Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.6 – 2.4

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Δημήτριος Αργυράκης, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Παναγιώτης Βουργάνας, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Κωνσταντίνος Μεντής, ***Μαθημ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Σταματούλα Τσικοπούλου, ***Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Μιχαήλ Χρυσοβέργης, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Εμμανουήλ Μανατάκης, ***Επίκ. Καθ. Πολυτεχν. Σχολής Παν/μίου Πατρών***

Μιχαήλ Σαλίχος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

Νικόλαος Παπαευστρατίου, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Νικόλαος Μαρουλάκης, ***Σκιτσογράφος - Εικονογράφος***

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>
Ευγενία Βελάγκου, *Φιλόλογος*

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>
Δημήτριος Κοντογιάννης,
Σύμβουλος του Παιδαγ. Ινστιτούτου

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>
Παναγιώτης Γράββαλος, *Ζωγράφος*

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>
Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

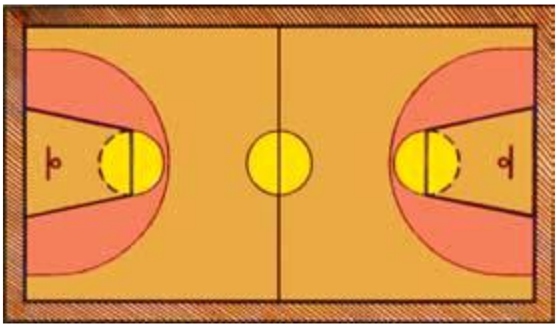
Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.6 - 2.4

1.6. Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

✓ **Μαθαίνω τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά ομοίων πολυγώνων.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε ένα γήπεδο μπάσκετ με κλίμακα 1 : 50. Το σχέδιο είχε διαστάσεις 60 cm x 30 cm.

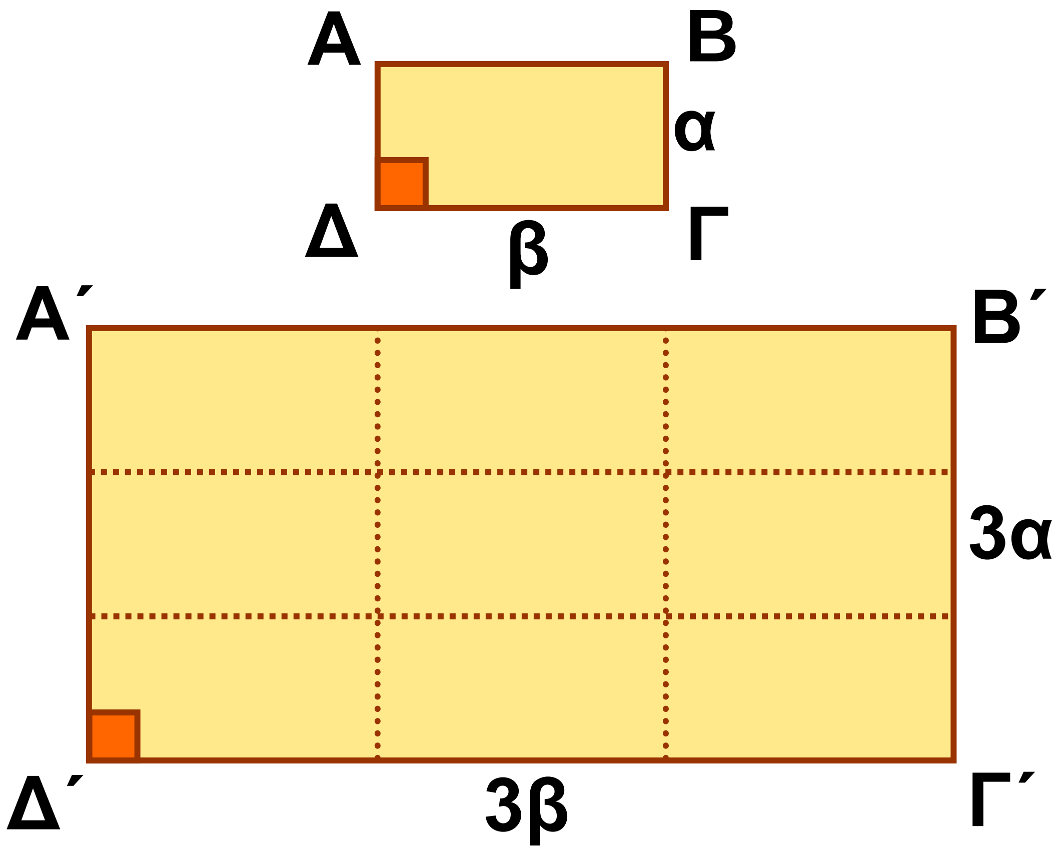


1. Να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου.

2. Να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του σχεδίου προς το αντίστοιχο εμβαδά του γηπέδου.

3. Να συγκρίνετε το λόγο που βρήκατε με το τετράγωνο της κλίμακας του σχεδίου.

Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α, β. Αν σχεδιάσουμε και το ορθογώνιο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ με τριπλάσιες διαστάσεις, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι όμοιο προς το αρχικό με λόγο ομοιότητας λ = 3.



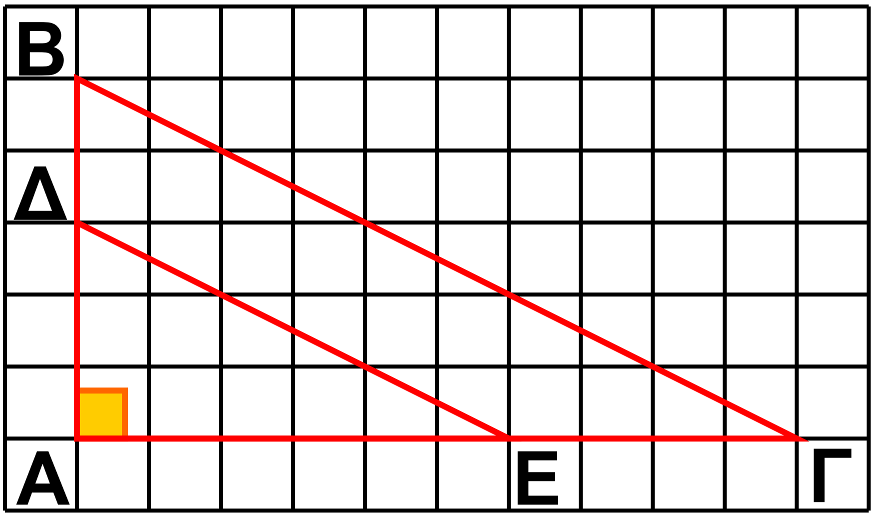
Τα εμβαδά Ε΄, Ε των δύο ορθογωνίων είναι:

$$E' = 3\alpha \cdot 3\beta \text{ και } E = \alpha \cdot \beta$$

οπότε ο λόγος τους είναι:

$$\frac{E'}{E} = \frac{3\alpha \cdot 3\beta}{\alpha \cdot \beta} = 3^2$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ο λόγος των εμβαδών των ομοίων αυτών ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.



Ομοίως, αν στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ πάρουμε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε ΑΔ = $\frac{3}{5}$ΑΒ και ΑΕ = $\frac{3}{5}$ΑΓ, τότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ, που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας Α και λόγο $\frac{3}{5}$. Άρα το

τρίγωνο ΑΔΕ είναι όμοιο με το τρί-γωνο ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{3}{5}.$$

Για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των ομοίων αυτών τριγώνων ισχύει:

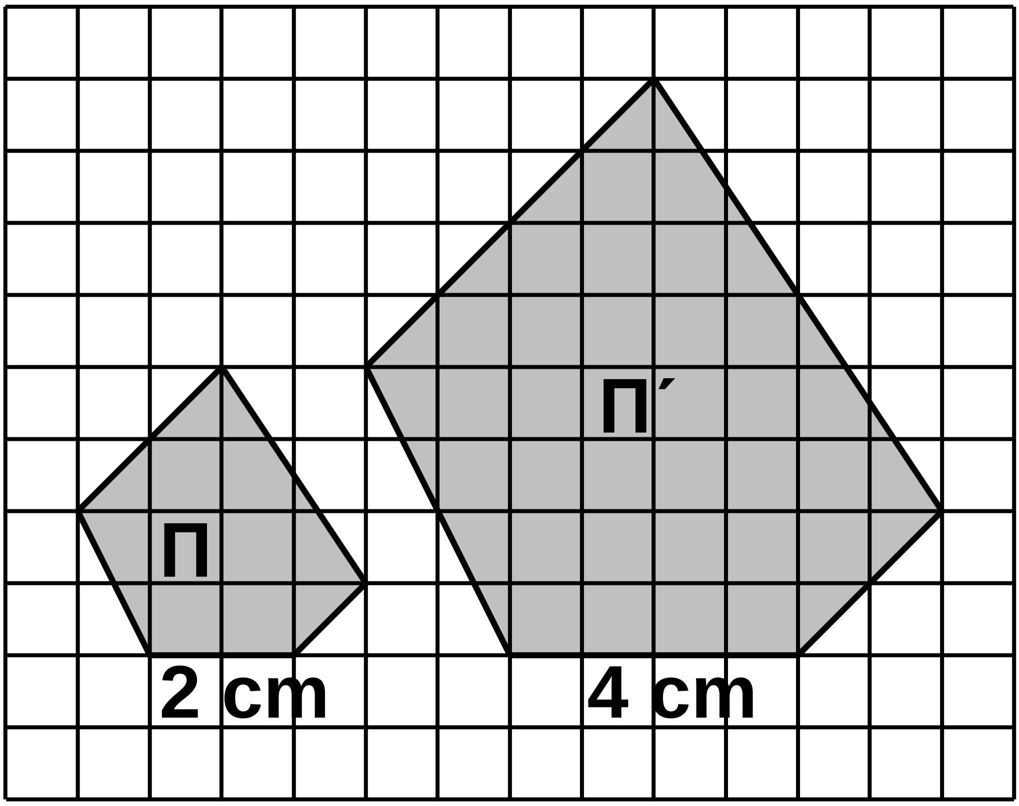
$$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{AE}}{\frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος των εμβαδών των ομοίων τριγώ-νων ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι και πάλι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιό-τητας τους.

Γενικά

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγω-νο του λόγου ομοιότητας τους.

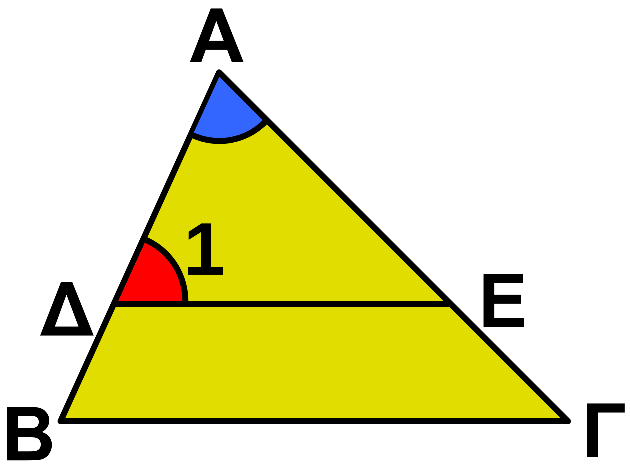


Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα το πολύγωνο (Π) είναι όμοιο με το πολύγωνο (Π´) και δύο ομόλογες πλευρές τους είναι 2 cm και 4 cm αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας του (Π) προς το (Π´) είναι $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, οπότε για τα εμβαδά τους Ε και Ε´ ισχύει $\frac{E}{E'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΑΔ = $\frac{2}{3}$ ΑΒ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 18 cm^2, να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΕΓΒ.**

Λύση



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Α κοινή και $\hat{\Delta}_1$ = Β, γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Δηλαδή, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι

όμοια με λόγο ομοιότητας

$λ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$. Άρα για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) ισχύει $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

ή $\frac{(ΑΔΕ)}{18} = \frac{4}{9}$ ή $(ΑΔΕ) = 8\ cm^2$.

Το τραπέζιο ΔΕΓΒ έχει εμβαδόν $(ΔΕΓΒ) = 18\ cm^2 - 8\ cm^2 = 10\ cm^2$.

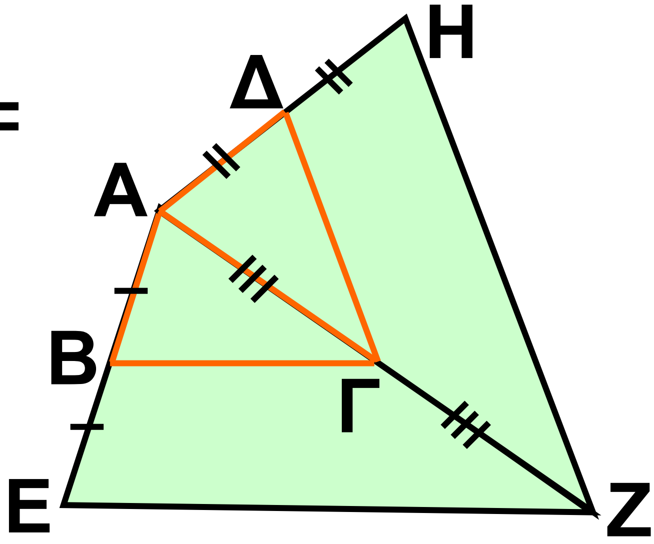
2 Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κατά ίσα τμήματα και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΕΖΗ. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΖΗ από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ;

Λύση

Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο 2.

Άρα ΑΕΖΗ ≈ ΑΒΓΔ, οπότε

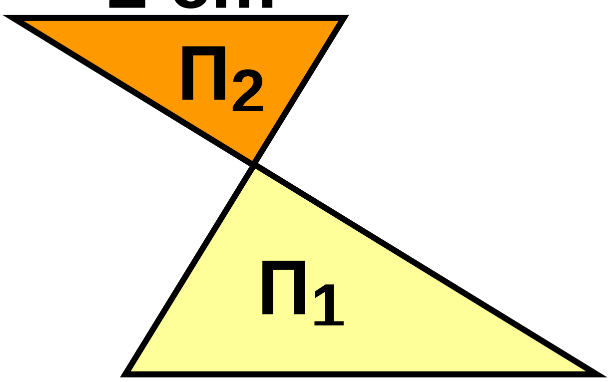
$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΕΖΗ)} = \left(\frac{ΑΒ}{ΑΕ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$



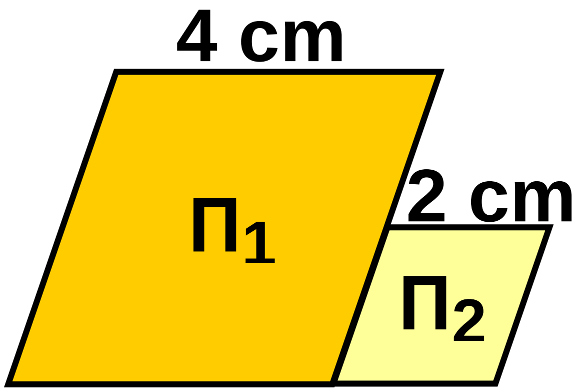
Επομένως,
(ΑΕΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ), δηλαδή το τετράπλευρο ΑΕΖΗ έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

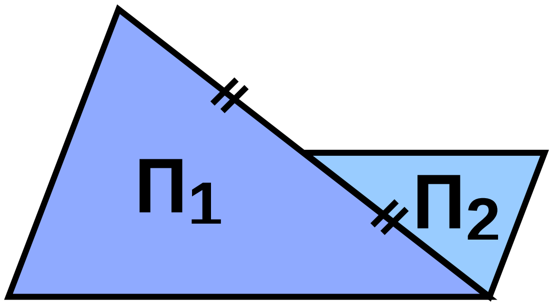
1 **Αν τα πολύγωνα $Π_1$, $Π_2$ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά τους $Ε_1$, $Ε_2$.**



$Ε_1 = ...Ε_2$



$E_1 = ...E_2$



$E_1 = ...E_2$

2 **Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:**

α) Αν τριπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

β) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

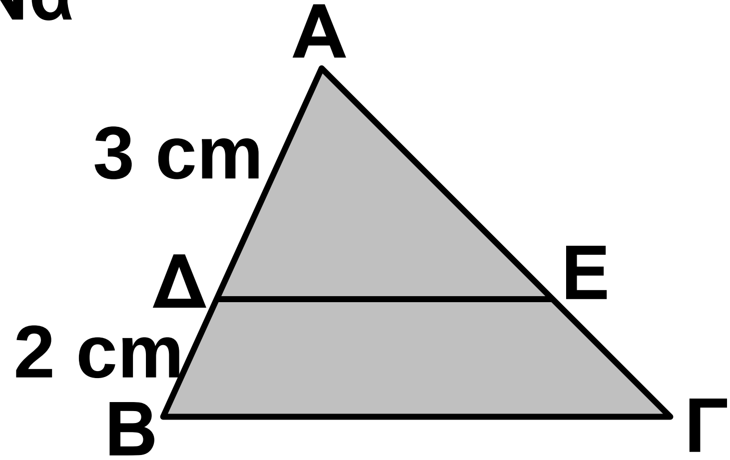
γ) Αν ένας ρόμβος έχει πλευρά 6 cm και ένας άλλος όμοιος του ρόμβος έχει πλευρά 3 cm, τότε ο δεύτερος ρόμβος έχει εμβαδόν

.... φορές μικρότερο από το εμβαδόν του πρώτου ρόμβου.

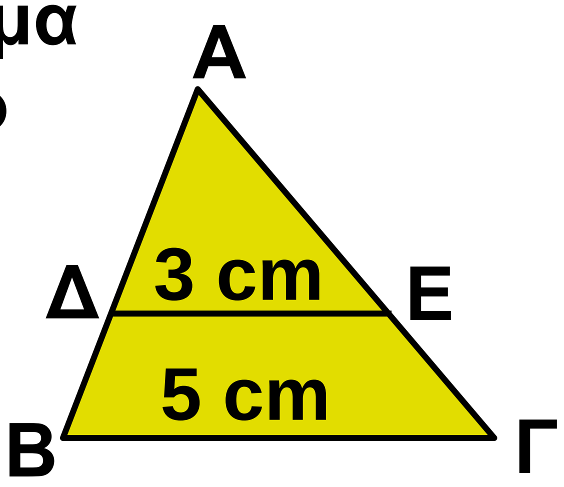
3 **Ένα ορθογώνιο $Π_1$ είναι όμοιο με το ορθογώνιο $Π_2$ με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$.**
Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του $Π_1$, είναι το 16% του εμβαδού του $Π_2$. Έχει δίκιο;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 **Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ. Να υπολογίστε το λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{ΑΒΓ}$**



2 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ. Αν το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν 18 cm^2, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

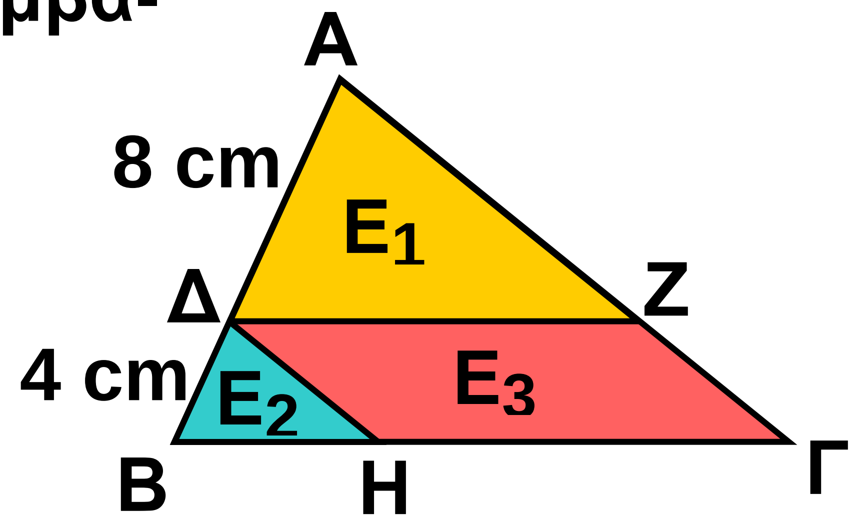


3 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = = 1 cm και ΓΔ = 5 cm, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Να υπολογίσετε πόσες φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

4 Αν Δ, Ε, Σ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως, τότε να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\dfrac{(\text{ΑΖΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ β) $\dfrac{(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}$

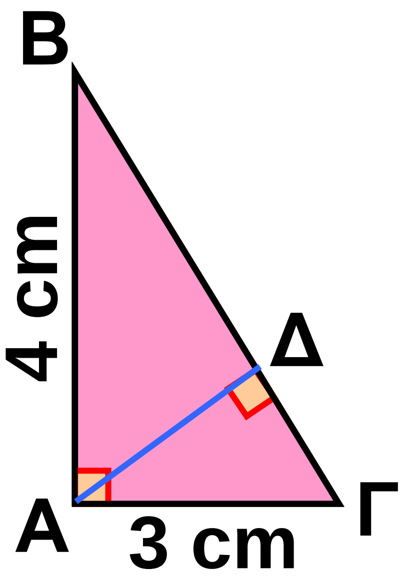
5 Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, ΔΖ // ΒΓ και ΔΗ // ΑΓ, τότε να αποδείξετε



ότι για τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 ισχύουν:

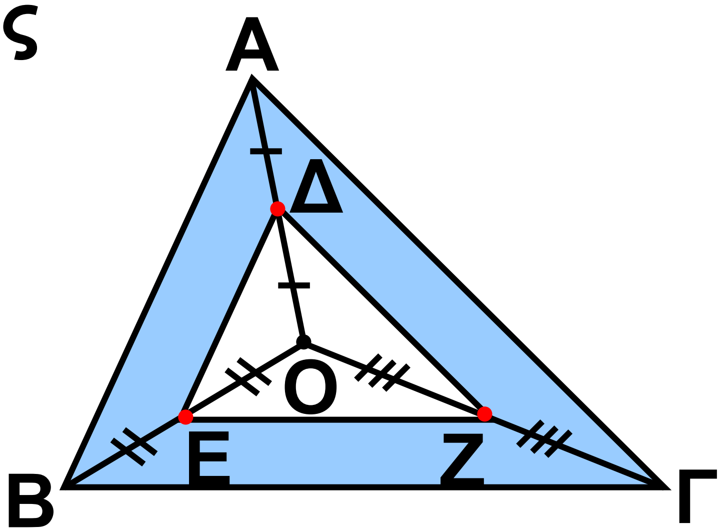
$$E_1 = \frac{4}{9}E, \quad E_2 = \frac{1}{9}E, \quad \text{και} \quad E_3 = E_1.$$

6 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να υπολογίσετε τους λόγους:



α) $\dfrac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$ β) $\dfrac{(ΑΒΔ)}{(ΑΒΓ)}$

7 Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε τυχαίο σημείο Ο. Αν Δ, Ε, Ζ είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τότε να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΔΕΖ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ. β) το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας είναι ίσο με τα $\frac{3}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

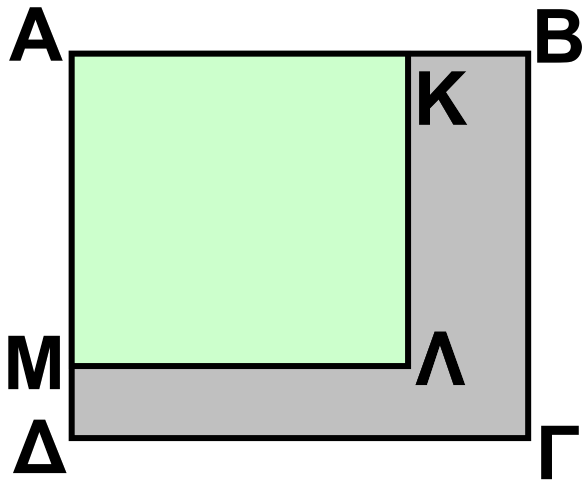
8 Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 40 cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα προκύψει, αν φωτοτυπηθεί:

α) μεγέθυνση 120%

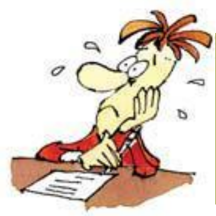
β) σμίκρυνση 75%.

9 Αν κάθε πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 30%, τότε να βρείτε πόσο % θα αυξηθεί το εμβαδόν του.

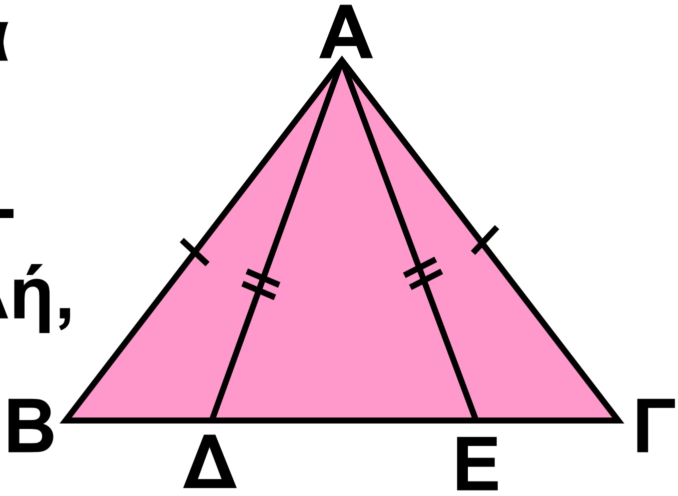
10 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου οικοπέδου μειώθηκαν κατά 20%, γιατί αυξήθηκε το πλάτος των διπλανών δρόμων. Να βρείτε πόσο % μειώθηκε το εμβαδόν του οικοπέδου.



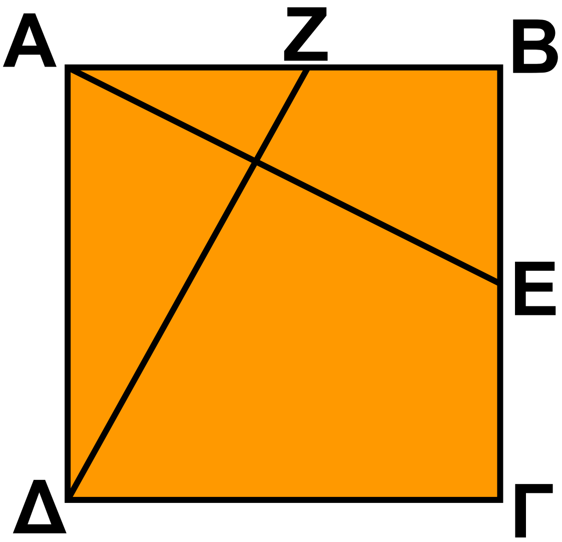
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



1 Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελή, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



2 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ζ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως, τέτοια ώστε ΑΖ = ΒΕ.



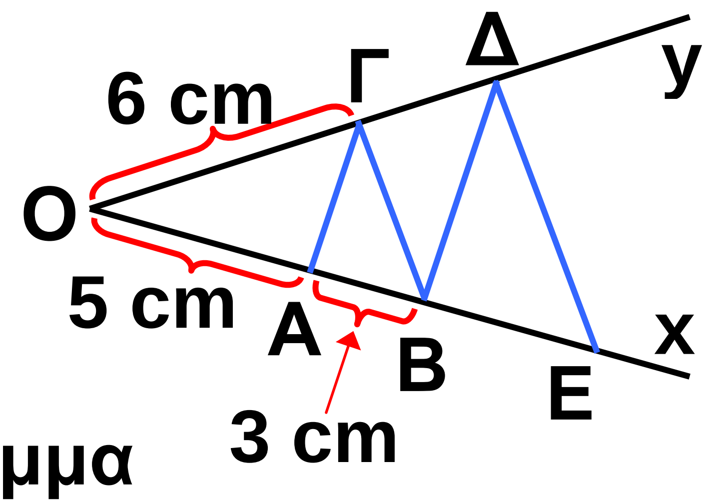
Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΖ = ΑΕ   β) ΔΖ ⊥ ΑΕ.

3 Σε ευθεία ε να πάρετε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Προς το ίδιο μέρος της ευθείας να κατασκευάσετε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΓΗ. Να αποδείξετε ότι ΑΗ = ΓΖ.

4 Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ΒΓ = Β΄Γ΄, $\widehat{B} = \widehat{B}'$ και οι διχοτόμοι ΒΜ και Β΄Μ΄ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΒΔ // ΑΓ και ΔΕ // ΓΒ.

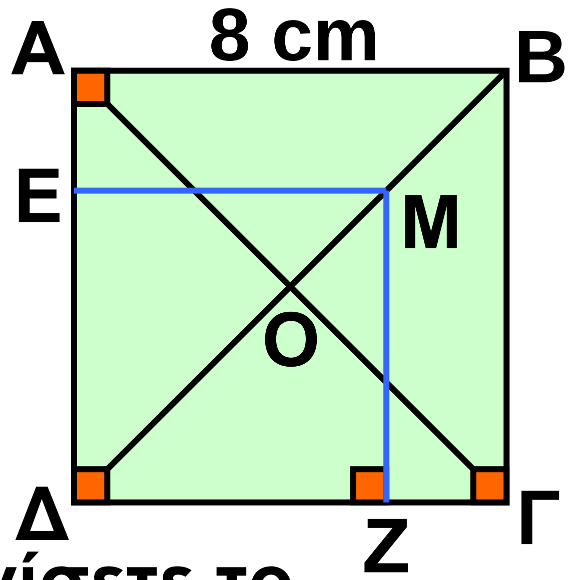


α) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΔ και ΟΕ.

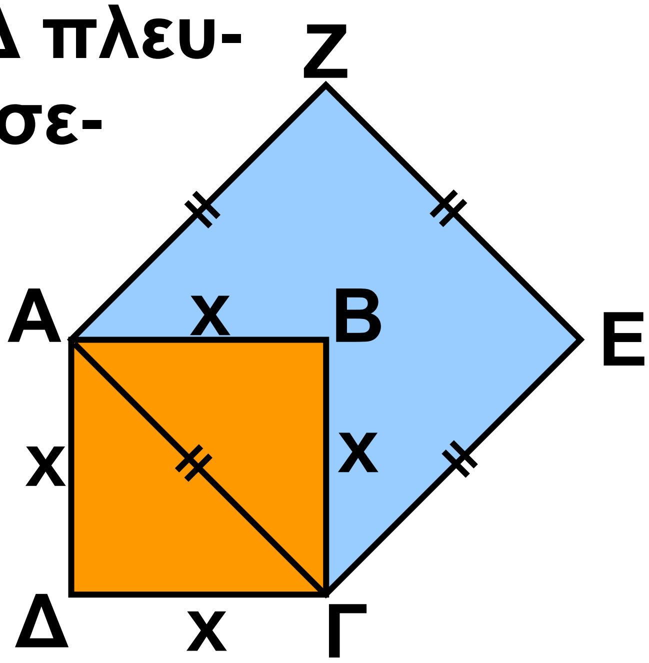
β) Να αποδείξετε ότι $OB^2 = OA \cdot OE$.

6 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 6 cm. Να βρείτε την πλευρά ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν.

7 Οι διαγώνιοι τετραγώνου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Από το μέσον Μ του ΟΒ να φέρετε ΜΕ ⊥ ΑΔ και ΜΖ ⊥ ΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΜΕΔΖ.



8 Με πλευρά τη διαγώνιο ΑΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς x, να σχηματίσετε το τετράγωνο ΑΓΕΖ.



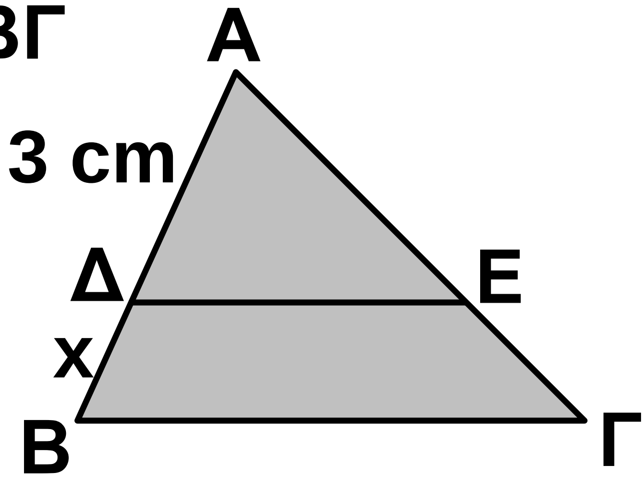
α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΑΓΕΖ)}{(ΑΒΓΔ)}$.

β) Αν (ΑΓΕΖ) = 200 cm^2, να υπολογίσετε την πλευρά x.

9 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ και

(ΑΔΕ) = $\frac{9}{16}$ (ΑΒΓ).

Να υπολογίσετε το x.

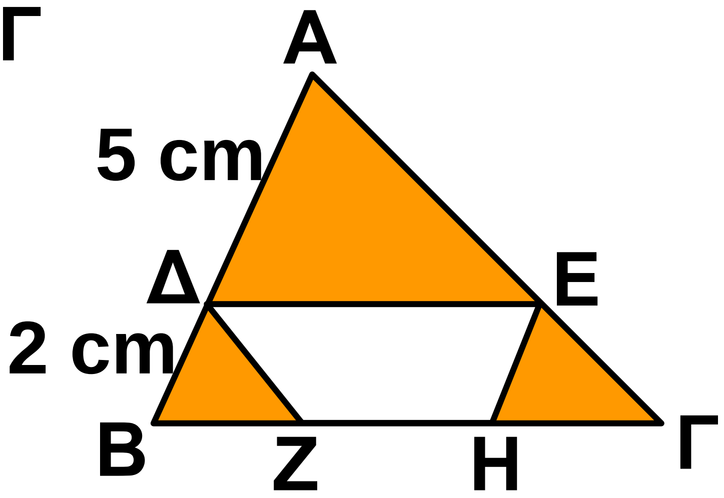


10 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος της επόμενης σελίδας είναι

ΔΕ // ΒΓ, ΔΣ // ΑΓ και ΕΗ // ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ = ΓΗ

β) (ΔΕΗΖ) = $= \frac{16}{49} \cdot (\text{ΑΒΓ})$



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑ-ΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

● **Ίσα τρίγωνα** λέγονται τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

● **Κριτήρια ισότητας τριγώνων.** Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (Π - Γ - Π).

- Μία πλευρά ίση και τις προσκεί-μενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Γ - Π - Γ).
- Τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π - Π - Π).

● Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. **Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:**
- Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.
- Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Β. ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

● Παράλληλες ευθείες, αν ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

● Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήμα-τος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα

ΑΒ είναι ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ • ΑΒ.

● Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

● **Θεώρημα Θαλή.** Τρεις ή περισσότερες ευθείες, αν τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

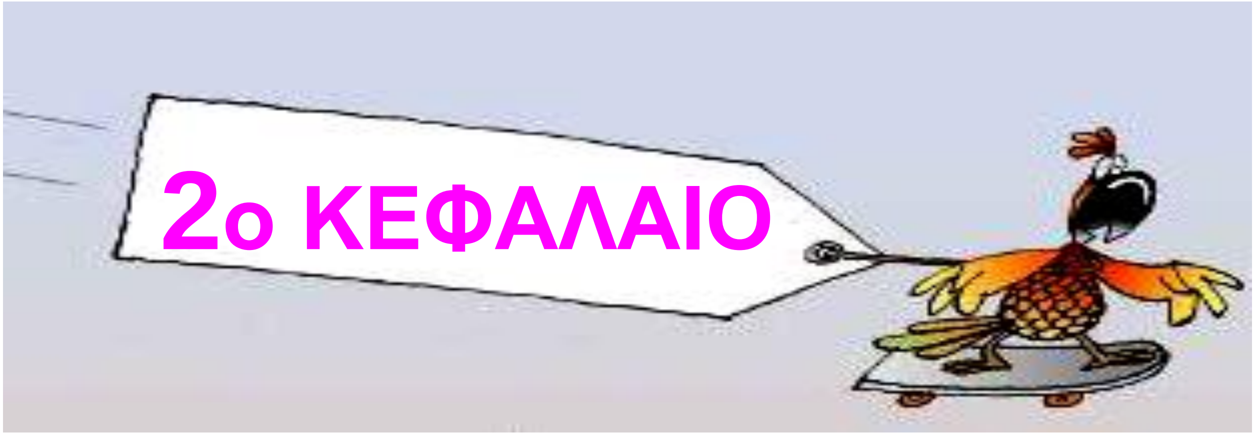
Γ. ΟΜΟΙΘΕΣΙΑ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

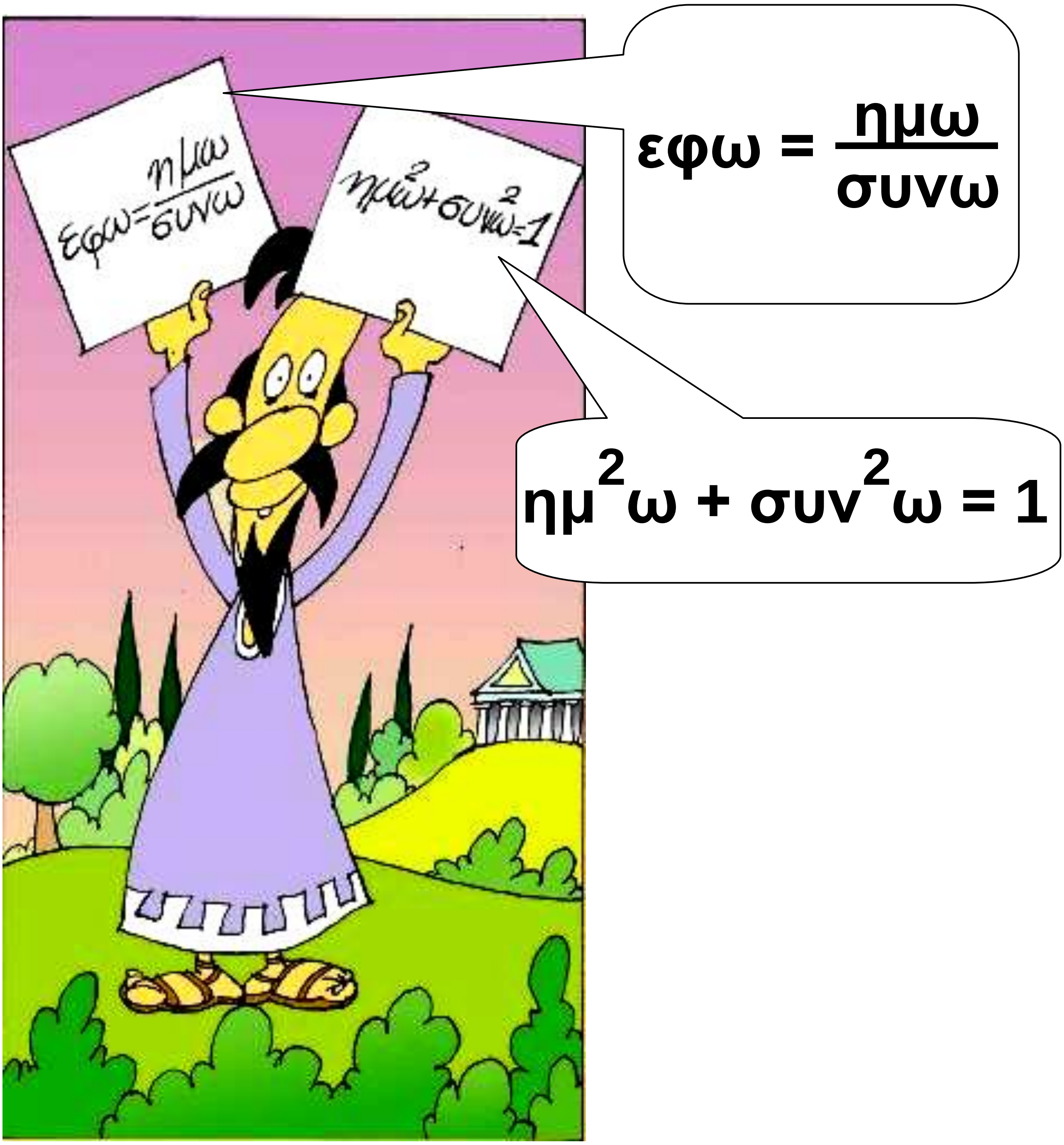
● **Ομοιόθετο ενός σημείου Α** ως προς το κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται το σημείο Α΄ της ημιευθείας ΟΑ για το οποίο ισχύει ΟΑ΄ = λ • ΟΑ.

● Τα **ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα** που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.

● Οι **ομοιόθετες γωνίες** είναι ίσες.
● Δύο **ομοιόθετα πολύγωνα** έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
● **Όμοια πολύγωνα** λέγονται τα πολύγωνα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.
● Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και αντιστρόφως.
● Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.
● Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
● Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:
- Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

- Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

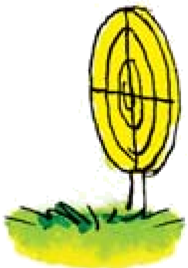

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ


$εφω = \frac{ημω}{συνω}$
$ημ^2ω + συν^2ω = 1$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με $0^o \leq ω \leq 180^o$

✓ **Θυμάμαι πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.**



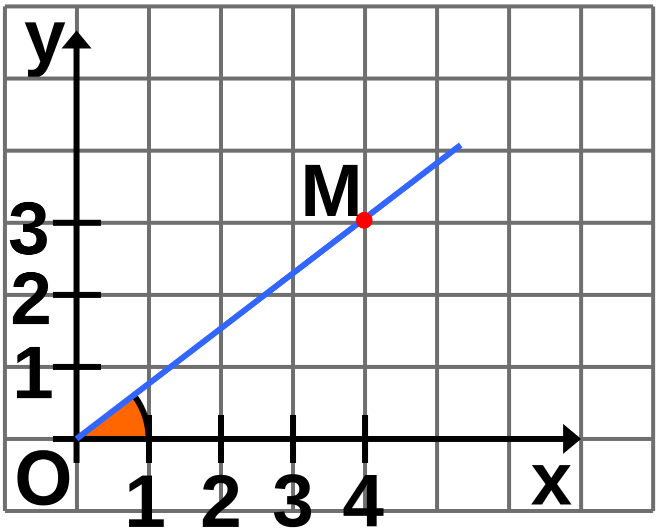
✓ **Γνωρίζω πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^o \leq ω \leq 180^o$.**

✓ **Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέραμε την ημιευθεία ΟΜ, που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ω.

1. **Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και να υπολογίσετε την απόσταση του Μ από την αρχή Ο.**



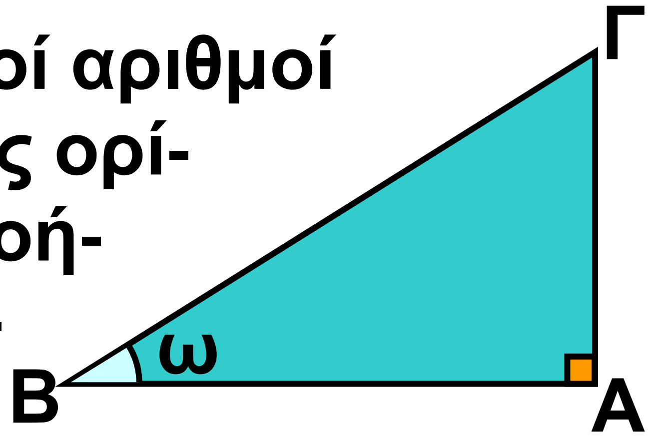
2. **Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.**

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

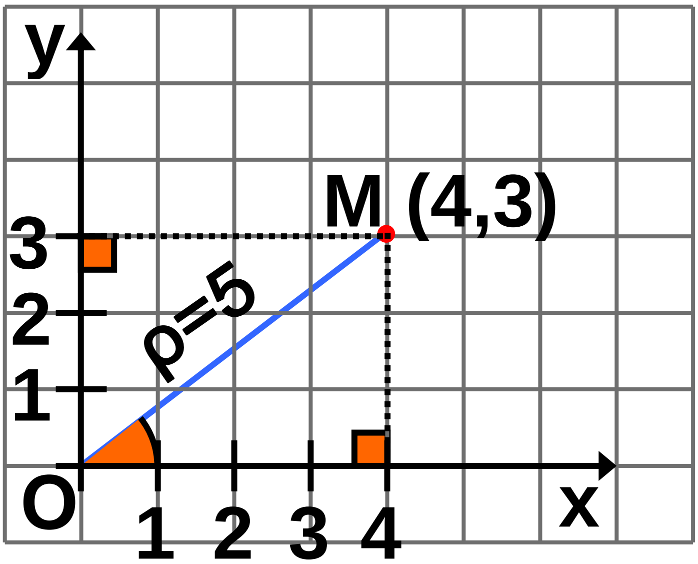
$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθ. πλ.}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθ. πλ.}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy πάρουμε το σημείο Μ(4, 3) και φέρουμε ΜΑ ⊥ x΄x και ΜΒ ⊥ y΄y, τότε έχουμε ΟΑ = 4 και ΟΒ = ΑΜ = 3. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω = $= x\hat{O}M$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση ρ = ΟΜ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε

$\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα



$$\text{ημω} = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\text{συνω} = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

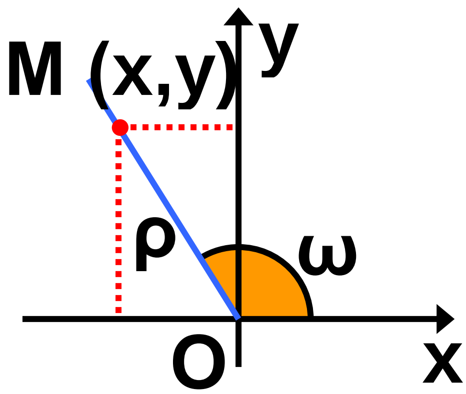
$$\text{εφω} = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.
Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέ-

σει με την αρχή Ο, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Οx και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(x, y), διαφορετικό από το Ο, τότε για την απόσταση ρ = ΟΜ ισχύει

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:



$$\text{ημω} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

● **Αν η γωνία ω είναι οξεία**, τότε είναι $x>0$, $y>0$, $\rho>0$, οπότε:

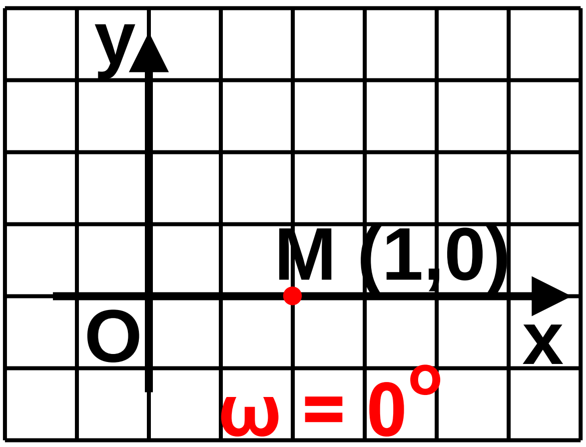
ημω>0, συνω>0, εφω>0.

● **Αν η γωνία ω είναι αμβλεία**, τότε είναι $x<0$, $y>0$, $\rho>0$, οπότε:

ημω>0, συνω<0, εφω<0.

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $\omega = 0^o$ ή $\omega = 90^o$ ή $\omega = 180^o$. Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0^o, 90^o και 180^o.

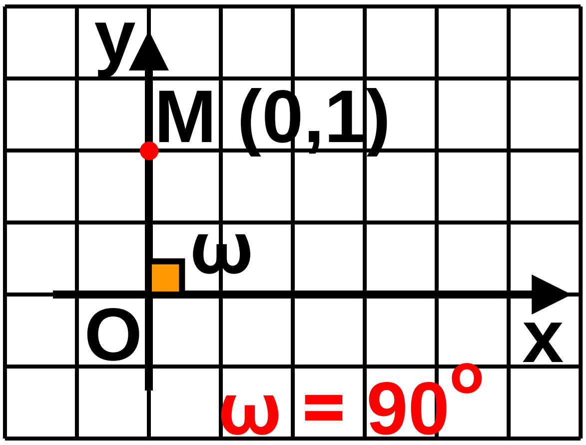
Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx π.χ. το Μ(1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 0^o$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:



$$ημ0^o = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0 \quad συν0^o = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$εφ0^o = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

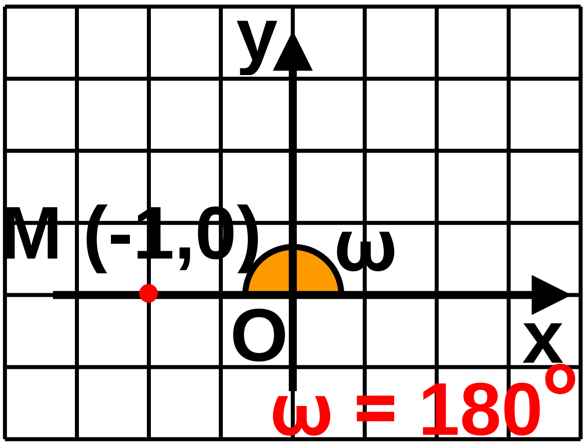
Αν Μ σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το Μ(0,1), τότε $ω = x\hat{O}M = 90^o$ και ρ= ΟΜ = 1. Άρα:



$$ημ90^o = \frac{y}{ρ} = \frac{1}{1} = 1 \quad συν90^o = \frac{x}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$$

$εφ90^o$ δεν ορίζεται (γιατί x=0)

Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx΄ π.χ. το Μ(-1,0), τότε $ω = x\hat{O}M = 180^o$ και ρ = ΟΜ = 1. Άρα:



$$ημ180^o = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0 \quad συν180^o = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{1} = -1 \quad εφ180^o = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

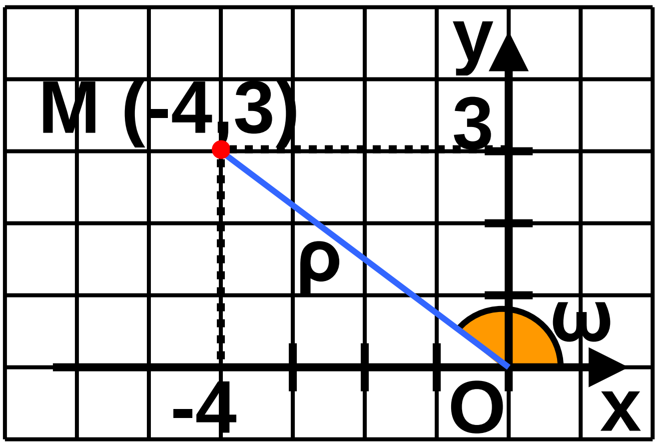
Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30^o, 45^o και 60^o που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ω	30^o	45^o	60^o
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο Μ(-4, 3). Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $ω = x\hat{O}M$.**

Λύση



Για την απόσταση ΟΜ = ρ έχουμε:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{1} = -\frac{4}{5}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $x\hat{O}z = 135^o$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο Μ με τετμημένη -1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}M = 135^o$.

Λύση

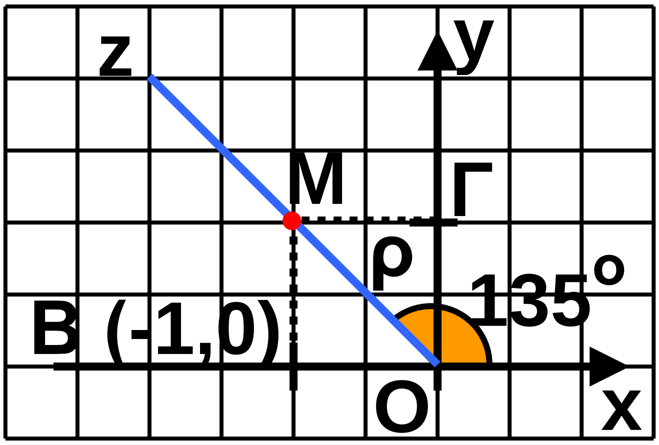
Φέρνουμε ΜΒ ⊥ x΄x και ΜΓ ⊥ y΄y.

Επειδή

$xOM = 135^o$ και

$xOy = 90^o$ θα είναι

$ΓOM = 45^o$, οπότε



το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ είναι και ισοσκελές. Άρα ΟΓ = ΜΓ = ΟΒ = 1 και η τεταγμένη του σημείου Μ είναι y = 1. Δηλαδή έχουμε Μ(-1, 1) και

$$ρ = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Άρα ημ}135^o = \frac{y}{ρ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{συν}135^o = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και}$$

$$\text{εφ}135^o = \frac{y}{x} = -\frac{1}{-1} = -1.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **Για το σημείο Μ(5, 12) είναι $\rho = OM = 13$. Αν $\omega = x\hat{O}M$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:**

ημω = ... συνω = ... εφω = ...

2 **Αν η γωνία $\omega = x\hat{O}M$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο > ή <.**

ημω ... 0 συν ... 0 εφω ... 0

3 **Να συμπληρώσετε τον πίνακα της επόμενης σελίδας αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ90° β. συν180° γ. εφ0° δ. συν90° ε. ημ0° στ. εφ180° ζ. συν0° η. ημ180°	1. 0 2. -1 3. 1

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

4 **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.**

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq$ συνω ≤ 1. ☐

β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε εφω < 0. ☐

γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει ημω > 0, τότε η ω είναι οξεία.

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \chi\hat{O}M$, όταν:

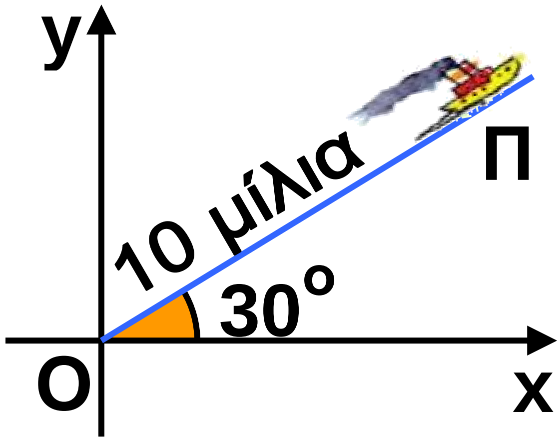
α) Μ(3, 4) β) Μ(-5, 12) γ) Μ(0, 3)

2 Μια ευθεία ε έχει εξίσωση y = -2x.

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της Μ που έχει τετμημένη -1.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

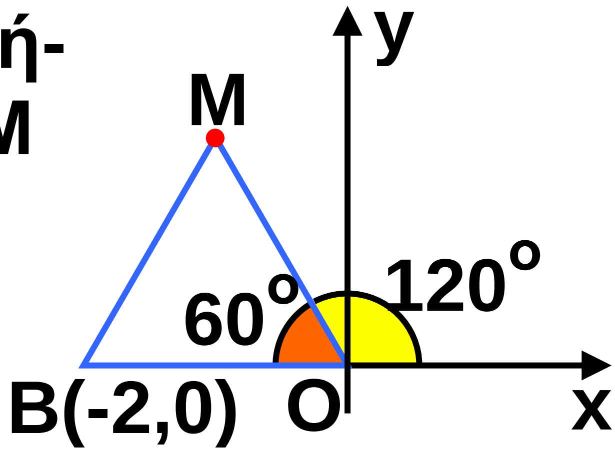
3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα Οx γωνία 30^o. Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισόπλευρο. Να υπολογίσετε:

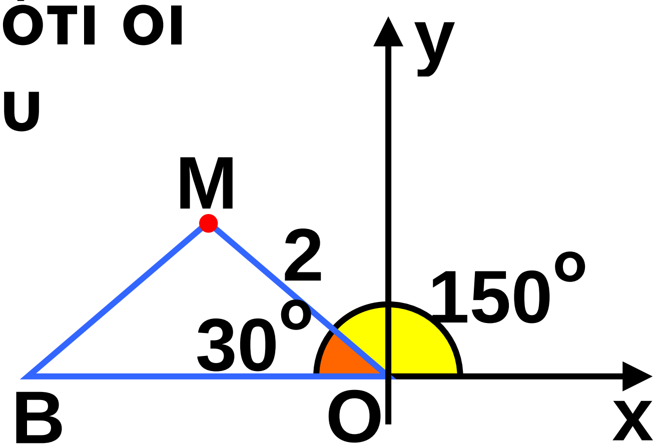
α) τις συντεταγμένες του Μ.

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120°.

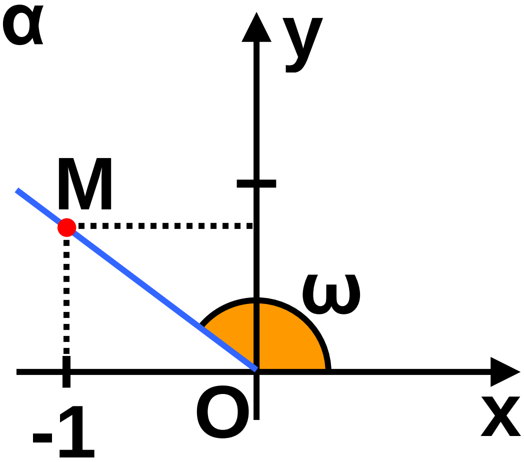


5 Στο σχήμα της επόμενης σελίδας το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισοσκελές.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Μ είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150^{o}.

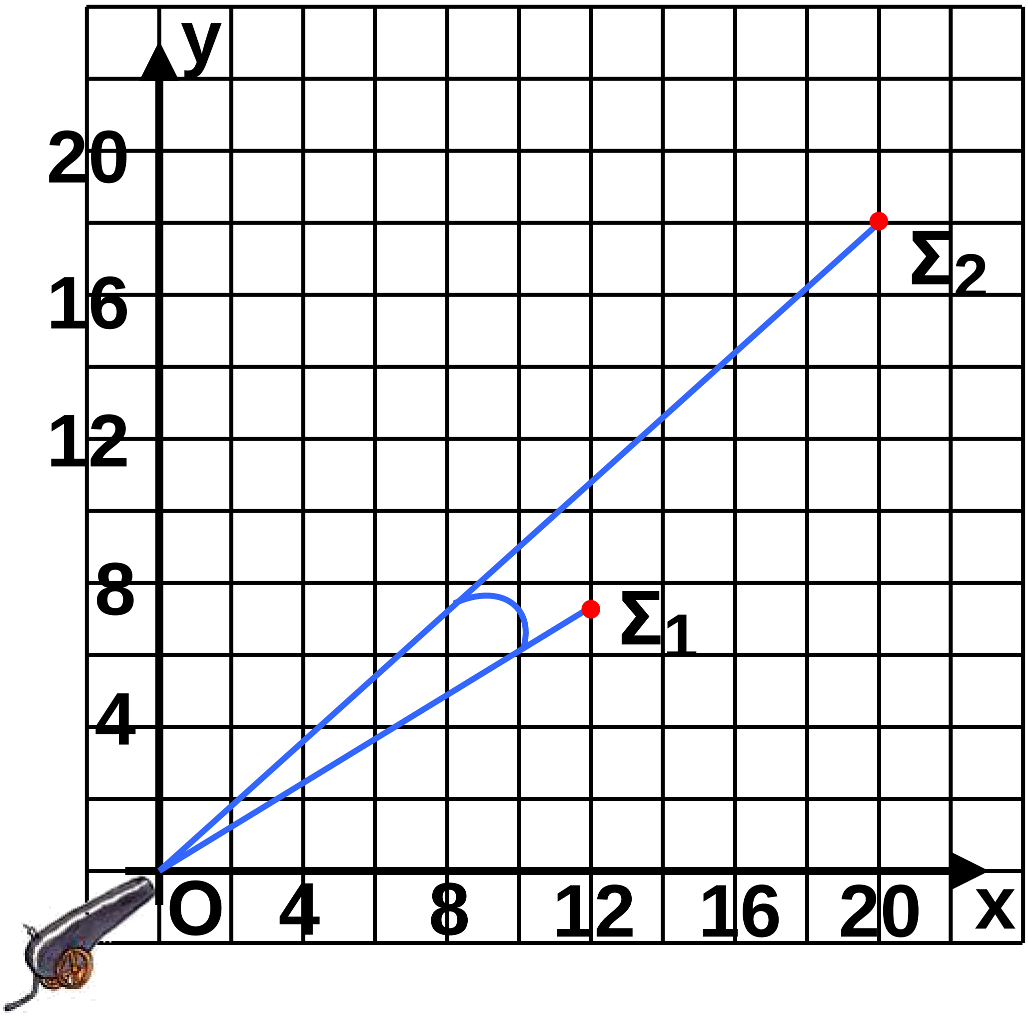


6 Στο διπλανό σχήμα είναι $εφω = -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι -1, τότε να υπολογίσετε:
α) την τεταγμένη του σημείου Μ.
β) το ημω και το συνω.



7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση Ο και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο $Σ_1$. Αν ο στόχος $Σ_1$ μετακινηθεί στη θέση $Σ_2$, τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει

να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση;
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

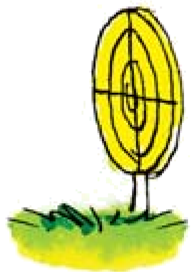


2.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Γνωρίζω ποια σχέση συνδέει:

✓ Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών

✓ Τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο.



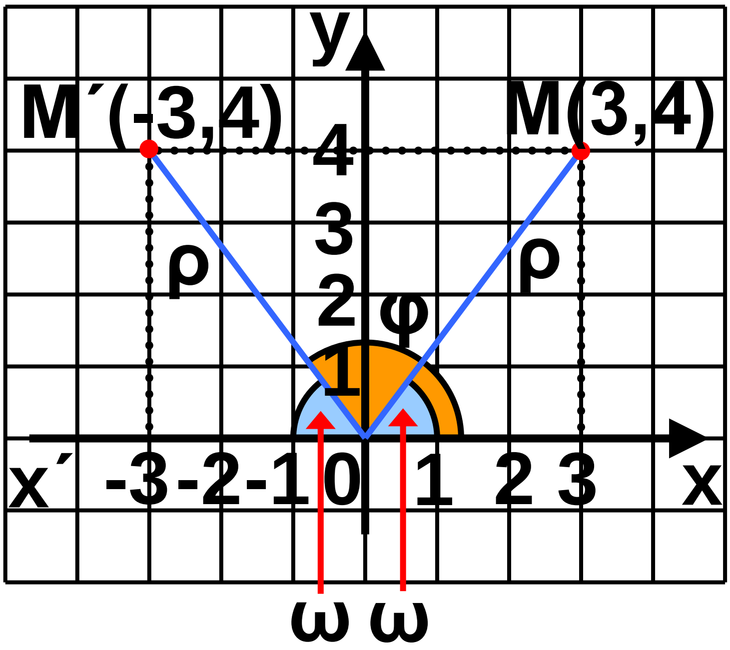
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να πάρετε το σημείο M(3, 4).

1. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου M΄, που είναι συμμετρικό του M ως προς τον άξονα y΄y;

2. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $x\hat{O}M = ω$ και $x\hat{O}M΄ = φ$ είναι παραπληρωματικές.

3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ και τη σχέση που τους συνδέει.



Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο M(3, 4) και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο M΄(-3, 4) ως προς τον άξονα y΄y. Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $x\hat{O}M$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $x΄\hat{O}M΄$ = ω, οπότε για τη γωνία φ = $x\hat{O}M΄$ ισχύει φ = 180^o - ω, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού ω + φ = 180^o. Έχουμε ακόμη ότι

ρ = OM = OM΄ = $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$ = 5,

οπότε:

$ημω = \frac{4}{5}$, $συνω = \frac{3}{5}$, $εφω = \frac{4}{3}$ και

$ημφ = \frac{4}{5}$, $συνφ = -\frac{3}{5}$, $εφφ = -\frac{4}{3}$.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι:

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω, φ = 180^o - ω έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

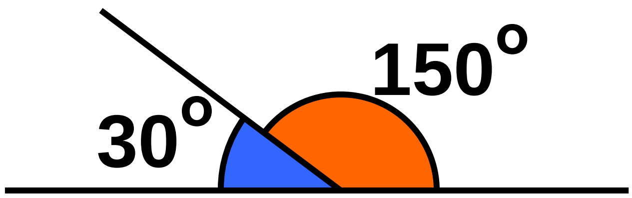
Γενικά

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180^o – ω ισχύουν:

- $ημ(180^o – ω) = ημω$
- $συν(180^o – ω) = –συνω$
- $εφ(180^o – ω) = –εφω$

Με τους προηγούμενους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας

γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.
Για παράδειγμα,
ημ150^o = ημ(180^o - 30^o) = ημ30^o = $\frac{1}{2}$
συν150^o = συν(180^o - 30^o) =
-συν30^o = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
εφ150^o = εφ(180^o - 30^o) =
-εφ30ο = - $\frac{\sqrt{3}}{3}$



Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150^o και 30^o, αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο.
Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0^o μέχρι και 180^o,

τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν ημx = $ημ35^\circ$ και $0 \leq x \leq 180^\circ$, τότε είναι x = 35° ή x = $180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή χ = 35° ή χ = 145°.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης Α = $ημ140^\circ + συν170^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ$.

Λύση

Οι γωνίες 140° και 40° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή είναι $ημ140^\circ = ημ40^\circ$.

Οι γωνίες 170° και 10° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν

αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή είναι $συν170^o = –συν10^o$. Άρα:
$A = ημ140^o + συν170^o - ημ40^o +$
$+ συν10^o = ημ40^o - συν10^o - ημ40^o +$
$+ συν10^o = 0$.

2 Αν $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 80^o$ και $\hat{B} = 70^o$ να αποδειχθεί ότι:
α) ημ(Α + Β) = ημΓ
β) συν(Α + Β) = –συνΓ

Λύση
Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ του τριγώνου έχουν άθροισμα 180^o, δηλαδή είναι: $80^o + 70^o + \hat{Γ} = 180^o$, οπότε $\hat{Γ} = 30^o$. Άρα:
α) $ημ(Α + Β) = ημ(80^o + 70^o) = ημ150^o = ημ(180^o - 30^o) = ημ30^o = ημΓ$.

β) $\sigma\upsilon\nu(A + B) = \sigma\upsilon\nu(80^o + 70^o) =$
$\sigma\upsilon\nu150^o = \sigma\upsilon\nu(180^o - 30^o) =$
$-\sigma\upsilon\nu30^o = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\eta\mu150^o = \eta\mu30^o$

β) $\sigma\upsilon\nu135^o = \sigma\upsilon\nu45^o$

γ) $\varepsilon\varphi100^o = \varepsilon\varphi80^o$

δ) $\varepsilon\varphi75^o = -\varepsilon\varphi105^o$

ε) $\sigma\upsilon\nu110^o = -\sigma\upsilon\nu70^o$

στ) $\eta\mu140^o = -\eta\mu40^o$

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^o$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\eta\mu x = \eta\mu60^o$, τότε x = ...

β) Αν συνx = -συν20^o, τότε x = ...
γ) Αν εφx = -εφ30^o, τότε x = ...

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ140^o	1. ημ40^o 2. συν40^o
β. συν140^o	3. εφ40^o 4. -ημ40^o
γ. εφ140^o	5. -συν40^o 6. -εφ40^o

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) 120^o β) 135^o γ) 150^o

2 Να αποδείξετε ότι:
α) $ημ108^o + συν77^o - ημ72^o + συν103^o = 0$
β) $εφ122^o - εφ58^o \cdot εφ135^o = 0$

3 Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2 45^o + συν^2 135^o = 1$
β) $ημ^2 30^o + ημ^2 60^o + ημ^2 120^o + ημ^2 150^o = 2$

4 Να αποδείξετε ότι:
$ημ(140^o + x) = ημ(40^o - x)$ και
$συν(158^o - x) = -συν(22^o + x)$.

5 **Να βρείτε τη γωνία x, όταν:**

α) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $ημx = 1 - ημx$

γ) $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ δ) $συνx = \frac{1}{2}$

ε) $εφx = -\sqrt{3}$ στ) $2εφx = 1 + εφx$

6 **Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών του;**

7 **Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{Δ} = 90^\circ$.**

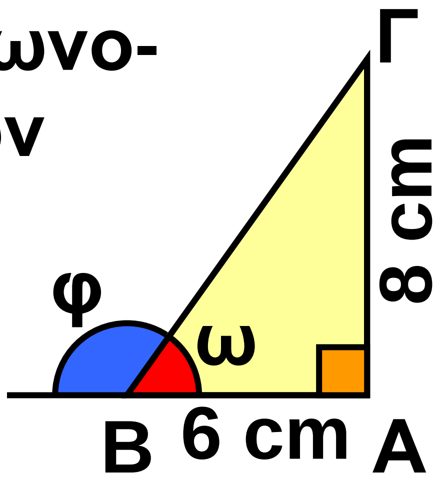
Να αποδείξετε ότι:

α) $ημA + συνA - ημΓ + συνΓ = 0$

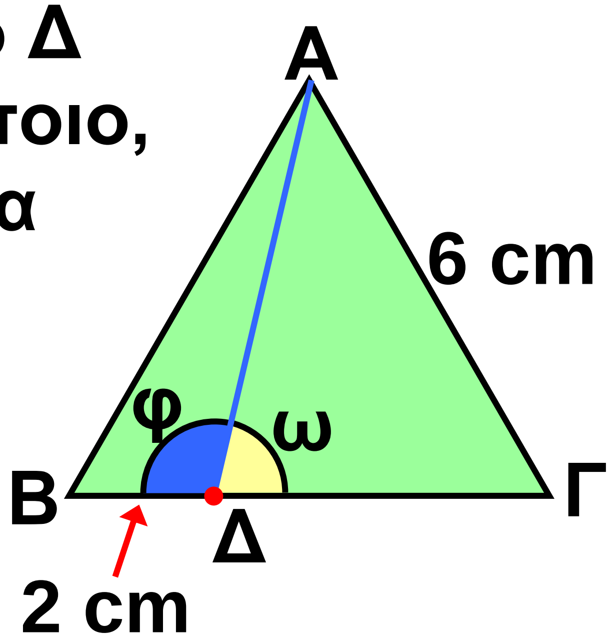
β) $εφA + εφΓ = 0$

8 **Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος της επόμενης σελίδας να**

υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



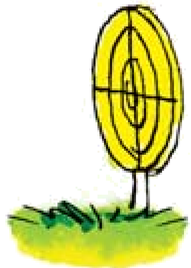
9 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



2.3. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

✓ **Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και πως αποδεικνύονται.**

✓ **Τις Χρησιμοποιώ τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για την απόδειξη απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.**

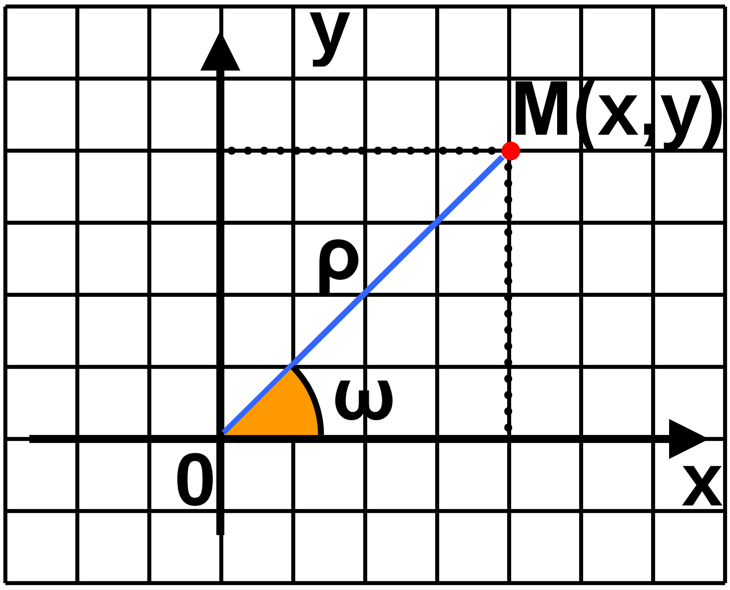


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα να πάρετε ένα σημείο Μ στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο με όποιες συντεταγμένες θέλετε.

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

2. **Να υπολογίσετε την παράσταση $(ημω)^2 + (συνω)^2$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τα αποτελέσματα που βρήκαν οι συμμαθητές σας.**
3. **Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ημω}{συνω}$ και να τον συγκρίνετε με την εφω.**



Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση ρ ενός σημείου M(x, y) από την αρχή των αξόνων ισχύει $ρ = \sqrt{x^2+y^2}$ ή $ρ^2 = x^2 + y^2$. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $ρ^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \quad \textit{(1)}.$$

Επειδή ημω = $\frac{y}{\rho}$ και συνω = $\frac{x}{\rho}$, η ισότητα *(1)* γίνεται:

$(\text{συνω})^2 + (\text{ημω})^2 = 1$

ή συντομότερα $\text{ημ}^2\text{ω} + \text{συν}^2\text{ω} = 1$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\boxed{\text{ημ}^2\text{ω} + \text{συν}^2\text{ω} = 1}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες ημω = $\frac{y}{\rho}$ και συνω = $\frac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι συνω ≠ 0, έχουμε:

$$\frac{\text{ημω}}{\text{συνω}} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}} = \frac{y\rho}{x\rho} \quad \text{ή}$$

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{y}{x} = εφω$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με συνω ≠ 0 ισχύει

$$εφω = \frac{ημω}{συνω}$$

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, γιατί με τη βοήθεια τους αποδεικνύουμε και άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.**

Λύση

Από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε $συν^2ω = 1 - ημ^2ω$ ή

$$συν^2ω = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad ή \quad συν^2ω = 1 - \frac{9}{25}$$

$$ή\ συν^2ω = \frac{16}{25} \quad ή \quad συνω = \pm\frac{4}{5}.$$

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε συνω < 0, οπότε

$$συνω = -\frac{4}{5}$$

Από την ταυτότητα $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

έχουμε $εφω = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$**, οπότε** $εφω = -\frac{3}{4}$.

2 **Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει εφω = 2, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.**

Λύση

Έχουμε εφω = 2 δηλαδή $\frac{ημω}{συνω} = 2$, οπότε ημω = 2συνω *(1)*.

Αν στην ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω =$ $= 1$ αντικαταστήσουμε το ημω με το 2συνω έχουμε

$(2συνω)^2 + συν^2ω = 1$ ή

$4συν^2ω + συν^2ω = 1$ ή $5συν^2ω = 1$

ή $συν^2ω = \frac{1}{5}$, άρα $συνω = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

οπότε $συνω = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Από την ισότητα *(1)* έχουμε

$ημω = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$ ή $ημω = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3 **Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:**

α) $(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = 1$

β) $1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$

Λύση

α) Εχουμε

$(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx =$
$ημ^2x - 2ημxσυνx + συν^2x +$
$+ 2ημxσυνx =$
$ημ^2x + συν^2x = 1$

β) Εχουμε

$$1 + εφ^2ω = 1 + \left(\frac{ημω}{συνω}\right)^2 =$$

$$1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν $ημ^2ω = \frac{3}{5}$ τότε $συν^2ω = \frac{2}{5}$ ☐

β) Αν συνω = 0, τότε δεν ορίζεται η εφω. ☐

γ) Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημ^2ω = συν^2ω - 1$. ☐

δ) Αν $ημω = \frac{5}{13}$ και $συνω = \frac{12}{13}$, τότε $εφω = \frac{5}{12}$ ☐

2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε ημω = 0 και συνω = 0. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν ημω = 1, τότε συνω = ...

β) Αν ημω = 0, τότε συνω = ...

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $ημω = \frac{3}{5}$, τότε το συνω είναι ίσο με:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{4}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ ή $-\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$ ή $-\frac{4}{5}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει ημω $= \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

2 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει συνω $= -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

3 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει εφω $= \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

4 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{1}{3}ημω + \frac{2}{3}συνω - \frac{1}{10}εφω$$

5 Να αποδείξετε ότι:

α) $ημ^3ω + ημωσυν^2ω = ημω$

β) $συν^2ω - συν^4ω = ημ2ωσυν^2ω$

6 Αν είναι $x = 3συνω$ και $y = 3ημω$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xσυνω + yημω = 3$ β) $x^2 + y^2 = 9$

7 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1$

β) $ημ^2ασυν^2β + ημ^2αημ^2β + συν^2α =$
$= 1$

8 Να αποδείξετε ότι:

α) $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 = 2$

β) $(\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega - \alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

9 **Να αποδείξετε ότι:**

α) $\sigma\upsilon\nu^2 x\ \varepsilon\varphi^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

β) $\dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x$

10 **Να αποδείξετε ότι:**

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$

β) $\varepsilon\varphi x + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

11 **Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:**

α) $\eta\mu 50^\circ \eta\mu 130^\circ - \sigma\upsilon\nu 50^\circ \sigma\upsilon\nu 130^\circ$

β) $\eta\mu^2 14^\circ + \eta\mu^2 114^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 166^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 66^\circ$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $εφ70^o συν70^o - εφ110^o συν110^o = 0$

β) $εφ^2 40^o συν^2 40^o + συν^2 140^o = 1$

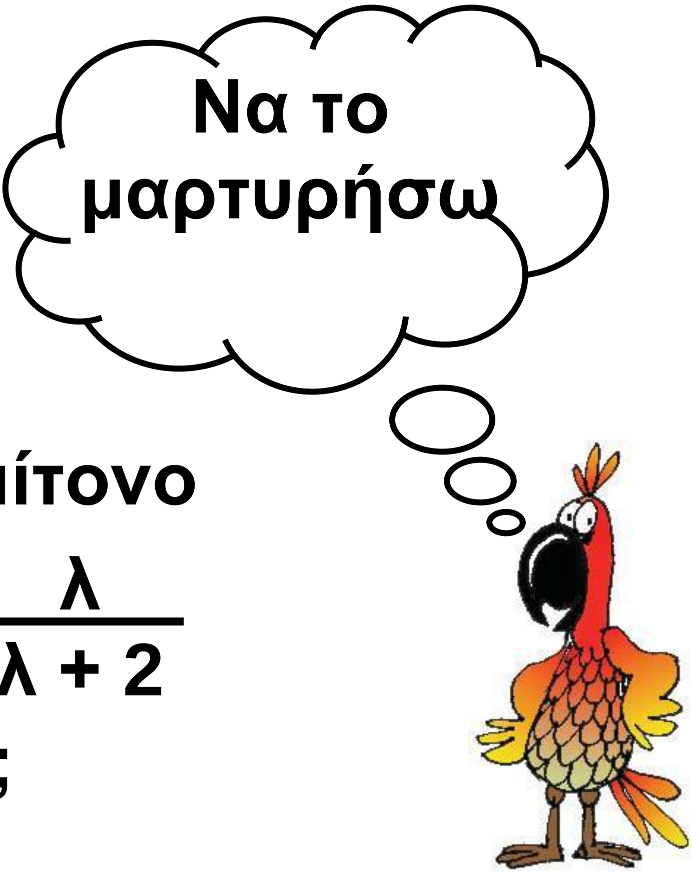
13 Αν είναι $α = 30^o$ και $β = 60^o$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$ημ^2x\ ημα\ ημβ + συν^2x\ συνα\ συνβ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΙΝΙΓΜΑ

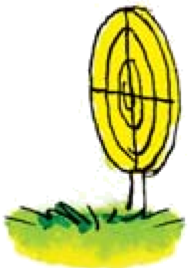
14 Είναι γωνία, όχι οξεία, ημίτονο έχει τον αριθμό $\frac{λ + 1}{λ + 2}$ και συνημίτονο έχει τον αριθμό $\frac{λ}{λ + 2}$

Ποια γωνία είναι;

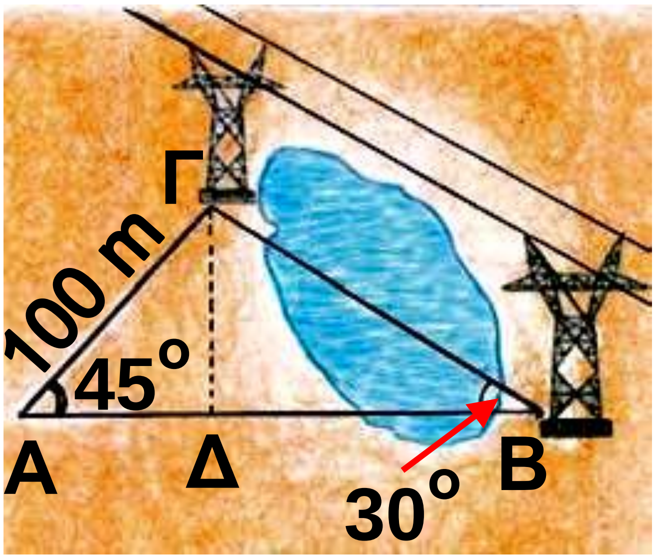


2.4. Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων

✓ **Γνωρίζω τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και μαθαίνω να τους εφαρμόζω στη λύση προβλημάτων.**



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση ΓΒ δύο πυλώνων της ΔΕΗ, γιατί ανάμεσα τους παρεμβάλλεται μια λίμνη.
Γι' αυτό επιλέγει μια θέση Α που απέχει 100 m από τον πυλώνα Γ και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο

μετράει τις γωνίες Α = 45^o και Β = 30^o.

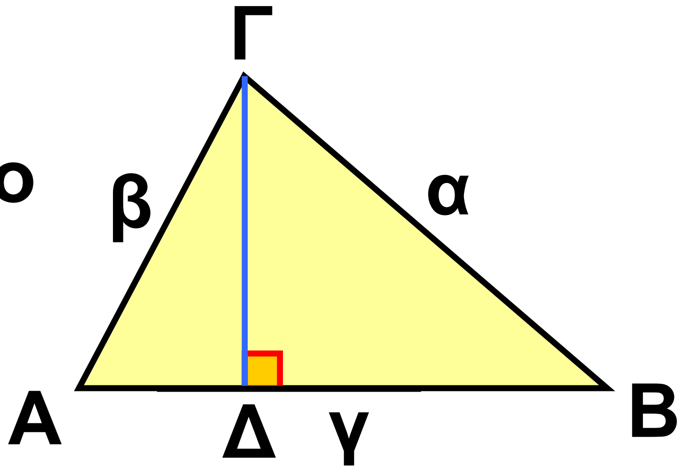
1. Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση ΓΒ, αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση ΓΒ πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι λόγοι $\frac{ΓΒ}{ημ45^o}$ και $\frac{ΓΑ}{ημ30^o}$ είναι ίσοι.

2. Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

Α Νόμος των ημιτόνων

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του ή μια πλευρά και μια οξεία γωνία του. Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου όταν δεν είναι ορθογώνιο;

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:



$$\text{ημ}A = \frac{Γ Δ}{β} \quad \text{ή} \quad ΓΔ = β\,\text{ημ}A \quad \textit{(1)}$$

$$\text{ημ}B = \frac{ΓΔ}{α} \quad \text{ή} \quad ΓΔ = α\,\text{ημ}B \quad \textit{(2)}$$

Από τις ισότητες *(1), (2)* έχουμε

$$β\,\text{ημ}A = α\,\text{ημ}B \quad \text{ή} \quad \frac{α}{\text{ημ}A} = \frac{β}{\text{ημ}B}.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$\frac{β}{\text{ημ}B} = \frac{γ}{\text{ημ}Γ}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των ημιτόνων.**

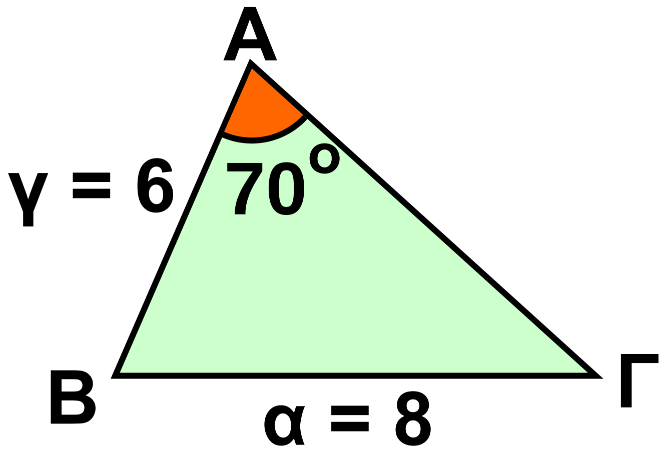
Γενικά

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με το νόμο των ημιτόνων, αν γνωρίζουμε μια πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μια άλλη πλευρά ή γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του (πλευρές - γωνίες).
Για παράδειγμα, στο τρίγωνο του σχήματος της επόμενης σελίδας

μπορούμε με το νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{Γ}$, αφού

$$\frac{α}{ημΑ} = \frac{γ}{ημΓ} \text{ ή}$$



$$\frac{8}{ημ70^{o}} = \frac{6}{ημΓ} \text{ ή}$$

$$8ημΓ = 6ημ70^{o} \text{ ή}$$

$$ημΓ = \frac{6ημ70^{o}}{8} \text{ ή} \quad ημΓ = \frac{6 \cdot 0{,}94}{8} \text{ ή}$$

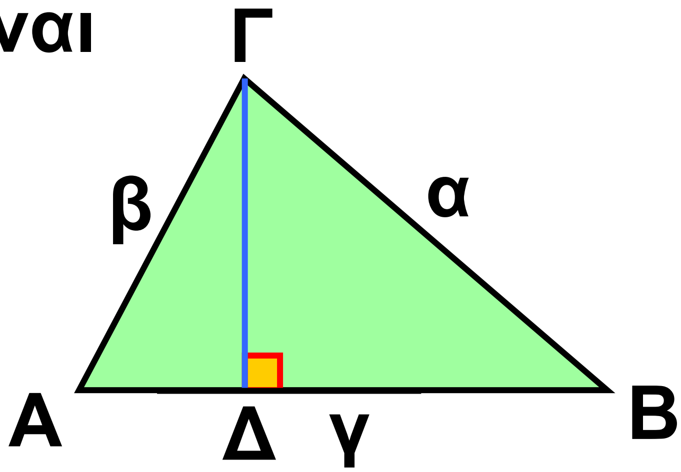
$ημΓ = 0{,}705$.

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{Γ} = 45^{o}$.

B Νόμος των συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε με το νόμο των ημιτόνων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου, αφού δε γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι γωνία της.

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε:



$α^2 = ΔΓ^2 + ΔΒ^2$ *(1)*.

Επειδή ΔΒ = γ - ΑΔ, η ισότητα *(1)* γράφεται:

$α^2 = ΔΓ^2 + (γ - ΑΔ)^2$ ή

$α^2 = ΔΓ^2 + γ^2 + ΑΔ^2 - 2γ \cdot ΑΔ$ *(2)*.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$ΔΓ^2 + ΑΔ^2 = β^2$ και $συνΑ = \frac{ΑΔ}{β}$ ή

ΑΔ = βσυνΑ.

Άρα η ισότητα (2) γράφεται:

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ$$

Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται νόμος των συνημιτόνων.

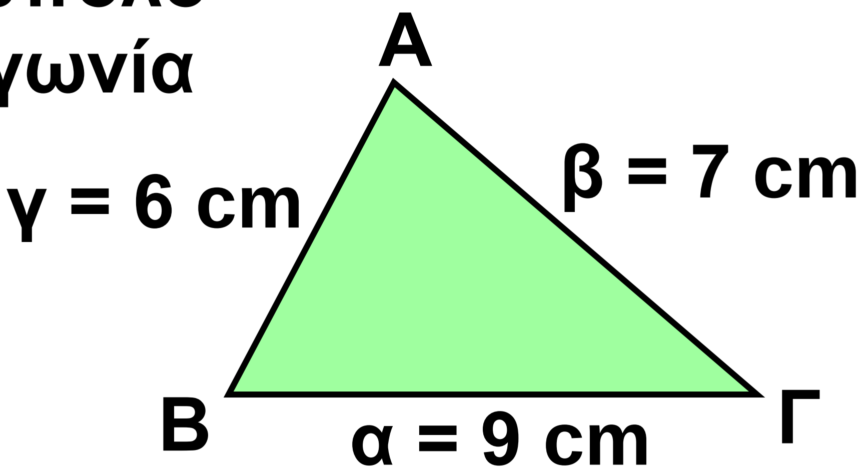
Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

Με το νόμο των συνημιτόνων, αν σ' ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του.

Για παράδειγμα, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι α = 9 cm, β = 7 cm και γ = 6 cm, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.

Π.χ. για να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{B}$ έχουμε:

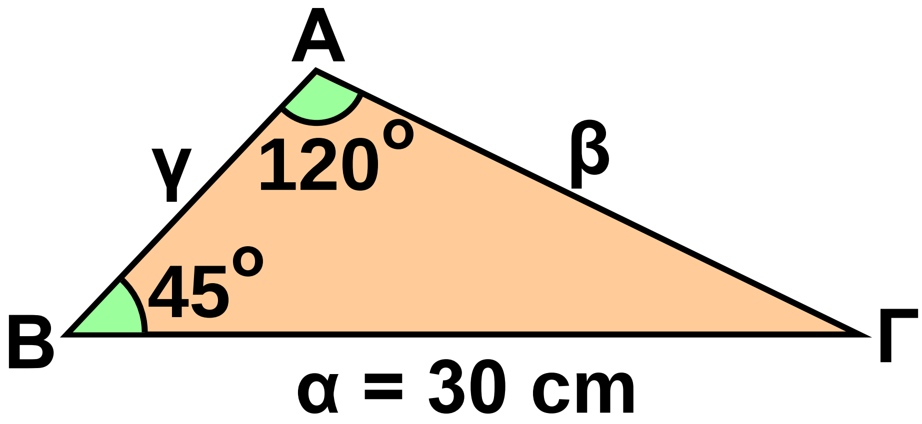


$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha$συνB ή
$7^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot$ συνB ή
$49 = 36 + 81 - 108 \cdot$ συνB ή
108 συνB = 68 ή
συνB = $\frac{68}{108}$ = 0,629. Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{B} = 51^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και α = 30 cm. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Gamma}$ και η πλευρά β.

Λύση



Από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ έχουμε

$120^o + 45^o + \hat{\Gamma} = 180^o$ ή

$\hat{\Gamma} = 180^o - 165^o$ ή $\hat{\Gamma} = 15^o$.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \text{ ή } \frac{30}{\eta\mu 120^o} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^o} \text{ ή}$$

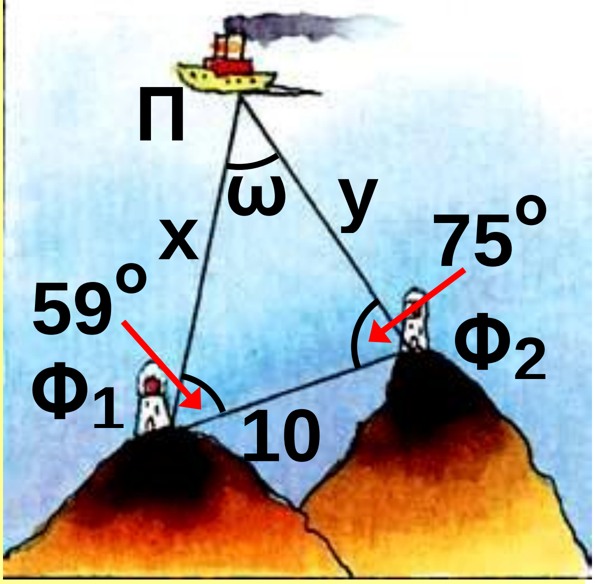
ή $\beta \cdot \eta\mu 120^o = 30 \cdot \eta\mu 45^o$ *(1)*.

Επειδή $\eta\mu 120^o = \eta\mu(180^o - 60^o) = \eta\mu 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta\mu 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ η ισότητα *(1)* γράφεται:

$$\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \beta = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ ή}$$

$$\beta = \frac{30\sqrt{6}}{3} \text{ ή } \beta = 10\sqrt{6} \text{ cm.}$$

2 **Δύο φάροι $Φ_1$, $Φ_2$ απέχουν μεταξύ τους 10 μίλια. Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε μια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις x,y του πλοίου από κάθε φάρο.**



Λύση

Στο τρίγωνο $ΠΦ_1Φ_2$ έχουμε

$ω + 59^o + 75^o = 180^o$, **οπότε** $ω = 46^o$.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{10}{ημ46^o} = \frac{x}{ημ75^o} = \frac{y}{ημ59^o}.$$

Από την ισότητα $\frac{10}{ημ46^o} = \frac{x}{ημ75^o}$

έχουμε $x = \frac{10 \cdot ημ75^o}{ημ46^o}$ **ή**

$x = \frac{10 \cdot 0,966}{0,719}$ **= 13,44 μίλια.**

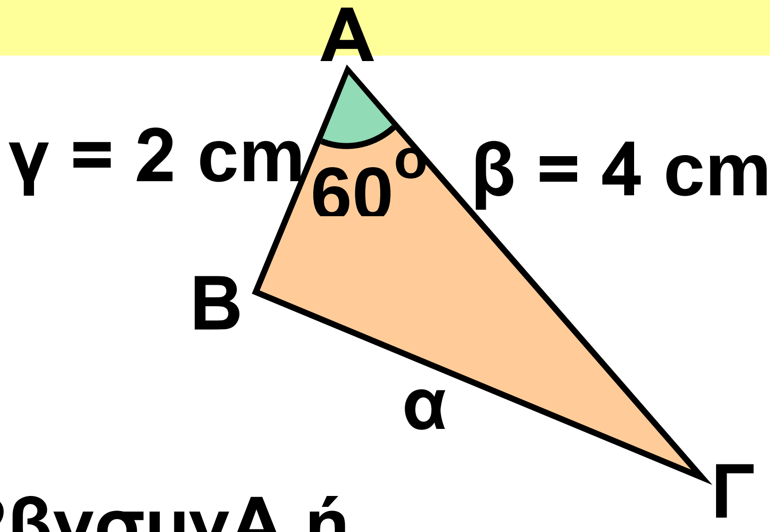
Από την ισότητα $\frac{10}{ημ46^o} = \frac{y}{ημ59^o}$

έχουμε $y = \frac{10 \cdot ημ59^o}{ημ46^o}$ ή

$y = \frac{10 \cdot 0,857}{0,719} = 11,92$ μίλια.

Επομένως το πλοίο Π απέχει από το φάρο $Φ_1$ 13,44 μίλια και από το φάρο $Φ_2$ 11,92 μίλια.

3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^o$, $β = 4$ cm και $γ = 2$ cm. Να υπολογιστεί η πλευρά α και οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$.



Λύση

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνA$ ή

$α^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot συν60^o$

ή $\alpha^2 = 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2}$ ή $\alpha^2 = 12$.

Άρα $\alpha = \sqrt{12}$ δηλαδή $\alpha = 2\sqrt{3}$ cm.

Ομοίως έχουμε:

$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha$συνΒ ή

$4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot$ συνΒ ή

$16 = 4 + 12 - 8\sqrt{3} \cdot$ συνΒ ή

$8\sqrt{3} \cdot$ συνΒ = 0 ή συνΒ = 0,

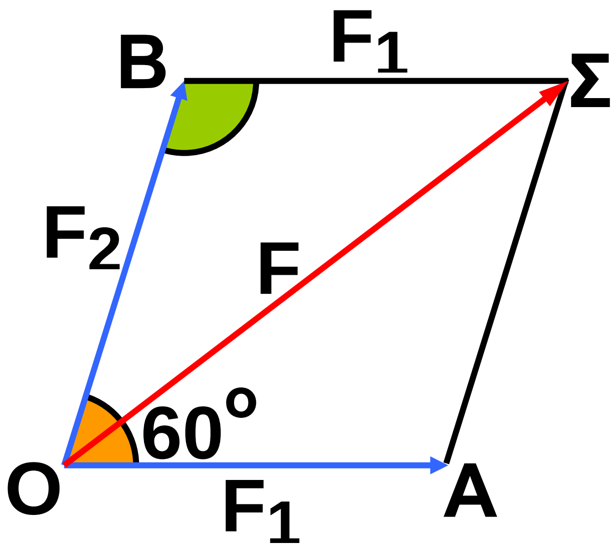
οπότε $\hat{B} = 90^o$.

Αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ και $\hat{A} = 60^o$, $\hat{B} = 90^o$, έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^o$.

4 Δύο δυνάμεις $F_1 = 4$ Ν και $F_2 =$ $= 3$ Ν εφαρμόζονται σ' ένα υλικό σημείο Ο και σχηματίζουν γωνία $\omega = 60^o$. Να υπολογιστεί η συνισταμένη τους F.

Λύση

Η συνισταμένη F των δυνάμεων F_1, F_2, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΟΑΣΒ. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΣ και επειδή ΒΣ = F_1, έχουμε:



$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2$ συνω *(1).*

Οι γωνίες όμως ω και 60° είναι παραπληρωματικές, οπότε συνω = -συν60° και ο τύπος *(1)* γράφεται:

$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2$ συν60° *(1).*

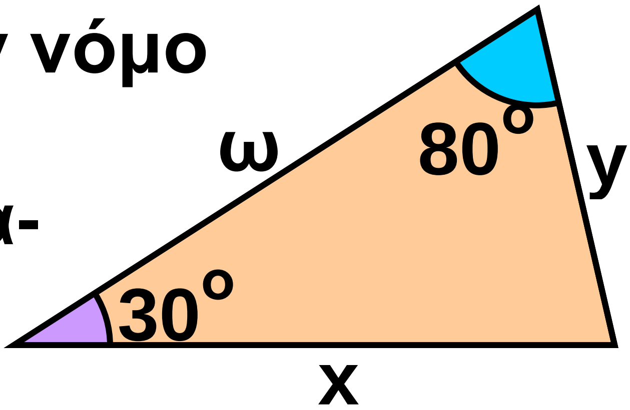
$F^2 = 4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$ ή

$F^2 = 37$, οπότε $F = \sqrt{37}$ N ή

F = 6,08 N.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος



—— = —— = ——

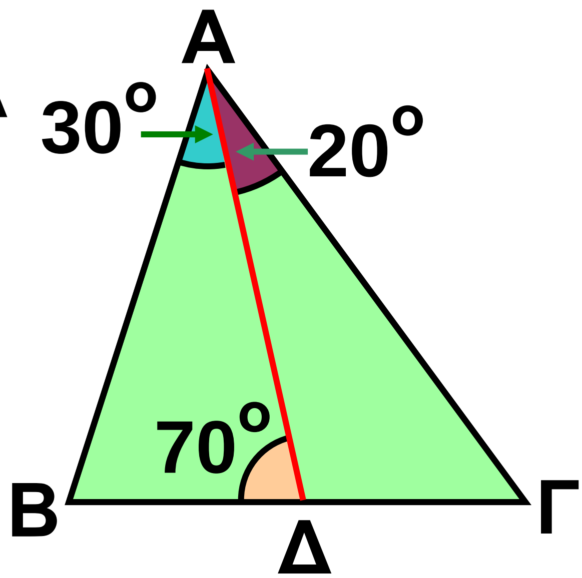
2 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων :

α) στο τρίγωνο ΑΒΔ

—— = —— = ——

α) στο τρίγωνο ΑΔΓ

—— = —— = ——



3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha\eta\mu B = \beta\eta\mu A$. ☐

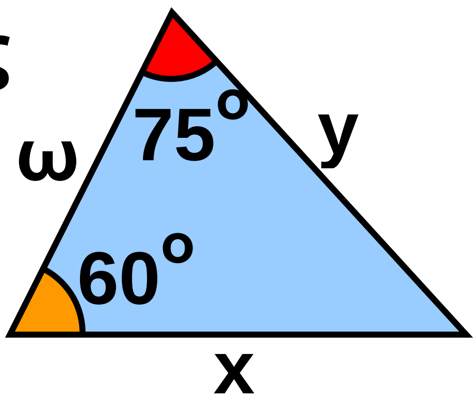
β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^o$, $\hat{\Gamma} = 100^o$, τότε $\dfrac{\beta}{\eta\mu 100^o} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu 20^o}$ ☐

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$. ☐

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 70^o$, $\hat{\Gamma} = 80^o$, τότε ισχύει $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80^o$. ☐

ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 60^o$, τότε ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$. ☐

4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων:



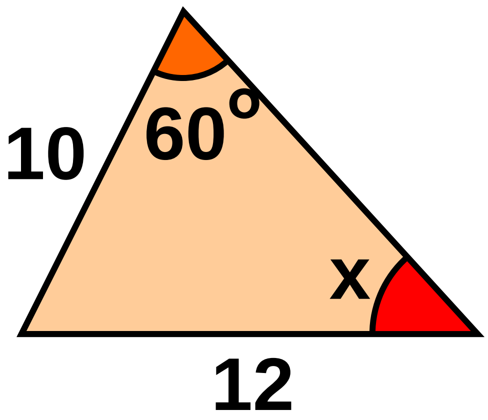
x^2 = ...

y^2 = ...

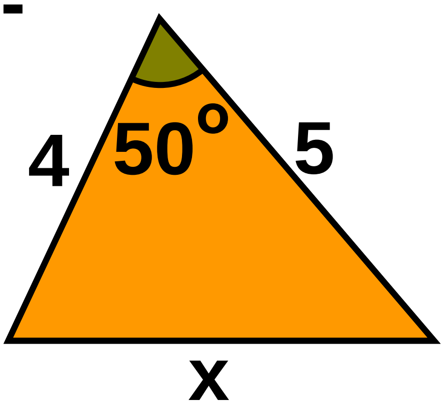
ω^2 = ...

5 **Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις**

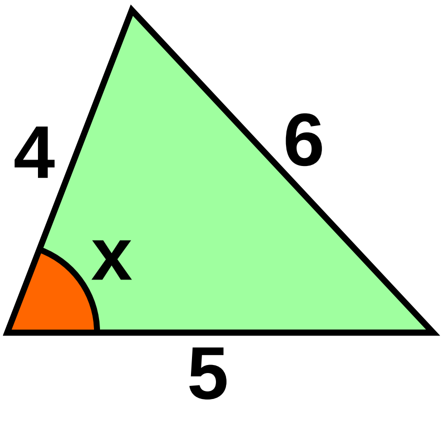
α) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των .... από την ισότητα ....



β) Η πλευρά x υπολογίζεται με το νόμο των .... από την ισότητα ....



γ) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των .... από την ισότητα ....

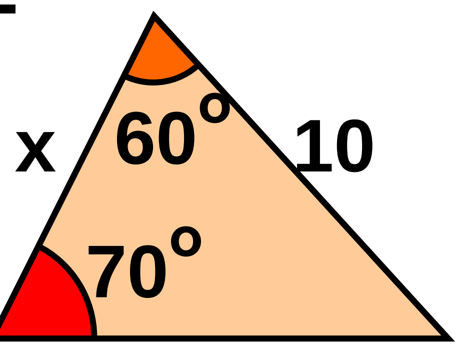


δ) Η πλευρά x υπολογί-
ζεται με το νόμο των

....

από την ισότητα

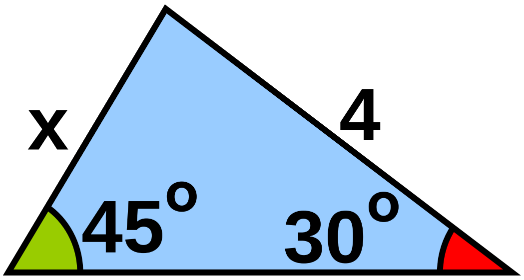
....



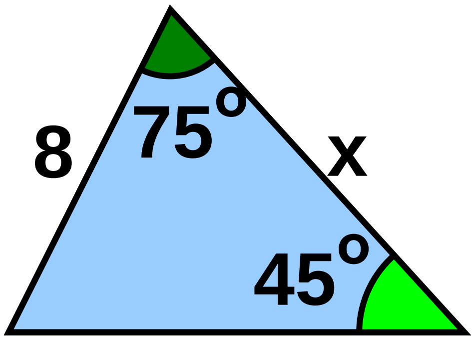
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

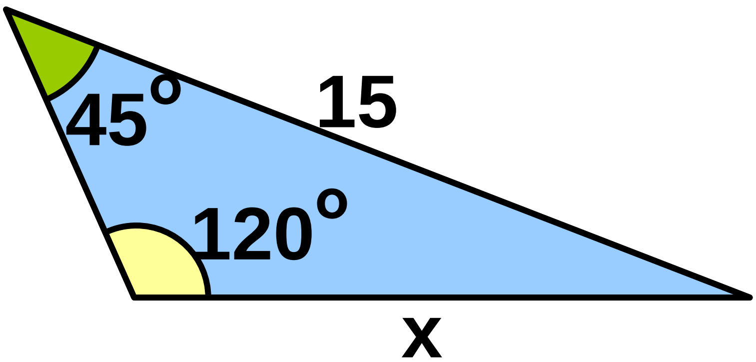
α)



γ)

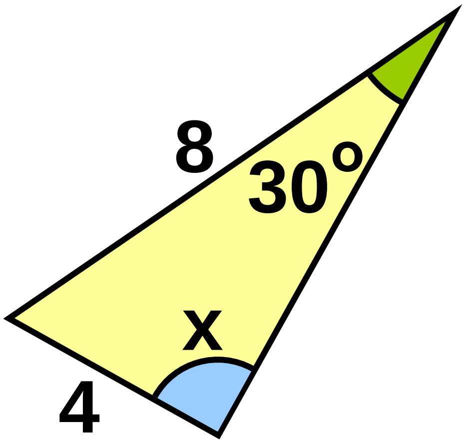


β)

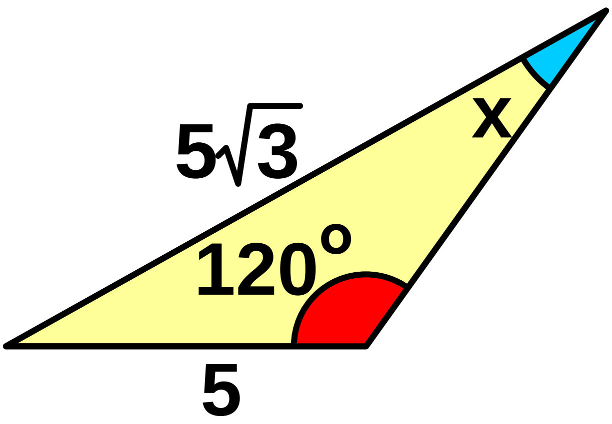


2 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

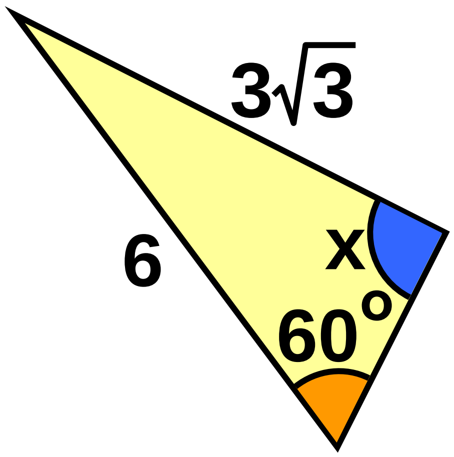
α)



β)



γ)



3 Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, όταν:

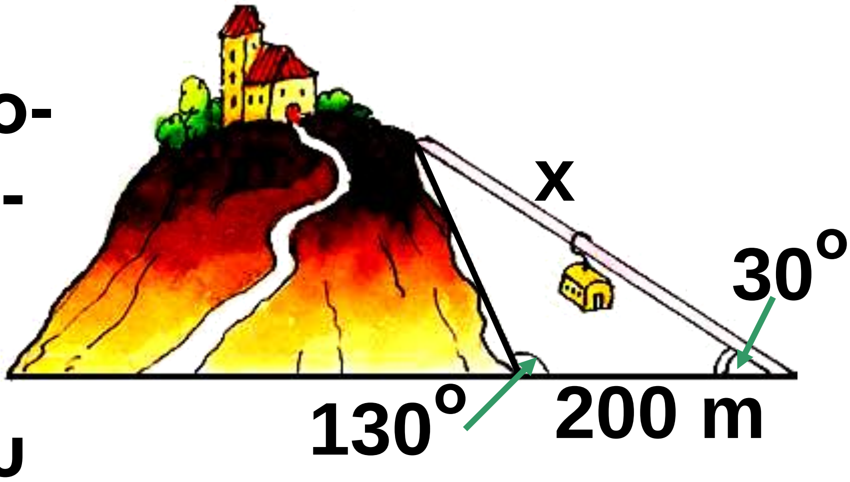
α) $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\hat{B} = 30^o$

β) $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^o$, $\beta = 10$, $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε

ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5 **Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής x του εναέριου σιδηροδρόμου στο διπλανό σχήμα.** ***(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).***

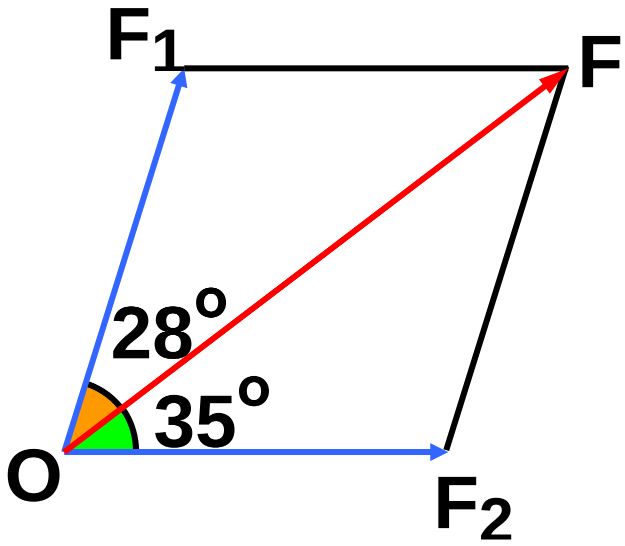


6 **Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή του των Μαθηματικών είπε:**

- Κύριε, σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $\hat{B} = 60^{o}$ και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του. Πώς λύνεται;

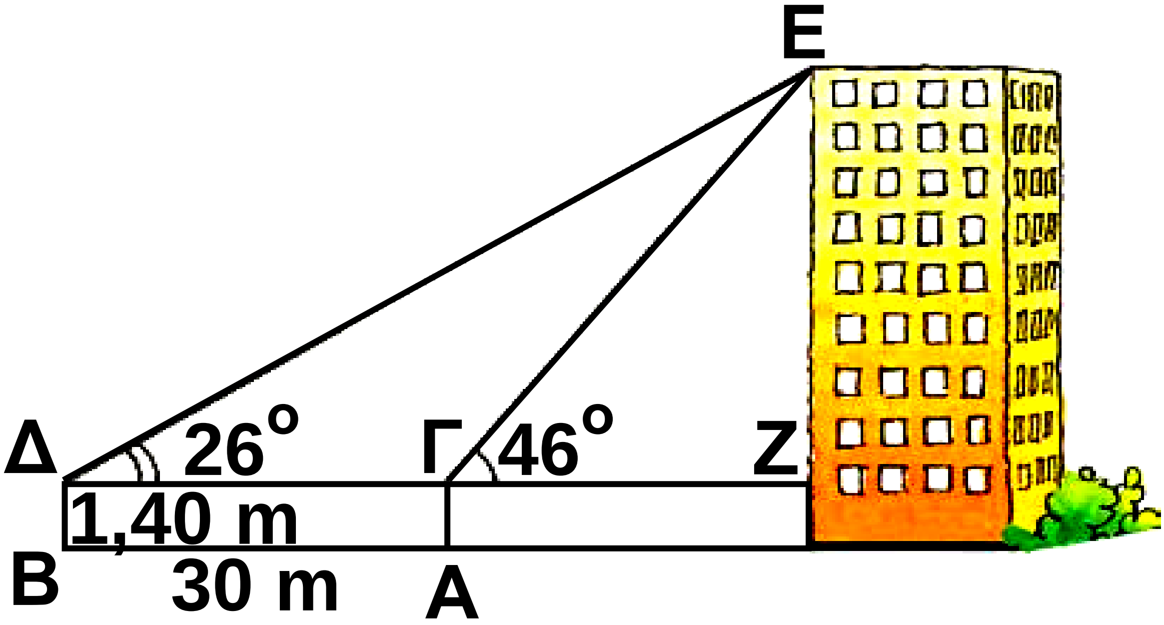
Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση τού είπε:
- Κάποιο λάθος έχεις κάνει, γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.
Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής;

7 Οι δυνάμεις F_1, F_2 έχουν συνισταμένη F = 10 N που σχηματίζει με την F_1 γωνία 28^o και με την F_2 γωνία 35^o. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1, F_2. (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



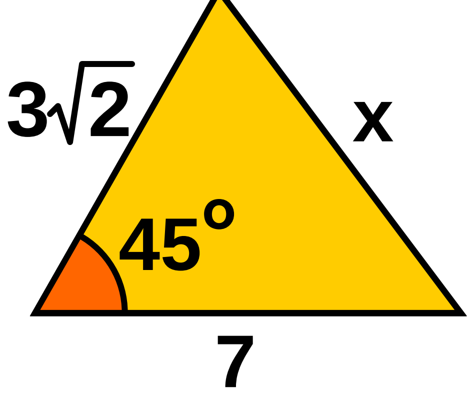
8 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός ψηλού κτιρίου τοποθέτησε το γωνιόμετρό του στο σημείο Α και βρήκε τη γωνία $\widehat{EΓZ}$ = 46^o. Στη συνέχεια μετακινήθηκε

κατά 30 m, τοποθέτησε το γωνιόμετρο στη θέση Β και βρήκε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma = 26^o$. Ποιο ήταν το ύψος του κτιρίου, αν το γωνιόμετρο έχει ύψος 1,4 m. ***(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).***

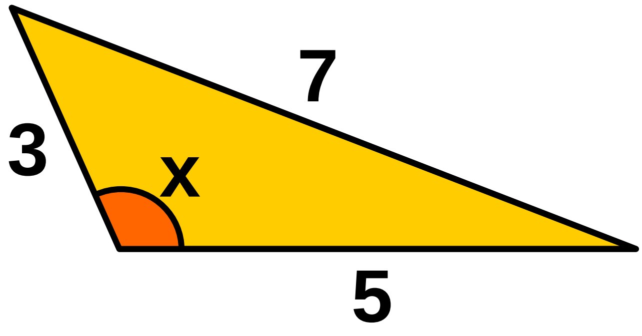


9 **Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:**

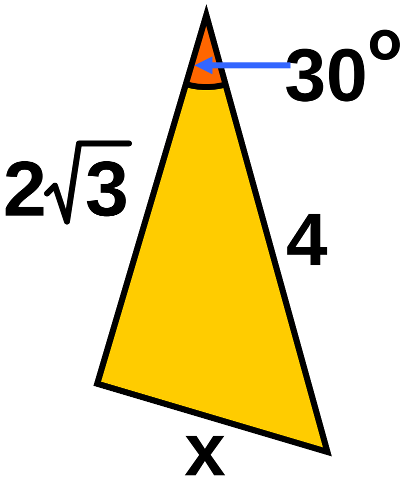
α)



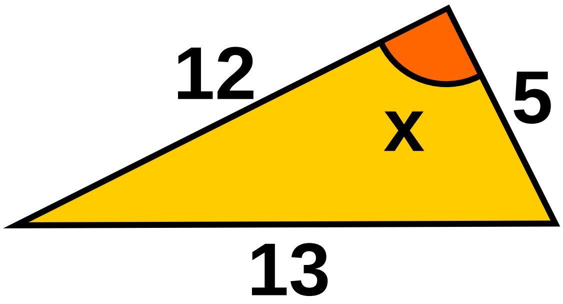
β)



γ)

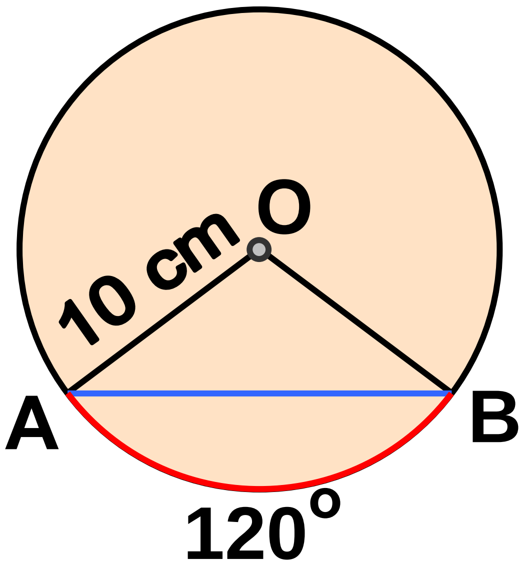


δ)



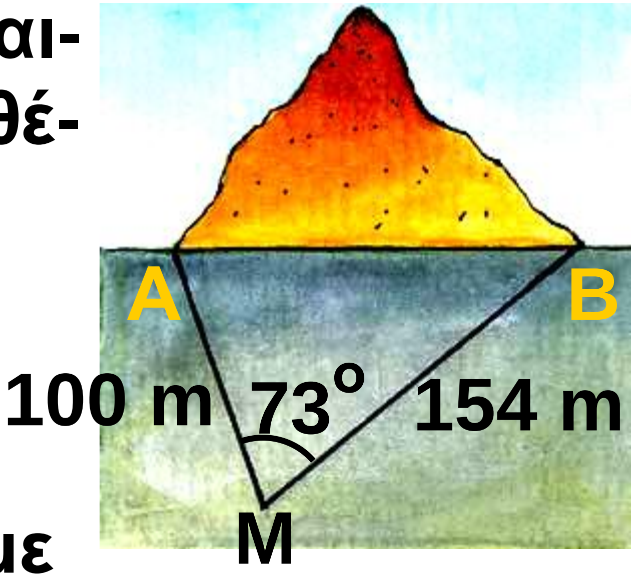
10 Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, αν $\hat{A} = 120^\circ$ και $\alpha = 3\sqrt{3}$.

11 Σε κύκλο με ακτίνα R = 10 cm, η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί σε τόξο 120°. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής.



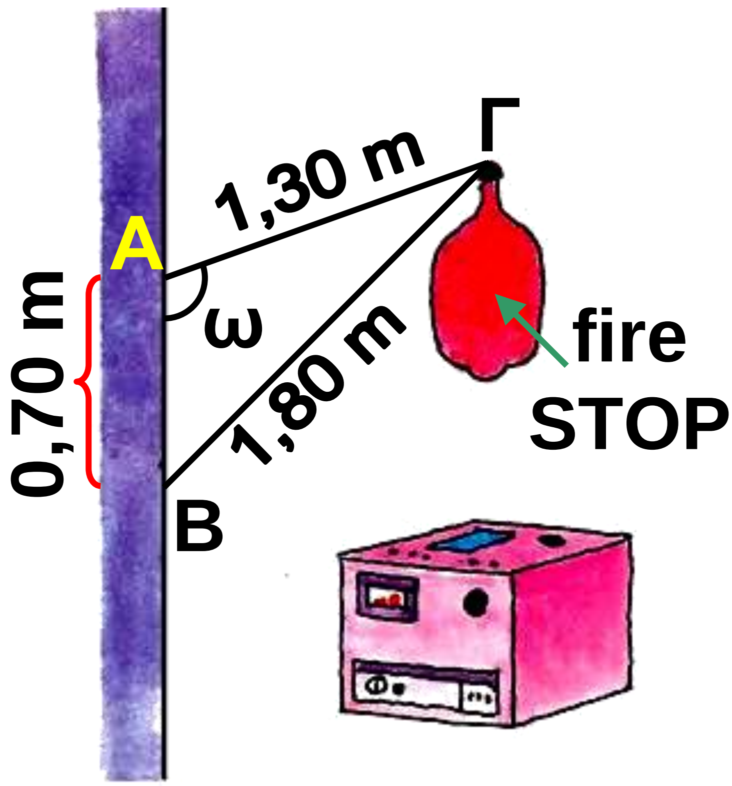
12 Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΒΓ = 3 και $\hat{A} = 120^\circ$.

13 Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει μια προσφορά για την κατασκευή μιας σήραγγας ΑΒ. Ένας μηχανικός της εταιρείας με τους συνεργάτες του έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση Μ που η απόστασή του από το Α ήταν 100 m και από το Β ήταν 154 m. Αφού μέτρησε τη γωνία ΑΜΒ = 73^{o}, ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας. Είχε δίκιο ή άδικο; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας? *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



14 Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα ενός

καλοριφέρ. Ένας τεχνικός θέλει να κατασκευάσει τη βάση στήριξης του και διαθέτει τρεις μεταλλικές βέργες ΑΒ = 0,70 m, ΑΓ = 1,30 m και ΒΓ = 1,80 m. Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις βέργες ΑΒ, ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω. Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε, ώστε να βοηθήσετε τον τεχνικό; *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: **Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων**
Υπολογισμός του ύψους ενός ψηλού κτιρίου, ενός βουνού, της απόστασης δύο υφάλων, δύο φάρων κ.τ.λ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να αποδείξετε ότι:

α) $(1 - ημx + συνx)^2 =$
$= 2(1 - ημx)(1 + συνx)$

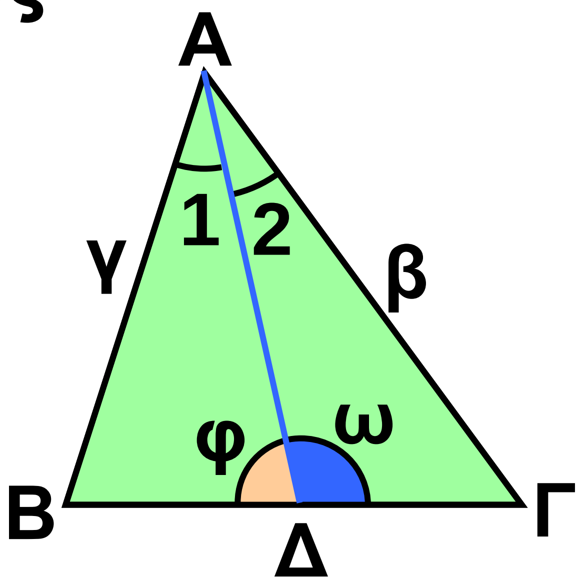
β) $\dfrac{1 + συνx}{ημx} + \dfrac{ημx}{1 + συνx} = \dfrac{2}{ημx}$

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχy δίνεται το σημείο Α(4, 0) και το σημείο Μ που έχει τετμημένη

–5 και η απόστασή του από το Ο είναι 13. Αν ω είναι η γωνία $A\hat{O}M$, να υπολογίσετε το συνω και την απόσταση ΑΜ.

3 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 30 cm, $\hat{B} = 45^o$ και $\hat{\Gamma} = 75^o$. Να χαράξετε τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου ΑΔ.**

4 **Αν ΑΔ διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:**

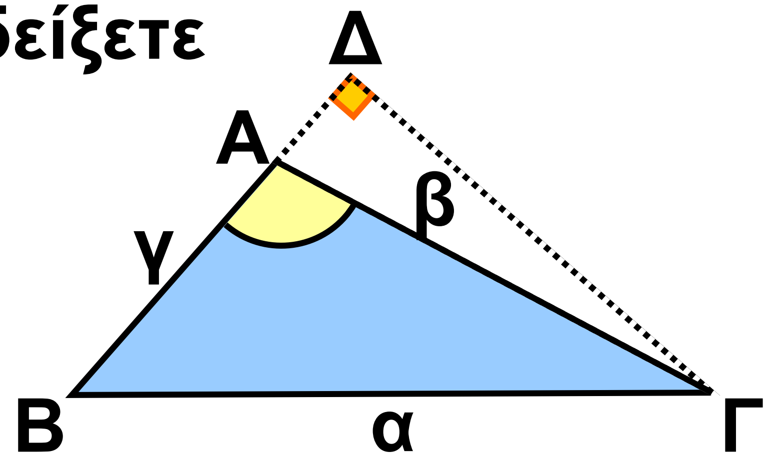


α) $\dfrac{\gamma}{B\Delta} = \dfrac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu A_1}$

β) $\dfrac{\beta}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\eta\mu\omega}{\eta\mu A_2}$

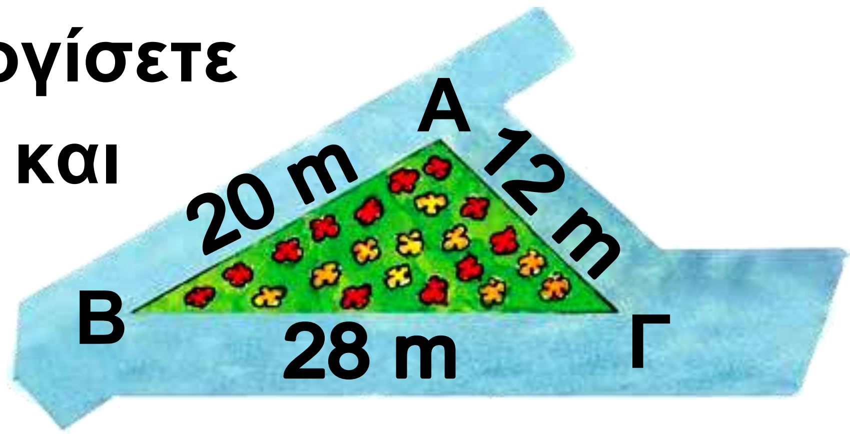
γ) $\dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

5 **α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος**



είναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ ημΑ.

β) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$ και το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



6 **α) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ^2Α = ημ^2Β + ημ^2Γ$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.**

β) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ημ(Β + Γ) + συν(Β - Γ) = 2, τότε να

αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

7 **Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:**

α) $\alpha(\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) + \beta(\eta\mu\Gamma - \eta\mu A) + \gamma(\eta\mu A - \eta\mu B) = 0$

β) $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$

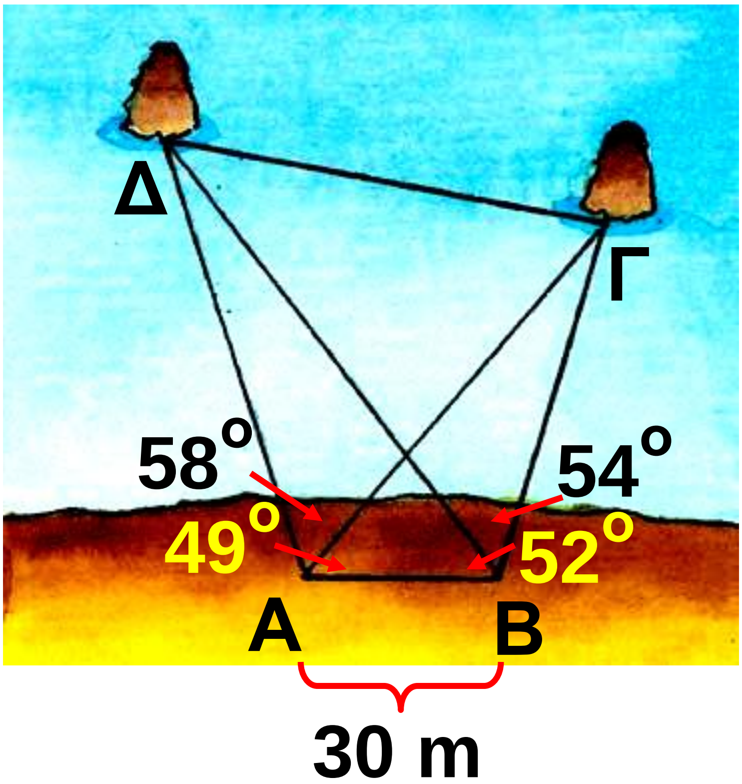
γ) $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu B)$

δ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

8 **Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και** $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{3}{4}$

9 **Δύο φίλοι τοποθέτησαν τα γωνιόμετρά τους στις θέσεις Α, Β μιας ακτής και παρατήρησαν δύο βράχους που προεξείχαν από την**

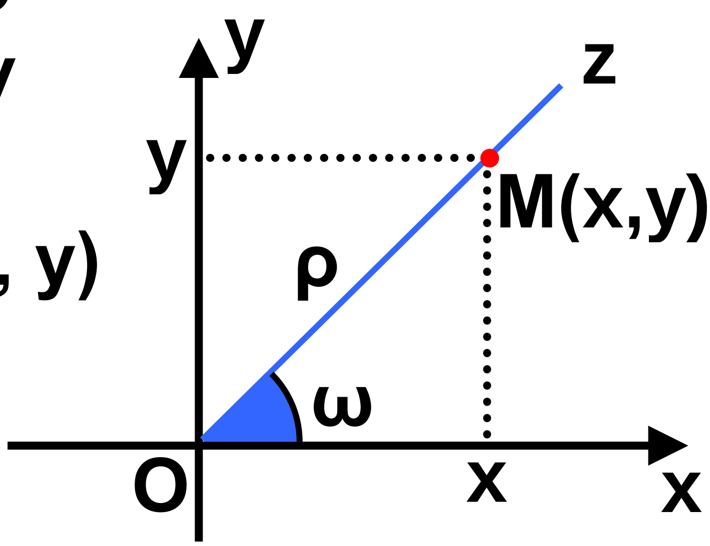
**επιφάνεια της θάλασσας. Αν η από-
σταση ΑΒ ήταν 30 m και τα αποτελέ-
σματα των μετρήσεων τους φαίνο-
νται στο παρακάτω σχήμα, τότε να
υπολογίσετε την απόσταση των
δύο βράχων.** ***(Να χρησιμοποιήσετε
τριγωνομετρικούς πίνακες).***



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑ-ΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, αν είναι $\omega = x\hat{O}z$, και $M(x, y)$ είναι ένα οποιο-δήποτε σημείο της πλευράς Oz, διαφορετικό από το O, τότε:



$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $ημω = \dfrac{y}{\rho}$, $συνω = \dfrac{x}{\rho}$, $εφω = \dfrac{y}{x}$.

Π.χ. αν M(1, 2), τότε $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $ημω = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $συνω = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1\sqrt{5}}{5}$, $εφω = \dfrac{2}{1} = 2$.

● Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω με $0^o < ω < 180^o$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ω	0^o		90^o		180^o
ημω		+		+	
συνω		+		–	
εφω		+		–	

● Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$ημ(180^o - ω) = ημω$

$συνω(180^o - ω) = –συνω$

$εφ(180^o - ω) = –εφω$

Π.χ. $ημ160^o = ημ20^o$

$συν160^o = –συν20^o$

$εφ160^o = –εφ20^o$

● Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω).

$εφω = \frac{ημω}{συνω}$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω με συνω ≠ 0)

Π.χ. $ημ^2 35^\circ + συν^2 35^\circ = 1$,

$εφ35^\circ = \frac{ημ35^\circ}{συν35^\circ}$

● Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

- Νόμος των ημιτόνων:

$$\frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ}$$

- Νόμος των συνημιτόνων:

$$α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγ\ συνΑ$$

$$β^2 = γ^2 + α^2 – 2γα\ συνΒ$$

$$γ^2 = α^2 + β^2 – 2αβ\ συνΓ$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1^{o} – 89^{o}

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	,01908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,2698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900

Περιεχόμενα 2ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Β΄ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').