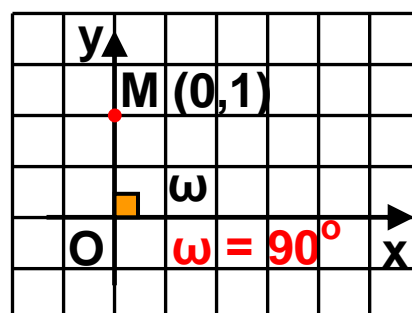
$$\epsilon\varphi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$



Αν M σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το M(0,1), τότε $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1 \quad \sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

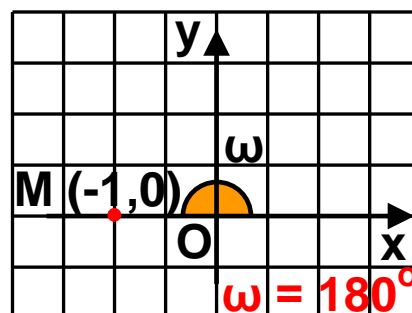
$\epsilon\varphi 90^\circ$ δεν ορίζεται (γιατί $x=0$)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το M(-1,0), τότε $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0 \quad \sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\epsilon\varphi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$



Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° , 45° και 60° που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\varphi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο $M(-4, 3)$. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$.

Λύση

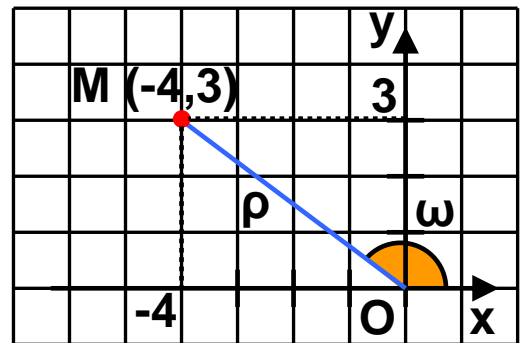
Για την απόσταση $OM = \rho$

$$\text{έχουμε: } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$



2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε ημιευθεία Oz , ώστε $\widehat{xOz} = 135^\circ$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο M με τετμημένη -1 . Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{xOM} = 135^\circ$.

Λύση

Φέρνουμε $MB \perp x'x$ και

$M\Gamma \perp y'y$. Επειδή $\widehat{xOM} = 135^\circ$

και $\widehat{xOy} = 90^\circ$ θα είναι

$\widehat{GOM} = 45^\circ$, οπότε το ορθογώνιο

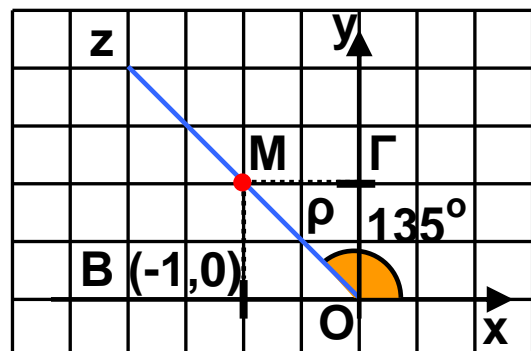
τρίγωνο $OM\Gamma$ είναι και ισοσκε-

λές. Άρα $O\Gamma = M\Gamma = OB = 1$ και

η τεταγμένη του σημείου M είναι $y = 1$. Δηλαδή έχουμε

$$M(-1, 1) \text{ και } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Άρα } \eta\mu 135^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 135^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



και $\epsilon\phi 135^\circ = \frac{y}{x} = -\frac{1}{-1} = -1.$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Για το σημείο $M(5, 12)$ είναι $\rho = OM = 13$. Αν $\omega = \widehat{XOM}$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$\eta\mu\omega = \dots\dots$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots$ $\epsilon\phi\omega = \dots\dots$

2 Αν η γωνία $\omega = \widehat{XOM}$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο $>$ ή $<$.

$\eta\mu\omega \dots 0$ $\sigma\upsilon\nu \dots 0$ $\epsilon\phi\omega \dots 0$

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 90^\circ$	
β. $\sigma\upsilon\nu 180^\circ$	1. 0
γ. $\epsilon\phi 0^\circ$	
δ. $\sigma\upsilon\nu 90^\circ$	2. -1
ε. $\eta\mu 0^\circ$	
στ. $\epsilon\phi 180^\circ$	3. 1
ζ. $\sigma\upsilon\nu 0^\circ$	
η. $\eta\mu 180^\circ$	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει

$$-1 \leq \sin \omega \leq 1.$$

β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $\epsilon\phi\omega < 0$.

γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega > 0$, τότε η ω είναι οξεία.

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{\chi\hat{O}M}$, όταν:

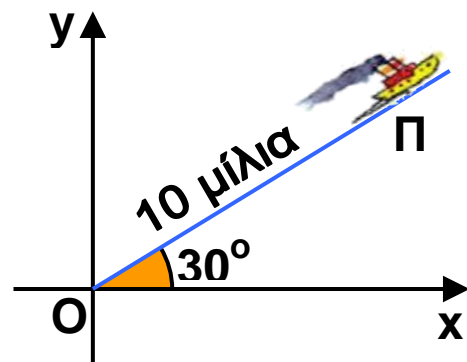
α) $M(3, 4)$ β) $M(-5, 12)$ γ) $M(0, 3)$

2 Μια ευθεία ϵ έχει εξίσωση $y = -2x$.

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ϵ και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της M που έχει τετμημένη -1 .

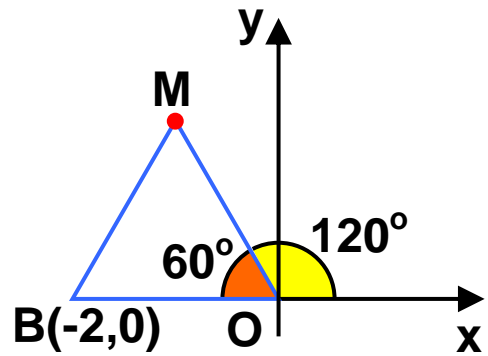
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{\chi\hat{O}M}$.

3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι O και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα Ox γωνία 30° . Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



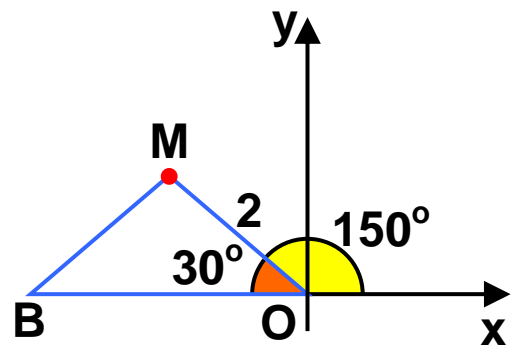
4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OBM είναι ισόπλευρο. Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του M .
 β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120° .



5 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OBM είναι ισοσκελές.

- α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του M είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
 β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150° .

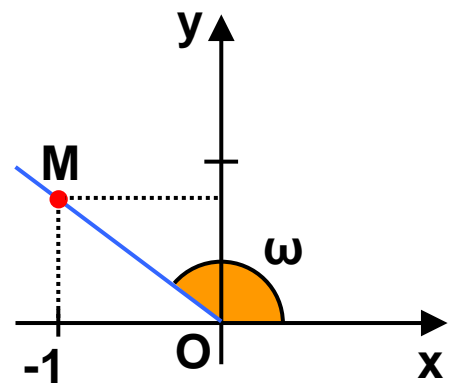


6 Στο διπλανό σχήμα είναι

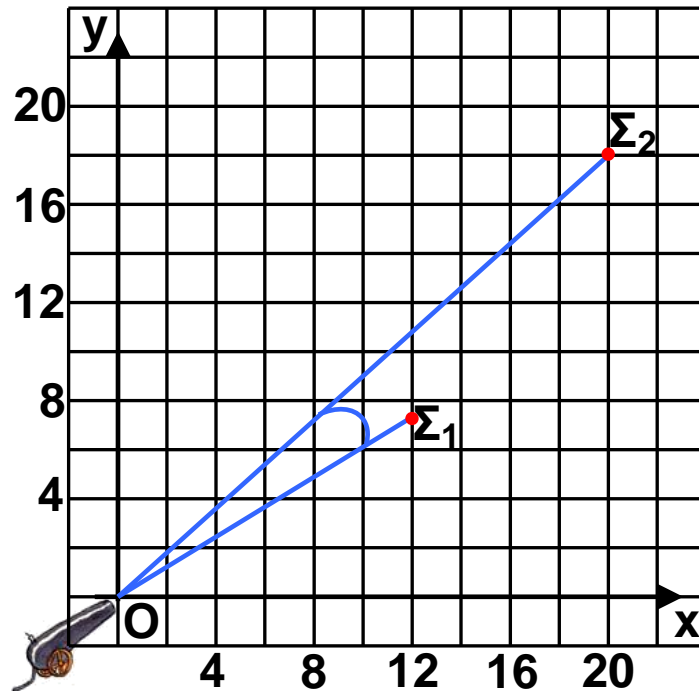
$\epsilon\phi\omega = -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη

του σημείου M είναι -1 , τότε να υπολογίσετε:

- α) την τεταγμένη του σημείου M .
 β) το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$.



7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση O και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο Σ_1 . Αν ο στόχος Σ_1 μετακινηθεί στη θέση Σ_2 , τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



2.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών



Γνωρίζω ποια σχέση συνδέει:

✓ Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών



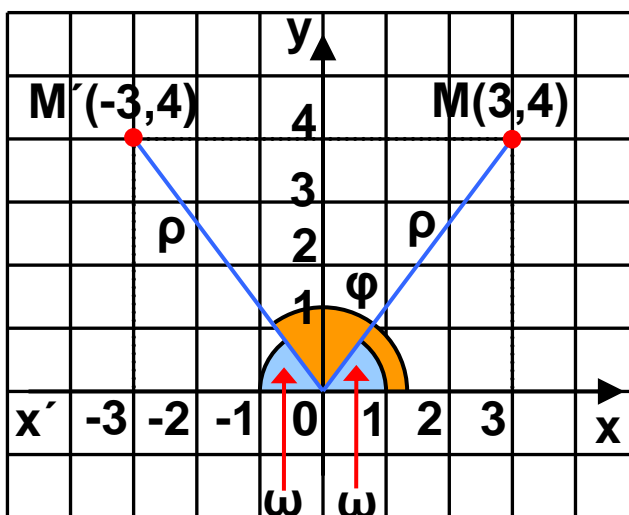
✓ Τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να πάρετε το σημείο $M(3, 4)$.

1. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου M' , που είναι συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $y'y$;
2. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $\widehat{xOM} = \omega$ και $\widehat{xOM'} = \varphi$ είναι παραπληρωματικές.
3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ και τη σχέση που τους συνδέει.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο $M(3, 4)$ και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο $M'(-3, 4)$ ως προς τον άξονα $y'y$. Αν ονομάσουμε ω τη γωνία \widehat{xOM} , τότε λόγω συμμετρίας είναι $\widehat{x'OM'} = \omega$, οπότε για



τη γωνία $\varphi = \widehat{xOM'}$ ισχύει $\varphi = 180^\circ - \omega$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού $\omega + \varphi = 180^\circ$. Έχουμε ακόμη ότι $\rho = OM = OM' = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, οπότε:

$$\eta\mu\omega = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\phi = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\phi = -\frac{3}{5}, \quad \epsilon\phi\phi = -\frac{4}{3}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι:

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω , $\phi = 180^\circ - \omega$ έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γενικά

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$

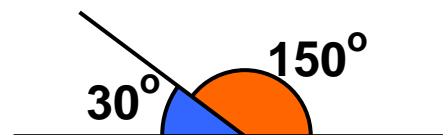
Με τους προηγούμενους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.

Για παράδειγμα,

$$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 150^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\phi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150° και 30° , αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο. Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180° , τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν $\eta\mu\chi = \eta\mu 35^\circ$ και $0 \leq \chi \leq 180^\circ$, τότε είναι $\chi = 35^\circ$ ή $\chi = 180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή $\chi = 35^\circ$ ή $\chi = 145^\circ$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \eta\mu 140^\circ + \sigma\upsilon\nu 170^\circ - \eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ$.

Λύση

Οι γωνίες 140° και 40° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή είναι $\eta\mu 140^\circ = \eta\mu 40^\circ$. Οι γωνίες 170° και 10° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή είναι $\sigma\upsilon\nu 170^\circ = -\sigma\upsilon\nu 10^\circ$. Άρα:

$$\begin{aligned} A &= \eta\mu 140^\circ + \sigma\upsilon\nu 170^\circ - \eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ = \\ &= \eta\mu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 10^\circ - \eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ = 0. \end{aligned}$$

2 Αν \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$ να αποδειχθεί ότι:

- α) $\eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma$
- β) $\sigma\upsilon\nu(A + B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$

Λύση

Οι γωνίες \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου έχουν άθροισμα 180° , δηλαδή είναι: $80^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Άρα:

$$\begin{aligned} \text{α) } \eta\mu(A + B) &= \eta\mu(80^\circ + 70^\circ) = \eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \\ &= \eta\mu 30^\circ = \eta\mu\Gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{β) } \sigma\upsilon\nu(A + B) &= \sigma\upsilon\nu(80^\circ + 70^\circ) = \sigma\upsilon\nu 150^\circ = \\ &= \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\sigma\upsilon\nu\Gamma. \end{aligned}$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- α) $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ$ β) $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$
γ) $\epsilon\phi 100^\circ = \epsilon\phi 80^\circ$ δ) $\epsilon\phi 75^\circ = -\epsilon\phi 105^\circ$
ε) $\sigma\upsilon\nu 110^\circ = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$ στ) $\eta\mu 140^\circ = -\eta\mu 40^\circ$

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

- α) Αν $\eta\mu x = \eta\mu 60^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$
β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$
γ) Αν $\epsilon\phi x = -\epsilon\phi 30^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 140^\circ$	1. $\eta\mu 40^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 140^\circ$	2. $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
γ. $\epsilon\phi 140^\circ$	3. $\epsilon\phi 40^\circ$
	4. $-\eta\mu 40^\circ$
	5. $-\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
	6. $-\epsilon\phi 40^\circ$

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) 120° β) 135° γ) 150°

2 Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ = 0$

β) $\epsilon\phi 122^\circ - \epsilon\phi 58^\circ \cdot \epsilon\phi 135^\circ = 0$

3 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = 1$

β) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = 2$

4 Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(140^\circ + x) = \eta\mu(40^\circ - x)$ και $\sigma\upsilon\nu(158^\circ - x) = -\sigma\upsilon\nu(22^\circ + x)$.

5 Να βρείτε τη γωνία x , όταν:

α) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $\eta\mu x = 1 - \eta\mu x$ γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ ε) $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ στ) $2\epsilon\phi x = 1 + \epsilon\phi x$

6 Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών του;

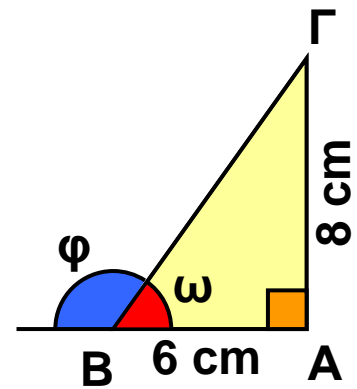
7 Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Β} = \hat{Δ} = 90^\circ$.

Να αποδείξετε ότι:

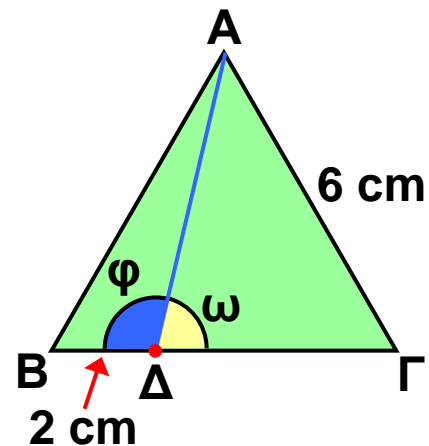
α) $\eta\mu Α + \sigma\upsilon\nu Α - \eta\mu Γ + \sigma\upsilon\nu Γ = 0$

β) $\epsilon\phi Α + \epsilon\phi Γ = 0$

8 Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ .



9 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $B\Delta = 2$ cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ .



2.3. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας



✓ Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και πως αποδεικνύονται.

✓ Τις χρησιμοποιώ τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για

την απόδειξη απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα να πάρετε ένα σημείο M στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο με όποιες συντεταγμένες θέλετε.

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \angle x\hat{O}M$.

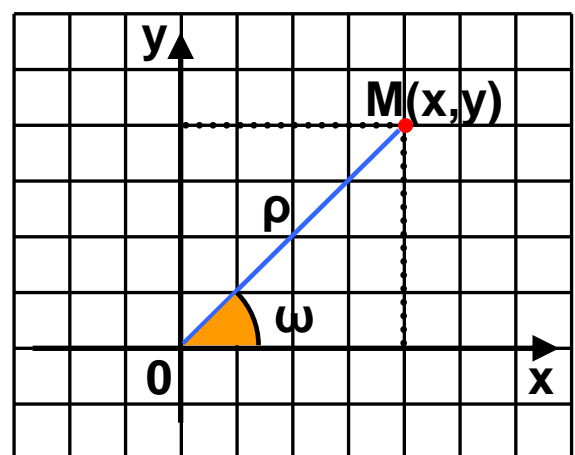
2. Να υπολογίσετε την παράσταση $(\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τα αποτελέσματα που βρήκαν οι συμμαθητές σας.

3. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και να τον συγκρίνετε με την $\epsilon\phi\omega$.

Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση ρ ενός σημείου $M(x, y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ή} \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το ρ^2 , τότε έχουμε:



$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \quad (1).$$

Επειδή $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, η ισότητα (1) γίνεται:

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 = 1 \text{ ή συντομότερα } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\omega$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ ισχύει

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**, γιατί με τη βοήθεια τους αποδεικνύουμε και άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Λύση

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \text{ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \pm \frac{4}{5} .$$

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$$

Από την ταυτότητα $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ έχουμε $\epsilon\phi\omega = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$,
οπότε $\epsilon\phi\omega = -\frac{3}{4}$.

2 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega = 2$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Λύση

Έχουμε $\epsilon\phi\omega = 2$ δηλαδή $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = 2$, οπότε

$$\eta\mu\omega = 2\sigma\upsilon\nu\omega \quad (1).$$

Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ αντικαταστήσουμε το $\eta\mu\omega$ με το $2\sigma\upsilon\nu\omega$ έχουμε

$$(2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad \text{ή} \quad 4\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad \text{ή}$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{5},$$

$$\text{άρα } \sin \omega = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ οπότε } \sin \omega = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} .$$

$$\text{Από την ισότητα (1) έχουμε } \eta \mu \omega = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \eta \mu \omega = \frac{2\sqrt{5}}{5} .$$

3 Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x)^2 + 2\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x = 1$

β) $1 + \epsilon \varphi^2 \omega = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 \omega}$

Λύση

α) Έχουμε

$$(\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x)^2 + 2\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x =$$

$$\eta \mu^2 x - 2\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu^2 x + 2\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x =$$

$$\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x = 1$$

β) Έχουμε

$$1 + \epsilon \varphi^2 \omega = 1 + \left(\frac{\eta \mu \omega}{\sigma \upsilon \nu \omega} \right)^2 = 1 + \frac{\eta \mu^2 \omega}{\sigma \upsilon \nu^2 \omega} = \frac{\sigma \upsilon \nu^2 \omega + \eta \mu^2 \omega}{\sigma \upsilon \nu^2 \omega} =$$

$$= \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 \omega}$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν $\eta \mu^2 \omega = \frac{3}{5}$ τότε $\sigma \upsilon \nu^2 \omega = \frac{2}{5}$

β) Αν $\sin \omega = 0$, τότε δεν ορίζεται η εφω.

γ) Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta \mu^2 \omega = \sigma \upsilon \nu^2 \omega - 1$.

δ) Αν $\eta \mu \omega = \frac{5}{13}$ και $\sin \omega = \frac{12}{13}$, τότε $\epsilon \varphi \omega = \frac{5}{12}$

2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\eta\mu\omega = 1$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$

β) Αν $\eta\mu\omega = 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ είναι ίσο με:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{4}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ ή $-\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$ ή $-\frac{4}{5}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

2 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

3 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

4 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{1}{3}\eta\mu\omega + \frac{2}{3}\sigma\upsilon\nu\omega - \frac{1}{10}\epsilon\phi\omega.$$

5 Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu^3\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega = \eta\mu\omega$

β) $\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = \eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$

6 Αν είναι $x = 3\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = 3\eta\mu\omega$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $x\sigma\upsilon\nu\omega + y\eta\mu\omega = 3$ β) $x^2 + y^2 = 9$

7 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

β) $\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$

8 Να αποδείξετε ότι:

α) $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2$

β) $(\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega - \alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

9 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu^2x \epsilon\phi^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$ β) $\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x$

10 Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$ β) $\epsilon\phi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\eta\mu 50^\circ \eta\mu 130^\circ - \sigma\upsilon\nu 50^\circ \sigma\upsilon\nu 130^\circ$

β) $\eta\mu^2 14^\circ + \eta\mu^2 114^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 166^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 66^\circ$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\phi 70^\circ \sigma\upsilon\nu 70^\circ - \epsilon\phi 110^\circ \sigma\upsilon\nu 110^\circ = 0$

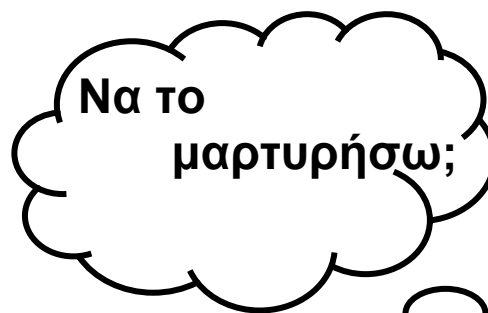
β) $\epsilon\phi^2 40^\circ \sigma\upsilon\nu^2 40^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 140^\circ = 1$

13 Αν είναι $\alpha = 30^\circ$ και $\beta = 60^\circ$, τότε να αποδείξετε ότι:
 $\eta\mu^2\alpha \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΙΝΙΓΜΑ

14 Είναι γωνία, όχι οξεία,
ημίτονο έχει τον αριθμό $\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}$
και συνημίτονο έχει τον αριθμό $\frac{\lambda}{\lambda + 2}$

Ποια γωνία είναι;



2.4. Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων

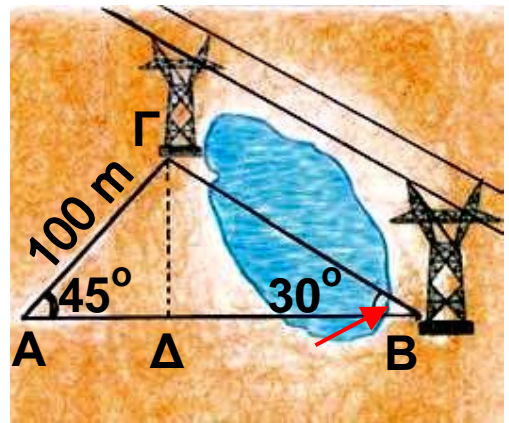


✓ Γνωρίζω τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και μαθαίνω να τους εφαρμόζω στη λύση προβλημάτων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση ΓB δύο πυλώνων της $\Delta\text{E}\text{H}$, γιατί ανάμεσα τους παρεμβάλλεται μια λίμνη. Γι' αυτό επιλέγει μια θέση A που απέχει 100 m από τον πυλώνα Γ και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο μετράει τις γωνίες $\text{A} = 45^\circ$ και $\text{B} = 30^\circ$.



1. Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση ΓB , αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση ΓB πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι

λόγοι $\frac{\Gamma\text{B}}{\eta\mu 45^\circ}$ και $\frac{\Gamma\text{A}}{\eta\mu 30^\circ}$ είναι ίσοι.

2. Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

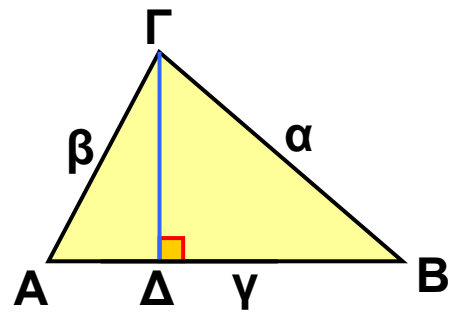
A Νόμος των ημιτόνων

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του ή μια πλευρά και μια οξεία γωνία του. Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου όταν δεν είναι ορθογώνιο;

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε το ύψος $\Gamma\Delta$. Από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta B$ έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \beta\eta\mu A \quad (1)$$

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \alpha\eta\mu B \quad (2)$$



Από τις ισότητες (1), (2) έχουμε

$$\beta\eta\mu A = \alpha\eta\mu B \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

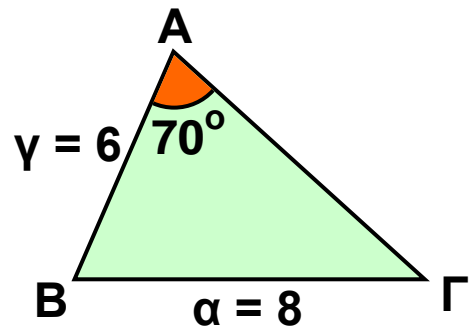
Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται νόμος των ημιτόνων.

Γενικά

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με το νόμο των ημιτόνων, αν γνωρίζουμε μια πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μια άλλη πλευρά ή γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του (πλευρές - γωνίες).

Για παράδειγμα, στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος μπορούμε με το νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$, αφού



$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{8}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{6}{\eta\mu\Gamma}$$

$$\text{ή } 8\eta\mu\Gamma = 6\eta\mu 70^\circ \quad \text{ή } \eta\mu\Gamma = \frac{6\eta\mu 70^\circ}{8} \quad \text{ή } \eta\mu\Gamma = \frac{6 \cdot 0,94}{8} \quad \text{ή} \\ \eta\mu\Gamma = 0,705.$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.

B Νόμος των συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε με το νόμο των ημιτόνων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου, αφού δε γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι γωνία της.

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος $\Gamma\Delta$, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχουμε:

$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2 \quad (1).$$

Επειδή $\Delta B = \gamma - A\Delta$, η ισότητα (1) γράφεται:

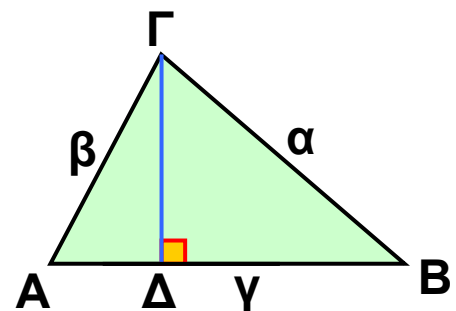
$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + A\Delta^2 - 2\gamma \cdot A\Delta \quad (2).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{\beta} \quad \text{ή} \quad A\Delta = \beta \sigma\upsilon\nu A.$$

Άρα η ισότητα (2) γράφεται:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$



Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται νόμος των συνημιτόνων.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\text{B}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\text{Γ}$$

Με το νόμο των συνημιτόνων, αν σ' ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του.

Για παράδειγμα, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 9 \text{ cm}$, $\beta = 7 \text{ cm}$ και $\gamma = 6 \text{ cm}$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.

Π.χ. για να υπολογίσουμε

τη γωνία $\hat{\text{B}}$ έχουμε:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\text{B} \text{ ή}$$

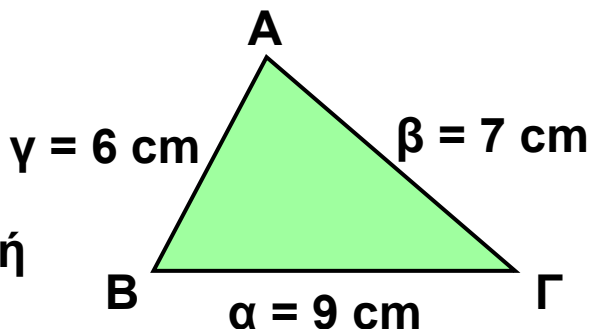
$$7^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sigma\upsilon\nu\text{B} \text{ ή}$$

$$49 = 36 + 81 - 108 \cdot \sigma\upsilon\nu\text{B} \text{ ή}$$

$$108 \sigma\upsilon\nu\text{B} = 68 \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\text{B} = \frac{68}{108} = 0,629. \text{ Από τους τριγωνομετρικούς}$$

πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{\text{B}} = 51^\circ$.





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\alpha = 30$ cm. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Gamma}$ και η πλευρά β .

Λύση

Από τη σχέση
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ έχουμε

$$120^\circ + 45^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή}$$

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - 165^\circ \text{ ή } \hat{\Gamma} = 15^\circ.$$

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \text{ ή } \frac{30}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} \text{ ή}$$

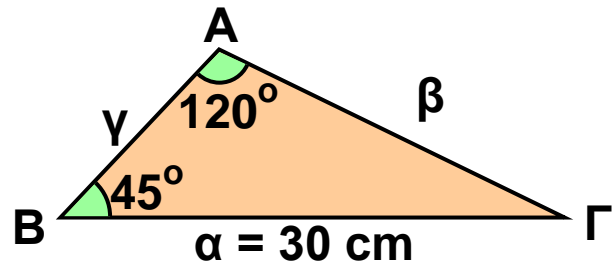
$$\text{ή } \beta \cdot \eta\mu 120^\circ = 30 \cdot \eta\mu 45^\circ \text{ (1).}$$

$$\text{Επειδή } \eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

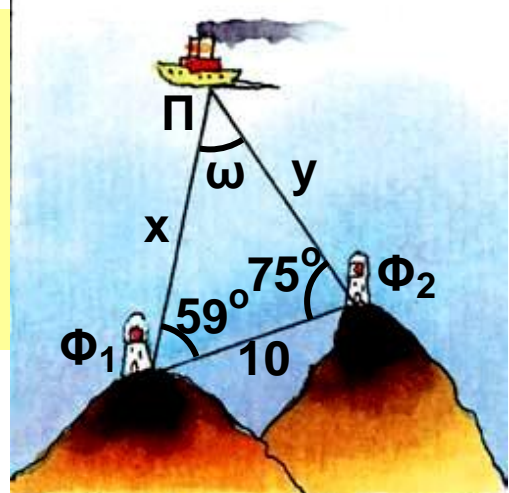
και $\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ η ισότητα (1) γράφεται:

$$\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \beta = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ ή } \beta = \frac{30\sqrt{6}}{3} \text{ ή}$$

$$\beta = 10\sqrt{6} \text{ cm.}$$



2 Δύο φάροι Φ_1 , Φ_2 απέχουν μεταξύ τους 10 μίλια. Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε μια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις x, y του πλοίου από κάθε φάρο.



Λύση

Στο τρίγωνο $\Pi\Phi_1\Phi_2$ έχουμε
 $\omega + 59^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, οπότε $\omega = 46^\circ$. Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{10}{\eta\mu 46^\circ} = \frac{x}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{y}{\eta\mu 59^\circ} .$$

Από την ισότητα $\frac{10}{\eta\mu 46^\circ} = \frac{x}{\eta\mu 75^\circ}$ έχουμε $x = \frac{10 \cdot \eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$

ή $x = \frac{10 \cdot 0,966}{0,719} = 13,44$ μίλια.

Από την ισότητα $\frac{10}{\eta\mu 46^\circ} = \frac{y}{\eta\mu 59^\circ}$ έχουμε $y = \frac{10 \cdot \eta\mu 59^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$

ή $y = \frac{10 \cdot 0,857}{0,719} = 11,92$ μίλια.

Επομένως το πλοίο Π απέχει από το φάρο Φ_1 13,44 μίλια και από το φάρο Φ_2 11,92 μίλια.

3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $\beta = 4$ cm και $\gamma = 2$ cm. Να υπολογιστεί η πλευρά α και οι γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.

Λύση

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{A} \text{ ή}$$

$$\alpha^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ$$

$$\text{ή } \alpha^2 = 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2} \text{ ή } \alpha^2 = 12.$$

$$\text{Άρα } \alpha = \sqrt{12} \text{ δηλαδή } \alpha = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Ομοίως έχουμε:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\hat{B} \text{ ή}$$

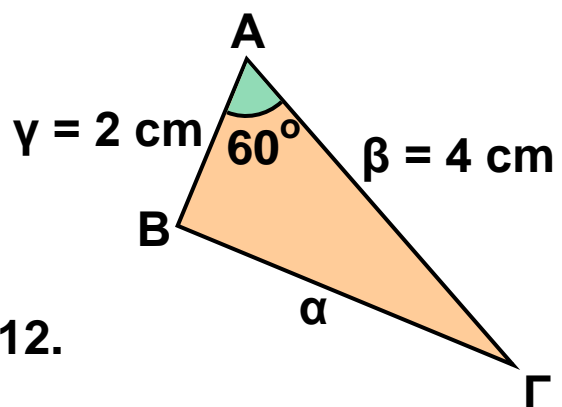
$$4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B} \text{ ή}$$

$$16 = 4 + 12 - 8\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B} \text{ ή } 8\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B} = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\hat{B} = 0,$$

οπότε $\hat{B} = 90^\circ$.

Αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ και $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$,

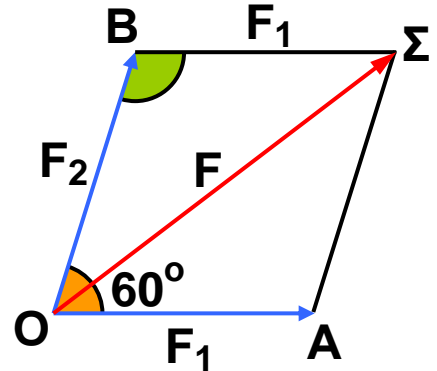
έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.



4 Δύο δυνάμεις $F_1 = 4 \text{ N}$ και $F_2 = 3 \text{ N}$ εφαρμόζονται σ' ένα υλικό σημείο O και σχηματίζουν γωνία $\omega = 60^\circ$. Να υπολογιστεί η συνισταμένη τους F .

Λύση

Η συνισταμένη F των δυνάμεων F_1, F_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου $ΟΑΣΒ$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $ΟΒΣ$ και επειδή $ΒΣ = F_1$, έχουμε:



$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\text{συν}\omega \quad (1).$$

Οι γωνίες όμως ω και 60° είναι παραπληρωματικές, οπότε $\text{συν}\omega = -\text{συν}60^\circ$ και ο τύπος (1) γράφεται:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\text{συν}60^\circ \quad (1).$$

$$F^2 = 4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad F^2 = 37, \text{ οπότε } F = \sqrt{37} \text{ N}$$

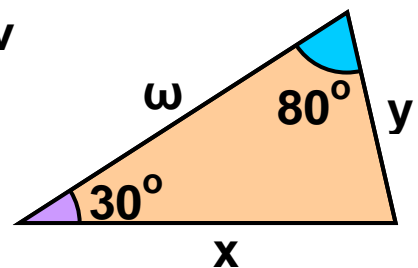
$$\text{ή } F = 6,08 \text{ N}.$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος

_____ = _____ = _____



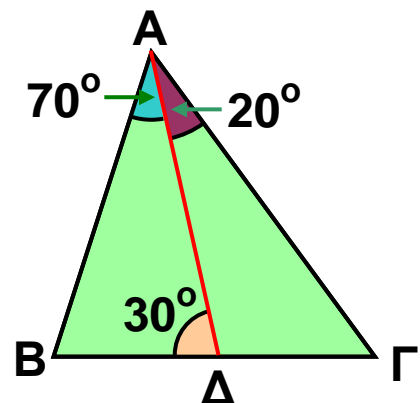
2 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο $ΑΒΔ$

_____ = _____ = _____

α) στο τρίγωνο $ΑΔΓ$

_____ = _____ = _____



3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu B = \beta \eta\mu A$.

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^\circ, \hat{\Gamma} = 100^\circ$, τότε $\frac{\beta}{\eta\mu 100^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 20^\circ}$.

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$.

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 70^\circ, \hat{\Gamma} = 80^\circ$, τότε ισχύει $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80^\circ$.

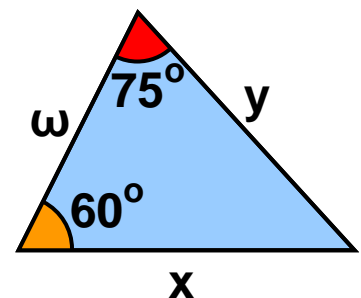
ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, τότε ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$.

4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων:

$x^2 = \dots\dots\dots$

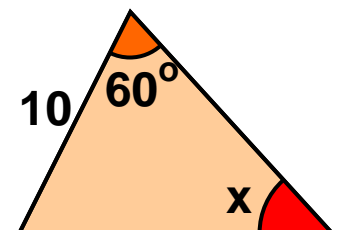
$y^2 = \dots\dots\dots$

$\omega^2 = \dots\dots\dots$

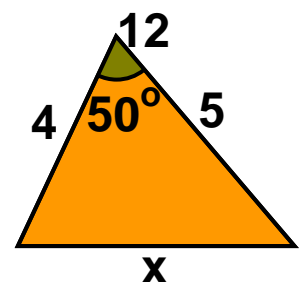


5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

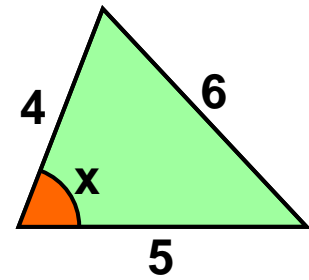
α) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των $\dots\dots\dots$ από την ισότητα $\dots\dots\dots$



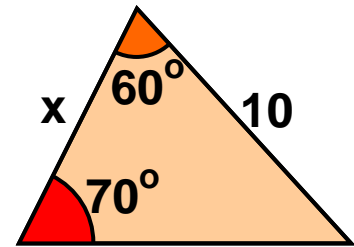
β) Η πλευρά x υπολογίζεται με το νόμο των $\dots\dots\dots$ από την ισότητα $\dots\dots\dots$



γ) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των από την ισότητα



δ) Η πλευρά x υπολογίζεται με το νόμο των από την ισότητα

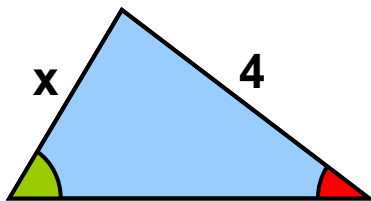


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

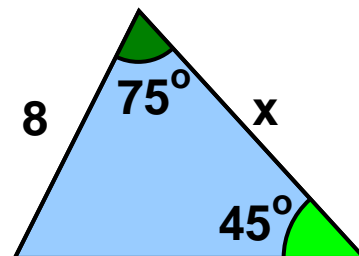


1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

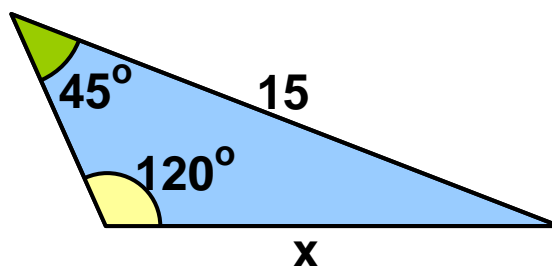
α)



γ)

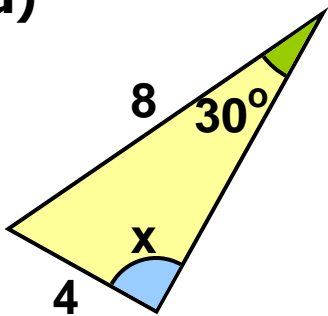


β)

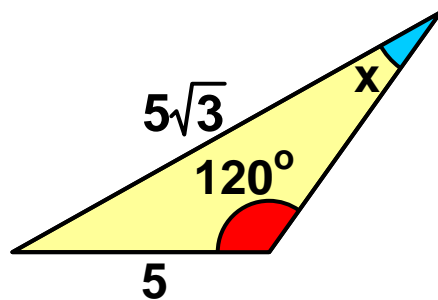


2 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

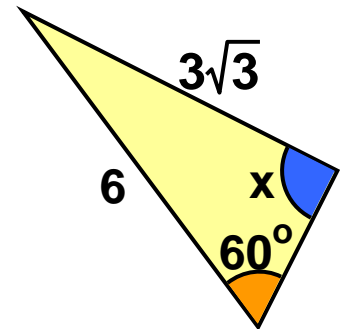
α)



β)



γ)



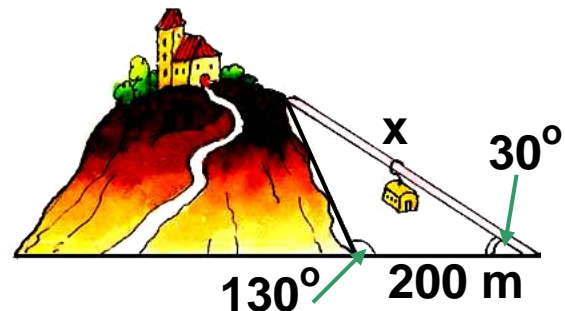
3 Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν:

α) $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\hat{B} = 30^\circ$

β) $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

4 Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 30^\circ$, $\beta = 10$, $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5 Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής x του εναέριου σιδηροδρόμου στο διπλανό σχήμα. (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



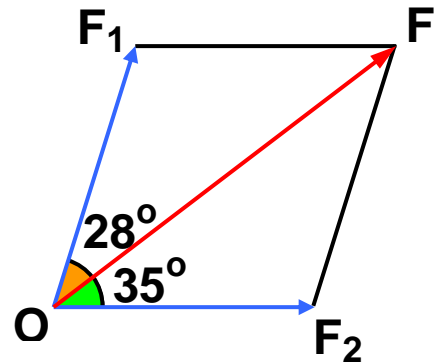
6 Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή του των Μαθηματικών είπε:

- Κύριε, σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $\hat{B} = 60^\circ$ και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του. Πώς λύνεται;

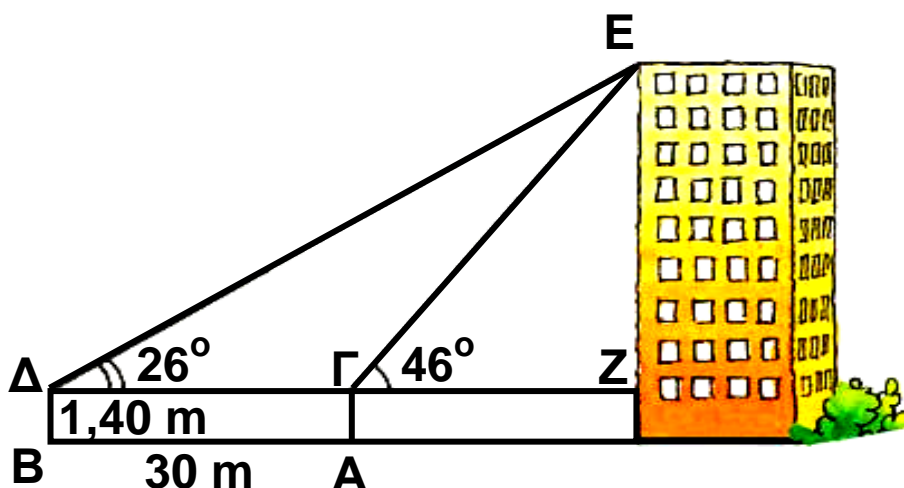
Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση τού είπε:

- Κάποιο λάθος έχεις κάνει, γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.
Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής;

7 Οι δυνάμεις F_1 , F_2 έχουν συνισταμένη $F = 10\text{ N}$ που σχηματίζει με την F_1 γωνία 28° και με την F_2 γωνία 35° . Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1 , F_2 . (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

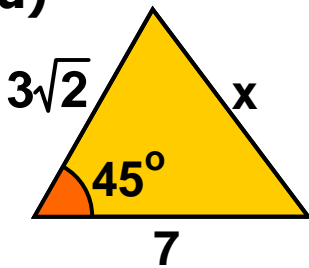


8 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός ψηλού κτιρίου τοποθέτησε το γωνιόμετρό του στο σημείο A και βρήκε τη γωνία $\widehat{E\Gamma Z} = 46^\circ$. Στη συνέχεια μετακινήθηκε κατά 30 m, τοποθέτησε το γωνιόμετρο στη θέση B και βρήκε τη γωνία $\widehat{E\Delta\Gamma} = 26^\circ$. Ποιο ήταν το ύψος του κτιρίου, αν το γωνιόμετρο έχει ύψος 1,4 m. (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

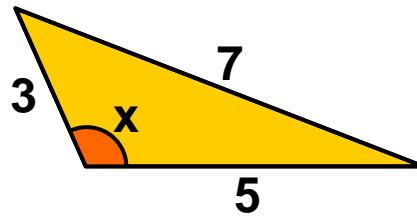


9 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

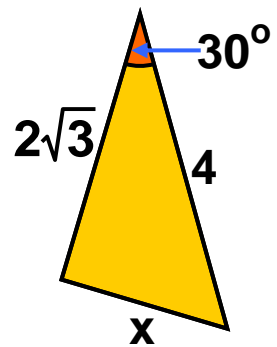
α)



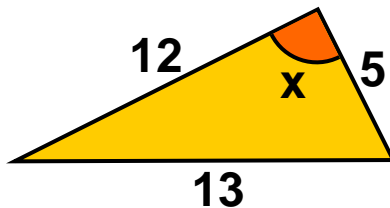
β)



γ)

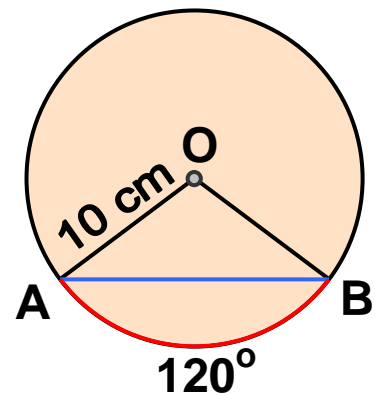


δ)



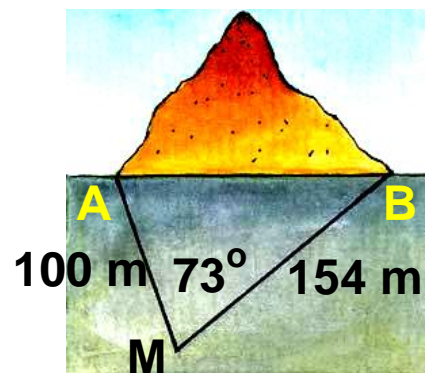
10 Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β , γ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, αν $\hat{A} = 120^\circ$ και $\alpha = 3\sqrt{3}$.

11 Σε κύκλο με ακτίνα $R = 10$ cm, η χορδή AB αντιστοιχεί σε τόξο 120° . Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής.



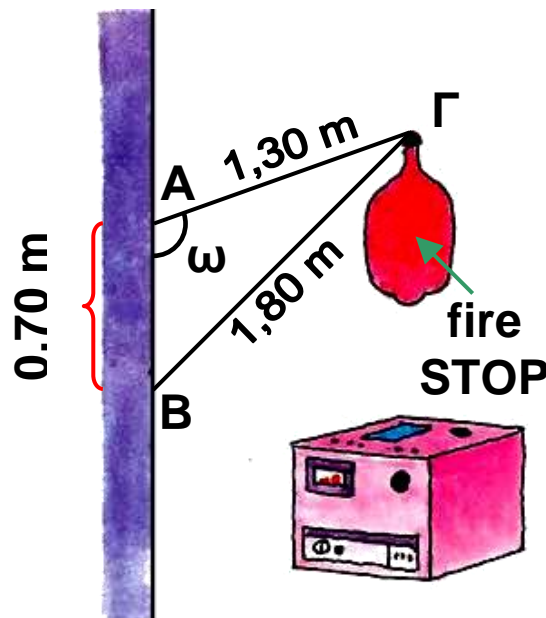
12 Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 4$, $B\Gamma = 3$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

13 Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει μια προσφορά για την κατασκευή μιας σήραγγας AB . Ένας μηχανικός της εταιρείας με τους συνεργάτες του έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση M που η απόστασή του από το A ήταν 100 m και



από το Β ήταν 154 m. Αφού μέτρησε τη γωνία $\widehat{A\hat{M}B} = 73^\circ$, ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας. Είχε δίκιο ή άδικο; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

14 Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα ενός καλοριφέρ. Ένας τεχνικός θέλει να κατασκευάσει τη βάση στήριξης του και διαθέτει τρεις μεταλλικές βέργες $AB = 0,70$ m, $AG = 1,30$ m και $BG = 1,80$ m. Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις βέργες AB , AG , όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω . Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε, ώστε να βοηθήσετε τον τεχνικό; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ : Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων

Υπολογισμός του ύψους ενός ψηλού κτιρίου, ενός βουνού, της απόστασης δύο υφάλων, δύο φάρων κ.τ.λ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



1 Να αποδείξετε ότι:

α) $(1 - \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = 2(1 - \eta\mu\chi)(1 + \sigma\upsilon\nu\chi)$

β) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$

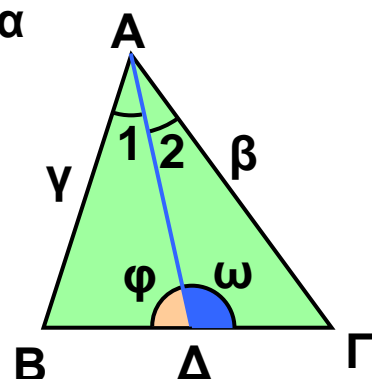
2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $O\chi\gamma$ δίνεται το σημείο $A(4, 0)$ και το σημείο M που έχει τετμημένη -5 και η απόστασή του από το O είναι 13 . Αν ω είναι η γωνία $\hat{A}\hat{O}M$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την απόσταση AM .

3 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 30$ cm, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 75^\circ$. Να χαράξετε τη διχοτόμο $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου $A\Delta$.

4 Αν $A\Delta$ διχοτόμος τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

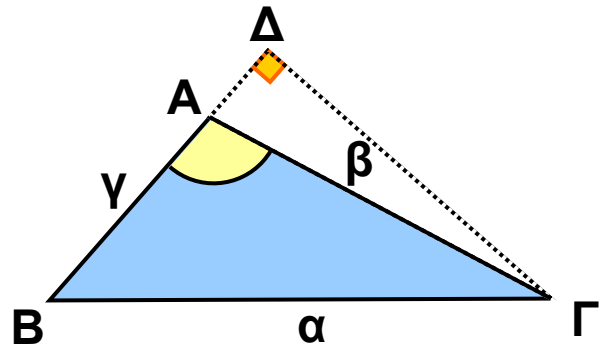
α) $\frac{\gamma}{B\Delta} = \frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu A_1}$

β) $\frac{\beta}{\Gamma\Delta} = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu A_2}$ γ) $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

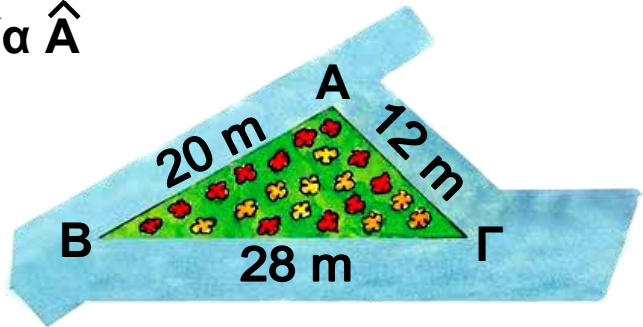


5 α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος

είναι $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A$.



β) Να υπολογίσετε την γωνία \hat{A} και το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



6 α) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 2$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

7 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha(\eta\mu B - \eta\mu \Gamma) + \beta(\eta\mu \Gamma - \eta\mu A) + \gamma(\eta\mu A - \eta\mu B) = 0$

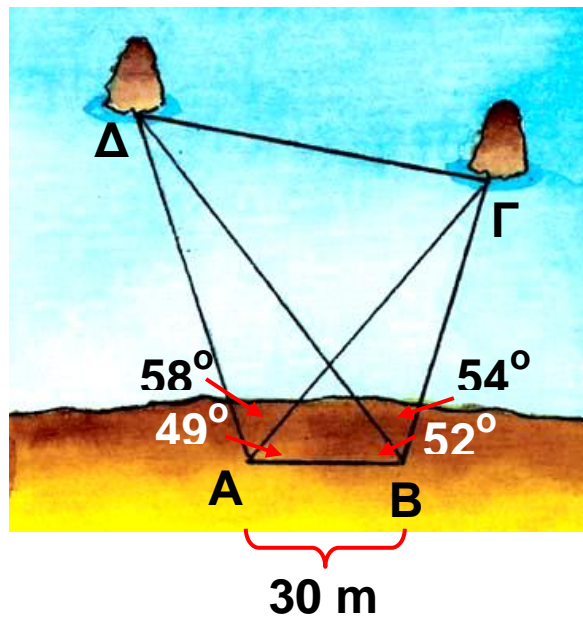
β) $\alpha = \beta \sigma\upsilon\nu \Gamma + \gamma \sigma\upsilon\nu B$

γ) $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha(\beta \sigma\upsilon\nu \Gamma - \gamma \sigma\upsilon\nu B)$

δ) $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

8 Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και $\sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{3}{4}$

9 Δύο φίλοι τοποθέτησαν τα γωνιόμετρά τους στις θέσεις A, B μιας ακτής και παρατήρησαν δύο βράχους που προεξείχαν από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν η απόσταση AB ήταν 30 m και τα αποτελέσματα των μετρήσεων τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, τότε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο βράχων. (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

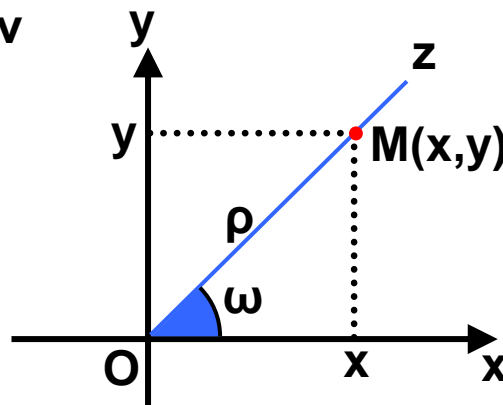
Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy , αν είναι $\omega = \widehat{xOz}$, και $M(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της πλευράς Oz , διαφορετικό από το O , τότε:

$$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \text{ συν}\omega = \frac{x}{\rho}, \text{ εφ}\omega = \frac{y}{x}.$$

Π.χ. αν $M(1, 2)$, τότε $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$\eta\mu\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ συν}\omega = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1\sqrt{5}}{5}, \text{ εφ}\omega = \frac{2}{1} = 2.$$



• Τα **πρόσημα** των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω με $0^\circ < \omega < 180^\circ$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ω	0°	90°	180°
$\eta\mu\omega$	+	+	+
$\text{συν}\omega$	+	+	-
$\text{εφ}\omega$	+	+	-

• Οι **παραπληρωματικές γωνίες** έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \quad \text{συν}\omega(180^\circ - \omega) = -\text{συν}\omega$$

$$\text{εφ}(180^\circ - \omega) = -\text{εφ}\omega$$

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. } \eta\mu 160^\circ &= \eta\mu 20^\circ \\ \epsilon\phi 160^\circ &= -\epsilon\phi 20^\circ \end{aligned}$$

$$\sigma\upsilon\nu 160^\circ = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$$

- Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad (\text{Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία } \omega).$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad (\text{Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία } \omega \text{ με } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0)$$

$$\text{Π.χ. } \eta\mu^2 35^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 35^\circ = 1, \epsilon\phi 35^\circ = \frac{\eta\mu 35^\circ}{\sigma\upsilon\nu 35^\circ}$$

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

- Νόμος των ημιτόνων:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

- Νόμος των συνημιτόνων:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sigma\upsilon\nu \Gamma$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° – 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	,01908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,2698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Β΄ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 – Ισότητα τριγώνων	9
1.2 – Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων	29
1.3 – Θεώρημα του Θαλή	42
1.4 – Ομοιοθεσία	49
1.5 – Ομοιότητα	58
Α. Όμοια πολύγωνα	58
Β. Όμοια τρίγωνα	66
1.6 – Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων	75
Γενικές ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου.....	81
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση 1ου Κεφαλαίου.....	83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 – Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$	88
2.2 – Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών	97
2.3 – Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας	103
2.4 – Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων.....	123
Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου	126
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση 2ου Κεφαλαίου.....	127
Τριγωνομετρικοί Πίνακες.....	129

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.