

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

**Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.10 – 3.3**

**Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία
Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων
σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»**

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος

**Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του
Παιδαγωγ. Ινστιτούτου**

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και
παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με
βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»**

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου

Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου

Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου

Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

**Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό
Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.**

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.10 – 3.3

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Δημ. Αργυράκης, *Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Παναγ. Βουργάνας, *Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Κων/νος Μεντής, *Μαθημ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Σταμ. Τσικοπούλου, *Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*
Μιχαήλ Χρυσοβέργης, *Σχολ. Σύμβουλος Μαθηματικών*

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Εμμανουήλ Μανατάκης, *Επικ. Καθ. Πολυτεχν. Σχολής*
Παν/μίου Πατρών
Μιχαήλ Σαλίχος, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*
Νικόλαος Παπαευστρατίου,
Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Νικόλαος Μαρουλάκης, *Σκιτσογράφος - Εικονογράφος*

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευγενία Βελάγκου, *Φιλολόγος*

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Δημήτριος Κοντογιάννης, *Σύμβουλος του Παιδαγ.*
Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

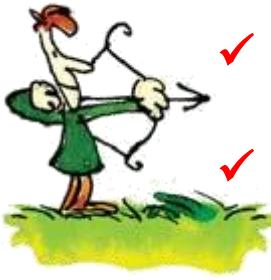
Παναγιώτης Γράββαλος, *Ζωγράφος*

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου
Μάθησης και Θρησκευμάτων

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων



- ✓ Μαθαίνω να πολλαπλασιάζω και να διαιρώ ρητές παραστάσεις.
- ✓ Μαθαίνω να προσθέτω και να αφαιρώ ρητές παραστάσεις.



A Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $4 \cdot \frac{3}{5}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{2}{5} : \frac{4}{7}$

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$$2x \cdot \frac{3xy}{5\omega}, \quad \frac{3x^2}{2\alpha\beta} \cdot \frac{2\alpha^2\beta}{9xy}, \quad \frac{9x}{y+1} : \frac{3x^2}{5y+5}$$

Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες.

$$\boxed{\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}} \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$$

Με τον ίδιο τρόπο πολλαπλασιάζουμε και μια ακέραια με μια ρητή παράσταση ή δύο ρητές παραστάσεις. Για παράδειγμα,

$$3x \cdot \frac{5x^2}{2y} = \frac{3x \cdot 5x^2}{2y} = \frac{15x^3}{2y} \text{ και}$$

$$\frac{x^2 - 1}{3x + 3} \cdot \frac{2x}{x - 1} = \frac{(x^2 - 1) \cdot 2x}{(3x + 3)(x - 1)} = \frac{2x(\cancel{x-1})(\cancel{x+1})}{3(\cancel{x+1})(\cancel{x-1})} = \frac{2x}{3}$$

Όπως βλέπουμε στο προηγούμενο παράδειγμα, μετά τις πράξεις εκτελούμε και τις δυνατές απλοποιήσεις.

Διαίρεση

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Με τον ίδιο τρόπο διαιρούμε και δύο ρητές παραστάσεις. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} : \frac{2x^2}{x^2-1} &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \\ &= \frac{x(x^2-1)}{(x+1) \cdot 2x^2} = \frac{\cancel{x}(x-1)(\cancel{x+1})}{2x^2(\cancel{x+1})} = \frac{x-1}{2x} \end{aligned}$$

Σύνθετα κλάσματα

Το σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$, ως γνωστόν, εκφράζει το

πηλίκιο $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ που είναι ίσο με $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$ και επομένως

ισχύει

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα,
$$\frac{\frac{2\alpha^2}{x}}{\frac{4\alpha}{x^2}} = \frac{2\alpha^2 x^2}{4\alpha x} = \frac{\alpha x}{2}$$

Μνημονικός Κανόνας

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθούν τα γινόμενα:

α) $(5x^2 + 5x) \cdot \frac{3x}{2x + 2}$ β) $\frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

Λύση

α)
$$(5x^2 + 5x) \cdot \frac{3x}{2x + 2} = \frac{(5x^2 + 5x)3x}{2x + 2} = \frac{5x(\cancel{x+1})3x}{2(\cancel{x+1})} = \frac{15x^2}{2}$$

β)
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x - 1} &= \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x)}{(3x + 6)(x - 1)} = \\ &= \frac{(x - 1)^2 x(\cancel{x+2})}{3(\cancel{x+2})(\cancel{x-1})} = \frac{(x - 1)x}{3} = \frac{x^2 - x}{3} \end{aligned}$$

2 Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - \alpha^2}{x} : \frac{x^3 - \alpha^3}{x^2}$$

$$\beta) \frac{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{x^2 - \alpha^2}{x} : \frac{x^3 - \alpha^3}{x^2} &= \frac{x^2 - \alpha^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x^3 - \alpha^3} = \\ &= \frac{(x^2 - \alpha^2)x^2}{x(x^3 - \alpha^3)} = \frac{\cancel{(x - \alpha)}(x + \alpha)x^2}{x\cancel{(x - \alpha)}(x^2 + x\alpha + \alpha^2)} = \\ &= \frac{(x + \alpha)x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2} = \frac{x^2 + \alpha x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2} \end{aligned}$$

$$\beta) \frac{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}} = \frac{\alpha(\alpha^2 - x^2)}{\alpha^2(2\alpha + 2x)} = \frac{\cancel{\alpha}(\alpha - x)\cancel{(\alpha + x)}}{2\alpha^2(\alpha + x)} = \frac{\alpha - x}{2\alpha}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

$$\alpha) x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{xy}$$

$$\beta) x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

$$\gamma) 3x : \frac{2}{x} = \frac{3}{2}$$

$$\delta) 3x : \frac{2}{x} = \frac{3x^2}{2}$$

$$\varepsilon) \frac{x-1}{y} \cdot \frac{5}{x-1} = \frac{5}{y} \quad \square \quad \sigma\tau) \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{\alpha x - 2}{x^2} \quad \square$$

$$\zeta) \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \cdot \frac{\alpha^2+1}{\alpha} = 0 \quad \square \quad \eta) \frac{\alpha}{\beta+2} : \frac{\alpha}{\beta+2} = 1 \quad \square$$

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) 3x \cdot \frac{\dots\dots\dots}{y} = \frac{6x^2}{y}$$

$$\beta) \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\dots\dots\dots} = \frac{1}{y^2}$$

$$\gamma) \frac{4x}{y} : \frac{\dots\dots\dots}{\omega} = \frac{\omega}{y}$$

$$\delta) \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$$

$$\varepsilon) \frac{x+2}{x-1} : \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$$

$$\sigma\tau) \frac{x}{y} : \frac{x+2}{\dots\dots\dots} = \frac{x}{x+2}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\beta) \frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$$

$$\gamma) 12x^2 \cdot \frac{1}{9x}$$

$$\delta) \frac{2\alpha^3}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4\alpha^2}$$

$$\varepsilon) (-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega}$$

$$\sigma\tau) \left(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\alpha^2}\right)$$

2 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) 8x : \frac{6}{x}$$

$$\beta) \frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right)$$

$$\gamma) \left(-\frac{\alpha^2}{\beta^3} \right) : 3\alpha^2 \quad \delta) \left(-\frac{x^3}{2\omega} \right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2} \right)$$

3 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) \frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3}$$

$$\beta) \frac{y-5}{y+2} \cdot \frac{2+y}{5-y}$$

$$\gamma) \frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2}$$

$$\delta) \frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+\alpha-6} \cdot \frac{\alpha+3}{\alpha^2+2\alpha}$$

$$\epsilon) \frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$$

$$\sigma\tau) \frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9} \cdot \frac{y^2+3y}{2y^2+3y}$$

4 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15}$$

$$\beta) \frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y}$$

$$\gamma) \left(-\frac{\omega+2}{\omega} \right) : (\omega+2)$$

$$\delta) \frac{\alpha+1}{\beta^2} : \frac{(\alpha+1)^2}{\beta}$$

$$\epsilon) \frac{x+y}{x^2-xy} : \frac{x^2+xy}{x-y}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4}$$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4x+4}{x+2} \right) : \frac{8x-8}{x+2} \quad \beta) \frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3} \right)$$

$$\gamma) \left(\frac{x+2}{x-1} : \frac{2x+6}{x-1} \right) \cdot \frac{x+2}{x+3}$$

B Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{7}{9} + \frac{19}{9} - \frac{11}{9}, \quad \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}.$$

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$$\frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2}, \quad \frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{6\alpha\beta} - \frac{1}{3\beta}.$$

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

και

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

Με τον ίδιο τρόπο προσθέτουμε ή αφαιρούμε και ρητές παραστάσεις που έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2} &= \frac{3x + (2x-1) - (7+x)}{x-2} = \\ &= \frac{3x + 2x - 1 - 7 - x}{x-2} = \frac{4x - 8}{x-2} = \frac{4(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = 4 \end{aligned}$$

Αν όμως οι ρητές παραστάσεις δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τότε βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και τις μετατρέπουμε σε ρητές παραστάσεις με τον ίδιο παρονομαστή, όπως και στα αριθμητικά κλάσματα.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$\frac{2}{3x^2 - 3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x - 3}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

$$3x^2 - 3x = 3x(x - 1) \text{ και} \\ 3x - 3 = 3(x - 1)$$

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 6x(x-1)$$

- Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

$$\frac{2}{3x^2 - 3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x - 3} = \frac{\overbrace{2}^2}{3x(x - 1)} + \frac{\overbrace{5}^{x-1}}{6x} - \frac{\overbrace{2x}^2}{3(x - 1)} =$$

- Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις.

$$= \frac{4 + 5(x - 1) - 4x}{6x(x - 1)} = \frac{4 + 5x - 5 - 4x}{6x(x - 1)} = \frac{\cancel{x-1}}{6x(\cancel{x-1})} = \frac{1}{6x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{9x + 6}{x^2 - 1} - \frac{15}{2x - 2} \quad \beta) \frac{4}{x^2 - \alpha^2} - \frac{2}{x^2 - \alpha x} - \frac{1}{x^2 + \alpha x}$$

Λύση

α) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \text{ και } 2x - 2 = 2(x - 1)$$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $2(x - 1)(x + 1)$. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{9x + 6}{x^2 - 1} - \frac{15}{2x - 2} &= \frac{\overset{2}{9x + 6}}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{\overset{x + 1}{15}}{2(x - 1)} = \\ &= \frac{2(9x + 6) - 15(x + 1)}{2(x - 1)(x + 1)} = \frac{18x + 12 - 15x - 15}{2(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \frac{3x - 3}{2(x - 1)(x + 1)} = \frac{3\cancel{(x - 1)}}{2\cancel{(x - 1)}(x + 1)} = \frac{3}{2(x + 1)} \end{aligned}$$

β) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε:

$$x^2 - \alpha^2 = (x - \alpha)(x + \alpha), \quad x^2 - \alpha x = x(x - \alpha), \quad x^2 + \alpha x = x(x + \alpha)$$

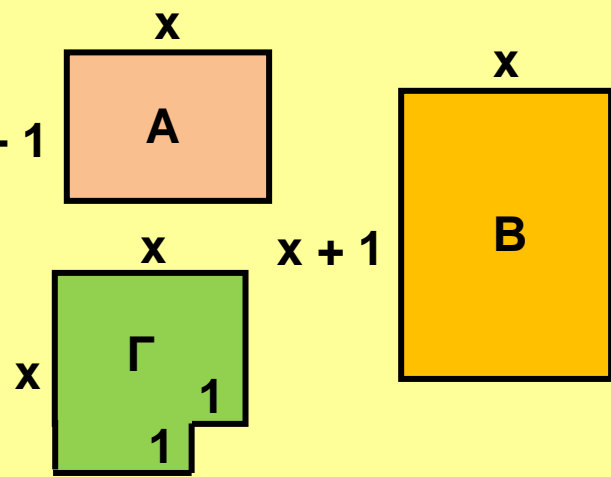
Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x - \alpha)(x + \alpha)$. Άρα

$$\frac{4}{x^2 - \alpha^2} - \frac{2}{x^2 - \alpha x} - \frac{1}{x^2 + \alpha x} =$$

$$= \frac{\frac{x}{4}}{(x - \alpha)(x + \alpha)} - \frac{\frac{x + \alpha}{2}}{x(x - \alpha)} - \frac{\frac{x - \alpha}{1}}{x(x + \alpha)} =$$

$$= \frac{4x - 2(x + \alpha) - (x - \alpha)}{x(x - \alpha)(x + \alpha)} = \frac{\cancel{x} - \alpha}{x(\cancel{x} - \alpha)(x + \alpha)} = \frac{1}{x(x + \alpha)}$$

2 Πούλησε κάποιος τα οικοπέδα A και B και από το καθένα εισέπραξε 50.000 ευρώ. Αν με τα χρήματα αυτά αγόρασε το διαμέρισμα Γ, να αποδειχθεί ότι κάθε m^2 του διαμερίσματος στοιχίζει όσο ένα m^2 του οικοπέδου A και ένα m^2 του οικοπέδου B. (Οι διαστάσεις δίνονται σε m).



Λύση

Από κάθε οικόπεδο εισέπραξε 50000 ευρώ, οπότε για την αγορά του διαμερίσματος έδωσε 100000 ευρώ. Το εμβαδόν του οικοπέδου A είναι $x(x - 1) m^2$, του οικοπέδου B είναι $x(x + 1) m^2$ και του διαμερίσματος Γ είναι $(x^2 - 1) m^2$. Κάθε m^2 του οικοπέδου A στοιχίζει $\frac{50000}{x(x - 1)}$

ευρώ, του οικοπέδου B στοιχίζει $\frac{50000}{x(x + 1)}$ ευρώ και του

διαμερίσματος Γ στοιχίζει $\frac{100000}{x^2 - 1}$ ευρώ.

$$\begin{aligned} \text{Άρα έχουμε: } & \frac{\overbrace{50000}^{x+1}}{x(x-1)} + \frac{\overbrace{50000}^{x-1}}{x(x+1)} = \\ & = \frac{50000(x+1) + 50000(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{100000x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{100000}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Δηλαδή, κάθε m^2 του διαμερίσματος Γ στοιχίζει όσο ένα m^2 του οικοπέδου Α και ένα m^2 του οικοπέδου Β.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1$

β) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$

γ) $\frac{\alpha+4}{\alpha} - \frac{4}{\alpha} = 1$

δ) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} = 0$

ε) $1 + \frac{x}{\omega} = \frac{1+x}{\omega}$

στ) $\frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha+2}{x} = \frac{2}{x}$

2 Ένας μαθητής έγραψε τις παρακάτω ισότητες και ο καθηγητής του είπε ότι σε κάποιο σημείο έκανε ένα λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος αυτό;

α) $\frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\beta}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1$

β) $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{3x+2-2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) \frac{x}{x+6} - \dots = 0$$

$$\beta) \frac{x}{x+6} + \dots = 1$$

$$\gamma) \dots + \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$$

$$\delta) \dots - \frac{5}{x+2} = \frac{1}{x+2}$$

$$\epsilon) \frac{2x-1}{x} + \dots = 2$$

$$\sigma\tau) \frac{3x+8}{x} + \dots = 3$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:



$$\alpha) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \beta) \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} \quad \gamma) \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} \quad \delta) \frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2+1}$$

2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$$

$$\beta) \frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$$

$$\gamma) \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$$

$$\delta) \frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$$

$$\epsilon) \frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$$

$$\sigma\tau) \frac{\alpha+7}{\alpha^2+4\alpha+3} - \frac{3}{\alpha+1}$$

3 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \quad \beta) \frac{y - 2 + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}} \quad \gamma) \frac{\omega + 1 + \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{1}{\omega^3}} \quad \delta) \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}}$$

4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} \quad \beta) \frac{3}{x+2y} - \frac{2}{x-2y} + \frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$$
$$\gamma) \frac{y^2-6}{y^2-5y+6} - \frac{2}{y-2} + \frac{3}{y-3} \quad \delta) \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x+y} - \frac{2xy^2}{x^2-y^2}$$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x+3}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x-3} \right)$$

$$\beta) \left[\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$$

$$\gamma) \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\delta) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) : \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \right)$$

6 α) Να αποδείξετε ότι $\frac{x^3 - y^3}{x - y} + xy = (x + y)^2$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{56^3 - 44^3}{12} + 56 \cdot 44$.

7 α) Αν $A = \frac{2x}{x^2 + 1}$ και $B = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $1, \frac{200}{10001}, \frac{9999}{10001}$

αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



1 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \alpha^3 - (1 + \alpha)^{-2} + 4\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 2004\right)^{2004}\right]^0,$$

αν είναι $\alpha = -\frac{3}{2}$ και $\beta = 3$.

(Διαγωνισμός «Θαλής» Ε.Μ.Ε. 2002).

2 Για κάθε θετικό ακέραιο n , να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta + 3\gamma)^{2n+1} + (\beta - \alpha - 3\gamma)^{2n+1} = 0$

β) $(x - y - \omega)^{2n} - (y + \omega - x)^{2n} = 0$

3 Αν ισχύει $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή

των παραστάσεων:

$$A = \frac{4x^2 - 6xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$B = \frac{2x^3 - 2xy^2 + 3y^2}{x^2y + y^3}$$

- 4** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 800$.
α) Να αποδείξετε ότι $P(1 - x) = P(x)$.
β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή $P(100)$ και $P(-99)$.

- 5** α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma =$
 $= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$
(Ταυτότητα Euler).
β) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι
 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση
 $(x - y)^3 + (y - \omega)^3 + (\omega - x)^3$.

- 6** Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha\beta = -\frac{7}{3}$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$

β) $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 9(\alpha + \beta) = 40$

- 7** Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει μια από τις παρακάτω ισότητες να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ίσοι ή αντίθετοι.

α) $x^4 - 2y^2 = x^2(y^2 - 2)$ β) $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2$

- 8** Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα
 $x^2 + 4x + 3, x^2 + 2x - 3$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

9 Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x + 3)$ και $B = (x + 1)(x + 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A + 1)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$.

10 α) Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $16\pi x^4 + 8\pi x^2 + \pi$.
Να βρείτε την ακτίνα του.

β) Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες $4x$ και $4x^2 - 1$.

11 α) Αν ο αριθμός k είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $k^2 + k$ είναι άρτιος.

β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων, αν διαιρεθεί με το 6, δίνει υπόλοιπο 1.

γ) Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8.

12 α) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^6 - 1) : (x - 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^6 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^5 + 1) : (x + 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{15} + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

13 α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{(x - 1)x} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x}$.

β) Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές 2, 3, 4,....., 2008 και να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2007 \cdot 2008} = \frac{2007}{2008}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΜΟΝΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ



- **Αλγεβρική Παράσταση** είναι μια έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές π.χ. $2x^2 - 3xy + 4$
- **Αριθμητική Τιμή** μιας παράστασης είναι ο αριθμός που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις.
- **Μονώνυμο** λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού. π.χ. $-3x^2y$ (-3 συντελεστής, x^2y κύριο μέρος του μονώνυμου).
- **Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος, π.χ. $-3x^2y, 7x^2y, -x^2y$

Πράξεις με μονώνυμα

- η **Πρόσθεση** και η **Αφαίρεση** μονωνύμων έχει σαν αποτέλεσμα μονώνυμο, εφόσον αυτά είναι όμοια. Άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους. π.χ. $2x^2y + 3x^2y - x^2y = 4x^2y$
- Αναγωγή ομοίων όρων** λέγεται η αντικατάσταση των ομοίων μονωνύμων με το άθροισμά τους.

π.χ. $6x^2 + 2x - 4x^2 + 3x = 2x^2 + 5x$

- ο **Πολλαπλασιασμός** και η **Διαίρεση** μονωνύμων γίνονται είτε τα μονώνυμα είναι όμοια είτε όχι. **Γινόμενο μονωνύμων** είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους, με εκθέτη καθεμιάς το άθροισμα των εκθετών τους.

π.χ. $(3x^2y) \cdot (-2xy^3) = -6x^3y^4$

Πηλίκο δύο μονωνύμων είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του πρώτου με το δεύτερο.

π.χ.

$$(-12x^4y) : (3x^2y) = \frac{-12x^4y}{3x^2y} = -4x^2$$

- **Πολυώνυμο** λέγεται το άθροισμα μονωνύμων, που δύο τουλάχιστον από αυτά δεν είναι όμοια.
π.χ. $3x^2y - 5xy + 2$ (Το μονώνυμα $3x^2y$, $5xy$, 2 λέγονται όροι του πολυωνύμου).

Πράξεις με πολυώνυμα

- **Για να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε** πολυώνυμα βγάζουμε τις παρενθέσεις και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- **Για να πολλαπλασιάσουμε**
 - α) **μονώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου, προσθέτουμε τα εξαγόμενα, και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
 - β) **πολυώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου, προσθέτουμε τα εξαγόμενα, και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

- Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$, τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $u(x)$ για τα οποία ισχύει: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + u(x)$ (Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης) όπου το $u(x)$ ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$. Αν $u(x) = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και τα $\delta(x)$ και $\pi(x)$ λέγονται παράγοντες ή διαιρέτες του $\Delta(x)$.

B. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

• Οι ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και οι οποίες αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους ονομάζονται ταυτότητες. Αξιοσημειώτες ταυτότητες είναι:

Τετράγωνο αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Τετράγωνο διαφοράς	$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Κύβος αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^3 =$ $= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
Κύβος διαφοράς	$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά	$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
Διαφορά κύβων	$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
Άθροισμα κύβων	$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

Γ. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση είναι ο μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο. Η παραγοντοποίηση γίνεται σε παράσταση που υπάρχει:

Κοινός παράγοντας σ' όλους τους όρους	$αx + βx = x(α + β)$
Κοινός παράγοντας σε ομάδες όρων της παράστασης	$αx + ay + βx + βy =$ $= α(x + y) + β(x + y) =$ $= (α + β)(x + y)$
Διαφορά τετραγώνων	$α^2 - β^2 = (α + β)(α - β)$
Άθροισμα - Διαφορά κύβων	$α^3 + β^3 =$ $= (α + β)(α^2 - αβ + β^2) =$ $= α^3 - β^3 = (α - β)(α^2 + αβ + β^2)$
Ανάπτυγμα τετραγώνου	$α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$ $= α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$
Τριώνυμο της μορφής $x^2 + (α + β)x + αβ$	$x^2 + (α + β)x + αβ =$ $= (x + α)(x + β)$

Δ. ΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση.

π.χ. $\frac{2x^2 - 5}{x + 4}$

Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Για να απλοποιήσουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση, παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και διαγράφουμε τον κοινό παράγοντα. Οι πράξεις με τις ρητές παραστάσεις γίνονται όπως και οι πράξεις των αριθμητικών κλασμάτων.



ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Η εξίσωση $ax + b = 0$

2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

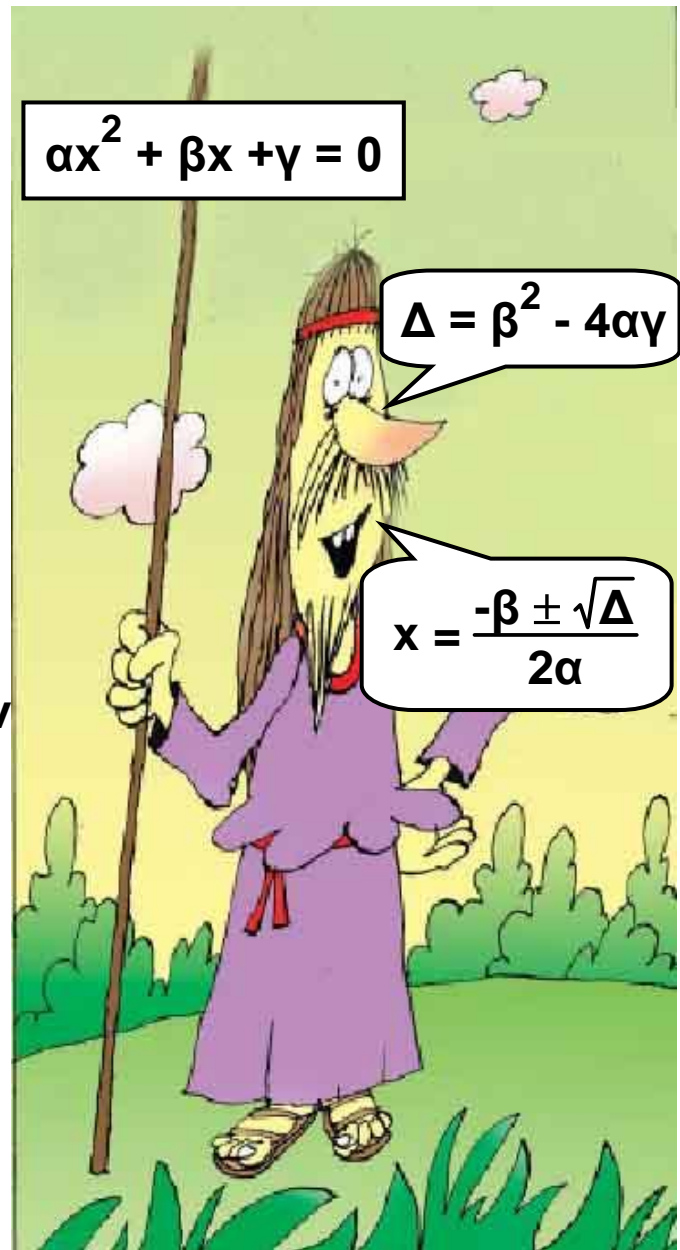
2.3 Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού

2.4 Κλασματικές εξισώσεις

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση



2.1 Η εξίσωση $ax + \beta = 0$



✓ Θυμάμαι πώς λύνονται οι εξισώσεις πρώτου βαθμού.

✓ Αναγνωρίζω αν μια εξίσωση έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.

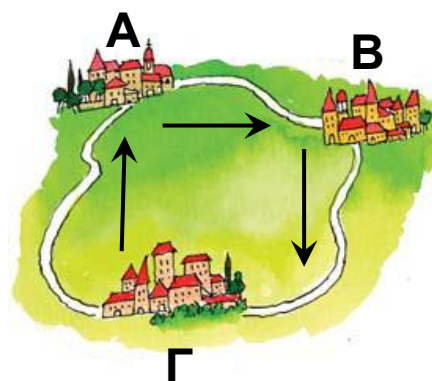


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το χωριό Α και αφού επισκεφθεί διαδοχικά τα χωριά Β και Γ, επιστρέφει στο χωριό Α. Η διαδρομή ΒΓ είναι 1 km μεγαλύτερη από την ΑΒ και η ΓΑ είναι 1 km μεγαλύτερη από τη ΒΓ.

Μπορείτε να υπολογίσετε πόσο απέχουν τα χωριά μεταξύ τους, αν γνωρίζετε ότι η συνολική απόσταση που διήνυσε ο ταχυδρόμος ήταν:

- α) 15 km;
- β) το τριπλάσιο της πρώτης διαδρομής;
- γ) το τριπλάσιο της δεύτερης διαδρομής;



Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις, όπως $3x = 12$, $-4y + 11 = 0$, κ.τ.λ. Στις εξισώσεις αυτές υπάρχει ένας άγνωστος και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 1. Σε καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο (πρωτοβάθμια εξίσωση).

Η εξίσωση $3x = 12$, της οποίας ο συντελεστής του αγνώστου είναι διάφορος του μηδενός επαληθεύεται

για μία μόνο τιμή του αγνώστου, την $x = 4$. Ο αριθμός 4, που επαληθεύει την εξίσωση $3x = 12$, ονομάζεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

Υπάρχουν όμως και εξισώσεις, όπως οι $0x = -3$ ή $0x = 0$, στις οποίες ο συντελεστής του αγνώστου είναι μηδέν.

Η εξίσωση $0x = -3$ δεν επαληθεύεται για καμιά τιμή του x , αφού το γινόμενο $0x$ είναι πάντοτε ίσο με το μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -3 . Μια τέτοια εξίσωση, που δεν έχει λύση, ονομάζεται **αδύνατη**.

Η εξίσωση όμως, $0x = 0$ επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του x και ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι:

- Αν $a \neq 0$, τότε; η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση $τηx = -\frac{\beta}{a}$
- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ γράφεται $0x = -\beta$ και
 - αν $\beta \neq 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη), ενώ
 - αν $\beta = 0$, κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα ή αόριστη)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x+1$$

Λύση

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές.
- Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x+1$$

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{2x+1}{6} =$$

$$= 6 \cdot x + 6 \cdot 1$$

$$3(x-1) - (2x+1) = 6x+6$$

$$3x-3-2x-1 = 6x+6$$

$$3x-2x-6x = 6+3+1$$

$$-5x = 10$$

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{10}{-5}$$

$$x = -2$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -2$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3(x+2) - 3 = 3x + 5$ β) $2(x-1) - x = x - 2$

Λύση

α) $3(x+2) - 3 = 3x + 5$

$$3x + 6 - 3 = 3x + 5$$

$$3x - 3x = 5 - 6 + 3$$

$$0x = 2$$

Η εξίσωση αυτή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x , οπότε είναι **αδύνατη**.

β) $2(x-1) - x = x - 2$

$$2x - 2 - x = x - 2$$

$$2x - x - x = 2 - 2$$

$$0x = 0$$

Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του x , οπότε είναι **ταυτότητα**.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση της στήλης A το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
α. $3x = 7$	1. Έχει μοναδική λύση
β. $0x = 0$	2. Είναι αδύνατη
γ. $0x = 5$	3. Είναι ταυτότητα
δ. $5x = 0$	

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $\frac{1}{3}x = 2$ έχει λύση την $x = 6$.

β) Η εξίσωση $4x = 0$ είναι αδύνατη.

γ) Η εξίσωση $0x = 0$ έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό.

δ) Η εξίσωση $0x = 6$ έχει λύση την $x = 6$.

ε) Η εξίσωση $5(x + 1) = 5x + 5$ είναι ταυτότητα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-3(x + 2) - 2(x - 1) = 8 + x$

β) $4y - 2(y - 3) = 2y + 1$

γ) $5(-\omega + 2) - 4 = 6 - 5\omega$

δ) $(2x + 1)2 + 5 = 4(x^2 - 10)$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 3}{6} = x - \frac{1}{3}$

β) $\frac{y + 5}{5} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{3y}{10}$

$$\gamma) \frac{2(\omega - 1)}{3} - \frac{\omega + 1}{2} = \frac{\omega - 5}{6}$$

$$\delta) 0,2(3x - 4) - 5(x - 0,4) = 0,4(1 - 10x)$$

- 3** Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττούμενο κατά 5 είναι ίσο με το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 10. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;
- 4** Ρώτησαν κάποιον πόσα ευρώ έχει στο πορτοφόλι του κι εκείνος απάντησε: «Αν είχα όσα έχω και τα μισά ακόμα και δέκα παραπάνω, θα είχα εκατό». Μπορεί, άραγε, με τα χρήματα αυτά να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει 65 €;
- 5** Ο καθηγητής των Μαθηματικών είπε στους μαθητές του:
- Σκεφτείτε έναν αριθμό και διπλασιάστε τον.
 - Στο αποτέλεσμα να προσθέσετε τον αριθμό 10.
 - Το άθροισμα που βρήκατε να το διαιρέσετε με το 2 και από το πηλίκο να αφαιρέσετε τον αριθμό που σκεφτήκατε αρχικά.
 - Κάθε μαθητής πρέπει να έχει βρει αποτέλεσμα τον αριθμό 5, ανεξάρτητα από ποιον αριθμό σκέφτηκε αρχικά.
- Μπορείτε να εξηγήσετε τον ισχυρισμό του καθηγητή;
- 6** Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και κινείται προς την πόλη Β με μέση ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Α για να τον συναντήσει. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν;



2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού



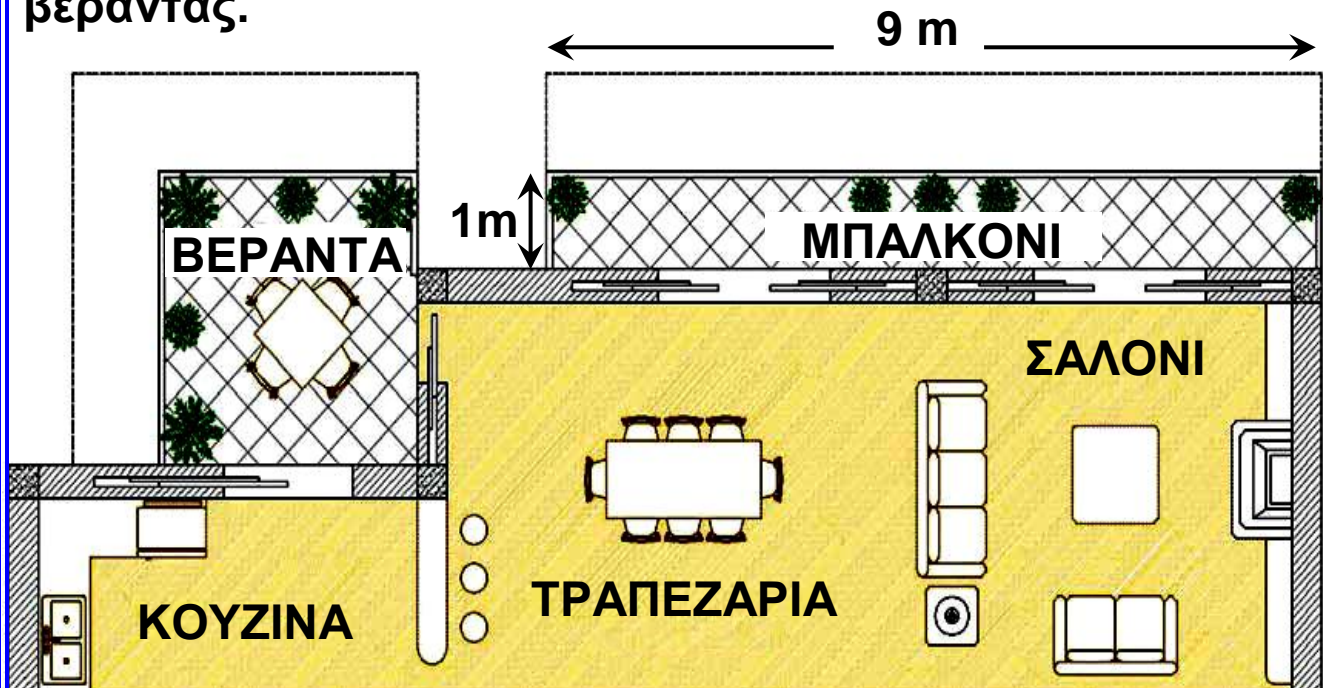
- ✓ Λύνω εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.
- ✓ Βρίσκω το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και υπολογίζω τις λύσεις της με τη βοήθεια τύπου.
- ✓ Μετατρέπω ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε μια οικοδομή και στην πρόσοψή της προέβλεψε την κατασκευή μιας τετραγωνικής βεράντας και ενός ορθογωνίου μπαλκονιού με διαστάσεις 9 m και 1 m. Στο σχέδιο που παρουσίασε στον ιδιοκτήτη της οικοδομής η βεράντα και το μπαλκόνι είχαν το ίδιο εμβαδόν.

α) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα ήταν η πλευρά της βεράντας.



Ο ιδιοκτήτης όμως, θεώρησε στενό το μπαλκόνι και ζήτησε από το μηχανικό να αυξήσει το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας κατά τα ίδια μέτρα, ώστε να έχουν και πάλι το ίδιο εμβαδόν.

β) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας. Με το αίτημα όμως του ιδιοκτήτη, το συνολικό εμβαδόν της βεράντας και του μπαλκονιού ξεπερνούσε το όριο που καθορίζεται από τον πολεοδομικό κανονισμό.

Τελικά, αποφασίστηκε να μεγαλώσει η βεράντα και το μπαλκόνι, όπως το ζήτησε ο ιδιοκτήτης, με την προϋπόθεση όμως να μην έχουν πια το ίδιο εμβαδόν, αλλά να καλύπτουν συνολικά 34 m^2 .

γ) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα αυξήθηκε τελικά το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$$\begin{aligned}x^2 &= 9, \\x^2 - 3x &= 0, \\x^2 + 15x - 16 &= 0\end{aligned}$$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση).

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } a \neq 0$$

Οι αριθμοί α , β , γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**. Οι συντελεστές σε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$$\begin{array}{llll} x^2 - 9 = 0 : & \alpha = 1 & \beta = 0 & \gamma = -9 \\ x^2 - 3x = 0 : & \alpha = 1 & \beta = -3 & \gamma = 0 \\ x^2 + 15x - 16 = 0 : & \alpha = 1 & \beta = 15 & \gamma = -16 \end{array}$$

A Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι:

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \text{ τότε } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $x(x - 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$$x^2 = 3x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:

- Το α' μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β' μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $(x - 3)(x + 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 3^2 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ ή } x + 3 = 0$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

2ος τρόπος:

- Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = α$ έχει δύο λύσεις, $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} \text{ ή } x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -16.

Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = α$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί η εξίσωση $x^2 = 0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$
Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$
εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- Για να είναι $(3x - 1)^2 = 0$ πρέπει $3x - 1 = 0$

$$\begin{aligned}9x^2 - 6x + 1 &= 0 \\(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 &= 0 \\(3x - 1)^2 &= 0 \\3x - 1 = 0 \text{ ή } x &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει μια διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$
σχηματίζουμε στο a' μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου
εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α , όπου α ο συντελεστής του x^2 .
- Μεταφέρουμε στο β' μέλος το σταθερό όρο και στο α' μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $\alpha^2 + 2\alpha\beta$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2 .
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$

$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$$

$$(2x + 15)^2 = 289$$

$$2x + 15 = \sqrt{289} \quad \text{ή} \quad 2x + 15 = -\sqrt{289}$$

$$2x + 15 = 17 \quad \text{ή} \quad 2x + 15 = -17$$

$$2x = 2 \quad \text{ή} \quad 2x = -32$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2x^2 = 7x \quad \beta) 3x^2 - 75 = 0 \quad \gamma) 2x^2 + 8 = 0$$



Λύση

$$\begin{aligned}\alpha) \quad 2x^2 &= 7x \\ 2x^2 - 7x &= 0 \\ x(2x - 7) &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } 2x - 7 &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } x &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) \quad 3x^2 - 75 &= 0 \\ 3x^2 &= 75 \\ x^2 &= 25 \\ x = \sqrt{25} \text{ ή } x &= -\sqrt{25} \\ x = 5 \text{ ή } x &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) \quad 2x^2 + 8 &= 0 \\ 2x^2 &= -8 \\ x^2 &= -4\end{aligned}$$

Δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση)

2 Να λυθεί η εξίσωση $x^2(2x - 1) - 6x(2x - 1) + 9(2x - 1) = 0$

Λύση

- Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$.
- Ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$\begin{aligned}x^2(2x - 1) - 6x(2x - 1) + 9(2x - 1) &= 0 \\ (2x - 1)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ (2x - 1)(x - 3)^2 &= 0 \\ 2x - 1 = 0 \text{ ή } x - 3 &= 0 \\ x = \frac{1}{2} \text{ ή } x &= 3 \text{ (διπλή λύση)}\end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.

β) Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $(x - 2)(x + 1) = 0$ είναι $x = 2$ και $x = -1$.

δ) Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 4$.

ε) Η εξίσωση $x^2 = -9$ δεν έχει λύση.

στ) Η εξίσωση $(x - 2)^2 = 0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x = 2$.

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $5x - 6 = x^2$ είναι 2ου βαθμού.

β) Η εξίσωση $x^2 + 3x + 8 = x(x + 2)$ είναι 2ου βαθμού.

γ) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι

i) 1ου βαθμού, όταν $\lambda = 2$

ii) 2ου βαθμού, όταν $\lambda \neq 2$.

3 Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x - 4)(x + 1) = 0$ β) $y(y + 5) = 0$

γ) $(3 - \omega)(2\omega + 1) = 0$ δ) $7x(x - 7) = 0$

ε) $3y\left(\frac{y}{3} - 2\right) = 0$ στ) $\left(\frac{1}{2} - \omega\right)(2\omega - 1) = 0$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + 7x$ β) $-y^2 = 9y$ γ) $2\omega^2 - 72 = 0$

δ) $-2t^2 - 18 = 0$ ε) $-0,2\varphi^2 + 3,2 = 0$ στ) $\frac{z^2}{6} - 0,5z = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x - 1)^2 - 1 = 0$ β) $3(x + 2)^2 = 12$

γ) $(x + 1)^2 = 2x$ δ) $\frac{(x - 9)^2}{3} = 27$

ε) $(3x - 1)^2 - 4x^2 = 0$ στ) $(x + \sqrt{3})^2 - 3 = 0$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x + 1)^2 = 5(3x + 1)$ β) $0,5(1 - y)^2 = 18$

γ) $(2\omega^2 + 1)(\omega^2 - 16) = 0$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x - 4) = -4$ β) $y^2 + y - 12 = 0$

γ) $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0$ δ) $2t^2 - 7t + 6 = 0$

ε) $3\varphi^2 + 1 = 4\varphi$ στ) $5z^2 - 3z - 8 = 0$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $25x^2 + 10x + 1 = 0$

$$\beta) y^2(y - 2) + 4y(y - 2) + 4y - 8 = 0$$

$$\gamma) \omega^2 + 2006\omega - 2007 = 0$$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \beta) x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$$

8

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					

Οριζόντια:

- Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $x^2 = 12x$
- Ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 225 = 30x$
- Γινόμενο ριζών της εξίσωσης $x(x + 4) + 8(x + 4) = 0$
- Άθροισμα ριζών της εξίσωσης $x^2 - 10x + 9 = 0$
- Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $x^2 = 25$
- Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2 = 32x$

Κάθετα:

- Ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 20x + 100 = 0$
- Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $(x - 5)^2 - (x - 5) = 0$
- Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 144 = 0$
- Ρίζα της εξίσωσης $x^2(x - 12) + 2007(x - 12) = 0$

B Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με $4a$.
- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β' μέλος.
- Στο α' μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2ax + \beta)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2ax + \beta$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2 .

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

$$4a \cdot ax^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot \gamma = 0$$

$$4a^2x^2 + 4a\beta x = -4a\gamma$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta = -4a\gamma$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

$$(2ax + \beta)^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4a\gamma$ με το γράμμα Δ , τότε η εξίσωση γράφεται $(2ax + \beta)^2 = \Delta$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:

$$2ax + \beta = \pm \sqrt{\Delta}$$

$$2ax = -\beta \pm \sqrt{\Delta}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο **άνισες λύσεις**,

$$\text{τις } x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

• Αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε:

$$(2\alpha x + \beta)^2 = 0$$

$$2\alpha x + \beta = 0$$

$$2\alpha x = -\beta$$

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή λύση**, την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

• Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

Η παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της. Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ , δηλαδή

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.

- Αν $\Delta > 0$, έχει δύο άνισες λύσεις τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$, έχει μία διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$

γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$,
οπότε η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4},$$

δηλαδή είναι $x = \frac{-5 + 1}{4} = -1$ ή $x = \frac{-5 - 1}{4} = -\frac{3}{2}$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $\alpha = 6$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$,
οπότε η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0.$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι

$\alpha = -16$, $\beta = 8$, $\gamma = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση,

$$\text{την } x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{8}{2 \cdot (-16)} = \frac{1}{4}$$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$

β) $\frac{x(x+3)}{3} - \frac{x-6}{6} = \frac{1}{2}$

Λύση

$$\begin{aligned}\alpha) 9x^2 - (5x - 1)^2 &= 2x \\ 9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) &= 2x \\ 9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x &= 0 \\ -16x^2 + 8x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{4} \text{ (διπλή λύση)}\end{aligned}$$

(Παράδειγμα 1γ)

$$\begin{aligned}\beta) \frac{x(x+3)}{3} - \frac{x-6}{6} &= \frac{1}{2} \\ 6 \cdot \frac{x(x+3)}{3} - 6 \cdot \frac{x-6}{6} &= 6 \cdot \frac{1}{2} \\ 2x(x+3) - (x-6) &= 3 \\ 2x^2 + 6x - x + 6 - 3 &= 0 \\ 2x^2 + 5x + 3 &= 0 \\ x = -1 \quad \text{ή} \quad x &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(Παράδειγμα 1α)

3 α) Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = -8$, $\gamma = 6$, οπότε η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 4}{4},$$

δηλαδή είναι $x = 3$ ή $x = 1$.

$$\begin{aligned}\beta) 2x^2 - 8x + 6 &= 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = \\ &= 2 [x(x - 3) - (x - 3)] = 2(x - 3)(x - 1)\end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι:

- Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί 3 και 1.
- Το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής: $2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 3)(x - 1)$

Γενικά

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις -1 και $-\frac{3}{2}$ (παράδειγμα 1α).

Άρα το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 3$ γράφεται

$$2x^2 + 5x + 3 =$$

$$= 2[x - (-1)] \left[x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right] = 2(x + 1) \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

Ομοίως η εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{4}$ (παράδειγμα 1γ).

Άρα το τριώνυμο $-16x^2 + 8x - 1$ γράφεται

$$-16x^2 + 8x - 1 = -16 \left(x - \frac{1}{4} \right) \left(x - \frac{1}{4} \right) = -16 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



- 1** Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\Delta > 0$	1. Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.
β. $\Delta = 0$	2. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. $\Delta > 0$	3. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ. $\Delta < 0$	4. Η εξίσωση δεν έχει λύση.

α	β	γ	δ

- 2** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

- α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση.
- β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση.
- γ) Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -3, οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$.

- 3** Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με τη βοήθεια του τύπου

- α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 2x + 8 = 0$
 γ) $-2x^2 + 50 = 0$ δ) $5x^2 + x - 4 = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



- 1** Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Εξίσωση	$ax^2 + bx + \gamma = 0$	α	β	γ
$x(x - 1) = -2$				
$3x^2 + 4 = 2(x + 2)$				
$(x - 1)^2 = 2(x^2 - x)$				

- 2** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$

β) $4y^2 + 3y - 1 = 0$

γ) $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$

δ) $2z^2 - 3z + 1 = 0$

ε) $-25t^2 + 10t - 1 = 0$

στ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

ζ) $3x^2 + 18x + 27 = 0$

η) $x^2 - 4x = 5$

θ) $x^2 - 3x + 7 = 0$

- 3** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 7x = 0$

β) $x^2 - 16 = 0$

i) με τη βοήθεια του τύπου

ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

- 4** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$

β) $(y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3)$

γ) $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$

δ) $\varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 1}{3} - \frac{x + 3}{5} = x - 2$$

$$\beta) \frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} = \frac{y - 2}{6} - 2$$

$$\gamma) 0,5t^2 - 0,4(t + 2) = 0,7(t - 2) \quad \delta) \frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$\alpha) x^2 + 4x - 12$$

$$\beta) 3y^2 - 8y + 5$$

$$\gamma) -2\omega^2 + 5\omega - 3$$

$$\delta) x^2 - 16x + 64$$

$$\epsilon) 9y^2 + 12y + 4$$

$$\sigma\tau) -\omega^2 + 10\omega - 25$$

7 Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση

$$\alpha) \alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$$

$$\beta) \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$$

8 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + \gamma)x^2 - 2\beta x + (\alpha - \gamma) = 0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):

«Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου».

(*)(Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: Ιστορία των Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων, τόμος Α', Αθήνα 1997.

Τον γραφέα της πλάκας δεν τον απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι' αυτό πρόσθεταν μήκος με επιφάνεια). Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x , τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 - x = 870$. Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- ▶ Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$
- ▶ Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$, αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$
- ▶ Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα βρεις $870 \frac{1}{4}$.
- ▶ Το $870 \frac{1}{4}$ είναι το τετράγωνο του $29 \frac{1}{2}$
- ▶ Πρόσθεσε στο $29 \frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- ▶ Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.

• Το 1 είναι ο συντελεστής του x . (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

• Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.

• Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

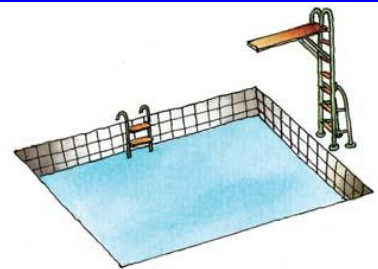
- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;
- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»

2.2 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της Οικονομίας, της Φυσικής κ.τ.λ.

Πρόβλημα 1ο

Το εμβαδόν μιας κολυμβητικής πισίνας είναι 400 m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις της, αν αυτές έχουν άθροισμα 41 m .



Λύση

α) Αν η μία διάσταση της πισίνας είναι x , τότε η άλλη θα είναι $41 - x$, αφού το άθροισμα τους είναι 41 m . Επειδή το εμβαδόν της πισίνας είναι 400 m^2 , έχουμε την εξίσωση $x(41 - x) = 400$ ή $41x - x^2 = 400$ ή $x^2 - 41x + 400 = 0$.

Στην εξίσωση αυτή είναι $\alpha = 1$, $\beta = -41$, $\gamma = 400$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 1681 - 1600 = 81 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{41 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{41 \pm 9}{2},$$

δηλαδή είναι $x = 25$ ή $x = 16$.

Αν $x = 25$, τότε $41 - x = 41 - 25 = 16$, ενώ αν $x = 16$, τότε $41 - x = 41 - 16 = 25$. Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις οι διαστάσεις της πισίνας είναι 25 m και 16 m .

Πρόβλημα 2ο

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει

$$\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500 \text{ ευρώ. Αν η βιοτεχνία πουλάει κάθε}$$

πουκάμισο 60 €, πόσα πουκάμισα πρέπει να πουλήσει, ώστε να κερδίσει 3500 €;

Λύση

α) Αν η βιοτεχνία πουλήσει x πουκάμισα, θα εισπράξει

$$60x \text{ €, οπότε θα κερδίσει } 60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500 \right) \text{ €}.$$

Επειδή θέλουμε το κέρδος να είναι 3500€ έχουμε την

$$\text{εξίσωση } 60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500 \right) = 3500 \text{ ή}$$

$$60x - \frac{1}{10}x^2 - 20x - 500 = 3500$$

$$600x - x^2 - 200x - 5000 = 35000$$

$$x^2 - 400x + 40000 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-400)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40000 = 160000 - 160000 = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση,

$$\text{την } x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{400}{2 \cdot 1} = 200.$$

Επομένως, για να κερδίσει η βιοτεχνία 3500 €, πρέπει να πουλήσει 200 πουκάμισα.

Πρόβλημα 3ο

Από ένα ακίνητο αερόστατο που βρίσκεται σε ύψος h αφήνεται να πέσει ένας σάκος με άμμο για να ελαφρύνει. Ταυτόχρονα, το αερόστατο αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα άνω με σταθερή επιτάχυνση $0,5 \text{ m/sec}^2$. Τη στιγμή που ο σάκος φτάνει στο έδαφος, το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 84 m . Να βρεθεί πόσο διήρκτησε η πτώση του σάκου.

Σημείωση:

Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι:

- Αν ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος $h \text{ m}$, τότε θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο $t \text{ sec}$, όπου $h = \frac{1}{2}gt^2$ και $g = 10 \text{ m/sec}^2$ περίπου.
- Αν ένα σώμα αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση a , τότε σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα $s = \frac{1}{2}at^2$

Λύση

α) Αν η πτώση του σάκου διήρκτησε $t \text{ sec}$, τότε στο χρόνο αυτό ο σάκος διήνυσε απόσταση

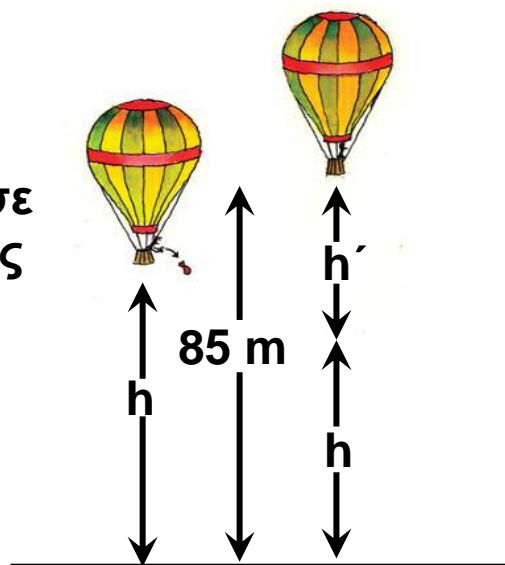
$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10t^2 = 5t^2$$

αφού $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

Στον ίδιο χρόνο το αερόστατο ανέβηκε κατά ύψος

$$h' = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot t^2 = \frac{1}{4}t^2$$

αφού $a = 0,5 \text{ m/sec}^2$.



Επειδή $h + h' = 84$, έχουμε την

$$\text{εξίσωση } 5t^2 + \frac{1}{4}t^2 = 84 \text{ ή}$$

$$20t^2 + t^2 = 336 \text{ ή } 21t^2 = 336$$

$$\text{ή } t^2 = 16, \text{ οπότε } t = 4 \text{ ή } t = -4.$$

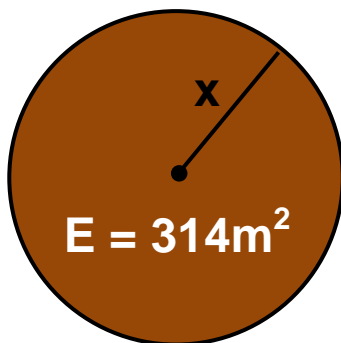
Επειδή το t παριστάνει χρόνο, πρέπει $t > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η διάρκεια της πτώσης του σώματος ήταν $t = 4 \text{ sec}$.



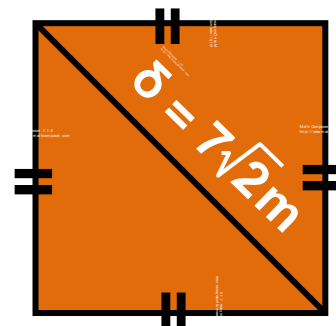
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.

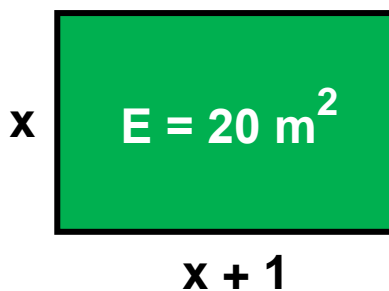
α)



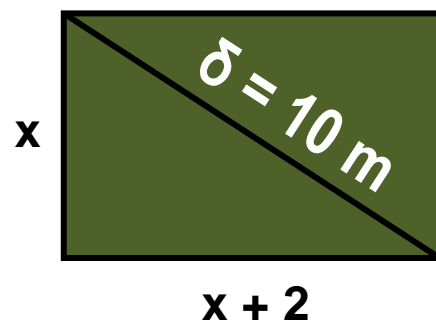
β)



γ)



δ)



2 Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε:

α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιό του.

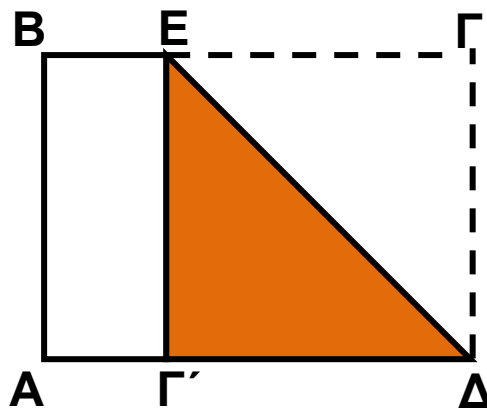
β) Το γινόμενο του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.

γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.

- 3** Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 2,5 dm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του.
(1 λίτρο = 1dm^3)
- 4** Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2 . Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.
- 5** Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.
- 6** Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικριστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;
- 7** Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;
- 8** Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x .

9 Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσο ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μια ακόμη φορά, αφού τους είπε: «Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια, με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου, αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους βρίσκετε τον ίδιο αριθμό». Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του;

10 Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο $AB\Gamma\Delta$, έτσι ώστε η πλευρά $\Gamma\Delta$ να πέσει πάνω στην $A\Delta$, τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά τα $\frac{3}{4}$ του αρχικού εμβαδού του. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου του βιβλίου.



11 Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με βότσαλα ένα κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3 m. Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το σιντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του σιντριβανιού.

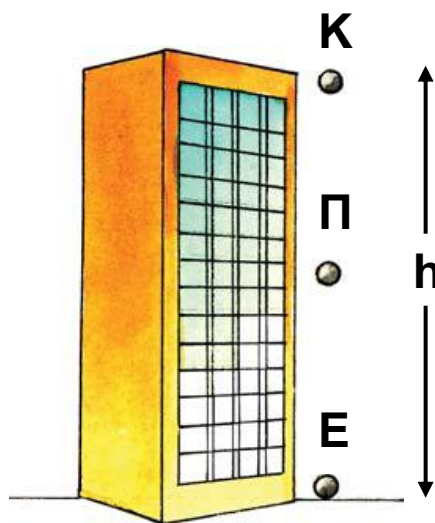


12 Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6 m, χρειάστηκαν $251,2 \text{ m}^2$ λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.

13 Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος, που αφέθηκε να πέσει από την κορυφή Κ ενός ουρανοξύστη, διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησης του διήνυσε μια απόσταση

ΠΕ ίση με τα $\frac{5}{9}$ του ύψους του ουρανοξύστη. Να

βρείτε πόσο χρόνο διήρκεσε η πτώση του σώματος και ποιο ήταν το ύψος του ουρανοξύστη ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).



2.2 Κλασματικές εξισώσεις



✓ Μαθαίνω να λύνω κλασματικές εξισώσεις, που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου βαθμού.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{4} + \frac{4}{3} = \frac{x+8}{12}$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των $x+2$, x , x^2+2x και να λύσετε και την εξίσωση $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$

Επαληθεύεται η εξίσωση από όλες τις τιμές του x που βρήκατε;

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυση τους οδηγεί σε εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή και η οποία ονομάζεται κλασματική εξίσωση.

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{6}, \quad \frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

Τις κλασματικές εξισώσεις τις επιλύουμε όπως και τις υπόλοιπες εξισώσεις που έχουν παρονομαστή γνωστό αριθμό.

Για παράδειγμα, προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x} \text{ εργαζόμαστε ως εξής:}$$

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x(x+2)},$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

Πρέπει $x \neq 0$ και $x+2 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x+2) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} x(x+2)\frac{x}{x+2} + x(x+2)\frac{4}{x} &= \\ &= x(x+2)\frac{x+8}{x(x+2)} \end{aligned}$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$$\begin{aligned} x^2 + 4(x+2) &= x+8 \\ x^2 + 4x + 8 &= x+8 \text{ ή} \\ x^2 + 3x &= 0 \text{ ή} \\ x(x+3) &= 0, \text{ άρα } x=0 \text{ ή} \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Η λύση $x=0$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=-3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x+1} - \frac{8}{x} = 1 \quad \beta) \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

Λύση

α) Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x+1) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται

$$x(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} - x(x+1) \cdot \frac{8}{x} = x(x+1) \cdot 1$$

$$x^2 - 8(x+1) = x(x+1) \quad \text{ή} \quad x^2 - 8x - 8 = x^2 + x \quad \text{ή} \quad -9x = 8$$

$$\text{ή} \quad x = -\frac{8}{9} \quad (\text{ικανοποιεί τους περιορισμούς}).$$

Άρα η εξίσωση έχει λύση την $x = -\frac{8}{9}$

β) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)} \quad (1).$$

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x-2) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x-2) \frac{1}{x-2} - x(x-2) \frac{1}{x} = x(x-2) \frac{2}{x(x-2)}$$

$$x - (x-2) = 2 \quad \text{ή} \quad x - x = 2 - 2 \quad \text{ή} \quad 0x = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από τους αριθμούς 0 και 2.

2 Ένας μαραθωνοδρόμος διήνυσε την απόσταση των 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του, διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

Λύση

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε ήταν x km/h, τότε την απόσταση των 42 km τη διήνυσε σε χρόνο $\frac{42}{x}$ ώρες. Αν η ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, δηλαδή $(x + 1)$ km/h, τότε θα έκανε $\frac{42}{x + 1}$ ώρες. Ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος από τον προηγούμενο κατά $\frac{1}{10}$ της ώρας, οπότε έχουμε την εξίσωση

$$\frac{42}{x} = \frac{42}{x + 1} + \frac{1}{10} \quad (1).$$

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι

$10x(x + 1) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$10x(x + 1) \cdot \frac{42}{x} = 10x(x + 1) \cdot \frac{42}{x + 1} + 10x(x + 1) \cdot \frac{1}{10}$$

$$420(x + 1) = 420x + x(x + 1) \quad \text{ή} \quad 420x + 420 = 420x + x^2 + x$$
$$\text{ή} \quad x^2 + x - 420 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) = 1681 > 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 41}{2},$$

δηλαδή είναι $x = 20$ ή $x = -22$.

Επειδή $x > 0$, η μέση ταχύτητα του μαραθωνοδρόμου ήταν 20 km/h.

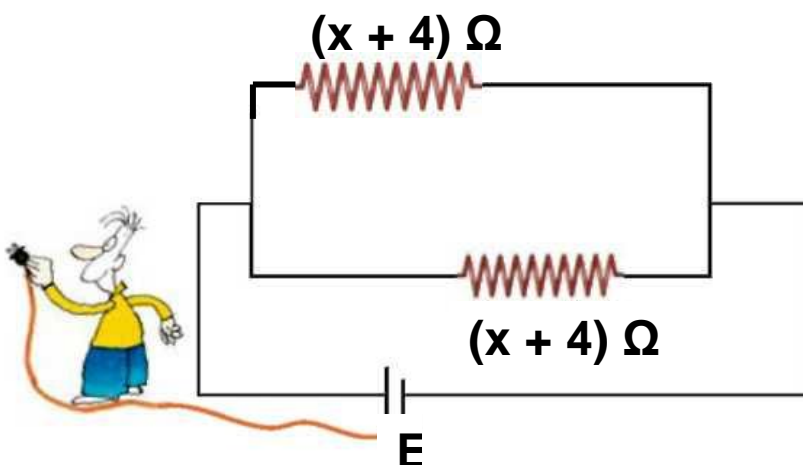
3 Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα δύο αντιστάτες που συνδέονται παράλληλα έχουν αντιστάσεις αντίστοιχα 4Ω και 9Ω μεγαλύτερες από την ολική τους αντίσταση. Να βρεθεί η ολική αντίσταση του κυκλώματος.

Σημείωση: Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι, αν δύο αντιστάτες που έχουν αντιστάσεις R_1 , R_2 συνδεθούν παράλληλα, τότε η ολική τους αντίσταση $R_{ολ}$ δίνεται

από τον τύπο
$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Λύση

Αν η ολική αντίσταση είναι x Ω, τότε οι δύο αντιστάσεις του κυκλώματος θα είναι $(x + 4)$ Ω και $(x + 9)$ Ω.



Άρα ισχύει

$$\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{x + 9} = \frac{1}{x} \quad (1)$$

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $x(x + 4)(x + 9) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x+4} + x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x+9} =$$

$$= x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x}$$

$$x(x+9) + x(x+4) = (x+4)(x+9) \text{ ή}$$

$$x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 4x + 9x + 36 \text{ ή } x^2 = 36 \text{ ή } x = \pm\sqrt{36}.$$

Άρα $x = 6$ ή $x = -6$.

Από τις δύο λύσεις της εξίσωσης μόνο η $x = 6$ είναι λύση του προβλήματος. Άρα η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι 6 Ω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες

α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$

ορίζονται αν $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$$

γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές

της εξίσωσης $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$ τότε αυτή γράφεται

$$5x + 3 = 2.$$

δ) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2+1} = x$

ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της.

2 Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε $\frac{3}{4}$.

Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση;

α) $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$

γ) $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$ δ) $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$

3 Η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$ έχει ως λύση τον αριθμό

α) $x = 1$ β) $x = -1$ γ) $x = 0$ δ) $x = 2$

4 Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$,

έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση $2x - 1 = 1$ που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό $x = 1$. Η απάντησή του είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$

γ) $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$

δ) $\frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}$

ε) $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$

στ) $1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$



2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$$

$$\beta) \frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2$$

$$\gamma) \frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2}$$

$$\delta) \frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2}$$

$$\epsilon) \frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$$

$$\sigma\tau) \frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y}{y(y+1)}$$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5}$$

$$\beta) \frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\gamma) \frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$$

$$\delta) \frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2-y} = 0$$

$$\beta) \frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$$

$$\gamma) \frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4}$$

$$\delta) 1 + \frac{3\alpha}{\alpha-2} = \frac{\alpha+4}{\alpha^2-3\alpha+2}$$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$$

$$\beta) \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$$

6 Να λύσετε τους τύπους:

α) $\rho = \frac{m}{V}$ ως προς V β) $\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ ως προς R

γ) $R = \rho \frac{\ell}{S}$ ως προς S δ) $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ ως προς T_1

ε) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ως προς R

στ) $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ ως προς α

ζ) $\frac{1}{u_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ ως προς u_α^2 η) $S = \frac{\alpha}{1 - \lambda}$ ως προς λ

7 α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα $\frac{17}{4}$.

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ για να βρούμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$.

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

8 Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 €.

Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν

ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι

υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν,

προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να

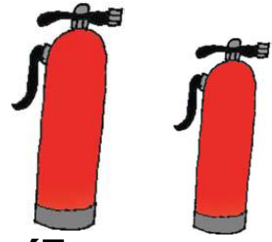
πληρώσει καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που

έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που

γευμάτισαν;



9 Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτιρίου και έδωσε 240 €. Πριν από λίγα χρόνια, που η τιμή κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.



10 Αναμειγνύουμε 12 gr ενός διαλύματος Α με 15 gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm^3 ενός διαλύματος Γ. Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι $0,2 \text{ gr/cm}^3$ μικρότερη.

11 Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας.

12 Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν από την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως, λόγω ολισθηρότητας του δρόμου, μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km/h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση.





ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η χρυσή τομή

Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δυο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών

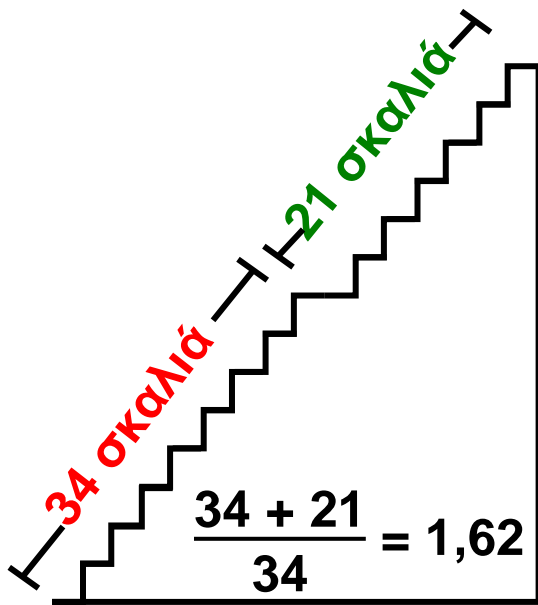
$$\frac{34 + 21}{34} \text{ και } \frac{34}{21} .$$

Τι παρατηρείτε;

Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο; Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = \lambda$ σε δύο άνισα μέρη AT και TB , ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».





β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής

εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ (1).

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ .

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\varphi = \frac{\lambda}{x}$ είναι ίσος με

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618...$$

Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της



χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας. Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ , λέγεται «**χρυσό ορθογώνιο**» και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο $\frac{\alpha}{\beta} = \varphi$

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

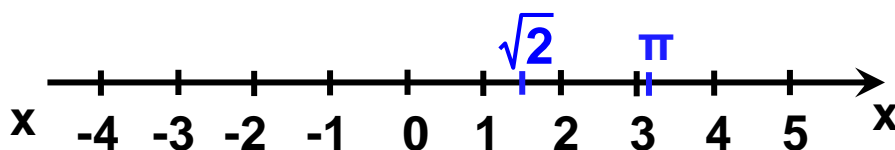


- ✓ Θυμάμαι πώς ορίζεται η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών.
- ✓ Μαθαίνω να αποδεικνύω και να χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της διάταξης.
- ✓ Θυμάμαι πώς λύνονται οι ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.



A Διάταξη πραγματικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο ενός άξονα. Αν στον άξονα έχουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα π.χ. $-2 > -4$, $-3 < 2$, $\pi > \sqrt{2}$.



Δύο ή περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί που έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα είναι **διατεταγμένοι**, οπότε μπορούμε να τους συγκρίνουμε.

Επομένως:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Πώς όμως θα συγκρίνουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα;

Αν πάρουμε δύο αριθμούς, π.χ. τους 5 και 3, για τους οποίους ισχύει $5 > 3$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού $5 - 3 = 2 > 0$.

Ομοίως, οι αριθμοί -2 και -4, για τους οποίους ισχύει $-2 > -4$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού $(-2) - (-4) = -2 + 4 = 2 > 0$.

Αντίθετα, οι αριθμοί 3 και 5 ή -4 και -2, για τους οποίους ισχύει $3 < 5$ και $-4 < -2$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά έναν αρνητικό αριθμό, αφού $3 - 5 = -2 < 0$ και $(-4) - (-2) = -4 + 2 = -2 < 0$. Γενικά ισχύει:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ τότε } \alpha - \beta > 0$$

ενώ

$$\text{Αν } \alpha < \beta \text{ τότε } \alpha - \beta < 0$$

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο πραγματικούς αριθμούς α και β , που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha - \beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$
- Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
- Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

B Ιδιότητες της διάταξης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αφού διατάξετε τους αριθμούς 0, 8, -2, 4, -5, τότε:

1. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς προσθέσετε τον αριθμό 3

- 2. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν**
- i) αφαιρέσετε τον αριθμό 3
 - ii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό 2
 - iii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό -2

Σε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις η φορά των ανισοτήτων διατηρείται και σε ποια αλλάζει;

Ο ορισμός της διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών χρησιμοποιείται και για την απόδειξη των ιδιοτήτων της διάταξης. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

α) Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 + 3 > 4 + 3$ και $8 - 3 > 4 - 3$.

Γενικά ισχύει:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \gamma \text{ και } \alpha - \gamma > \beta - \gamma$$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha + \gamma$ και $\beta + \gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:
 $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta$. Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$. Δηλαδή η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

β) Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot 2 > 4 \cdot 2$

και $\frac{8}{2} > \frac{4}{2}$. Γενικά ισχύει:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha\gamma > \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha\gamma$ και $\beta\gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta)$ (1). Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$. Άρα οι αριθμοί γ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί, οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλαδή $\gamma(\alpha - \beta) > 0$. Από την ισότητα (1) έχουμε ότι η διαφορά $\alpha\gamma - \beta\gamma$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.
- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

γ) Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.
Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$ και $-8 < -4$.
Γενικά αποδεικνύεται ότι:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

δ) Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.
Π.χ. είναι $3 > 2$ και $7 > 4$, οπότε $3 + 7 > 2 + 4$.
Γενικά αποδεικνύεται ότι:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει και η μεταβατική ιδιότητα:

Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$

Π.χ. είναι $3 > 1$ και $1 > -2,5$ οπότε $3 > -2,5$.

ε) Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Π.χ. είναι $3 > 2 > 0$ και $7 > 4 > 0$, οπότε $3 \cdot 7 > 2 \cdot 4$.

Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

Απόδειξη

Είναι $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (β) έχουμε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (1)

Είναι $\gamma > \delta$ και $\beta > 0$, οπότε για τον ίδιο λόγο έχουμε $\beta\gamma > \beta\delta$ (2)

Από τις ανισότητες (1), (2) και σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Παρατηρήσεις:

1) Υπενθυμίζουμε ότι το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού α είναι μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

Επομένως:

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

2) Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα.

Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη

τις ανισότητες $\begin{cases} 6 > 4 \\ 3 > 1 \end{cases}$, τότε καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

Γ Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Οι ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούνται και για την επίλυση ανισώσεων. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $x - \frac{3x + 1}{2} > \frac{3}{4}$, που είναι πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. (Στο παράδειγμα έχουμε Ε.Κ.Π. = $4 > 0$, οπότε η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει, ιδιότητα β),

$$x - \frac{3x + 1}{2} > \frac{3}{4}$$

$$4 \cdot x - 4 \cdot \frac{3x + 1}{2} > 4 \cdot \frac{3}{4}$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

$$4x - 2(3x + 1) > 3$$

Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις

$$4x - 6x - 2 > 3$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, ιδιότητα α).

$$4x - 6x > 3 + 2 \\ -2x > 5$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου. (Στο παράδειγμα ο συντελεστής είναι $-2 < 0$ και γι' αυτό αλλάζει η φορά της ανίσωσης, ιδιότητα γ).

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{5}{-2}$$

$$x < -\frac{5}{2}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $\alpha > 4$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;

α) $-3\alpha + 2 < -10$ β) $\frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$ γ) $-2(\alpha + 2) < -12$

Λύση

α)

$$\alpha > 4$$

(πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με -3)

$$-3\alpha < -12$$

(προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το 2)

$$-3\alpha + 2 < -12 + 2$$

$$-3\alpha + 2 < -10$$

β)

$$\alpha > 4$$

(πολλαπλασιάζουμε και τα δύο

$$\frac{5}{4} \cdot \alpha > \frac{5}{4} \cdot 4$$

μέλη της ανισότητας με $\frac{5}{4}$)

$$\frac{5\alpha}{4} > 5$$

(αφαιρούμε και από τα δύο μέλη της ανίσωσης το 1)

$$\frac{5\alpha}{4} - 1 > 5 - 1 \text{ οπότε } \frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$$

$$\gamma) \alpha > 4$$

(προσθέτουμε και στα δυο μέλη της ανίσωσης το 2)

$$\alpha + 2 > 4 + 2$$

$$\alpha + 2 > 6$$

(πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της ανίσωσης με το -2)

$$-2(\alpha + 2) < -2 \cdot 6$$

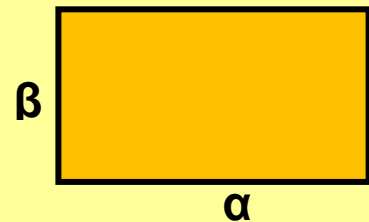
$$-2(\alpha + 2) < -12$$

2 Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου ισχύουν $4 \leq \alpha \leq 6$ και $2,5 \leq \beta \leq 4,5$.

Ποιες τιμές μπορεί να πάρει

α) η περίμετρος του ορθογωνίου;

β) το εμβαδόν του ορθογωνίου;



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\alpha + 2\beta$.

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των ανισοτήτων

$$\begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2,5 \leq \beta \leq 4,5 \end{cases} \text{ με το 2, οπότε έχουμε } \begin{cases} 8 \leq 2\alpha \leq 12 \\ 5 \leq 2\beta \leq 9 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και έχουμε

$$8 + 5 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 12 + 9 \text{ ή } 13 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 21 \text{ ή } 13 \leq \Pi \leq 21.$$

Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογωνίου είναι από 13 έως και 21.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha\beta$.

$$\text{Οι ανισότητες } \begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2,5 \leq \beta \leq 4,5 \end{cases} \text{ έχουν την ίδια φορά}$$

και θετικά μέλη, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $4 \cdot 2,5 \leq \alpha\beta \leq 6 \cdot 4,5$ ή $10 \leq \alpha\beta \leq 27$ ή $10 \leq E \leq 27$.

Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι από 10 έως και 27.

3 Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y , να αποδειχτεί ότι ισχύει $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι $x^2 + y^2 \geq 2xy$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ ή $(x - y)^2 \geq 0$.

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, αφού το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Η ισότητα ισχύει όταν $(x - y)^2 = 0$, οπότε $x - y = 0$ δηλαδή $x = y$.

4 Οι μαθητές μιας τάξης προκειμένου να πάνε μια εκδρομή ζήτησαν προσφορά από δύο πρακτορεία.
– Το πρώτο πρακτορείο ζήτησε 15 ευρώ για κάθε μαθητή και εφόσον οι μαθητές ήταν πάνω από 25 θα έκανε και έκπτωση 10%.
– Το δεύτερο πρακτορείο ζήτησε 12 ευρώ για κάθε μαθητή και 45 ευρώ για τα διάφορα έξοδα (διόδια, ναύλα φεριμπότ κ.τ.λ.)
Αν οι μαθητές που συμμετέχουν στην εκδρομή είναι περισσότεροι από 25, ποιο πρακτορείο έκανε την καλύτερη προσφορά;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι μαθητές που τελικά συμμετέχουν στην εκδρομή είναι x , όπου $x > 25$.

Στο πρώτο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν

$$15x - \frac{10}{100}15x = 15x - \frac{3}{2}x \text{ ευρώ, ενώ στο δεύτερο}$$

πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $12x + 45$ ευρώ.

Για να είναι καλύτερη η προσφορά του πρώτου πρακτορείου, πρέπει να ισχύει

$$15x - \frac{3}{2}x < 12x + 45 \text{ ή } 30x - 3x - 24x < 90 \text{ ή } 3x < 90 \text{ ή } x < 30.$$

Επομένως αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 25 και λιγότεροι από 30, τότε την καλύτερη προσφορά έκανε το πρώτο πρακτορείο, ενώ αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 30, την καλύτερη προσφορά έκανε το δεύτερο πρακτορείο. Αν οι μαθητές είναι 30, τότε οι προσφορές των δύο πρακτορείων είναι ίδιες.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $a < 6$, τότε $a - 6 < 0$.

β) Αν $a > \beta$, τότε $-a < -\beta$.

γ) Αν $a < 0$, τότε $-a > 0$.

δ) Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$.

ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$.

στ) Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$.

ζ) Αν $a > 6$ και $\beta > -4$, τότε $a + \beta > 2$.

η) Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $>$, $<$, \geq , \leq , ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν $a > 3$, τότε $a - 3 \dots 0$

β) Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha \dots \gamma$

γ) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} \dots 0$

δ) Αν $\gamma < 0$ και $\alpha\gamma < \beta\gamma$, τότε $\alpha \dots \beta$

ε) Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^2 \dots 0$

στ) Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha + \beta \dots 0$

3 Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε, ώστε από την ανίσωση $3x - 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

4 Με ποιες ιδιότητες της διάταξης από την ανισότητα $x > 3$ προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες;
α) $x + 4 > 7$ β) $x - 2 > 1$ γ) $5x > 15$ δ) $-6x < -18$

5 Αν $\alpha > 12$ και $\beta > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;
α) $\alpha + \beta > 15$ β) $\alpha - \beta > 9$ γ) $\alpha\beta > 36$ δ) $\frac{\alpha}{\beta} > 4$

6 Ένας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αρκεί να ισχύει $\alpha\delta = \beta\gamma$. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ αρκεί να αποδείξει ότι $\alpha\delta > \beta\gamma$.
Η σκέψη που έκανε είναι σωστή;



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1** Αν ισχύει $3(\alpha - \beta) > 2(\alpha + \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha > 5\beta$.
- 2** Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $x > -6$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;
α) $-5x - 30 < 0$ β) $3x + 18 > 0$ γ) $2(x + 4) > -4$
- 3** Αν $2 < \alpha < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί
α) $\alpha - 2$ β) $2\alpha - 5$ γ) $1 - 3\alpha$
- 4** Αν $\alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι
α) $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$ β) $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$
γ) $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ δ) $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$
- 5** Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:
α) $3 < x + y < 8$ β) $4 < 2x + y < 11$ γ) $-4 < x - y < 1$
- 6** Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε να αποδείξετε ότι:
α) $xy > 6$ β) $(x - 2)(y - 3) > 0$ γ) $(x + 2)y > 12$
- 7** Αν α, β θετικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta^2$.
- 8** Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^2 > \alpha$ β) Αν $x > 2$, τότε $x^3 > 2x^2$

9 Αν $\alpha > \beta$ και α, β ομόσημοι, τότε να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$$

10 Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $(x - 3)(y - 2) < 0$ β) $xy + 6 < 2x + 3y$

11 Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y , να αποδείξετε ότι:

α) $x^2 + 1 > 2x$ β) $(x + y)^2 > 4xy$ γ) $x^2 + y^2 + 1 > 2y$

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε πότε ισχύει η ισότητα

12 Να αποδείξετε ότι:

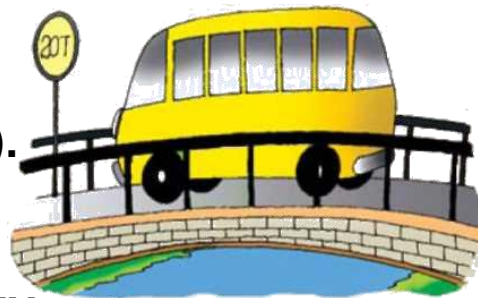
α) Αν $x > 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \geq 2$

β) Αν $x < 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \geq -2$

13 Να βρείτε το φυσικό αριθμό που είναι μεταξύ των αριθμών 114 και 135 και ο οποίος, όταν διαιρεθεί με το 15, δίνει υπόλοιπο 6.

14 Η τιμή ενός παντελονιού κυμαίνεται από 30 έως 35 € και μιας μπλούζας από 22 έως 25 €. Αν κάποιος θέλει ν' αγοράσει 2 παντελόνια και 3 μπλούζες, τότε μεταξύ ποιων ποσών θα κυμαίνονται τα χρήματα που πρέπει να πληρώσει;

15 Μ' ένα πούλμαν ταξιδεύουν 51 άτομα (ο οδηγός και 50 επιβάτες). Αν το βάρος κάθε ατόμου κυμαίνεται μεταξύ 60 kg και 100 kg, οι αποσκευές κάθε επιβάτη ζυγίζουν



από 4 kg έως και 15 kg και το πούλμαν έχει απόβαρο 13,25 t, τότε να εκτιμήσετε το συνολικό βάρος του πούλμαν. Είναι δυνατόν το πούλμαν να διασχίσει μια γέφυρα επαρχιακού δρόμου που το ανώτατο επιτρεπόμενο βάρος διέλευσης είναι 20 t;

16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $11 - 3x < 7x + 1$ β) $2x - 9 > 5x + 6$

γ) $4(3x - 5) > 3(4x + 5)$ δ) $\frac{3 - 4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6 - x}{2}$

ε) $\frac{2x + 1}{6} - x < \frac{3 - 2x}{3}$ στ) $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x + 4}{6}$

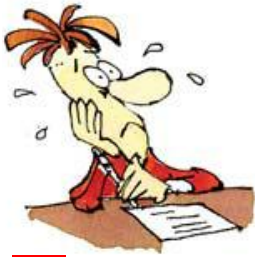
17 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x + 3 < 9 + 5x \\ 1 - x < 2x + 7 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x - 1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \end{cases}$

18 Να βρείτε θετικό ακέραιο αριθμό x , ώστε

$$\frac{x}{x + 1} < \frac{31}{40} \quad \text{και} \quad \frac{x + 1}{x + 2} > \frac{31}{40}$$

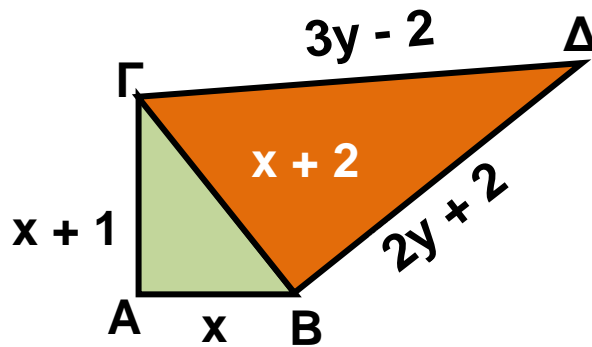


ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) (x + \alpha)^2 - (x + \beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2 \quad \beta) \frac{x + \alpha}{\beta} - \frac{x + \beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - 1$$

2 Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια. Να βρείτε τις τιμές των x, y .



3 Το γινόμενο δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών, αν διαιρεθεί με το άθροισμά τους, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23. Να βρείτε τους αριθμούς.

4 Να λύσετε τις εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$.

$$\alpha) \frac{x}{x - \alpha} + \frac{2x}{x + \alpha} = \frac{2\alpha^2}{x^2 - \alpha^2} \quad \beta) \frac{3\alpha}{x^2 - \alpha x} + \frac{1}{x^2 + \alpha x} = \frac{6x}{x^2 - \alpha^2}$$

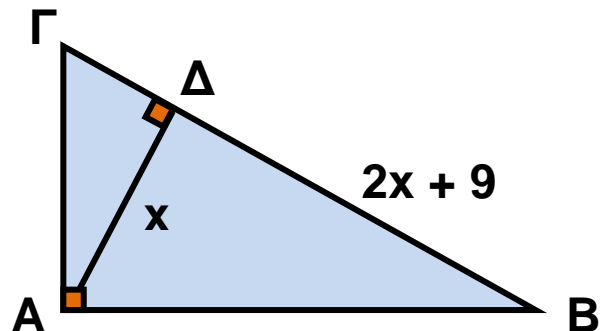
5 Αν μια λύση της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda = 0$ είναι ο αριθμός 1, να βρείτε την άλλη λύση.

6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$, αν είναι γνωστό ότι το $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

7 Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους αυξημένο κατά τον αντίστροφο του γινομένου τους να είναι ίσο με 1.

8 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 m και το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 399 m^2 .

9 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD . Αν είναι $AD = x$, $BD = 2x + 9$ και $\Gamma D = 3$, να υπολογίσετε τον αριθμό x .



10 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(1 + \alpha)(1 + \beta)$ και $1 + \alpha + \beta$.

11 α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$.

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

12 Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{v(v+2)} - \frac{1}{(v+1)(v+2)} > \frac{2}{v(v+1)}$ για κάθε θετικό ακέραιο v .

13 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$ β) $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

- 14** Να διατάξετε τους θετικούς αριθμούς α , β , γ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, αν ισχύει $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma$.
- 15** Αν $\alpha > 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + 1)x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.
- 16** Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$. (Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995).
- 17** Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$. Για ποιες τιμές των α , β η παράσταση A γίνεται ελάχιστη; (Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001).
- 18** - Ο καθηγητής:
Να λύσετε την εξίσωση
$$\frac{x - 19}{2001} + \frac{x - 17}{2003} + \frac{x - 15}{2005} + \frac{x - 13}{2007} = 4$$

- Ο μαθητής:
Κύριε, αυτή η εξίσωση ούτε μέχρι το 2020 δε λύνεται. Εσείς μπορείτε να τη λύσετε;
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι
$$\frac{x - 19}{2001} = \frac{x - 2020 + 2001}{2001} = \frac{x - 2020}{2001} + 1 \text{ κ.τ.λ.}$$
- 19** Να λύσετε το σταυρόλεξο

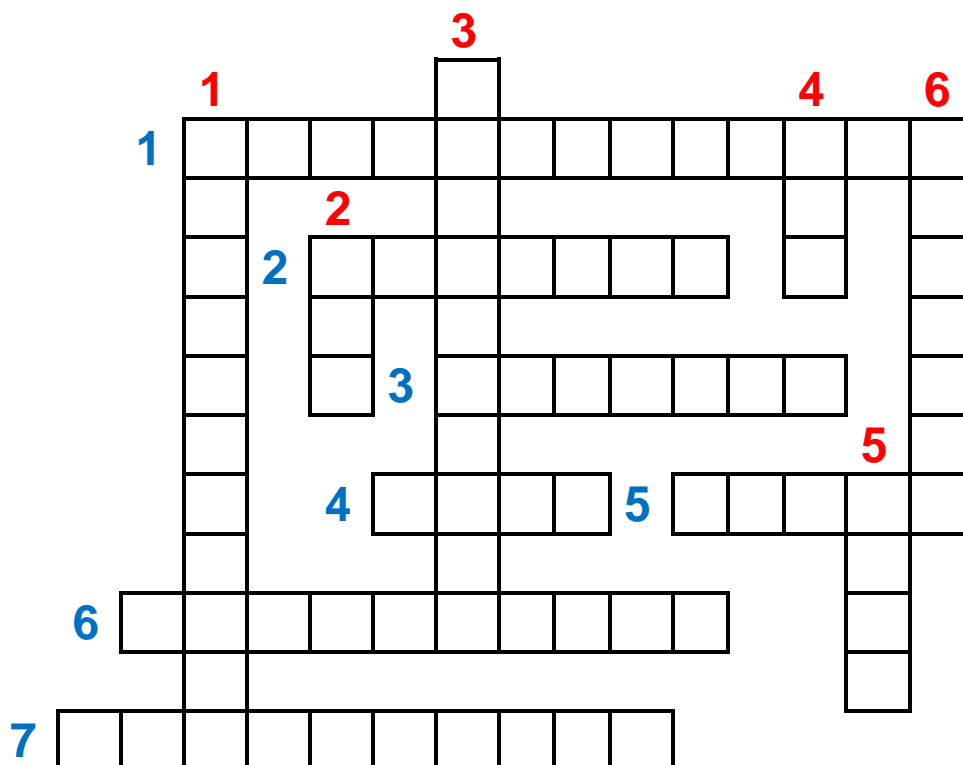
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

- Είναι η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.
- Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών.

3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου.
4. Ο αριθμός 2 είναι της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x - 1)^2 = 0$.
6. Η επίλυση μιας εξίσωσης 2ου βαθμού γίνεται και με τετραγώνου.
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΚΑΘΕΤΑ

1. Το πρόσημο της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.
2. Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ με $b^2 - 4ac > 0$ έχει λύσεις.
3. Ιδιότητα που ισχύει και στη διάταξη πραγματικών αριθμών.
4. Η εξίσωση $ax + b = 0$ με $a \neq 0$ έχει λύση.
5. Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης.
6. Είναι η εξίσωση $0x = 7$.





ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η γενική μορφή μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $ax + \beta = 0$ με $a \neq 0$, π.χ. $3x + 18 = 0$
- Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης είναι η τιμή του αγνώστου που την επαληθεύει. Π.χ. ο αριθμός $x = -6$ είναι λύση της εξίσωσης $3x + 18 = 0$, αφού $3 \cdot (-6) + 18 = 0$.
- Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $ax + \beta = 0$		Παραδείγματα
$a \neq 0$	έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$	$4x + 3 = 0$ ή $4x = -3$ ή $x = -\frac{3}{4}$
$a = 0$	$\beta \neq 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)
	$\beta = 0$	έχει λύση κάθε αριθμό (ταυτότητα)

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η γενική μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, π.χ. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ με $a = 2$, $\beta = -5$ και $\gamma = 3$
- Η εξίσωση $x^2 = a$

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $x^2 = a$		Παραδείγματα
$a > 0$	έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt{a}$ και $x = -\sqrt{a}$	$x^2 = 2$ άρα $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$
$a < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	$x^2 = -4$ (αδύνατη)
$a = 0$	έχει μία λύση τη $x = 0$ (διπλή)	$x^2 = 0$ άρα $x = 0$ (διπλή λύση)

- Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$	
	$\Delta > 0$	έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
	$\Delta = 0$	έχει μία διπλή λύση, την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
	$\Delta < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)

- Παραγοντοποίηση τριωνύμου:
Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

3. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Κλασματική εξίσωση ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

- Ένας αριθμός που μηδενίζει κάποιον παρονομαστή μιας κλασματικής εξίσωσης δεν μπορεί να είναι λύση (ή ρίζα) της.

4. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

Ορισμός διάταξης:

Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε $\alpha > \beta$

Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε $\alpha < \beta$

Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε $\alpha = \beta$

Ιδιότητες της διάταξης

• Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\gamma > \beta - \gamma$

• Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

• Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

• Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

• Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$ (Μεταβατική ιδιότητα)

• Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

Παρατηρήσεις:

- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.
- Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = \beta = 0$
- Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.



3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος
Γενικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου Επανάληψη
- Ανακεφαλαίωση

Εσύ που τα ξέρεις όλα, βρες μου δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 100 και διαφορά 40



3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης



✓ Μαθαίνω τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δυο αγνώστους και πώς παριστάνεται γραφικά.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y , βρίσκουμε άθροισμα 6.

- α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y .
- β) Ποια από τα ζεύγη $(-1, 8)$, $(0, 6)$, $(-2, 7)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$, $(3, 5)$ επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;
- γ) Σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία όσα από τα προηγούμενα ζεύγη επαληθεύουν τη σχέση. Με τη βοήθεια ενός χάρακα να εξετάσετε αν όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ϵ .
- δ) Πάνω στην ευθεία ϵ να πάρετε ένα οποιοδήποτε σημείο M και να εξετάσετε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση.

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυση τους οδηγεί σε εξίσωση με δύο αγνώστους x , y και η οποία είναι της μορφής $ax + by = \gamma$.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x + y = 6$ είναι της μορφής αυτής, με $a = 2$, $b = 1$ και $\gamma = 6$. Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ και $y = 4$ η εξίσωση $2x + y = 6$ επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 1 + 4 = 6$, ενώ για $x = 3$ και $y = 5$ δεν επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 3 + 5 = 11 \neq 6$. Το ζεύγος των αριθμών $(1, 4)$ που επαληθεύει την εξίσωση $2x + y = 6$, λέμε ότι είναι μία λύση της.

Γενικά

Λύση μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

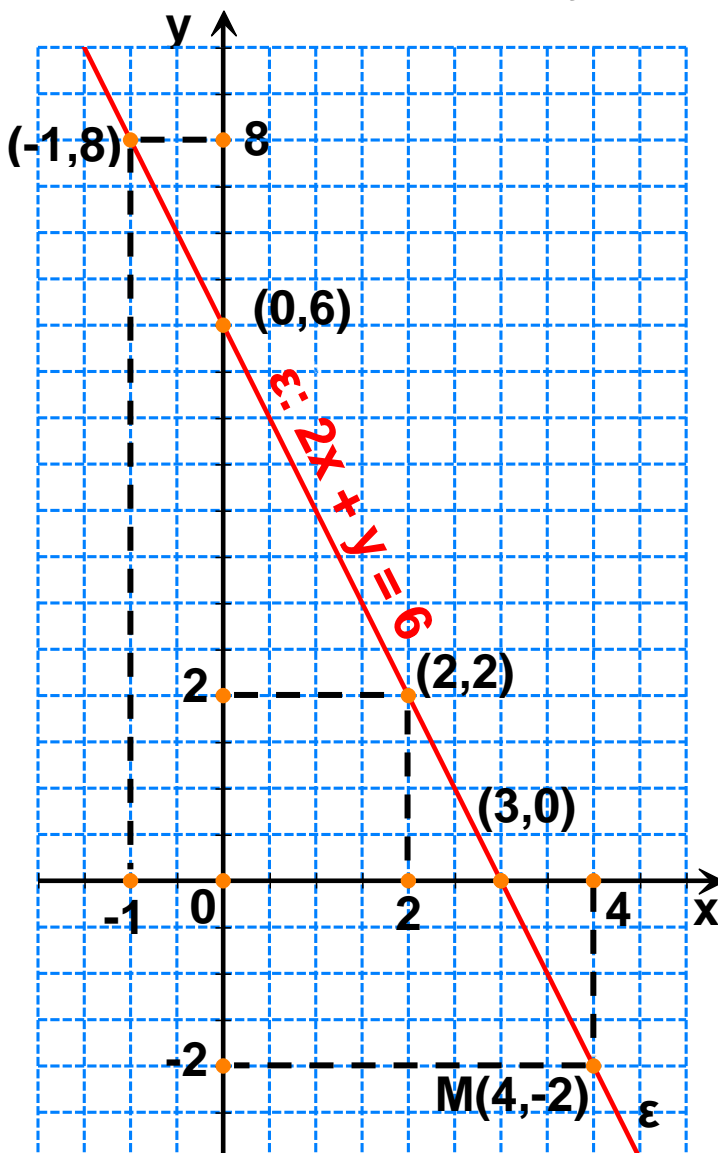
Η εξίσωση όμως $2x + y = 6$ δεν έχει λύση μόνο το ζεύγος $(1, 4)$, αλλά έχει **άπειρες λύσεις**. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη τιμή του y , ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση της και έτσι να σχηματίσουμε έναν πίνακα τιμών.

Για $x = -1$ έχουμε $2 \cdot (-1) + y = 6$, οπότε $y = 8$.

Για $x = 0$ έχουμε $2 \cdot 0 + y = 6$, οπότε $y = 6$.

Για $x = 2$ έχουμε $2 \cdot 2 + y = 6$, οπότε $y = 2$.

Για $x = 3$ έχουμε $2 \cdot 3 + y = 6$, οπότε $y = 0$ κ.τ.λ.



Άρα τα ζεύγη $(-1, 8)$, $(0, 6)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$, ... είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 6$.

x	-1	0	2	3
y	8	6	2	0

Αν σ' ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που καθένα έχει συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης $2x + y = 6$, παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία ϵ .

Αντιστρόφως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ϵ , π.χ. το $M(4, -2)$, παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $2x + y = 6$, αφού $2 \cdot 4 + (-2) = 6$. Άρα κάθε σημείο της ευθείας ϵ έχει συντεταγμένες (x, y) που είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση $2x + y = 6$ παριστάνει την ευθεία ϵ και συμβολίζεται $\epsilon: 2x + y = 6$.

Γενικά

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

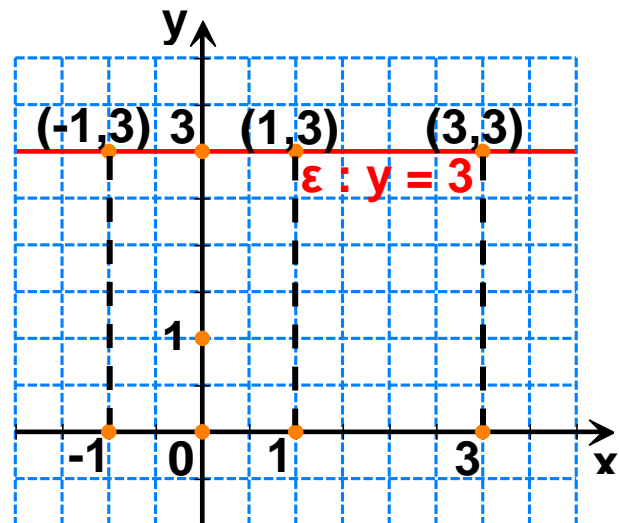
Ειδικές περιπτώσεις

Η εξίσωση $y = k$.

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $0x + 2y = 6$, που είναι της μορφής $ax + by = \gamma$ με $a = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του x έχουμε $y = 3$.

Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(-1, 3)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$, κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

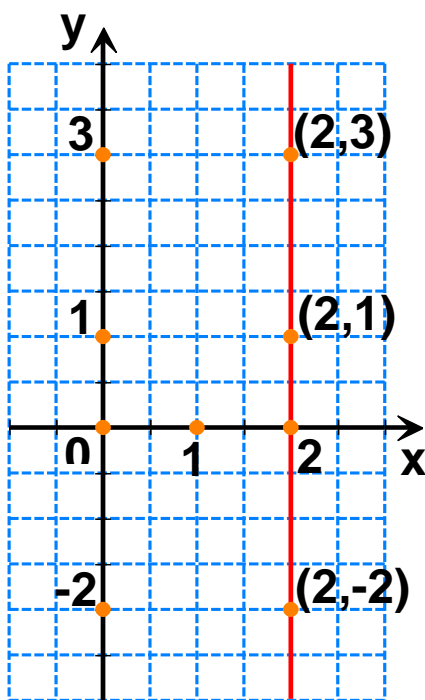
Επομένως, η εξίσωση $0x + 2y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ϵ της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη $y = 3$ και τετμημένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ϵ είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ϵ έχει εξίσωση $y = 3$



Γενικά

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, k)$, ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$

Η εξίσωση $x = k$



Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $3x + 0y = 6$, που είναι της μορφής $ax + by = \gamma$ με $\beta = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του y έχουμε $x = 2$.

Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(2, -2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

Επομένως, η εξίσωση $3x + 0y = 6$

παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τετμη-

μένη $x = 2$ και τεταγμένη οποιονδή-

ποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ που τέμ-

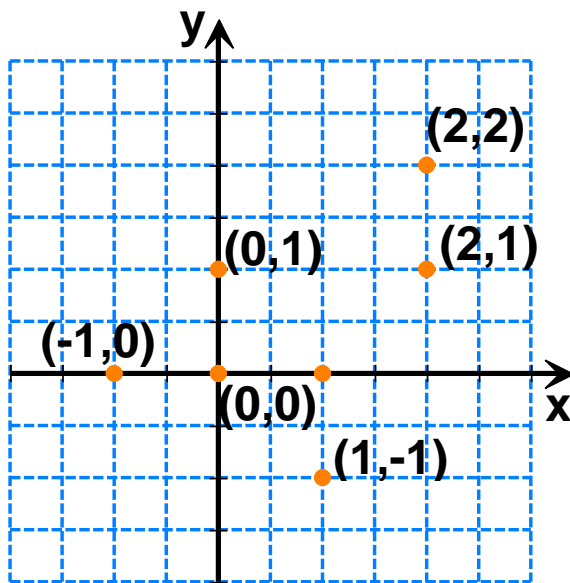
νει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(2, 0)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $x = 2$.

Γενικά

Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(k, 0)$, ενώ η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ με $a = \beta = 0$

- Η εξίσωση $0x + 0y = 7$ δεν παριστάνει ευθεία, αφού κανένα ζεύγος αριθμών (x, y) δεν είναι λύση της (αδύνατη εξίσωση).
- Η εξίσωση $0x + 0y = 0$ επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) . Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, κ.τ.λ. είναι λύσεις της (αόριστη εξίσωση). Τα σημεία όμως, που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Άρα η εξίσωση $0x + 0y = 0$ δεν παριστάνει ευθεία, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Εξισώσεις, όπως οι $2x + y = 6$, $0x + 2y = 6$, $3x + 0y = 6$, $0x + 0y = 7$, $0x + 0y = 0$, ονομάζονται γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y . Όπως διαπιστώσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα μόνο οι τρεις πρώτες παριστάνουν ευθεία. Στις εξισώσεις αυτές ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές των x, y είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Γενικά

Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ και παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

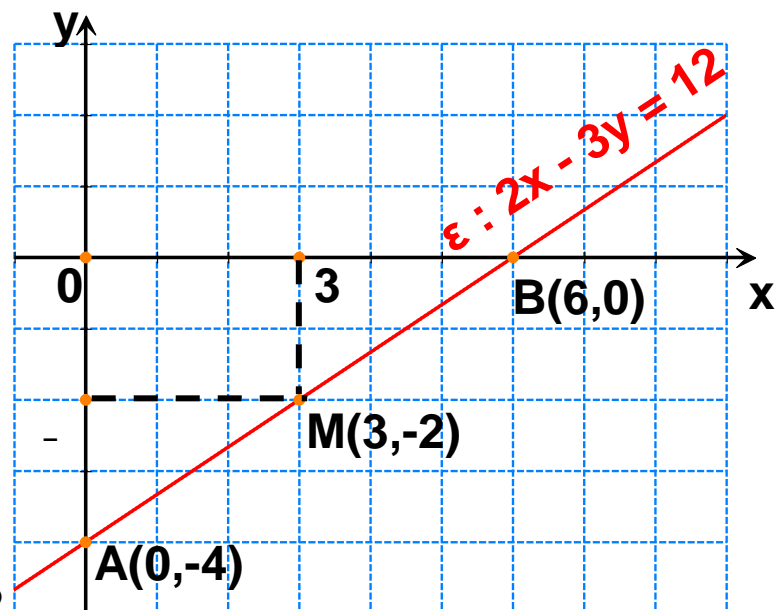


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1 α) Να σχεδιαστεί η ευθεία $\varepsilon : 2x - 3y = 12$.
β) Ένα σημείο M έχει τεταγμένη -2 . Ποια πρέπει να είναι η τετμημένη του, ώστε το σημείο M ανήκει στην ευθεία ε ;

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon : 2x - 3y = 12$ αρκεί να προσδιορίσουμε δύο σημεία της. Για $x = 0$ έχουμε $-3y = 12$, οπότε $y = -4$. Για $y = 0$ έχουμε $2x = 12$, οπότε $x = 6$. Άρα η εξίσωση $2x - 3y = 12$ παριστάνει ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $A(0, -4)$ και $B(6, 0)$.



- β) Το σημείο M ανήκει στην ευθεία ε , αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Αφού το σημείο M έχει τεταγμένη $y = -2$ για την τετμημένη του x πρέπει να ισχύει $2x - 3(-2) = 12$ ή $2x + 6 = 12$ ή $2x = 6$ ή $x = 3$.
Άρα η τετμημένη του M είναι $x = 3$.

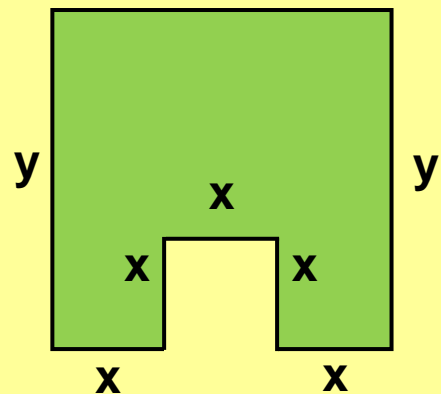
2 Αν η ευθεία $\varepsilon : ax - y = 1$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$, τότε να προσδιοριστεί η τιμή του a και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της ε με τους άξονες.

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon : ax - y = 1$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$, οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση $ax - y = 1$. Άρα έχουμε $2a - 5 = 1$ ή $2a = 6$ ή $a = 3$. Επομένως η ευθεία ε έχει εξίσωση $3x - y = 1$. Για $x = 0$ έχουμε $3 \cdot 0 - y = 1$ ή $-y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -1)$.

Για $y = 0$ έχουμε $3x - 0 = 1$ ή $3x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{1}{3}, 0)$.

- 3** Η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι 40 m.
α) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα x, y .
β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, ποια είναι η μέγιστη τιμή του x ;



Λύση

α) Η περίμετρος του σχήματος είναι $5x + y + 3x + y$, άρα ισχύει $5x + y + 3x + y = 40$ ή $8x + 2y = 40$ ή $4x + y = 20$ (1).

β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, τότε η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 10 και πάνω, δηλαδή ισχύει $y \geq 10$. Από την ισότητα (1) έχουμε $y = 20 - 4x$, οπότε πρέπει $20 - 4x \geq 10$ ή $-4x \geq 10 - 20$ ή $-4x \geq -10$ ή $x \leq 2,5$. Άρα η μεταβλητή x παίρνει τιμές από 2,5 και κάτω, οπότε η μέγιστη τιμή της είναι 2,5 m.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα ζεύγη $(3, 2)$, $(1, 5)$, $(0, 6)$, $(-3, 10)$, $(-2, 8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Το σημείο $(3, -2)$ ανήκει στην ευθεία

$$\varepsilon : 3x - y = 7.$$

β) Η ευθεία $\varepsilon : 5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $(-2, 0)$.

γ) Η ευθεία $\varepsilon : 2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Η ευθεία $\varepsilon : 3x + y = 6$ τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $(0, 3)$.

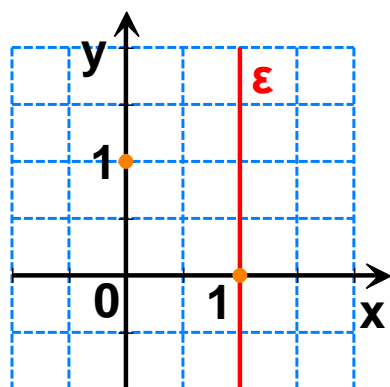
3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:

1. $y = 1$

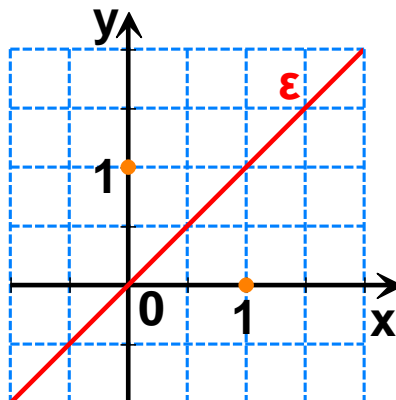
2. $x = -1$

3. $y = x$

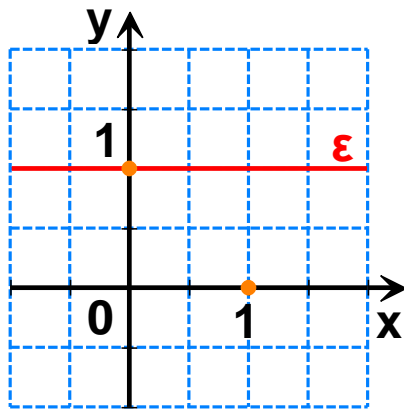
4. $x = 1$



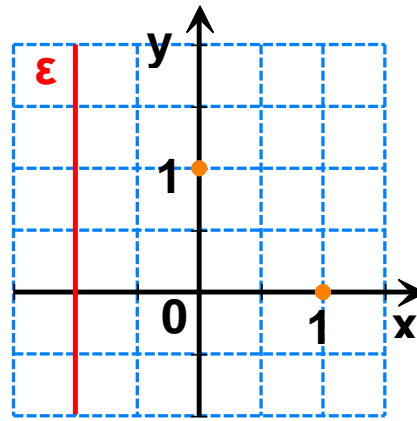
(σχήμα α)



(σχήμα β)



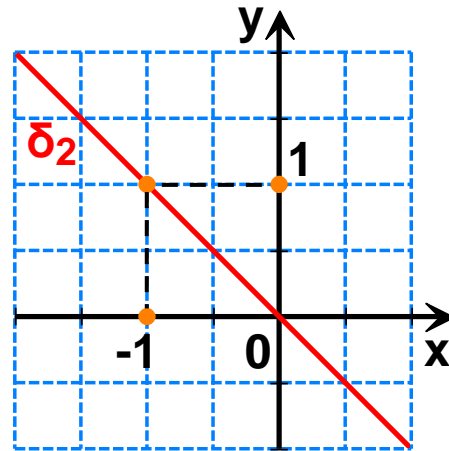
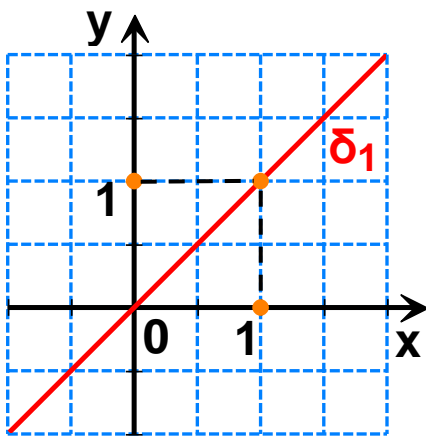
(σχήμα γ)



(σχήμα δ)

α	β	γ	δ

- 4 Οι ευθείες δ_1 , δ_2 διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



i) Η εξίσωση της δ_1 είναι:

α) $x = 1$ β) $y = 1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι:

α) $x = -1$ β) $y = -1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

- 5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -3)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x' έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -3$ δ) $y = -3$ ε) $4x - 3y = 0$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -2$ δ) $y = -2$ ε) $4x - 2y = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:

α) $\varepsilon_1 : 2x - y = 2$ β) $\varepsilon_2 : -4x + 2y = 10$

γ) $\varepsilon_3 : 10x - 5y = 20$ Τι παρατηρείτε;

2 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 6x + 2y = 8 - 2\lambda$

α) Να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για $\lambda = 4$ να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

3 Αν η ευθεία $\varepsilon : 4x + 3y = 12$ τέμνει τους άξονες x' και $y'y$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

4 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x = -4$, $\varepsilon_2 : 3y = 6$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.

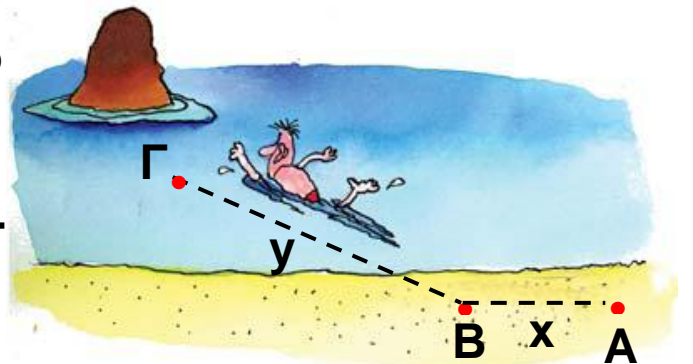
β) Ποια από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το προηγούμενο σημείο;

$\zeta_1 : 2x - y = 6$, $\zeta_2 : 3x + y = 10$ και $\zeta_3 : -5x + 3y = 16$

- 5** α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
 $x = -1$, $x = 5$, $y = -2$ και $y = 3$
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται.

- 6** α) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι:
α) παράλληλη στον άξονα x'
β) παράλληλη στον άξονα y' .
Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.

- 7** Κάποιος περπάτησε από το σημείο A στο σημείο B με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:
α) Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x , y .
β) Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύπησε;



- 8** Σ' ένα ξενώνα υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Αν ο ξενώνας έχει συνολικά 25 κρεβάτια, τότε να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x , y . Να χαράξετε σε τετραγωνισμένο χαρτί την αντίστοιχη ευθεία και από το σχήμα να διαπιστώσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια είναι δυνατό να έχει ο ξενώνας.

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του



✓ Μαθαίνω τι λέγεται γραμμικό σύστημα και πώς επιλύεται γραφικά.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + y = 8$.
2. Να βρείτε το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους και να εξετάσετε αν είναι λύση και των δύο εξισώσεων.

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y ,

$$\text{π.χ. } x + y = 5 \text{ και } 2x + y = 8$$

και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y .

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος των αριθμών $(3, 2)$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του γραμμικού

$$\text{συστήματος, } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}, \text{ αφού } \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot 3 + 2 = 8 \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ζεύγος $(3, 2)$ είναι λύση του συστήματος.

Γενικά

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Πώς όμως μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y ; Δηλαδή πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε ζεύγος (x, y) που να είναι λύση του; Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y επιλύεται γραφικά αλλά και αλγεβρικά.

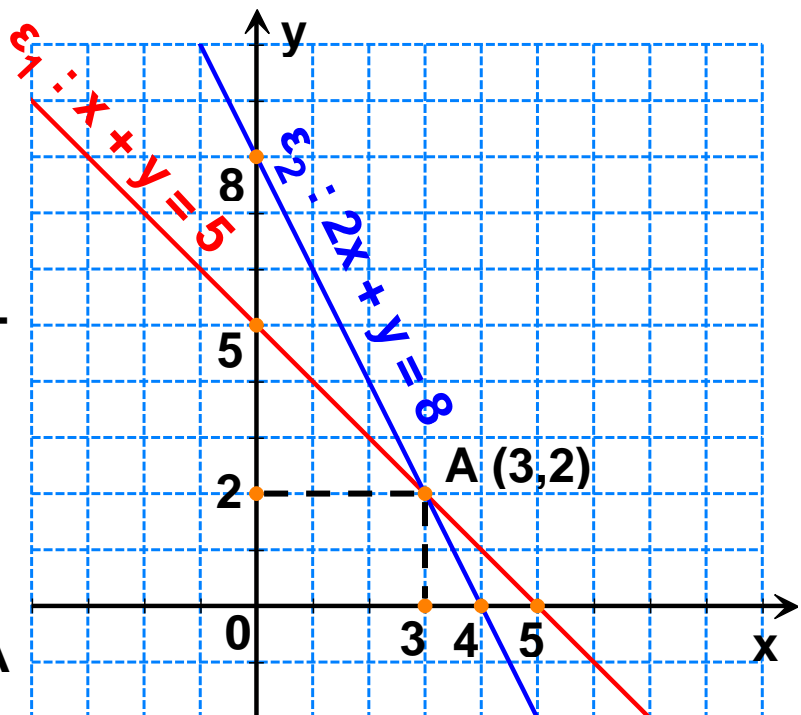
Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

Σύστημα με μοναδική λύση

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος

π.χ. του $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + y = 8$, οι οποίες όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα τέμνονται στο σημείο A. Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες $(3, 2)$ του κοινού σημείου A των ευθειών αυτών.



Επειδή το σημείο $A(3, 2)$ ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του $x = 3$ και $y = 2$ επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα το ζεύγος $(3, 2)$ είναι λύση του συστήματος. Οι ευθείες όμως ϵ_1, ϵ_2 δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε και το σύστημα δεν έχει άλλη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος $(3, 2)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

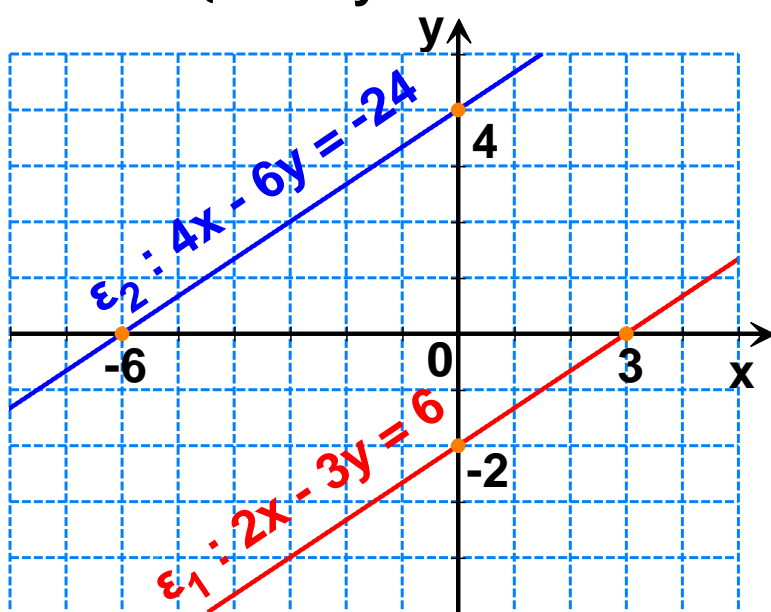
Αδύνατο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$ σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\epsilon_1 : 2x - 3y = 6$ και

$\epsilon_2 : 4x - 6y = -24$, οι οποίες όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα είναι παράλληλες.

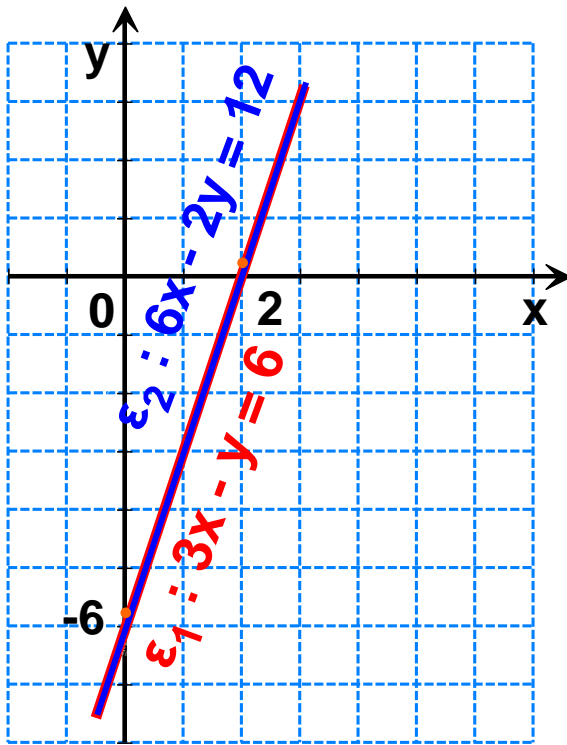
Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Αόριστο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$ σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\epsilon_1 : 3x - y = 6$ και $\epsilon_2 : 6x - 2y = 12$, οι οποίες, όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα, συμπίπτουν (ταυτίζονται). Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα

$$(\Sigma) : \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 14$, $\varepsilon_2: x - 2y = 0$ και ο άξονας $x'x$.

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1 : 2x + 3y = 14$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.

Για $x = 1$ έχουμε $2 + 3y = 14$ ή $3y = 12$, οπότε $y = 4$.

Για $x = 7$ έχουμε $2 \cdot 7 + 3y = 14$ ή $3y = 0$, οπότε $y = 0$.

Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(7, 0)$.

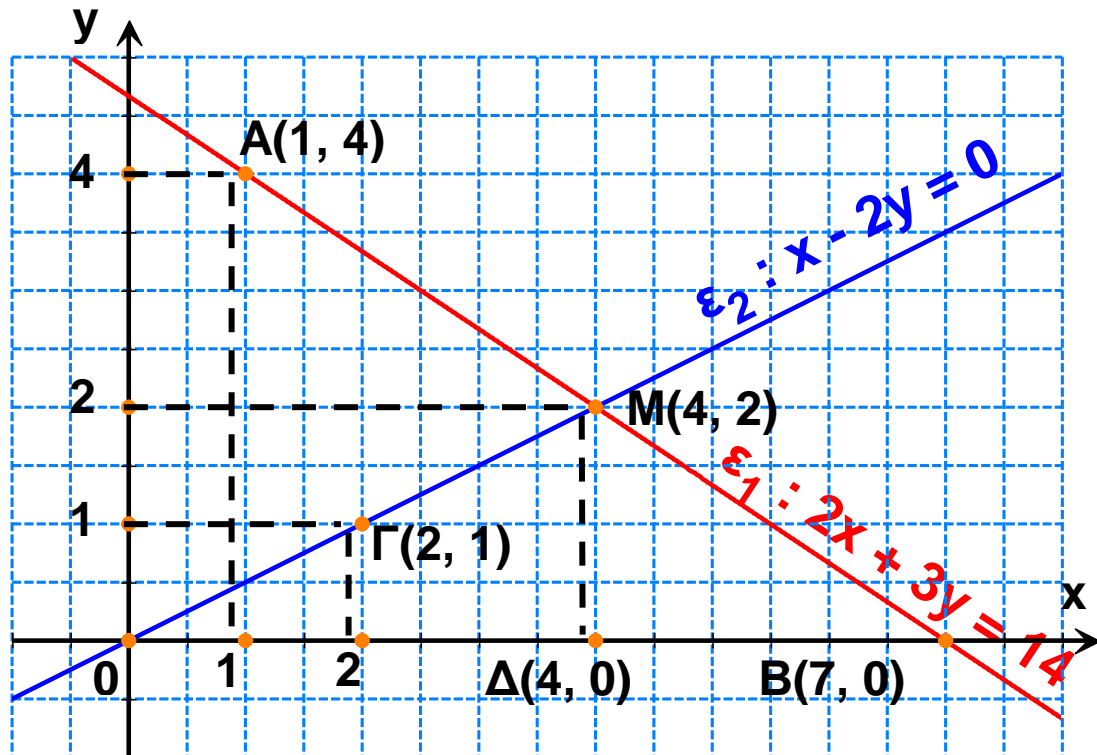
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2: x - 2y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.

Για $x = 0$ έχουμε $-2y = 0$, οπότε $y = 0$.

Για $x = 2$ έχουμε $2 - 2y = 0$ ή $-2y = -2$, οπότε $y = 1$.

Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία $0(0, 0)$ και $\Gamma(2, 1)$.

Παρατηρούμε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $M(4, 2)$, οπότε το σύστημα (Σ) έχει μία λύση την $(x, y) = (4, 2)$.



β) Το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ο άξονας $x'x$ είναι το OMB , το οποίο έχει βάση $OB = 7$ και ύψος $M\Delta = 2$.

Άρα το εμβαδόν του είναι $E = \frac{7 \cdot 2}{2} = 7$ τετραγωνικές μονάδες.

2 Να σχεδιάσετε τις ευθείες:

$\varepsilon_1 : x - y = 0$, $\varepsilon_2 : x + y = 0$, $\varepsilon_3 : -x + y = -3$.

Πόσες λύσεις έχει καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) : \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

Λύση

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1 : x - y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.

Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = 1$ έχουμε $y = 1$.

Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(1, 1)$.

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2 : x + y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.

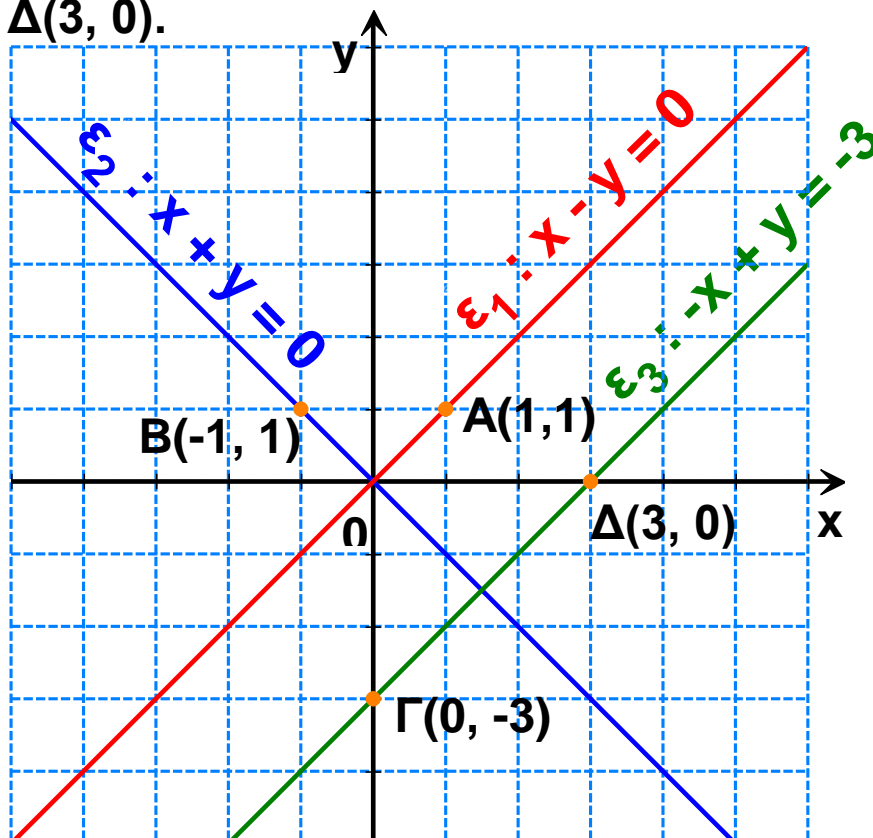
Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = -1$ έχουμε $y = 1$.

Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $B(-1, 1)$.

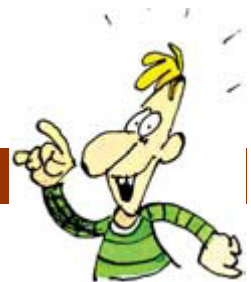
Σχεδιάζουμε και την ευθεία $\varepsilon_3 : -x + y = -3$.

Για $x = 0$ έχουμε $y = -3$ και για $y = 0$ έχουμε $x = 3$.

Άρα η ευθεία ε_3 διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, -3)$ και $\Delta(3, 0)$.



Το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση την $(0, 0)$, αφού οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $O(0, 0)$, ενώ το σύστημα (Σ_2) είναι αδύνατο, αφού οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγ-

μένες του σημείου:

α) $A(-3, 2)$ β) $B(1, -1)$ γ) $\Gamma(1, -4)$ δ) $\Delta(2, -3)$

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες ε_1 και ε_2 , να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται.	1. Το σύστημα είναι αδύνατο.
β. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.	2. Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συμπίπτουν.	3. Το σύστημα είναι αδύνατο.

α	β	γ

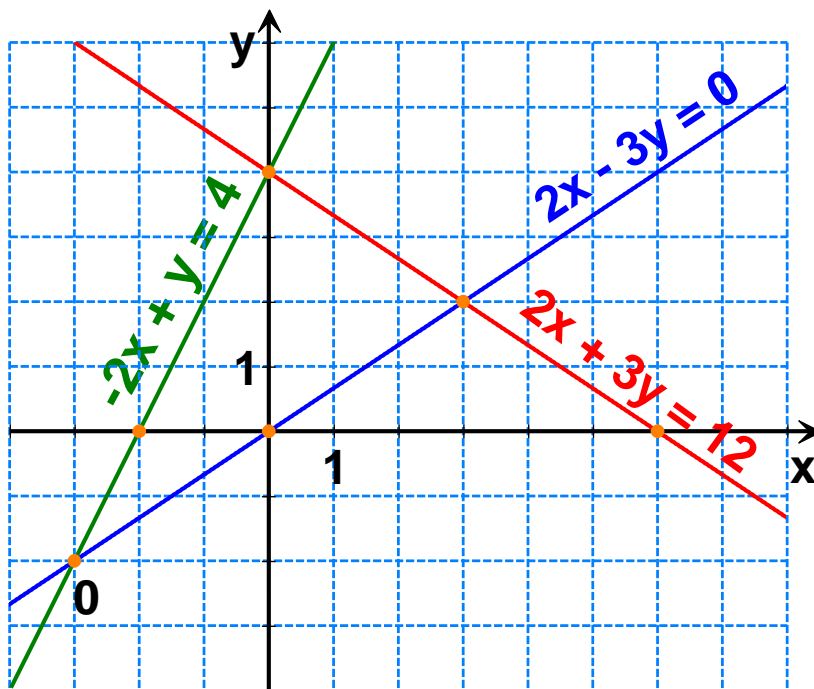
3 Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.

$$\alpha) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

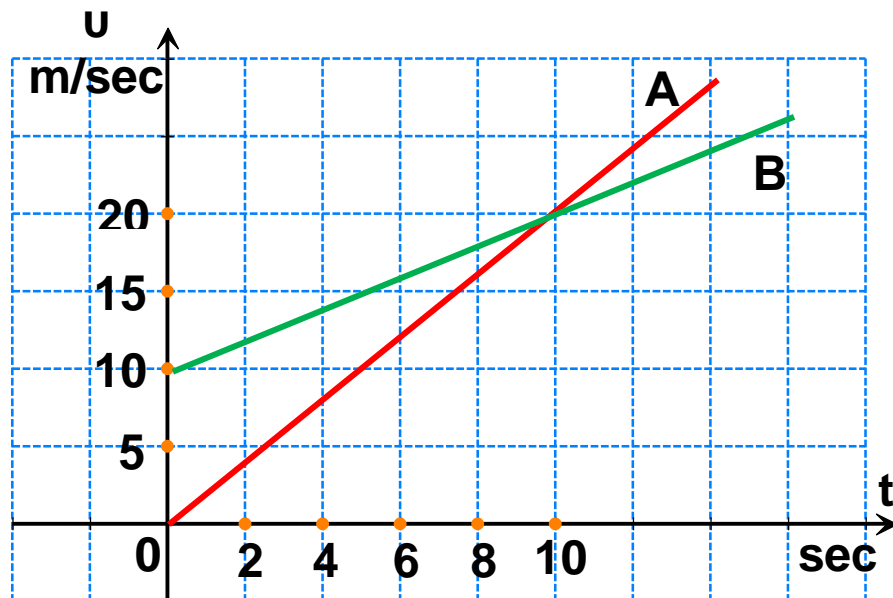
$$\sigma\tau) \begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

2 Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

3 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου δύο αυτοκινήτων A και B. Να βρείτε:

- α) Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου.
β) Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνησή τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και ποια θα είναι αυτή;



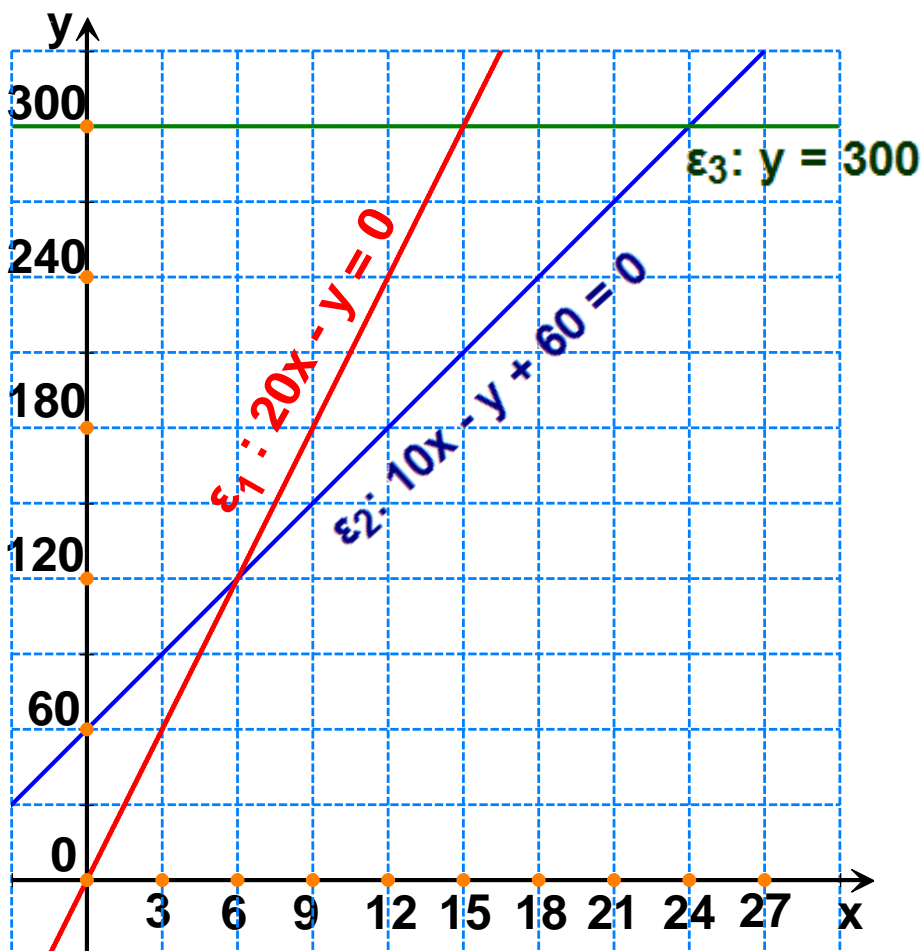
4 Ένας φίλαθλος για να παρακολουθήσει τους αγώνες μιας ομάδας έχει τις εξής δυνατότητες:

- Να πληρώνει 20 € για κάθε αγώνα που παρακολουθεί.
- Να πληρώσει 60 € ως αρχική συνδρομή και για κάθε αγώνα που παρακολουθεί να πληρώνει 10 €.
- Να πληρώσει 300 € και να παρακολουθεί όσους αγώνες επιθυμεί.

Η σχέση που συνδέει το πλήθος των αγώνων που θα παρακολουθήσει ο φίλαθλος με το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει σε κάθε περίπτωση

παριστάνεται με σημεία μιας από τις ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 .

- α) Να αντιστοιχίσετε κάθε περίπτωση σε μια από τις τρεις ευθείες.
- β) Πόσους αγώνες πρέπει να παρακολουθήσει ένας φίλαθλος, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει να είναι τα ίδια στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση;
- γ) Αν ο φίλαθλος παρακολούθησε τελικά 12 αγώνες, ποια περίπτωση ήταν η πιο συμφέρουσα;
- δ) Αν παρακολούθησε μόνο 15 αγώνες και δεν είχε επιλέξει την πιο συμφέρουσα περίπτωση, πόσα ευρώ ζημιώθηκε;
- ε) Πότε είναι πιο συμφέρουσα κάθε περίπτωση;



3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος



- ✓ Μαθαίνω να λύνω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο:
 - α) της αντικατάστασης
 - β) των αντίθετων συντελεστών
- ✓ Μαθαίνω να λύνω προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατά τη διάρκεια ενός ποδοσφαιρικού πρωταθλήματος, από τους 30 αγώνες που έδωσε μια ομάδα ηττήθηκε στους 10, ενώ στους υπόλοιπους κέρδισε ή έφερε ισοπαλία. Για κάθε νίκη της πήρε 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία πήρε 1 βαθμό και για κάθε ήττα δεν πήρε βαθμό. Αν τελικά συγκέντρωσε 44 βαθμούς, πόσες φορές νίκησε και πόσες έφερε ισοπαλία;

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.

Η αλγεβρική όμως επίλυσή του, όπως θα δούμε σ' αυτή την παράγραφο, μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.

Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον ένα από τους δύο αγνώστους και να καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν

άγνωστο. Δύο από τις μεθόδους με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό είναι οι εξής:

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$ με τη

μέθοδο της αντικατάστασης εργαζόμαστε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

Λύνουμε την εξίσωση $x + y = 20$ ως προς x και έχουμε $x = 20 - y$

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

Αντικαθιστούμε το x με $20 - y$ στην εξίσωση $x + 3y = 44$ και έχουμε:

$$(20 - y) + 3y = 44$$

$$20 + 2y = 44$$

$$2y = 44 - 20$$

$$2y = 24 \text{ άρα } y = 12$$

- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Για $y = 12$ από την εξίσωση $x = 20 - y$ έχουμε:

$$x = 20 - 12$$

$$x = 8$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 8$, $y = 12$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (8, 12)$

Για επαλήθευση, αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 8$ και $y = 12$ στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος $(8, 12)$ είναι λύση του,

$$\text{αφού } \begin{cases} 8 + 12 = 20 \\ 8 + 3 \cdot 12 = 44 \end{cases}$$

Στην ίδια λύση θα καταλήγαμε και αν λύναμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς y .

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Αν στις δύο εξισώσεις, οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι αντίθετοι αριθμοί, τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα πιο γρήγορα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

Για παράδειγμα, στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ οι

συντελεστές του y είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, τότε ο άγνωστος y απαλείφεται.

Έτσι έχουμε:

$$3x + 5x = 12 + 4 \text{ ή } 8x = 16, \text{ οπότε } x = 2.$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή του x σε μια από τις δύο εξισώσεις, π.χ. στην πρώτη, τότε έχουμε:

$$3 \cdot 2 + 2y = 12 \text{ ή } 2y = 6 \text{ ή } y = 3.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$.

Όταν όμως έχουμε να λύσουμε το $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

σύστημα στο οποίο δεν υπάρχουν αντίθετοι συντελεστές στον ίδιο άγνωστο τότε:

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο x , πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το -2 και της δεύτερης με το 3 , οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 3 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases}$$

$$-6x - 10y + 6x + 21y = -2 + 24$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

$$11y = 22, \text{ οπότε } y = 2$$

- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

Αφού $y = 2$, η εξίσωση $3x + 5y = 1$ γράφεται:

$$3x + 5 \cdot 2 = 17 \quad \text{ή} \quad 3x + 10 = 1$$
$$3x = -9 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -3$, $y = 2$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-3, 2)$ είναι λύση του, αφού

$$\begin{cases} 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1 \\ 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 8 \end{cases}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1 Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12° .

Λύση

Αν ω , φ είναι οι δύο παραπληρωματικές γωνίες, τότε $\omega + \varphi = 180^\circ$. Αν ω είναι η μεγαλύτερη, τότε έχουμε και $\omega = 3\varphi + 12^\circ$. Για να βρούμε τις γωνίες ω , φ λύνουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων.

$$\begin{cases} \omega + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3\varphi + 12^\circ + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\varphi + \varphi = 180^\circ - 12^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 4\varphi = 168^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} \varphi = 42^\circ \\ \omega = 3 \cdot 42^\circ + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \varphi = 42^\circ \\ \omega = 138^\circ \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες γωνίες είναι $\omega = 138^\circ$ και $\varphi = 42^\circ$.

2 Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} (x + 2y) + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Λύση

Αντικαθιστούμε το $x + 2y$ με 4 στην πρώτη εξίσωση του συστήματος, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 4 + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 7 - 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x + 2 \cdot 3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + 6 = 4 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 - 6 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -2, y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$.

3 Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{3x - y}{2} - \frac{x + y}{8} = 1 \\ \frac{2x - 1}{5} + \frac{y - 3}{2} = 2 \end{cases}$$

Λύση

Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και τις απαιτούμενες πράξεις, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 8 \cdot \frac{3x - y}{2} - 8 \cdot \frac{x + y}{8} = 8 \cdot 1 \\ 10 \cdot \frac{2x - 1}{5} + 10 \cdot \frac{y - 3}{2} = 10 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 4(3x - y) - (x + y) = 8 \\ 2(2x - 1) + 5(y - 3) = 20 \end{cases} \quad \text{ή } \begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y - 15 = 20 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y = 20 \end{cases} \quad \text{ή } \begin{cases} 11x - 5y = 8 \\ 4x + 5y = 37 \end{cases}$$

Οι συντελεστές του αγνώστου y είναι αντίθετοι, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$11x + 4x = 8 + 37 \quad \text{ή} \quad 15x = 45 \quad \text{ή} \quad x = 3.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $x = 3$ στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$4 \cdot 3 + 5y = 37 \quad \text{ή} \quad 12 + 5y = 37 \quad \text{ή} \quad 5y = 25 \quad \text{ή} \quad y = 5.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 3$, $y = 5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, 5)$.

4 Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;

Λύση

Αν x ήταν τα κέρματα των 50 λεπτών και y ήταν τα κέρματα του 1 ευρώ, τότε έχουμε την εξίσωση $x + y = 126$ (1).

Η συνολική αξία των κερμάτων σε ευρώ ήταν $0,50 \cdot x + 1 \cdot y$, οπότε έχουμε την εξίσωση $0,50 \cdot x + 1 \cdot y = 90$ (2).

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x + y = 126 \\ 0,50 \cdot x + 1 \cdot y = 90 \end{cases} \quad \left| \cdot (-2) \right. \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x + y = 126 \\ -x - 2y = -180 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $y - 2y = 126 - 180$ ή $-y = -54$ ή $y = 54$.

Αντικαθιστούμε την τιμή $y = 54$ στην πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$x + 54 = 126 \text{ ή } x = 126 - 54 \text{ ή } x = 72.$$

Άρα υπήρχαν 72 κέρματα των 50 λεπτών και 54 κέρματα του 1 ευρώ.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση

του συστήματος $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

α) (2, 4) β) (7, -1) γ) (6, 2) δ) (5, 1)

2 Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:

- α) την πρώτη εξίσωση ως προς x ;
- β) την πρώτη εξίσωση ως προς y ;
- γ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς x ;
- δ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς y ;

3 Αν στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη

μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει;

α) $3x = -1$ β) $2x = -9$ γ) $5x = -10$ δ) $5x = 10$

4 Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα;

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 4y = 9 \\ -3x + 2y = 1 \end{array} \right. \quad \dots\dots \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{array} \right. \quad \dots\dots$$

5 Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;

$$\alpha) \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{array} \right. \quad \beta) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{array} \right.$$

$$\gamma) \left\{ \begin{array}{l} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{array} \right. \quad \delta) \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{array} \right.$$

6 Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$$(\Sigma_1) : \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right. \quad (\Sigma_2) : \left\{ \begin{array}{l} 5x - 7y = -4 \\ -5x + 7y = 4 \end{array} \right.$$

αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 4x - y = 10 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

2 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$$

3 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{2x + y}{4} = 3 \\ \frac{3x - y}{2} = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{x - 1}{4} - y = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{x - 5}{2} + \frac{2y + 1}{3} = 3 \\ \frac{x + 4}{3} - \frac{y - 6}{2} = 4 \end{cases}$$

4 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 4x - 3(2x + 3y) = 20 - x + y \\ 2(x - 2y) + 5(x - 2) = 3y + 4 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x(y + 4) = y(x - 6) - 15 + 3x \\ (x - 1)(x + 2y) = (x + y)^2 - y(y + 1) \end{cases}$$

5 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 1,3\alpha - 0,8\beta = 2,1 \\ 0,9\alpha + 0,4\beta = 0,5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{\omega}{4} - 0,2\varphi = 1,5 \\ 3\omega + 1,4\varphi = -1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2,5x + 3,2y = -1,8 \\ 1,6x - 2,4y = -5,6 \end{cases}$$

6 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{5}{6} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{2}{\omega} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{3} \\ \frac{-6}{\omega} + \frac{9}{\varphi} = 1 \end{cases}$$

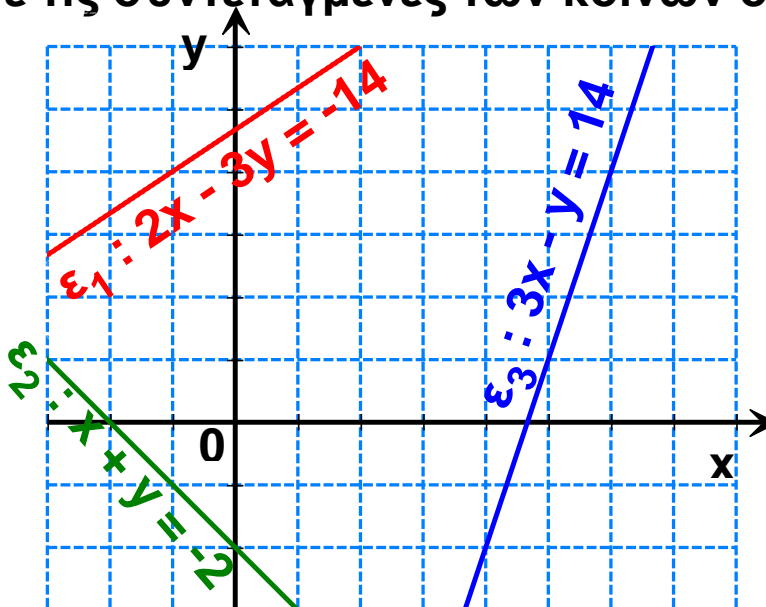
7 Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών

$$\varepsilon_1 : 2x + 5y = 10 \text{ και } \varepsilon_2 : x - y = 1.$$

8 Οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : 2x - 3y = -14 \quad \varepsilon_2 : x + y = -2 \quad \varepsilon_3 : 3x - y = 14$$

τέμνονται έξω από το χαρτί σχεδίασης. Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων τους;



9 Αν $3 + 3 + 3 + \dots + 3 + 5 + 5 + 5 + \dots + 5 = 410$ και το πλήθος των προσθετέων του πρώτου μέλους είναι 100, να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 3 και πόσες φορές ο αριθμός 5.

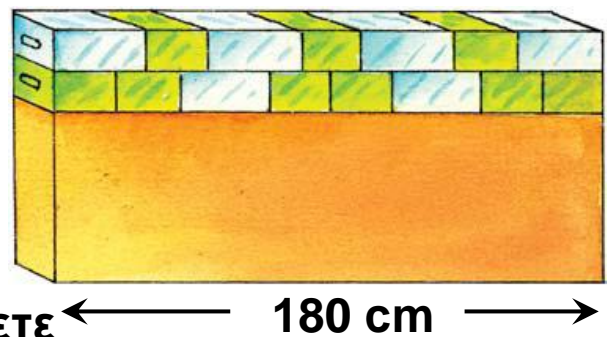
10 Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει ως λύση $x = 1$

και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των αριθμών α , β .

11 Η ευθεία με εξίσωση $\alpha x + y = \beta$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-3, -2)$. Να βρείτε τις τιμές των α , β .

12 Να βρείτε τους αριθμούς λ , μ , ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - \mu)x + \mu - 2\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 3.

13 Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



14 Συσκευάσαμε 2,5 τόνους ελαιόλαδου σε 800 δοχεία των 2 και 5 κιλών. Να βρείτε πόσα δοχεία χρησιμοποιήσαμε από κάθε είδος.



15 Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και τη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16. Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες, ο βαθμός της Χημείας

αυξήθηκε κατά 4 μονάδες με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε καθένα από τα δύο μαθήματα κατά το πρώτο τρίμηνο;

16 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα του απέχουν 58 cm. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

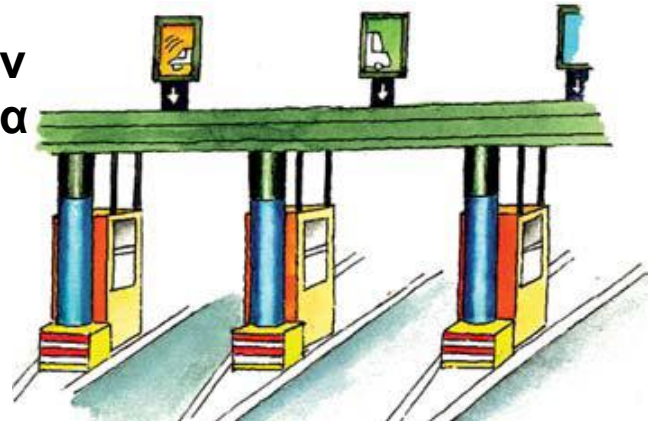
17 Αν οι μαθητές ενός τμήματος καθίσουν ανά έναν σε κάθε θρανίο, τότε θα μείνουν όρθιοι 8 μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δύο θα μείνουν κενά 4 θρανία. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία.

18 Μια ποτοποιία παρασκεύασε 400 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 38% vol, αναμειγνύοντας δύο ποιότητες με περιεκτικότητες 32% vol και 48% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποιότητα χρησιμοποίησε;

19 Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $u = u_0 - at$, όπου t ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή του φρεναρίσματος.
Αν 2 sec μετά το φρενάρισμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12m/sec και 2sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα u_0 και την επιβράδυνση a . Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο;



20 Από ένα σταθμό διοδίων πέρασαν 945 αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες και εισπράχτηκαν 1810 €. Αν ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου πλήρωσε 2 € και ο οδηγός κάθε μοτοσικλέτας πλήρωσε 1,2 €, να βρείτε πόσα ήταν τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες.



21 Σ' ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί τού αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;



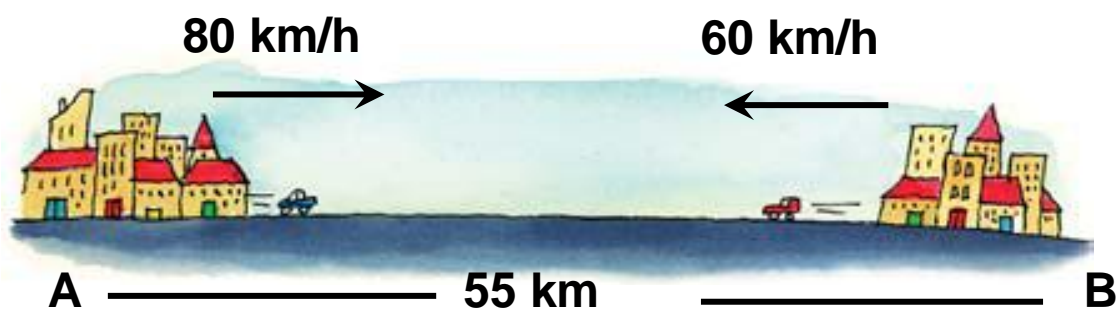
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 1** Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = k \end{cases}$, όπου k πραγματικός αριθμός.
- 2** Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda + \mu)x + y = 7$ και $\varepsilon_2: x + (\lambda + 3\mu)y = 1$ τέμνονται στο σημείο $A(2, 1)$, να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ .
- 3** Αν τα συστήματα $\Sigma_1) \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$ και $\Sigma_2) \begin{cases} 2x + \alpha y = \beta \\ 3x - \beta y = \alpha \end{cases}$ έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τους αριθμούς α, β .
- 4** Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y όταν:
α) $(x + y - 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 0$
β) $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$
- 5** Να λύσετε τα συστήματα:
α) $\begin{cases} (2x - 3y + 4)(x + y) = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (3x - 4y)(x + 2y) = 8 \\ \frac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$
γ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$
- 6** Να βρείτε δύο αριθμούς, που έχουν άθροισμα 100 και αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο, τότε θα προκύψει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 15.

- 7** Αν η εξίσωση $(2\lambda - \kappa - 3)x = \kappa - \lambda + 1$ είναι αόριστη, να βρείτε τους αριθμούς κ , λ .
- 8** Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά απέχουν 18 cm. Αν τα εμβαδά των δύο κύκλων διαφέρουν κατά $72\pi \text{ cm}^2$, να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.
- 9** Να βρείτε τις ηλικίες δύο αδελφών, αν σήμερα διαφέρουν κατά 5 χρόνια, ενώ μετά από 11 χρόνια οι ηλικίες τους θα έχουν λόγο $\frac{4}{3}$.
- 10** Σ' ένα ταξίδι με πλοίο, το εισιτήριο της Α' θέσης κοστίζει 18 € και της Β' θέσης κοστίζει 6 € λιγότερα. Αν σ' ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας 4500 €, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.
- 11** Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 10 και αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, τότε θα προκύψει αριθμός κατά 18 μικρότερος.
- 12** Αν διαιρέσουμε ένα διψήφιο αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 3. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του και τον αριθμό που προκύπτει τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 9. Ποιος είναι ο αρχικός διψήφιος αριθμός;
- 13** Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2 . Αν όμως, αυξήσουμε το μήκος του κατά 4 m και ελαττώσουμε το πλάτος

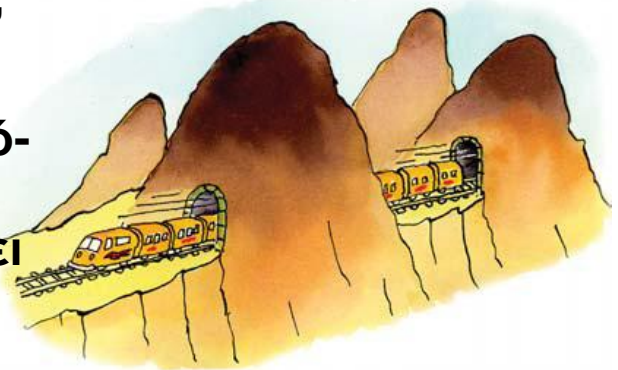
του κατά 6 m, το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

- 14** Οι πόλεις A και B απέχουν 55 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη A και με μέση ταχύτητα 80 km/h κινείται προς την πόλη B. Δεκαπέντε λεπτά μετά την εκκίνησή του ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη B και με μέση ταχύτητα 60 km/h κινείται προς την πόλη A. Πόσο χρόνο κινήθηκε κάθε αυτοκίνητο μέχρι τη συνάντησή τους;



- 15** Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 km. Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες, ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Με ποια ταχύτητα κινείται κάθε αυτοκίνητο;

- 16** Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος, που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα εισέλθει σε μια σήραγγα μήκους 180 m μέχρι τη στιγμή που και το τελευταίο του βαγόνι θα εξέλθει απ' αυτή, είναι 12 sec. Σε μια δεύτερη σήραγγα μήκους 930 m ο αντίστοιχος χρόνος που μεσολαβεί είναι 42 sec. Να βρείτε την ταχύτητα και το μήκος του τρένου.



- 17** Οι αντιστάσεις R_1 , R_2 , αν συνδεθούν παράλληλα, έχουν ολική αντίσταση $2,4 \Omega$. Αν η αντίσταση R_2 συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση 12Ω , τότε η ολική τους αντίσταση είναι R_1 . Να βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_1 , R_2 .

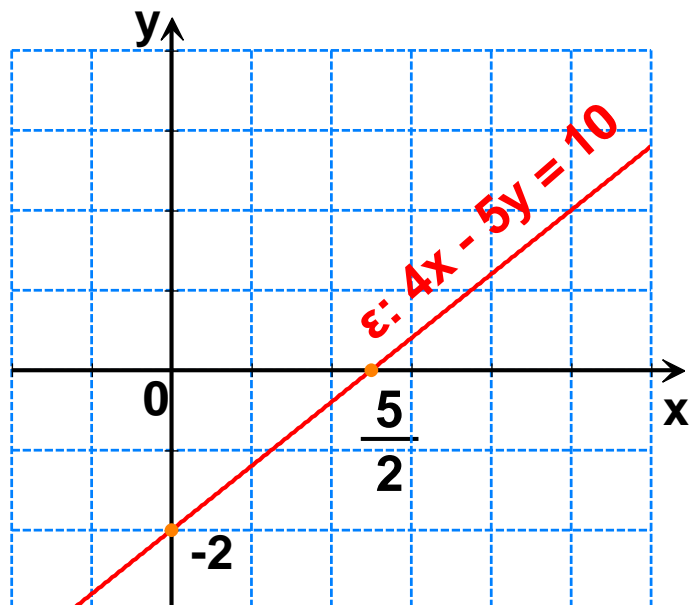


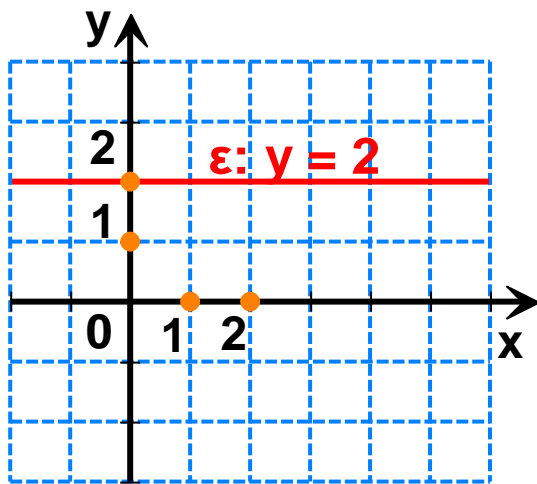
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

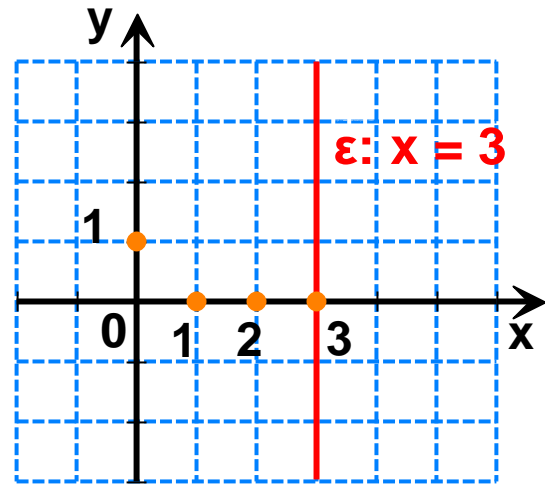
- Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x , y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, π.χ. $3x + 2y = 7$.
- Λύση της γραμμικής εξίσωσης $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.
Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος $(1, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης $3x + 2y = 7$, αφού $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$.
- Η γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ παριστάνει ευθεία ε , αν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

Αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$, τότε η γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ παριστάνει ευθεία που τέμνει και τους δύο άξονες.





Αν $\alpha = 0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $y = \kappa$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ ή τον άξονα $x'x$.



Αν $\beta = 0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $x = \kappa$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ ή τον άξονα $y'y$.

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Π.χ. αν το σημείο $M(3, 4)$ ανήκει στην ευθεία $\epsilon : ax - y = 0$, τότε ισχύει $3 \cdot a - 4 = 0$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή. Π.χ. το σημείο $M(0, -2)$ ανήκει στην ευθεία $\epsilon : 4x - 5y = 10$, αφού $4 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) = 10$.

2. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \quad \text{π.χ.} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

- Λύση του γραμμικού συστήματος (Σ) είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του. Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος

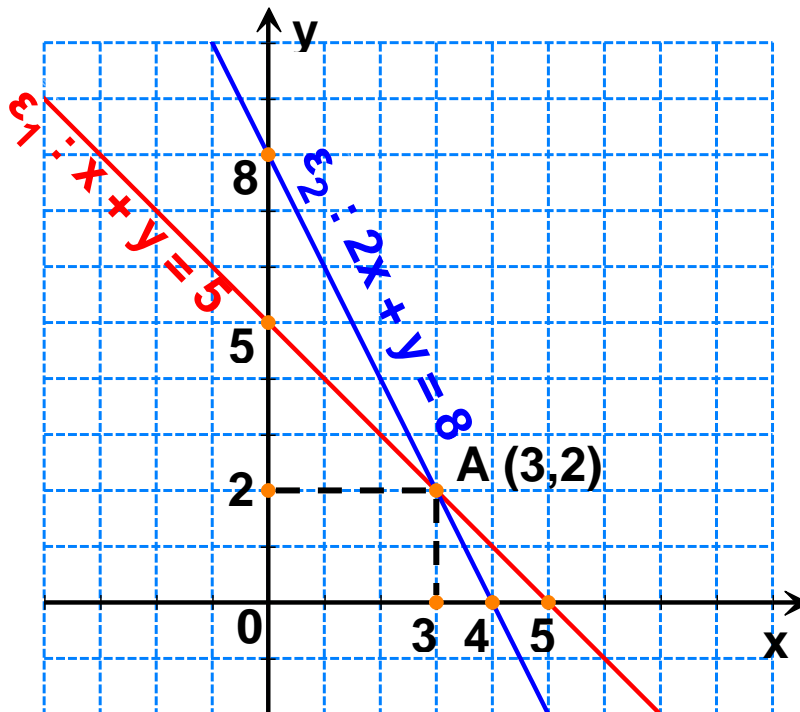
(2, -1) είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$

αφού $\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \\ 2 - 3 \cdot (-1) = 5 \end{cases}$

- Ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x, y λύνεται με τους εξής τρόπους:

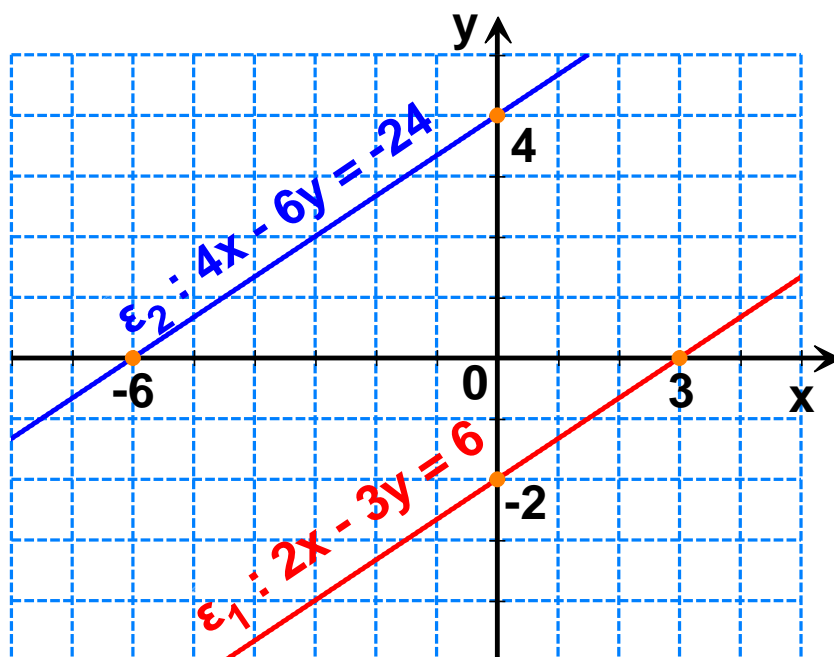
α) Γραφικά

Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις εξισώσεις του συστήματος με δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.



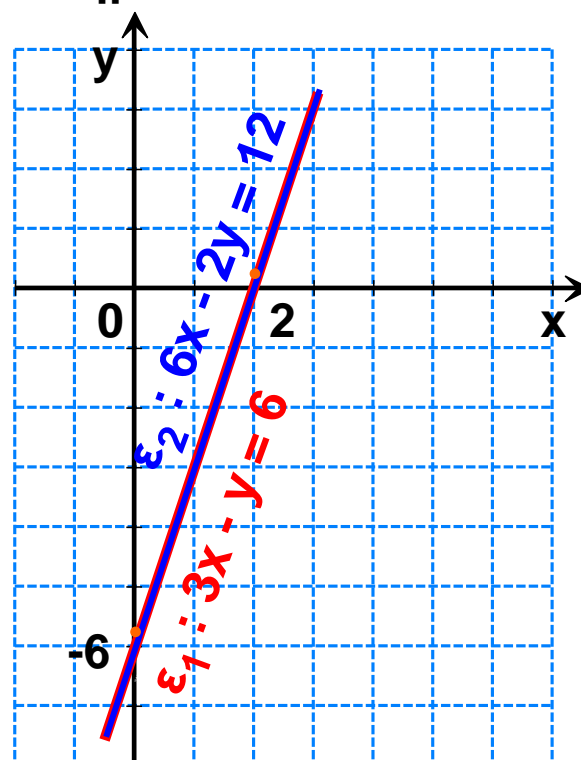
Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται σ' ένα σημείο, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος των συντεταγμένων του

σημείου τομής τους. Π.χ. το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (3, 2)$.



Αν οι ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν οι ε_1 , ε_2 ταυτίζονται, τότε έχουν όλα τους τα σημεία κοινά, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αόριστο.



β) Αλγεβρικά

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ή των αντιθέτων συντελεστών προκειμένου να απαλείψουμε τον έναν από τους δύο αγνώστους του συστήματος και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο.

Περιεχόμενα 2ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Α΄ • ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων.....	5
Α. Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων	5
Β. Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων ..	11
Γενικές ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου.....	18
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση 1ου Κεφαλαίου ...	21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Η εξίσωση $ax + b = 0$	26
2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.....	31
Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων	33
Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου	41
2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού.....	51
2.4 Κλασματικές εξισώσεις	58
2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις μ' έναν άγνωστο	71
Α. Διάταξη πραγματικών αριθμών	71
Β. Ιδιότητες της διάταξης	72
Γ. Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο.....	76
Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου	85
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση 2ου κεφαλαίου	89

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης	92
3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του.....	103
3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος	113
Γενικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου	127
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση 3ου κεφαλαίου	130

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.