Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 5ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 4.1 – 5.3

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Δημήτριος Αργυράκης, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Παναγιώτης Βουργάνας, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Κωνσταντίνος Μεντής, ***Μαθημ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Σταματούλα Τσικοπούλου, ***Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Μιχαήλ Χρυσοβέργης, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Εμμανουήλ Μανατάκης, ***Επίκ. Καθ. Πολυτεχν. Σχολής Παν/μίου Πατρών***

Μιχαήλ Σαλίχος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

Νικόλαος Παπαευστρατίου, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Νικόλαος Μαρουλάκης, ***Σκιτσογράφος - Εικονογράφος***

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Ευγενία Βελάγκου, *Φιλόλογος*

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ
Δημήτριος Κοντογιάννης,
Σύμβουλος του Παιδαγ. Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ
Παναγιώτης Γράββαλος, *Ζωγράφος*

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και
75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

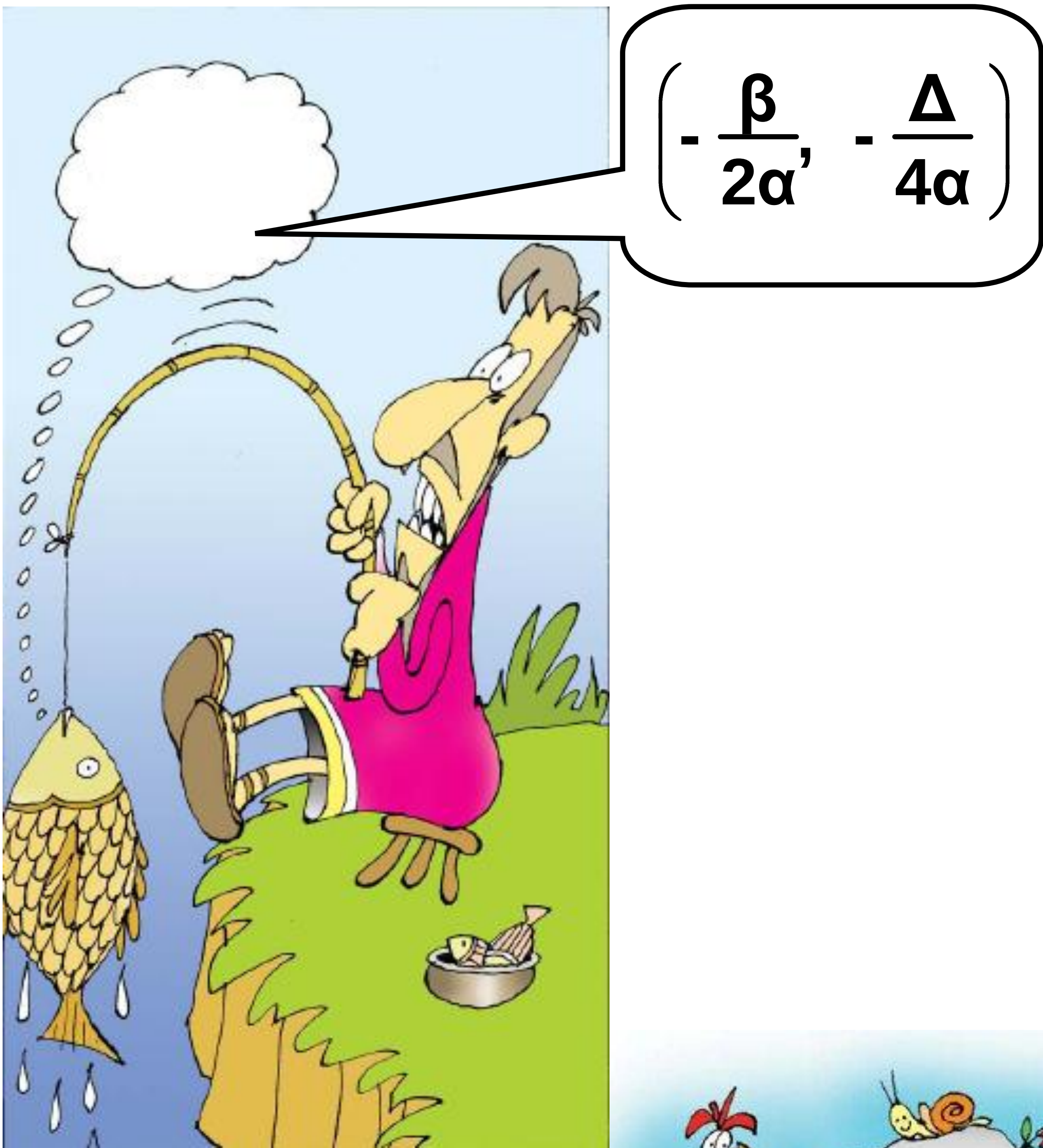
Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 5ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 4.1 – 5.3


4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ


$\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$


ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$

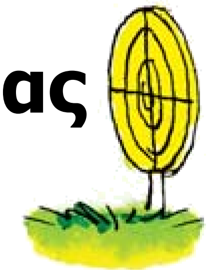
4.2 Η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

Γενικές ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση

4.1 Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$

✓ Θυμάμαι τι ονομάζεται συνάρτηση και τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.



✓ Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α \neq 0$.

✓ Μαθαίνω να βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης $y = αx^2$ από τη γραφική της παράσταση.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

- Ο αριθμός y που είναι ίσος με το τετράγωνο ενός αριθμού x είναι y = ...

- Το εμβαδόν y ενός ορθογωνίου με πλάτος x και διπλάσιο μήκος είναι
y = ……………………
- Το εμβαδόν y ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα x είναι
y = ……………………
2. Στην πρώτη πρόταση, όταν ο x πάρει τις τιμές -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές του y;
3. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη (x, y) που προσδιορίσατε και να σχεδιάσετε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

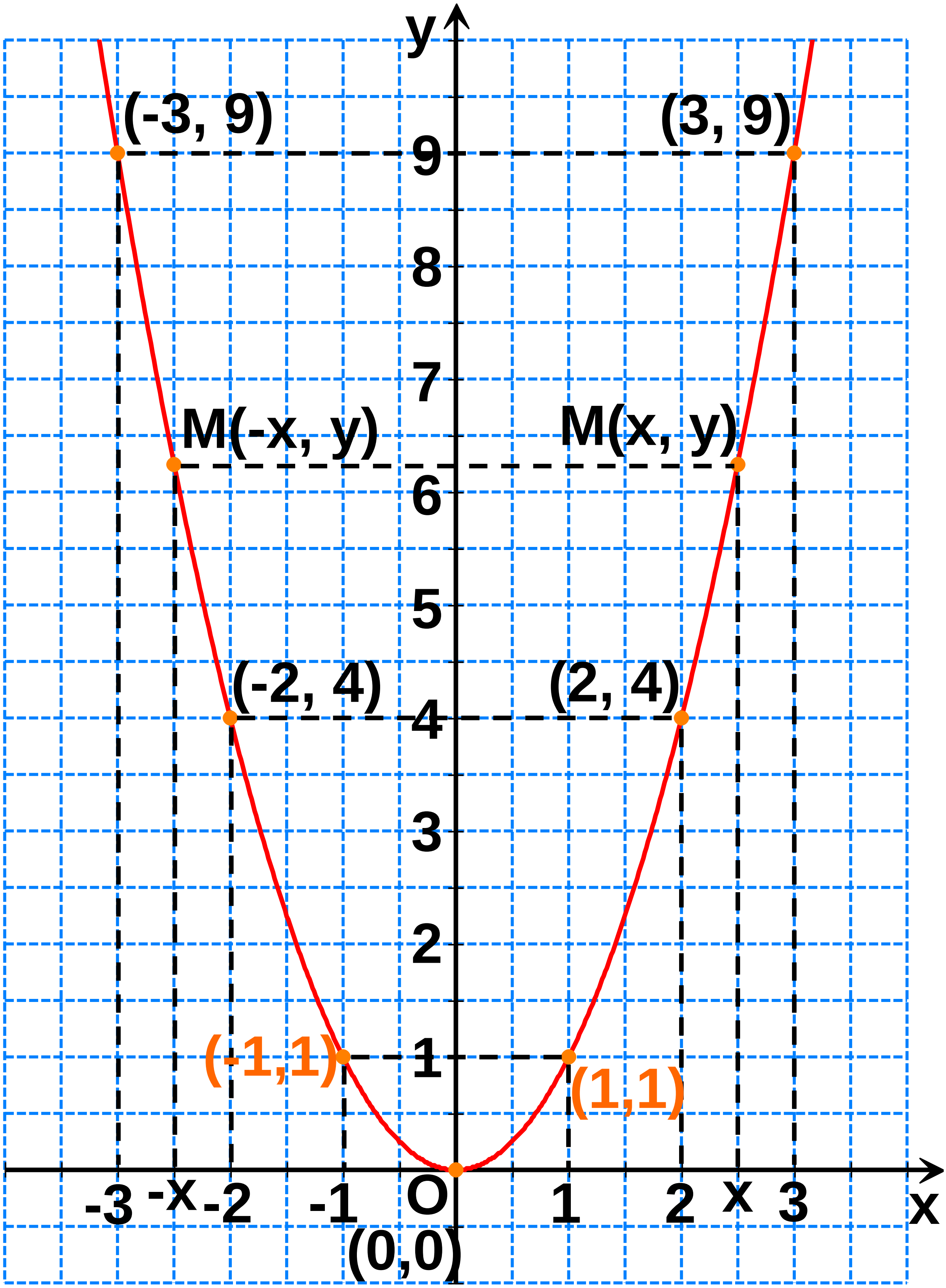
Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α > 0$

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται

μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.
Π.χ. Για x = 1 έχουμε y = 12 = 1, για x = 2 έχουμε y = 22 = 4 κ.τ.λ.
Σ’ ένα σύστημα αξόνων, αν παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη (x, y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μια τιμή του x, τότε το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί τη **γραφική παράστασή** της.
Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:
- Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x'x και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y > 0$.
- Η συνάρτηση $y = x^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y = 0$, όταν $x = 0$.
- Για $x = -3$ ή $x = 3$ έχουμε $y = 9$ και τα σημεία (-3, 9) και (3, 9) της παραβολής είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y.



Γενικά σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που

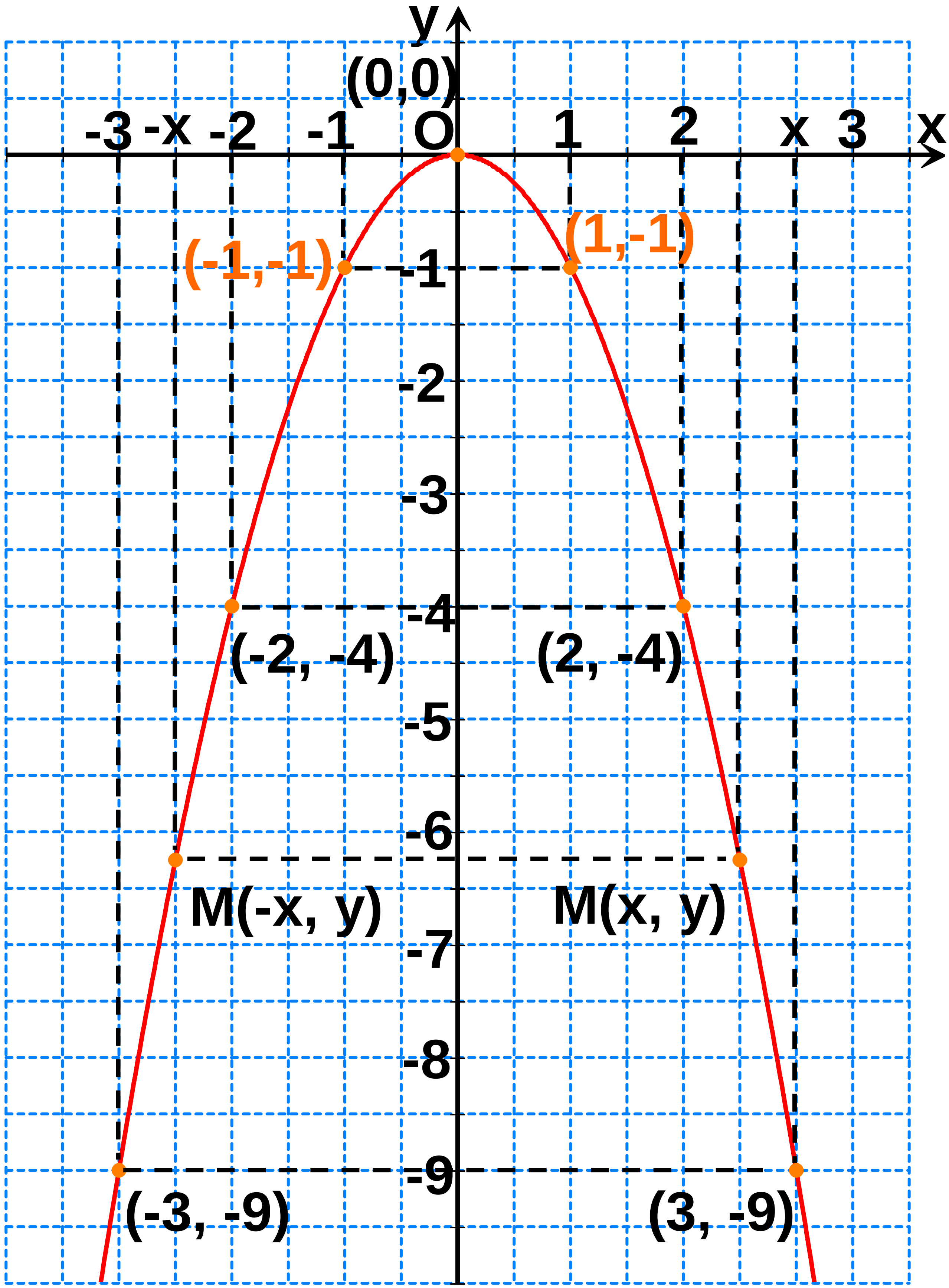
σημαίνει ότι η παραβολή $y = x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α < 0$

Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2$, η οποία είναι επίσης μια παραβολή.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

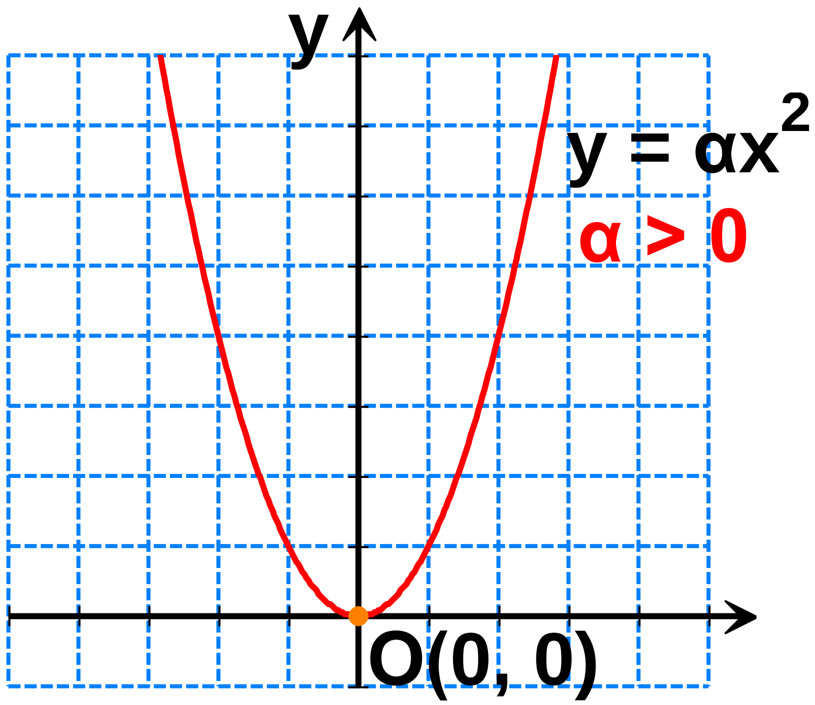
- Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x΄x και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y < 0$.
- Η συνάρτηση $y = -x^2$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.
- Σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = -x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.


y
x
(0,0)
O
-3
-x
-2
-1
1
2
x
3
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
(-1,-1)
(1,-1)
(-2, -4)
(2, -4)
M(-x, y)
M(x, y)
(-3, -9)
(3, -9)

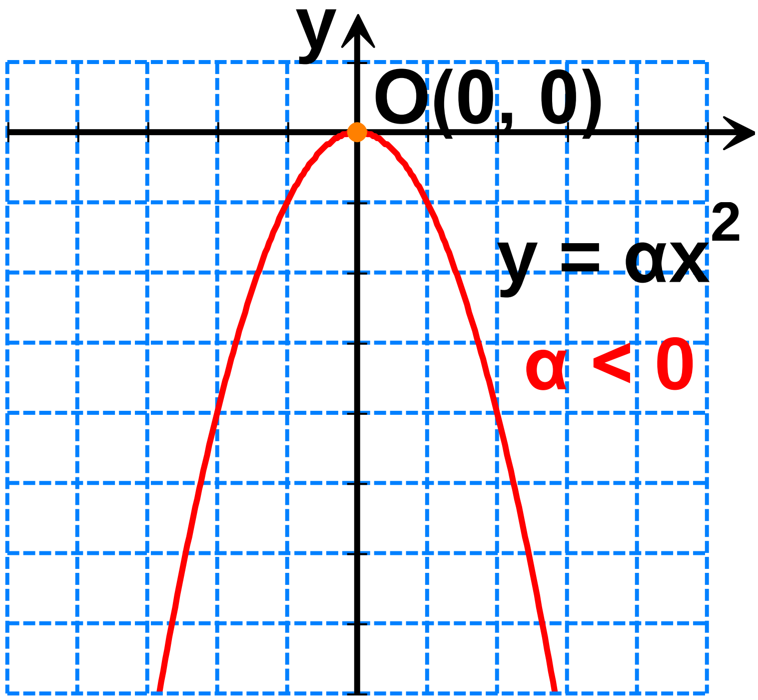
Γενικά

Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$.

- **Έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.**
- **Αν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω και η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή y = 0, όταν x = 0.**

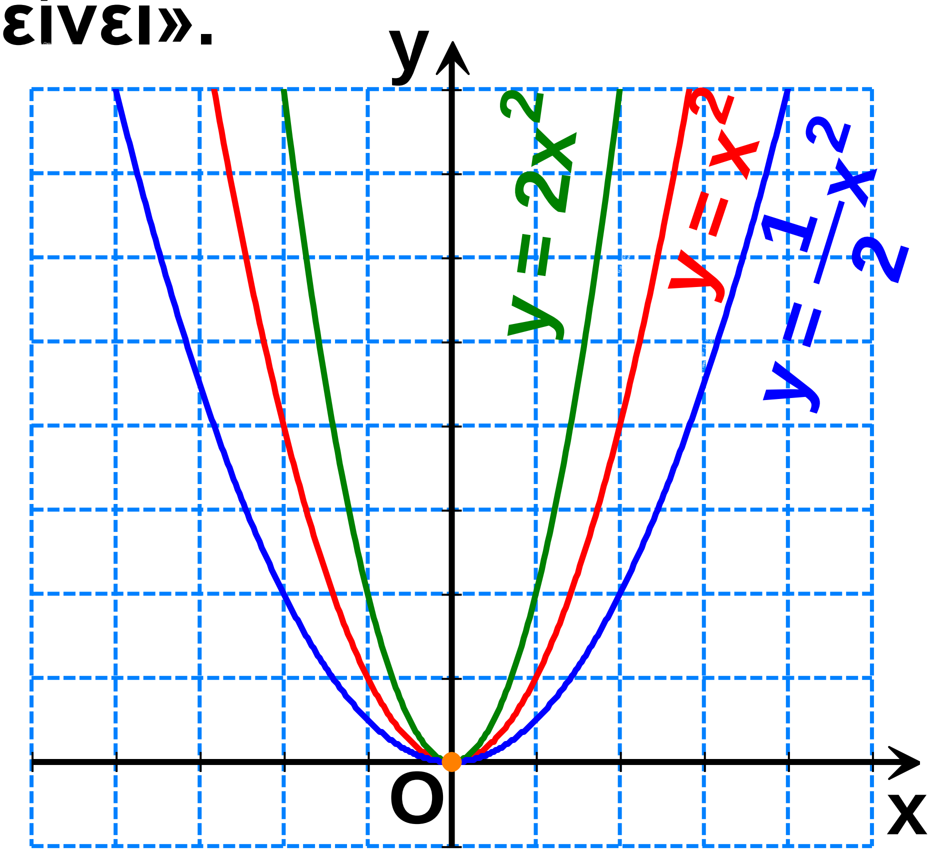


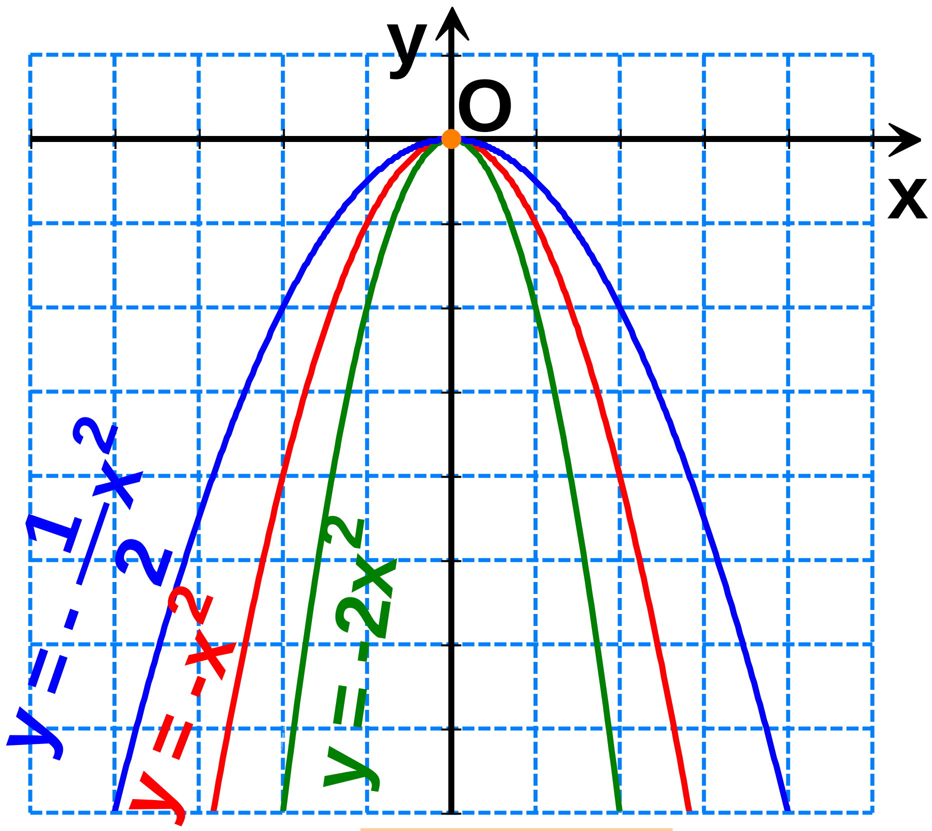
• Αν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x΄x και κάτω και η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή $y = 0$, όταν $x = 0$.



Στα παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει την παραβολή $y = \alpha x^2$ για διάφορες τιμές του αριθμού α.
Παρατηρούμε ότι:
α) Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $y = \alpha x^2$ ως προς τον άξονα x΄x, αλλά καθορίζει και το «άνοιγμα»

της. Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει».

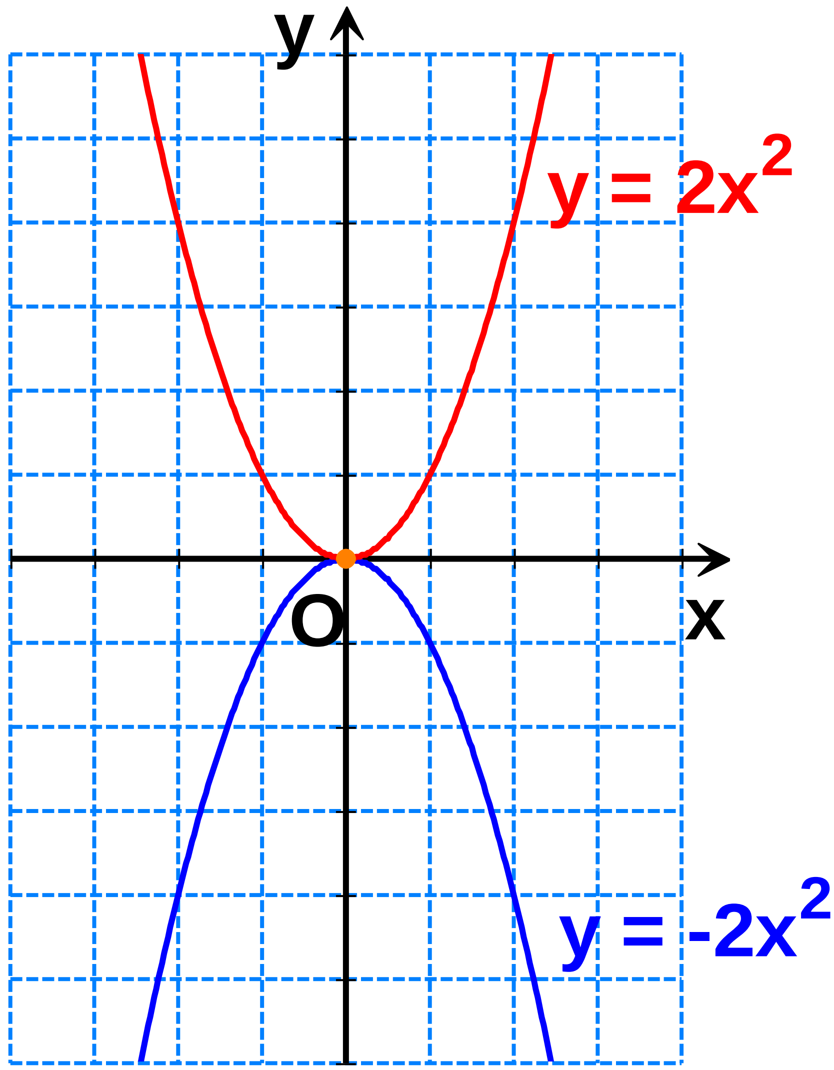




β) Αν σχεδιάσουμε τις παραβολές $y = 2x^2$ και $y = -2x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων, τότε παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον x΄x.

Γενικά:

Οι παραβολές $y = αx^2$ και $y = -αx^2$ είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον x΄x.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η παραβολή $y = αx^2$ να διέρχεται από το σημείο Α (-1, 3).

Λύση

Για να διέρχεται η παραβολή $y = αx^2$ από το σημείο Α(-1, 3), πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου Α, να επαληθεύουν την εξίσωση $y = αx^2$. Άρα, για $x = -1$ και $y = 3$, έχουμε $3 = α\,(-1)^2$, οπότε $α = 3$.

2 Να σχεδιαστεί η παραβολή $y = -2x^2$ όταν $-2 \leq x \leq 2$ και να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η μεταβλητή y. Ποια σημεία

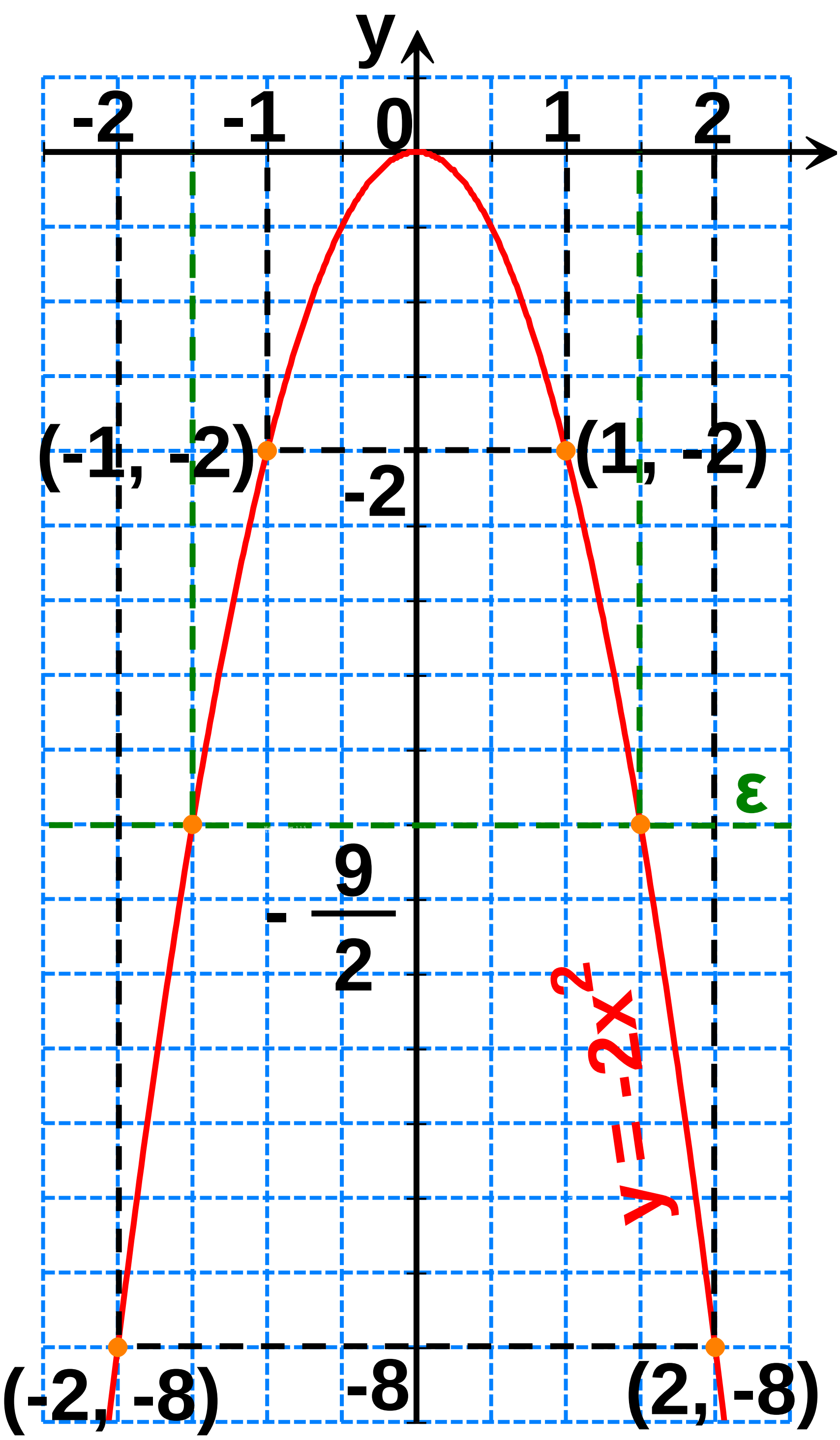
της παραβολής έχουν τεταγμένη
$- \dfrac{9}{2}$;

Λύση

Σχηματίζουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -2x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

Με τη βοήθεια των τιμών αυτών σχεδιάζουμε την Η παραβολή. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι, για όλες τις τιμές του x, από το -2 έως και το 2 ($-2 \leq x \leq 2$) οι αντίστοιχες τιμές του y είναι από το -8 έως και το 0 ($-8 \leq y \leq 0$).
Άρα, η μέγιστη τιμή του y είναι το 0, όταν x = 0 και η ελάχιστη τιμή του y είναι το -8, όταν x = -2 ή x = 2.



Για $y = -\frac{9}{2}$ έχουμε:

$-\frac{9}{2} = -2x^2$ ή $x^2 = \frac{9}{4}$,οπότε $x = \pm\frac{3}{2}$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Τα σημεία αυτά μπορούν να βρεθούν και από τη γραφική παράσταση, αφού είναι τα κοινά σημεία της ευθείας $\varepsilon: y = -\frac{9}{2}$ και της παραβολής $y = -2x^2$.

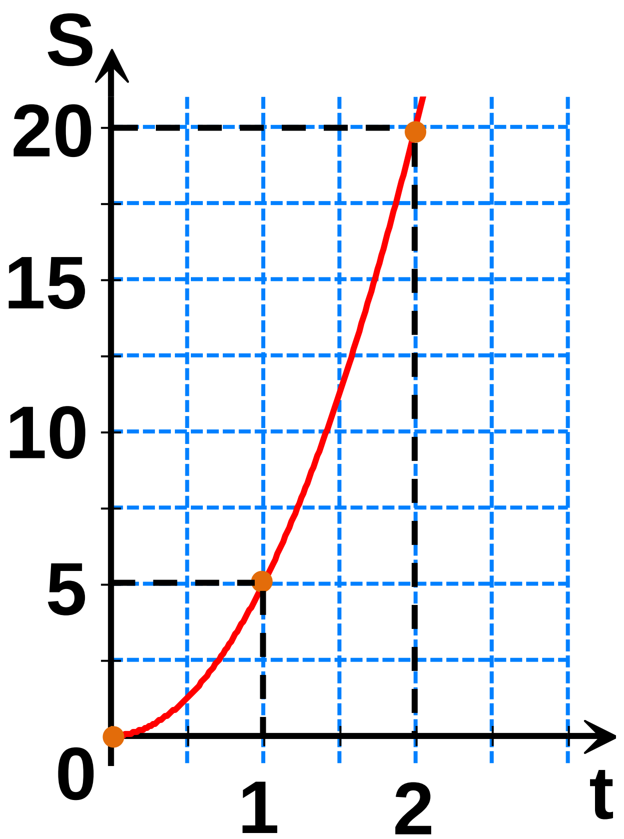
3 Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι αν ένα σώμα κάνει ελεύθερη πτώση, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα S, που δίνεται από τον τύπο $S = \frac{1}{2}gt^2$ $(g \approx 10 m/sec^2)$. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διαστήματος - χρόνου.

Λύση

Το διάστημα S για g = 10 m/sec^2 δίνεται από τον τύπο

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 5t^2 .$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $S = 5t^2$ είναι παραβολή με κορυφή το σημείο 0(0, 0) και διέρχεται από τα σημεία (1, 5), (2, 20) κ.τ.λ. Ο χρόνος όμως δεν παίρνει αρνητικές τιμές, οπότε το διάγραμμα του διαστήματος - χρόνου είναι το τμήμα της προηγούμενης παραβολής που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην παραβολή $y = -2x^2$;

α) Α(-1, 2) β) Β(2, -8)

γ) $Γ\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ δ) Δ(-2, 8)

2 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παίρνουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή;

α) $y = -4x^2$ β) $y = 4x^2$

γ) $y = (-4x)^2$ δ) $y = -(4x)^2$.

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Η παραβολή $y = 6x^2$ έχει κορυφή το σημείο 0(0, 0). ☐

β) Ο άξονας x΄x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = x^2$. ☐

γ) Οι παραβολές $y = 8x^2$ και $y = -8x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y. ☐

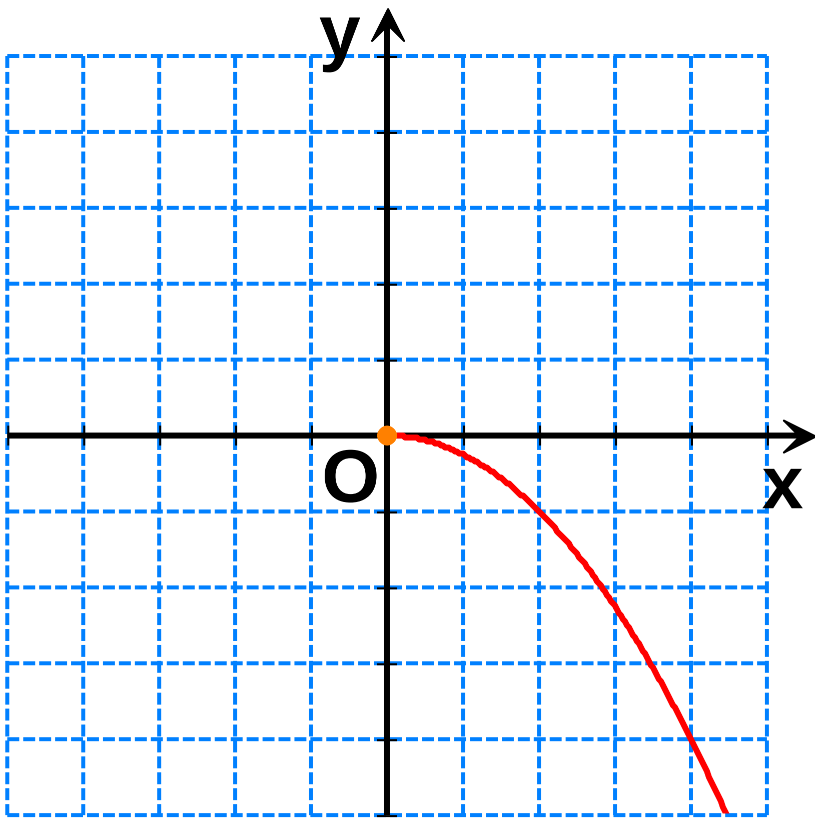
δ) Η συνάρτηση $y = 3x^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = 0$. ☐

ε) Η συνάρτηση $y = -2x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή την $y = 0$. ☐

στ) Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(-1, 2), τότε θα διέρχεται και από το σημείο Λ(1, 2). ☐

4 Στο παρακάτω σύστημα αξόνων έχουμε σχεδιάσει ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = -\frac{1}{4}x^2$.

α) Να ολοκληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{4}x^2$.



5 Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(2, -4), τότε:

α) $α = 2$ β) $α = -1$

γ) $α = -4$ δ) $α = \frac{1}{8}$

6 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.**

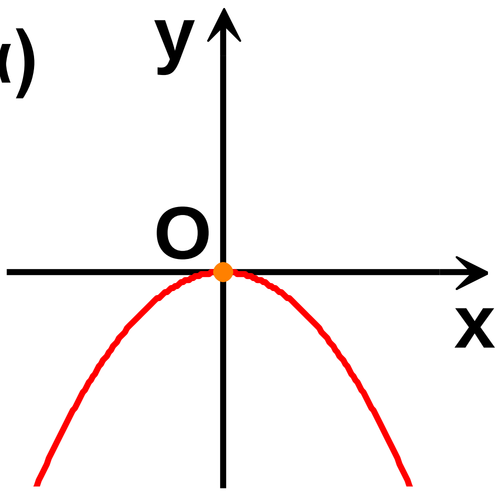
1) $y = \frac{1}{3}x^2$

2) $y = -3x^2$

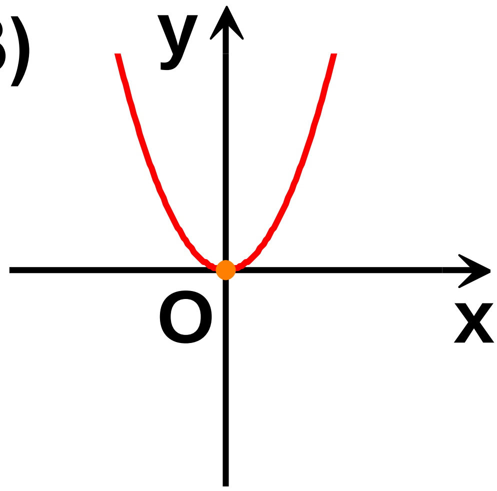
3) $y = -\frac{1}{3}x^2$

4) $y = x^2$

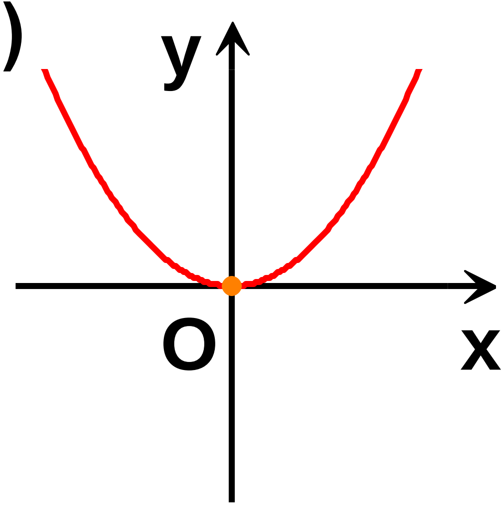
α)



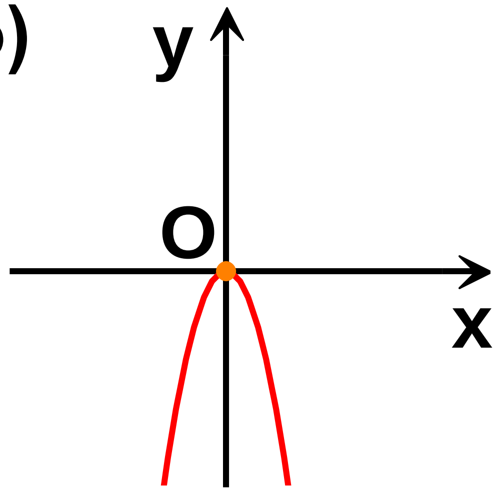
β)



γ)



δ)



α	β	γ	δ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 **Να σχεδιάσετε τις παραβολές:**

α) $y = 2x^2$ β) $y = -2x^2$

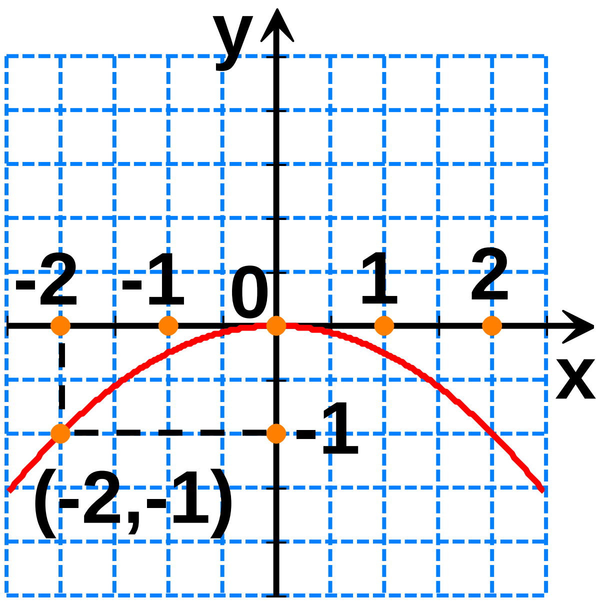
γ) $y = -\frac{3}{4}x^2$ δ) $y = -\frac{2}{3}x^2$

2 **Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:**

α) $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ και $y = 3x^2$

β) $y = \frac{3}{2}x^2$ και $y = -\frac{3}{2}x^2$

3 **Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του παρακάτω σχήματος. Να σχεδιάσετε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x΄x και να γράψετε την εξίσωσή της.**



4 Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = -4x^2$ που έχουν τεταγμένη -9.

5 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η παραβολή $y = (λ + 2)x^2$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6 Αν η συνάρτηση $y = \frac{1}{λ}x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(2, λ), να βρείτε την τιμή του αριθμού λ.

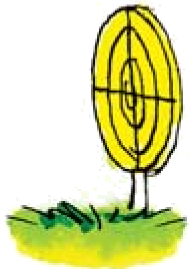
7 **Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα υ και έχει μάζα m δίνεται από τον τύπο**

$$E_{\kappa} = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - ενέργειας για τρία σώματα που έχουν μάζες 1, 2 και 4 αντιστοίχως.
β) Αν τα σώματα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια Εκ = 2, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα.
γ) Αν τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα $\upsilon = \frac{3}{2}$, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε, ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ενέργεια.

4.2 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

✓ **Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$**



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ και σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη του πίνακα:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							

2. **Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και την παραβολή $y = x^2$.**
3. **Να αποτυπώσετε την παραβολή $y = x^2$ σ' ένα διαφανές χαρτί και να το μετακινήσετε ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο (2, -1) και ο άξονας συμμετρίας της να συμπέσει με την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.**
Είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ παραβολή;

Οι συναρτήσεις $y = x^2$ και $y = -x^2$, που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπως και οι συναρτήσεις $y = 3x^2 - 1$, $y = -2x^2 + 8x$, $y = x^2 - 4x + 3$ κ.τ.λ., ονομάζονται τετραγωνικές συναρτήσεις.

Γενικά

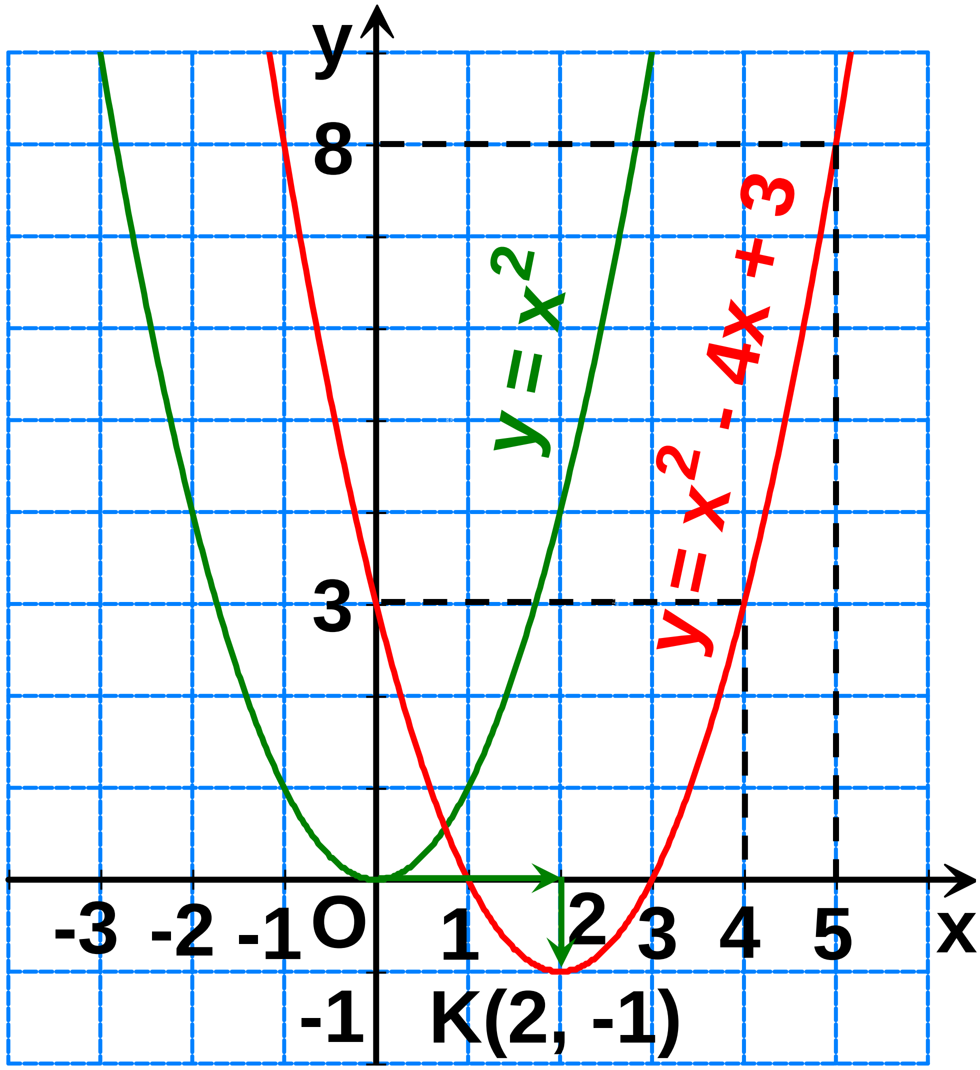
Τετραγωνική ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$.

Αν έχουμε μία τετραγωνική συνάρτηση, όπως την $y = x^2 - 4x + 3$ και θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	-1	0	3	8

**Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.
Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε την παραβολή $y = x^2$,**

την αποτυπώνουμε σ’ ένα διαφανές χαρτί και τη μετακινούμε οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες και κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα. Διαπιστώνουμε ότι η παραβολή αυτή συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$.



Άρα η γραφική παράστασης της $y = x^2 - 4x + 3$ είναι επίσης παραβολή, με κορυφή το σημείο Κ(2, -1) και άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία x = 2.

Γενικά

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο $Κ\left(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α}\right)$,

όπου $Δ = β^2 - 4αγ$ και

- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\frac{β}{2α}$

Στο προηγούμενο παράδειγμα από τον πίνακα τιμών και τη γραφική

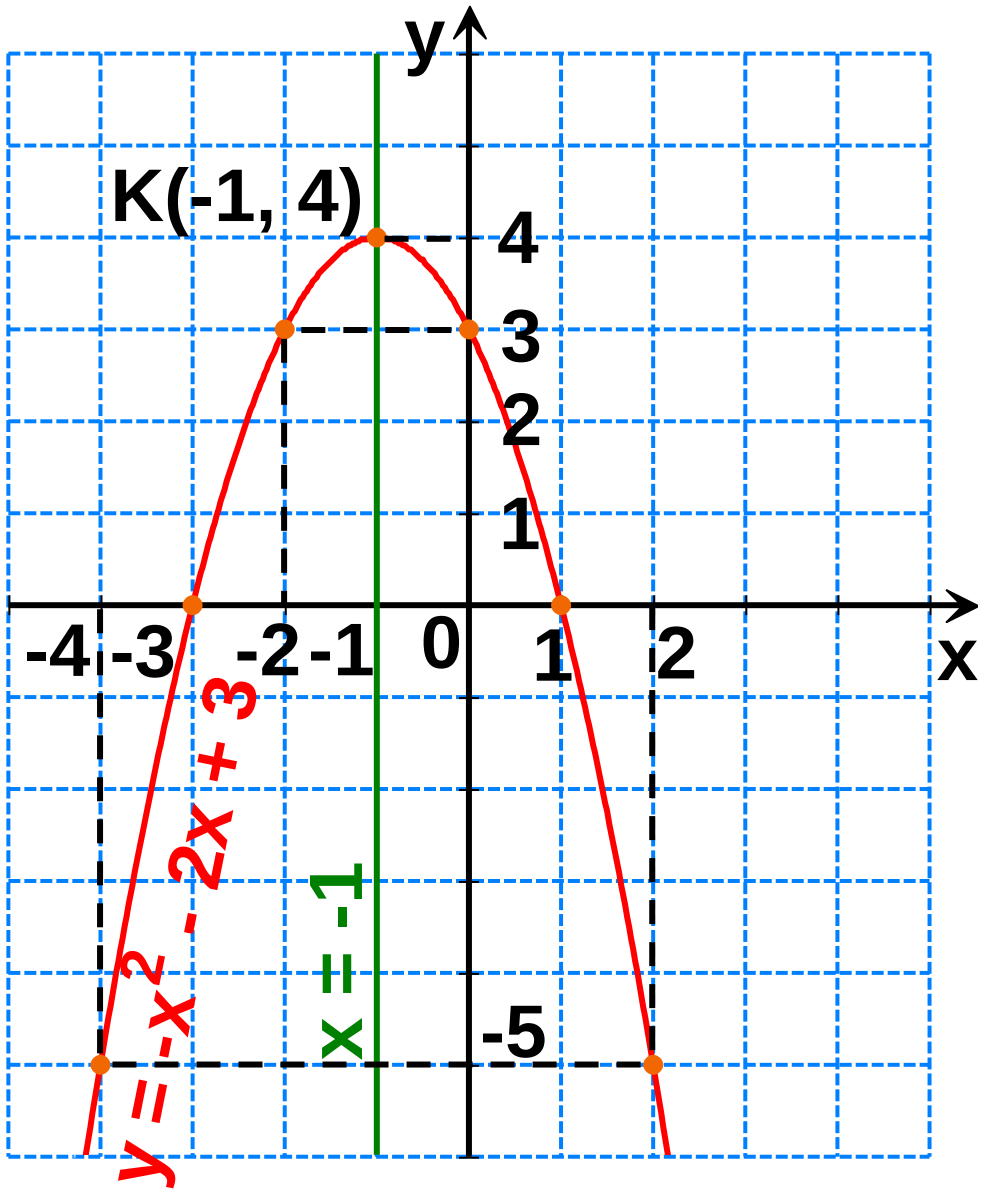
παράσταση διαπιστώσαμε ότι η παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$ έχει κορυφή το σημείο Κ(2, -1) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από την προηγούμενη πρόταση, αφού $-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ **και**

$$-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = -1 \,.$$

Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2 - 2x + 3$ είναι η παραβολή $y = -x^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες, έχει κορυφή το σημείο Κ(-1, 4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$, αφού

$-\frac{β}{2α} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$ **και**

$$-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}{4 \cdot (-1)} = 4 \,.$$



Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 - 4x + 3$ και $y = -x^2 -2x + 3$, που σχεδιάσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, παρατηρούμε ακόμη ότι:

- Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x + 3$ που έχει α > 0 και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο

Κ(2, -1) παίρνει ελάχιστη τιμή y = -1, όταν x = 2.
- Η συνάρτηση $y = -x^2 - 2x + 3$ που έχει α < 0 και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(-1, 4) παίρνει μέγιστη τιμή y = 4, όταν x = -1.

Γενικά

- **Αν α > 0, η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$**
- **Αν α < 0, η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει μέγιστη τιμή $y = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2$ και να βρεθούν τα κοινά της σημεία με τον άξονα x΄x.**

Λύση

Η συνάρτηση $y = x^2 - 2$ είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α = 1$, $β = 0$ και $γ = -2$, οπότε έχουμε

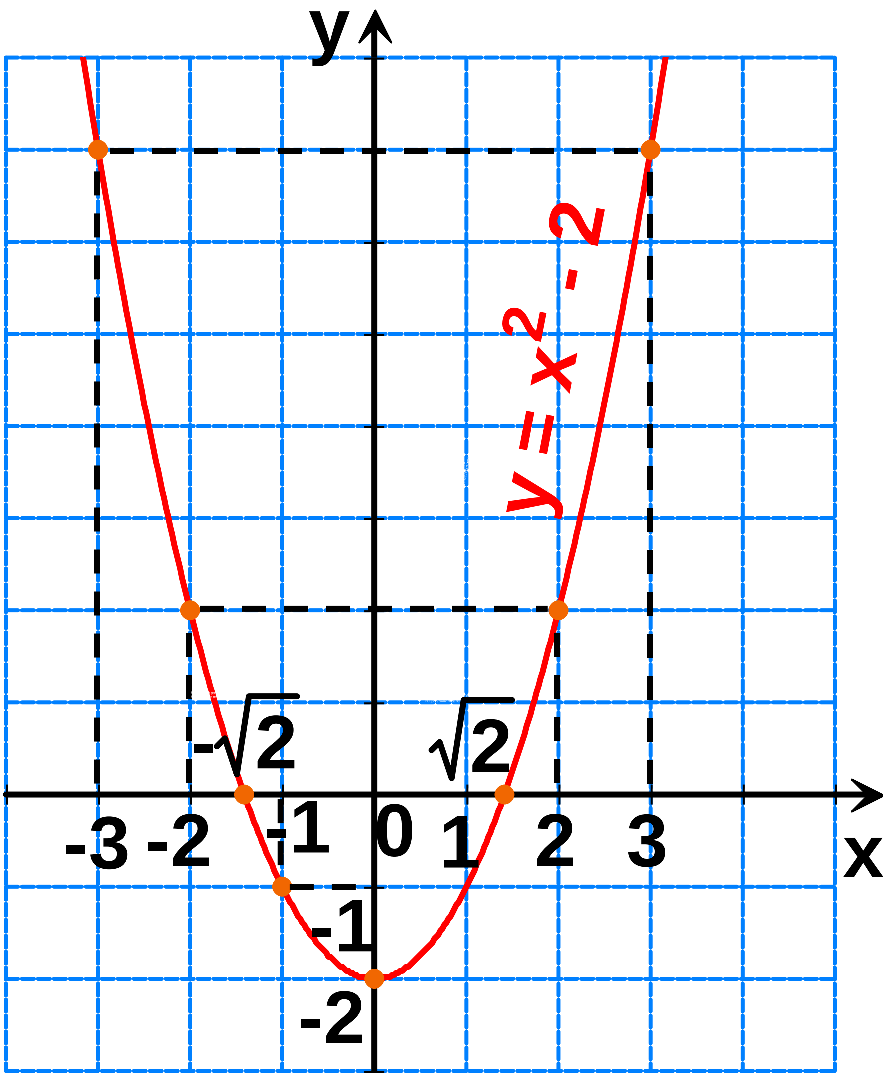
$$-\frac{β}{2α} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0 \quad \text{και}$$

$$-\frac{Δ}{4α} = -\frac{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}{4 \cdot 1} = -2$$

Άρα η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(0, -2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$,

δηλαδή τον άξονα y΄y. Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	2	-1	-2	-1	2	7



Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2 - 2$ με τον άξονα

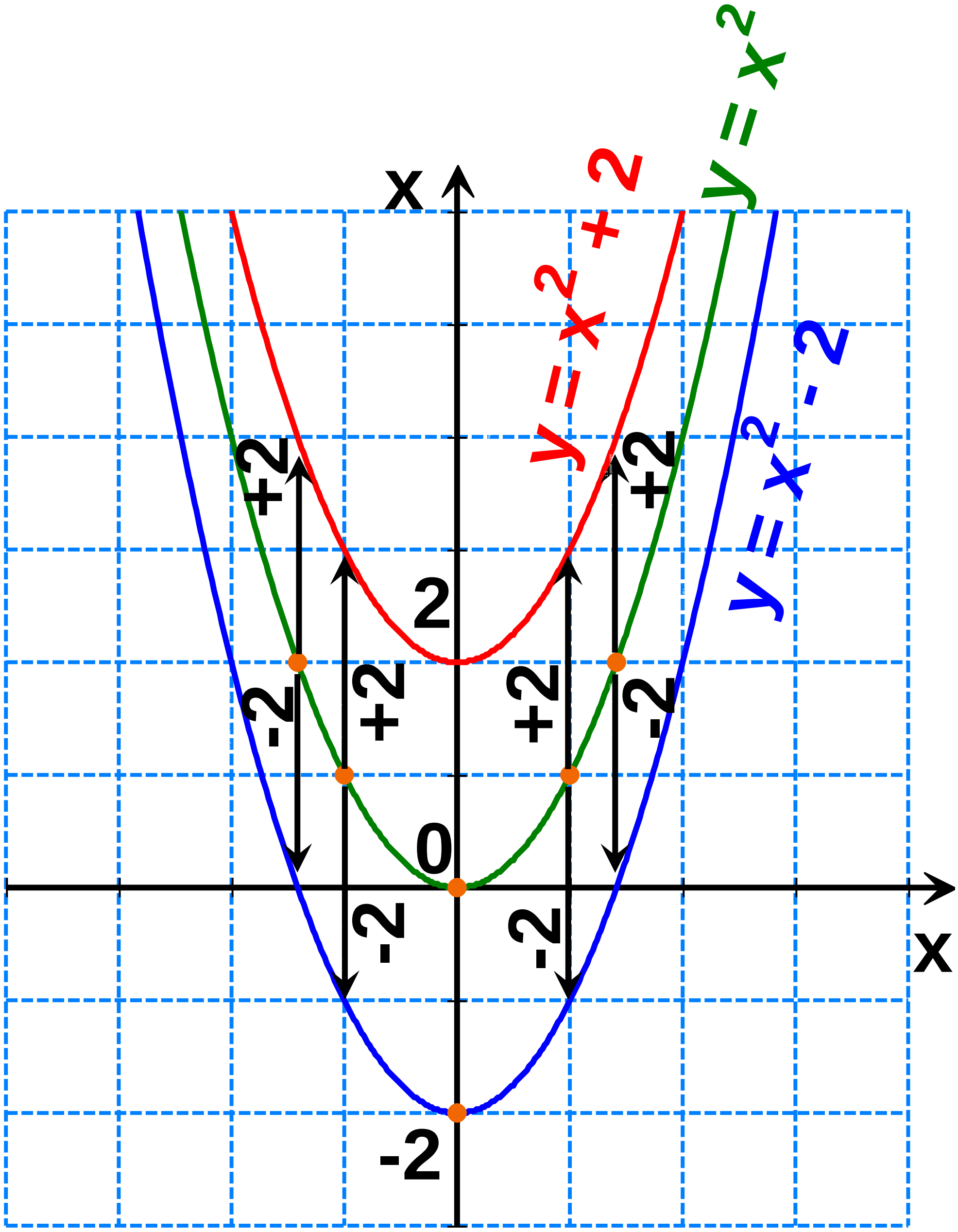
x΄x θέτουμε y = 0 (τα σημεία του άξονα x΄x έχουν τεταγμένη 0) και έχουμε $x^2 - 2 = 0$ ή $x^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$. Άρα, τα κοινά σημεία της παραβολής και του άξονα x΄x είναι τα $Α(-\sqrt{2}, 0)$ και $Β(\sqrt{2}, 0)$.

Παρατήρηση

Η παραβολή $y = x^2 - 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, -2), μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα κάτω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).

Ομοίως, η παραβολή $y = x^2 + 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, 2) μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της

παραβολής $y = x^2$ προς τα πάνω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).



2 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$y = (x - 2)^2$ και να βρεθεί το κοινό της σημείο με τον άξονα y΄y.

Λύση

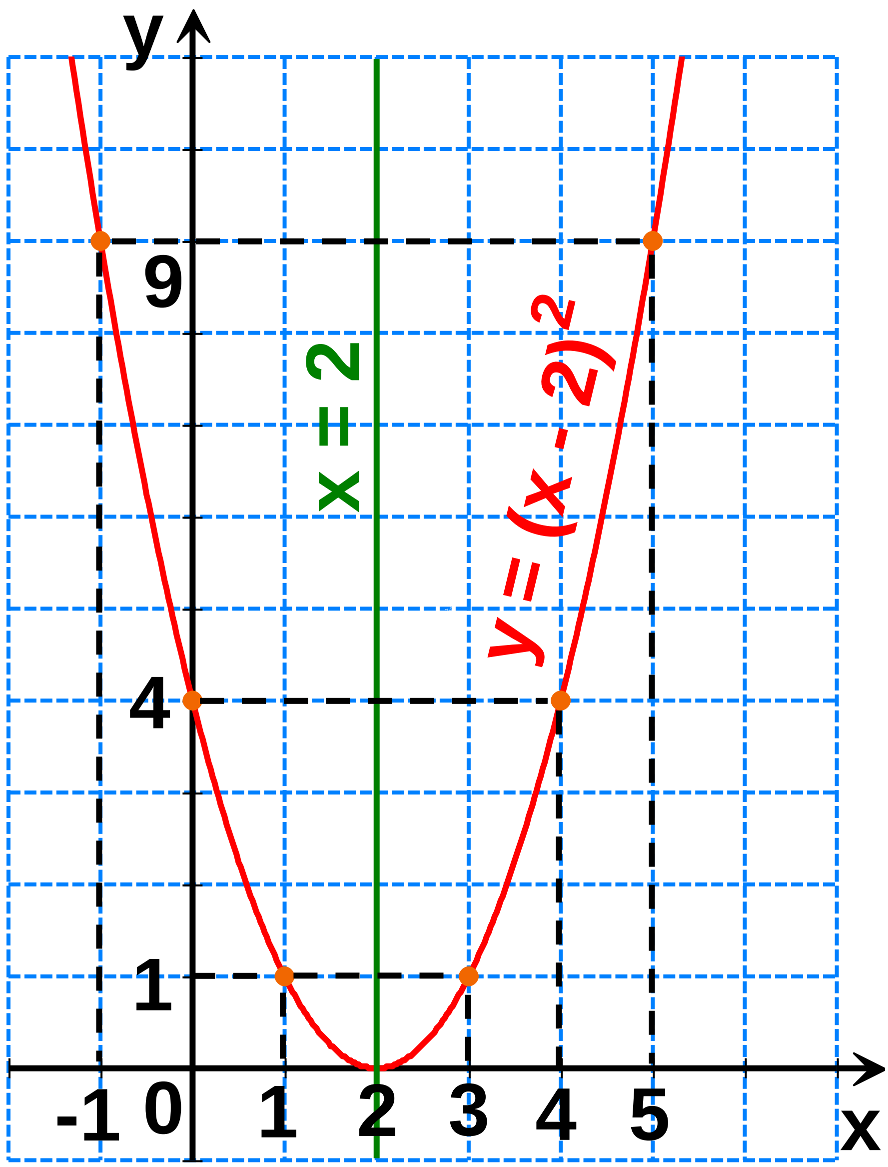
Η συνάρτηση $y = (x - 2)^2$ γράφεται $y = x^2 - 4x + 4$ και είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α = 1$, $β = -4$ και $γ = 4$, οπότε έχουμε:

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \quad \text{και}$$

$$-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 0$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, 0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.
Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9



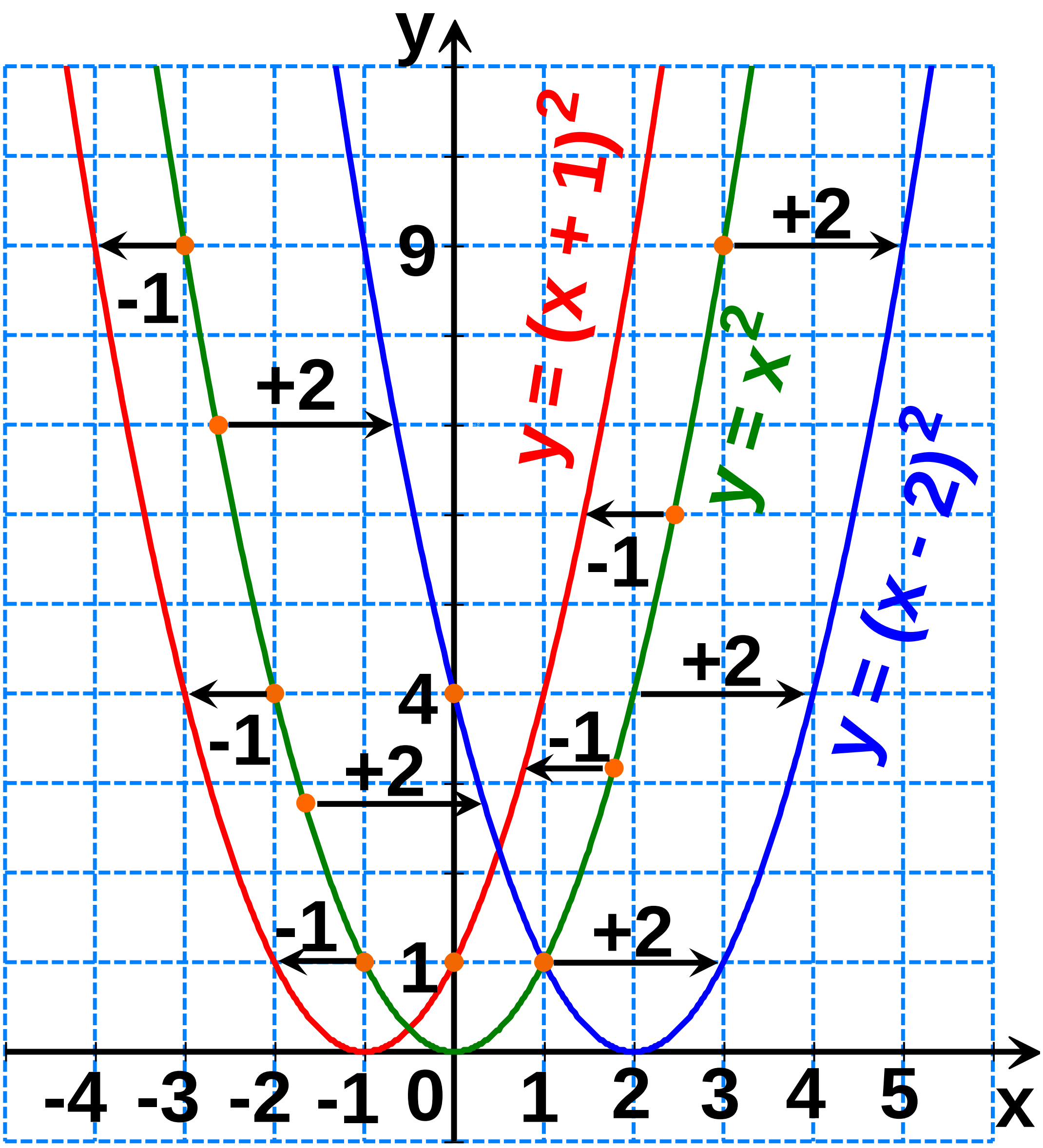
Για να βρούμε το κοινό σημείο της παραβολής $y = (x - 2)^2$ με τον άξονα y΄y, θέτουμε x = 0 (τα σημεία του άξονα y΄y έχουν τετμημένη 0),

οπότε έχουμε $y = (0 - 2)^2 = 4$. Άρα, το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y΄y είναι Α(0, 4).

Παρατήρηση:

Η παραβολή $y = (x - 2)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(2, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).

Ομοίως, η παραβολή $y = (x + 1)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(-1, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).



3 **Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x$ και να προσδιοριστούν οι τιμές του x για τις οποίες είναι $y < 0$.**

Λύση

Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x$ είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α = 1$,

β = -4 και γ = 0, οπότε έχουμε

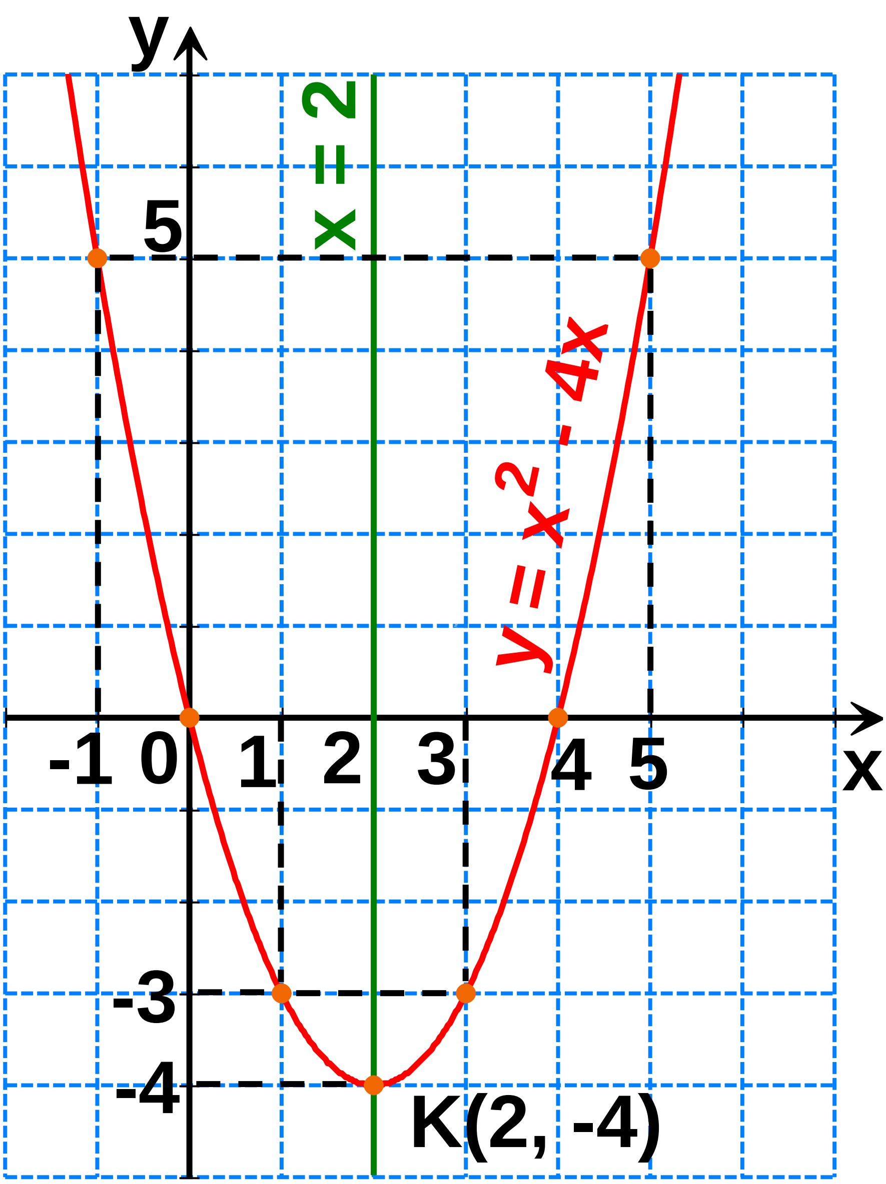
$$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ και}$$

$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -4$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, -4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 2.
Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

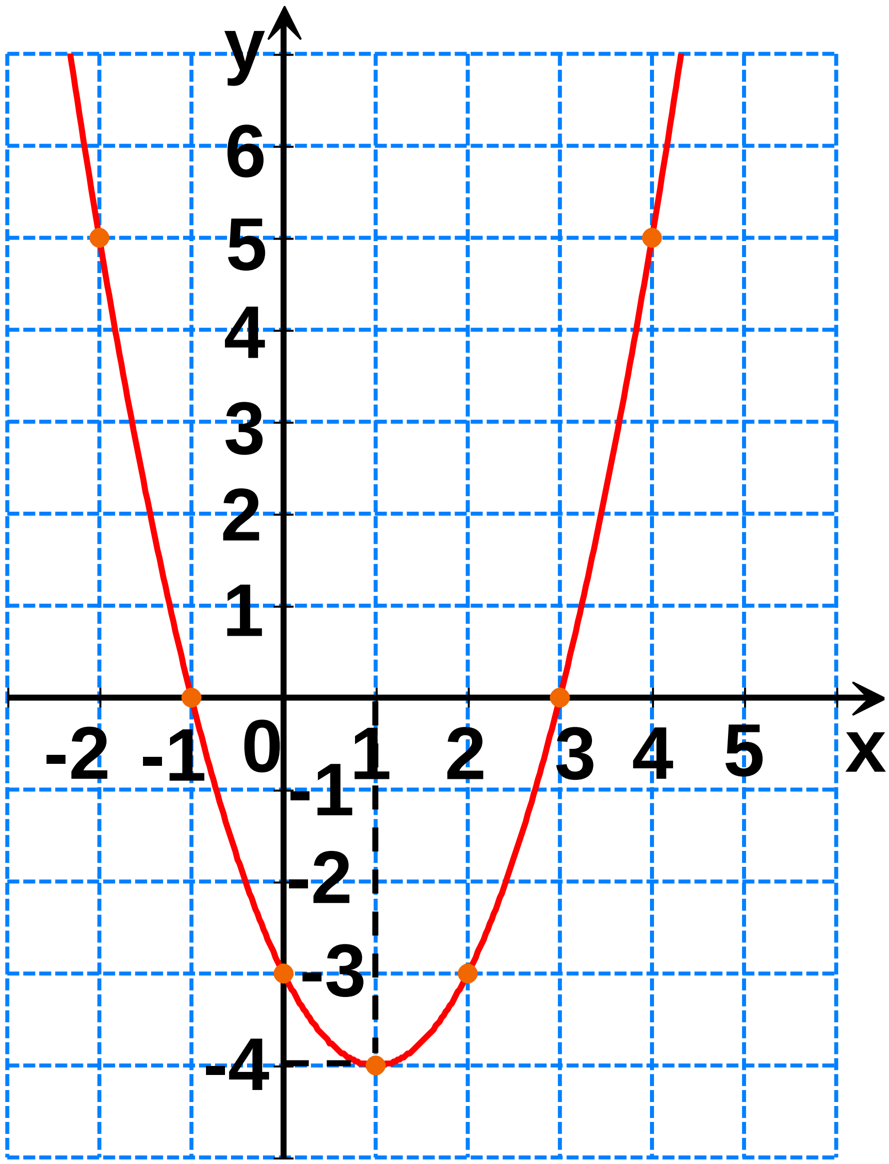
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Σχεδιάζουμε την παραβολή και παρατηρούμε ότι τα σημεία της που έχουν τεταγμένη y αρνητική είναι εκείνα που έχουν τετμημένη x μεταξύ των αριθμών 0 και 4. Άρα, είναι y < 0, όταν 0 < x < 4.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x - 3$. Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.**



α) Η γραφική παράσταση είναι …………………. με κορυφή το σημείο …………………. και άξονα συμμετρίας την ευθεία ……………….
β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει …………………. τιμή y =……………. , όταν x = ………………….

γ) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία .... , ... και τον άξονα y΄y στο σημείο.................... .

2 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Η παραβολή $y = 4x^2 + 2$ έχει:

i) Κορυφή το σημείο

α) (4, 2)   β) (0, 4)
γ) (0, 2)   δ) (2, 0)

ii) Άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση

α) $x = 2$ β) $y = 0$
γ) $x = 0$ δ) $y = 2$

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Η συνάρτηση $y = -2x^2 - 5x + 4$ παίρνει ελάχιστη τιμή. ☐

β) Η παραβολή $y = x^2 - x + 2$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 2). ☐

γ) Ο άξονας y΄y είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = 3x^2 - 7$. ☐

δ) Η κορυφή της παραβολής $y = (x + 1)^2$ είναι σημείο του άξονα x΄x. ☐

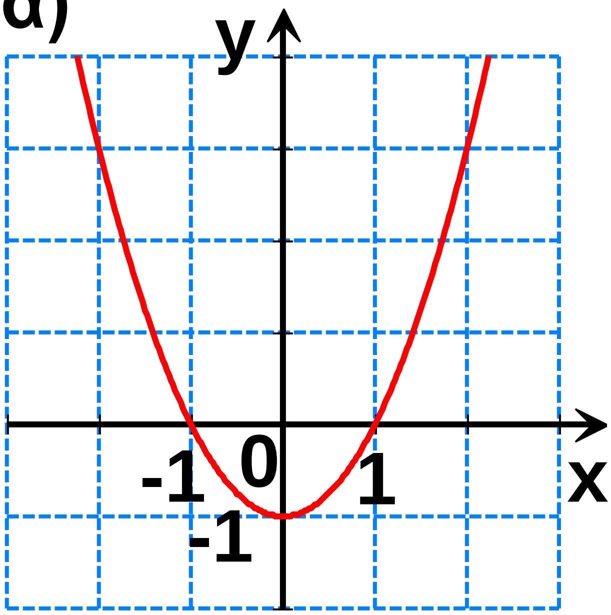
ε) Η κορυφή της παραβολής $y = x^2 + 2$ είναι σημείο του άξονα y΄y. ☐

4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

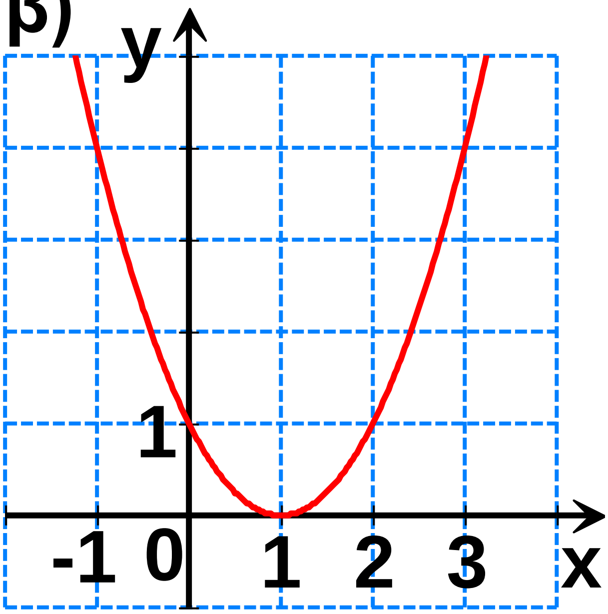
1. $y = (x + 1)^2$ 2. $y = x^2 - 1$

3. $y = x^2 + 1$ 4. $y = (x - 1)^2$

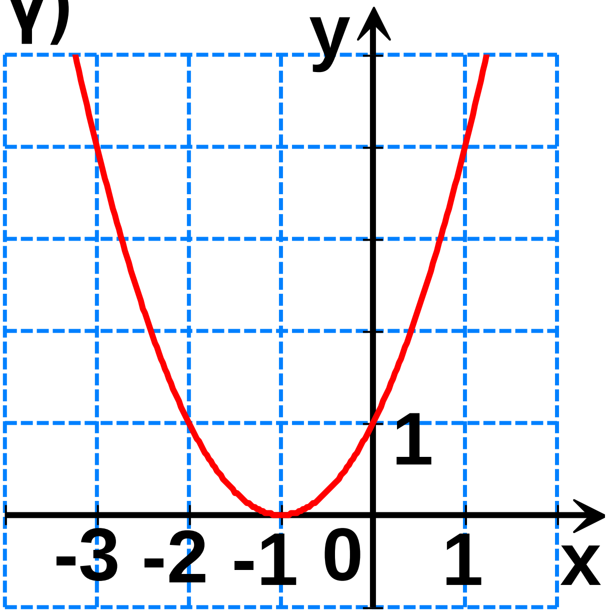
α)



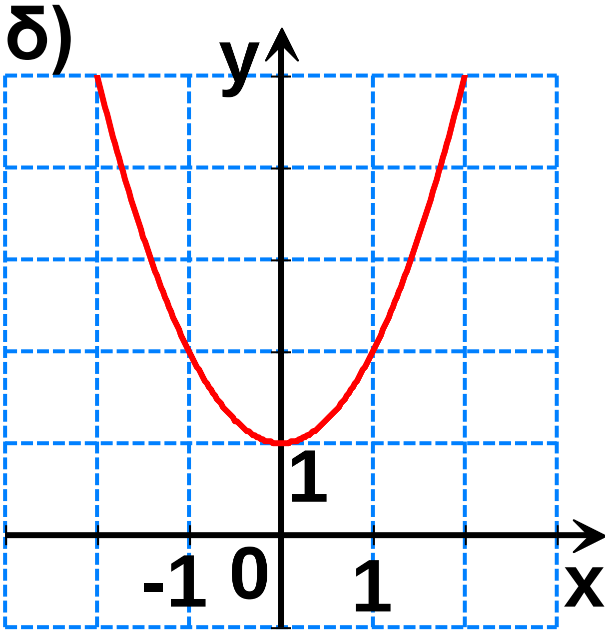
β)



γ)



δ)



α	β	γ	δ

5 **Ορισμένες τιμές της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α < 0$ φαίνονται στον πίνακα.**

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	0	3	4	3	0	-5

Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία ……………………… και κορυφή το σημείο ……………………….
β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη τιμή y = ………………., όταν x = ………………….
γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία ………………. , ……………………… και τον άξονα y΄y στο σημείο ………………………...

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y = x^2 + 2x - 3$

β) $y = -2x^2 + 4x + 6$

2 Να βρείτε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης:

α) $y = 3x^2 - 12x + 11$

β) $y = -4x^2 -8x + 1$

γ) $y = -2(x - 6)^2 + 7$

3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + 2x$ για $-4 \leq x \leq 2$ και με τη βοήθεια αυτής να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $x^2 + 2x = 3$.

4 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

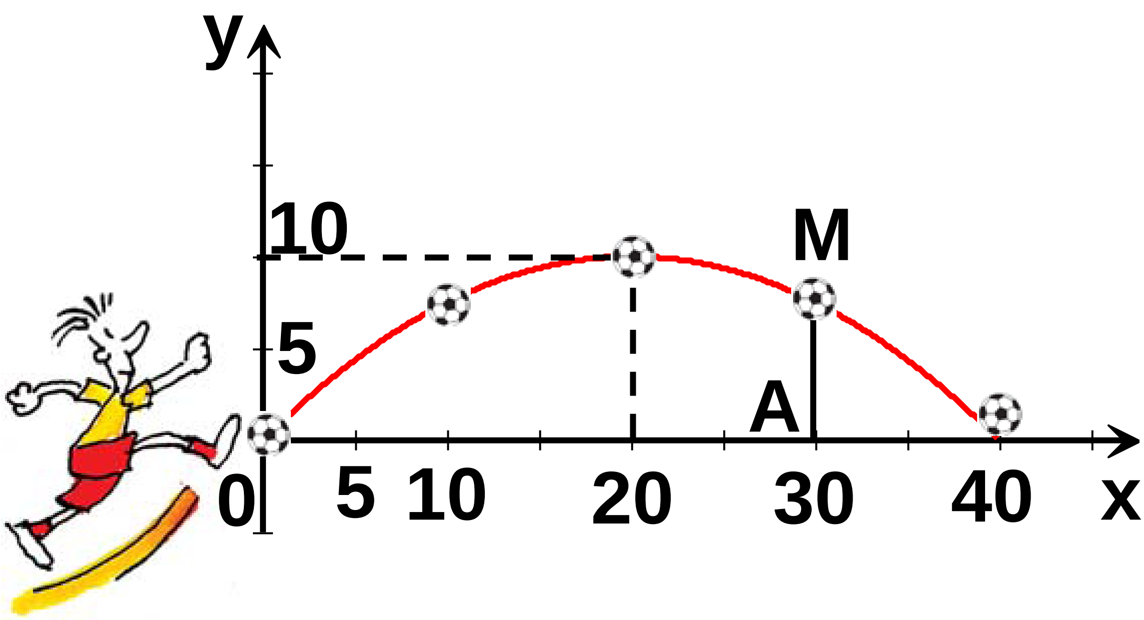
$y = x^2 - 2x + 2$ και με τη βοήθεια αυτής να αποδείξετε ότι $x^2 + 2 > 2x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

5 Δίνεται η συνάρτηση
$y = x^2 + 3x + λ$.
α) Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ το σημείο Α(1, 6) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης;
β) Αν $λ = 2$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-4 \leq x \leq 1$
και να βρείτε τα κοινά της σημεία με τους άξονες.

6 Να σχεδιάσετε την παραβολή
$y = x^2 - 6x + 5$. Αν Α, Β, Γ είναι τα κοινά της σημεία με τους άξονες, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

7 Να βρείτε τους αριθμούς β και γ, ώστε η συνάρτηση $y = x^2 + βx + γ$ για $x = 4$ να παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = -7$.

8 Ένας ποδοσφαιριστής έδιωξε την μπάλα από το σημείο Ο, η οποία αφού διέγραψε μια παραβολική τροχιά με μέγιστο ύψος 10 m έφτασε σε απόσταση 40 m.



α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$, με $0 \leq x \leq 40$.

β) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το έδαφος, όταν αυτή βρισκόταν στο σημείο Μ, που έχει τετμημένη 30 και σε ποιο άλλο σημείο της τροχιάς η μπάλα απείχε από το έδαφος την ίδια απόσταση;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $9y^2 = 4x^4$ παριστάνει δύο παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x, τις οποίες και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.**

2 **Να βρείτε την τιμή του α, ώστε οι εξισώσεις $y = (2α - 1)x^2$ και $y = (1 - 4α^2)x^2$ να παριστάνουν παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.**

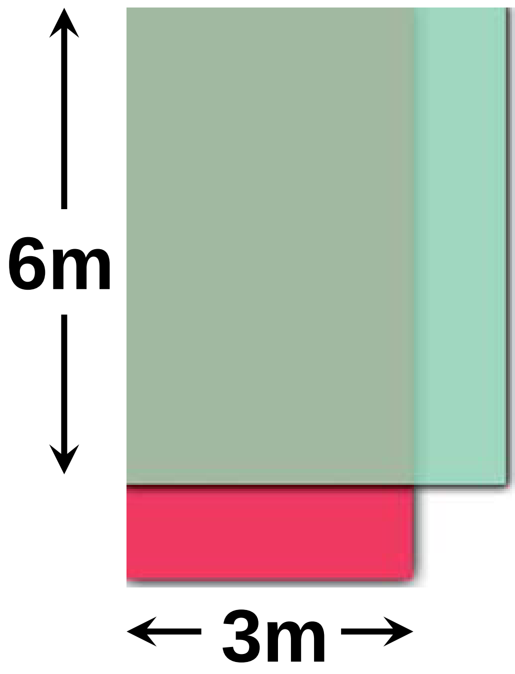
3 **Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -x^2$, $y = 2x - 3$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.**

4 **Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή το σημείο Κ(2, -3) και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 5).**

5 **Το άθροισμα των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) είναι 10 cm.**
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν y του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του ΑΒ = x είναι $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 5x$, με $0 < x < 10$.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

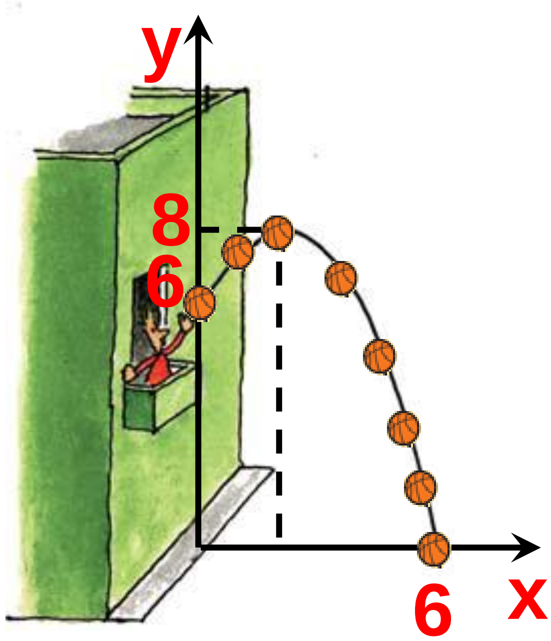
6 Ένα κατάστημα σχήματος ορθογωνίου αρχικά σχεδιάστηκε, να κατασκευαστεί με μήκος 6 m και πλάτος 3 m. Η αρχιτέκτων όμως, προκειμένου να μεγαλώσει τη βιτρίνα του καταστήματος σκέφτηκε να μειώσει το μήκος του και ταυτόχρονα να αυξήσει το πλάτος του 6 m κατά τα ίδια μέτρα. Ποια πρέπει να είναι η μεταβολή κάθε διάστασης, ώστε το εμβαδόν να γίνει μέγιστο;



7 Σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm παίρνουμε σημείο Μ και κατασκευάζουμε τα τετράγωνα

ΑΜΓΔ και ΒΜΕΖ. Πού πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων να γίνει ελάχιστο;

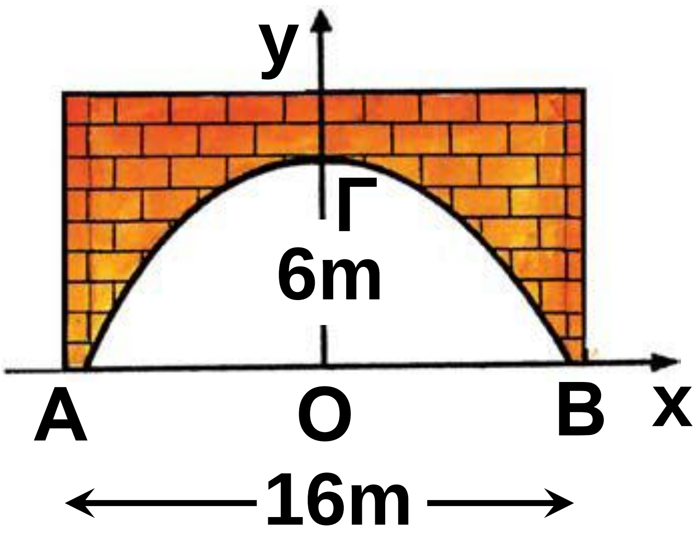
8 Από το μπαλκόνι ενός σπιτιού και από ύψος 6 m από το έδαφος πετάμε μία μπάλα, η οποία διαγράφει παραβολική τροχιά με μέγιστο ύψος από το έδαφος 8 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η μπάλα προσκρούσει στο έδαφος σ' ένα σημείο που απέχει 6 m από το πεζοδρόμιο, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της τροχιάς της μπάλας στο σύστημα αξόνων που φαίνεται στο σχήμα είναι $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$,με $0 \leq x \leq 6$.

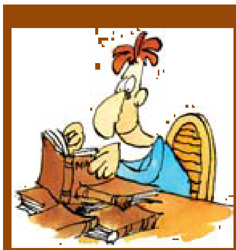
β) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το σημείο ρίψης όταν κατά την κάθοδο της βρισκόταν και πάλι σε ύψος 6 m από το έδαφος;

9 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κάθετη τομή μιας σήραγγας που κατασκευάστηκε σε σχήμα παραβολής με μέγιστο πλάτος ΑΒ = 16 m και μέγιστο ύψος ΟΓ = 6 m.



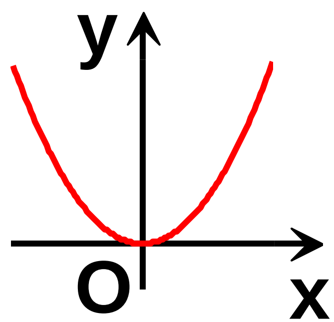
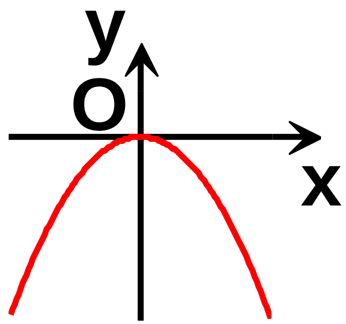
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής στο σύστημα αξόνων του σχήματος είναι $y = -\frac{3}{32}x^2 + 6$, με $-8 \leq x \leq 8$.

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος ενός φορτηγού που μπορεί να διασχίσει τη σήραγγα, όταν το πλάτος του φορτηγού είναι 3,2 m και ο δρόμος είναι μιας κατεύθυνσης.

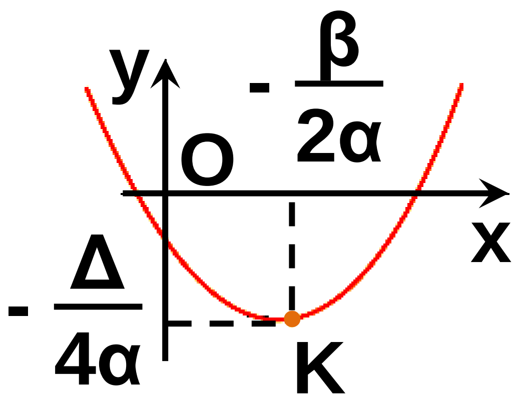
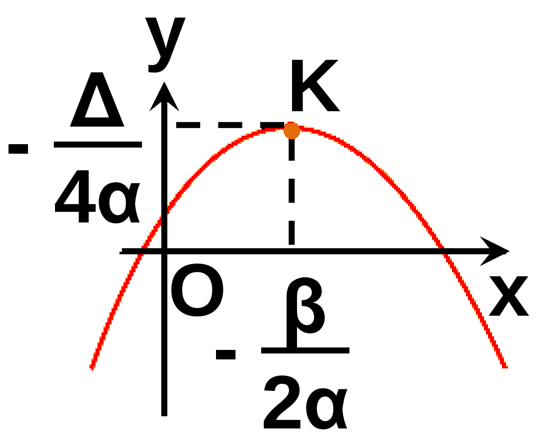


ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

α) Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$

Κορυφή	Άξονας συμμετρίας	Συντελεστής	Γραφική παράσταση	Μέγιστη ή Ελάχιστη Τιμή
(0, 0)	x = 0	$\alpha > 0$		Η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$
		$\alpha < 0$		Η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $\chi = 0$

β) Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

Κορυφή	$\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$
Άξονας συμμετρίας	$x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
Συντελεστής	**Γραφική παράσταση**
$\alpha > 0$	
Η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$	
$\alpha < 0$	

Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή

$$y = -\frac{\Delta}{4\alpha}, \text{ όταν } x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

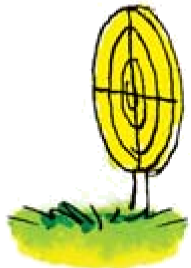
5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εγώ λέω γράμματα…

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5.1 Σύνολα

✓ **Μαθαίνω την έννοια του συνόλου και πώς παριστάνεται ένα σύνολο**



✓ **Κατανοώ πότε δύο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός συνόλου.**

✓ **Μαθαίνω να βρίσκω την ένωση ή την τομή δύο συνόλων καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στην οθόνη ενός υπολογιστή γράψαμε τις λέξεις ελευθερία - ευτυχία.

1. Ποια γράμματα πληκτρολογήσαμε για κάθε λέξη;

2. Ποια είναι τα φωνήεντα και ποια τα σύμφωνα κάθε λέξης;
3. Ποια είναι τα κοινά φωνήεντα των δύο λέξεων;
4. Ποια είναι τα κοινά σύμφωνα των δύο λέξεων;

Η έννοια του συνόλου

Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να συλλέγουμε ή να επιλέγουμε διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενο τους ταξινομούνται σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κ.τ.λ. Σε κατηγορίες επίσης, ταξινομούμε τους αριθμούς (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί, θετικοί, αρνητικοί κ.τ.λ.), τα γράμματα της αλφαβήτου

(φωνήεντα, σύμφωνα, μικρά, κεφαλαία κ.τ.λ.) και κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Ομάδες ή κατηγορίες, όπως οι παραπάνω, ονομάζονται στα Μαθηματικά, σύνολα. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται στοιχείο του συνόλου.

Παράσταση συνόλου

Κάθε σύνολο συμβολίζεται μ' ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου (Α, Β, Γ, ...) και παριστάνεται με τους εξής τρόπους:

α) Με αναγραφή των στοιχείων του

Γράφουμε μία μόνο φορά καθένα από τα στοιχεία του και με οποιαδήποτε σειρά τα τοποθετούμε

ανάμεσα σε δύο άγκιστρα. Π.χ. το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ελευθερία είναι Α = {ε, λ, υ, θ, ρ, ι, α}, το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 2004 είναι Β = {2, 0, 4}, κ.τ.λ.
Μερικές φορές χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό για να παραστήσουμε και ένα σύνολο που έχει πολλά ή άπειρα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε μερικά στοιχεία του και για τα υπόλοιπα, που θα πρέπει να εννοούνται με σαφήνεια, χρησιμοποιούμε αποσιωπητικά. Π.χ. το σύνολο των μικρών γραμμάτων της Ελληνικής αλφαβήτου είναι Α = {α, β, γ, ..., χ, ψ, ω}, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι Ν = {0, 1, 2, 3, 4, ...}.
Στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε ότι το στοιχείο β ανήκει στο σύνολο Α, ενώ δεν

ανήκει στο σύνολο Ν. Αυτό συμβολίζεται αντίστοιχα ως εξής:

$\beta \in A$ και $\beta \notin N$

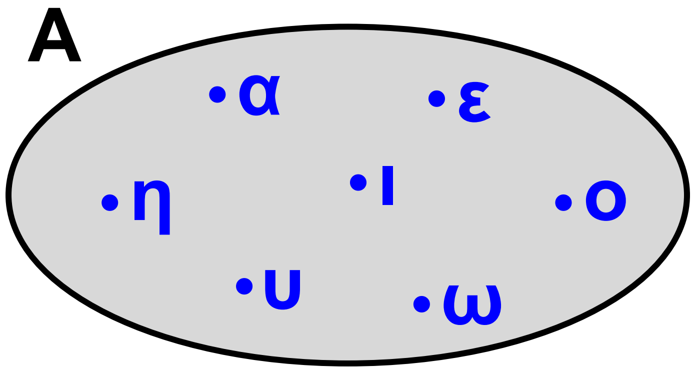
β) Με περιγραφή των στοιχείων του

Το σύνολο Α = {0, 2, 4, 6, 8, …}, που έχει ως στοιχεία τους άρτιους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να το παραστήσουμε και ως εξής:
Α = {άρτιοι φυσικοί αριθμοί} ή
Α = {x ∈ Ν, όπου x άρτιος αριθμός}
Στην προηγούμενη περίπτωση λέμε ότι παριστάνουμε το σύνολο με περιγραφή των στοιχείων του.

γ) Με διάγραμμα Venn

Ένα σύνολο μπορούμε να το παραστήσουμε εποπτικά και με το εσωτερικό μιας κλειστής γραμμής. Π.χ. το σύνολο των φωνηέντων της

Ελληνικής αλφαβήτου φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα, το οποίο ονομάζεται διάγραμμα Venn.



Ίσα σύνολα

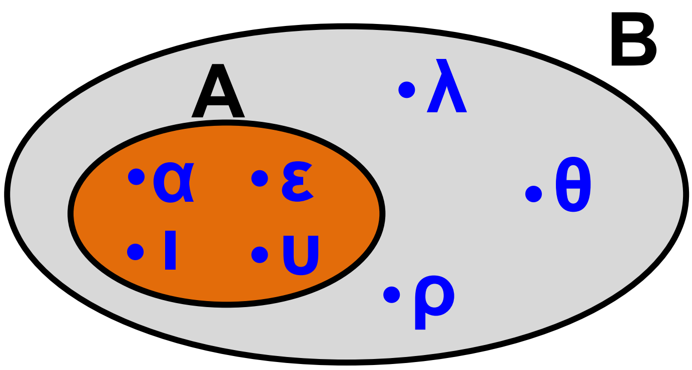
Αν πάρουμε τα σύνολα Α = {α, ε, ι, υ} και Β = {φωνήεντα της λέξης ευτυχία}, παρατηρούμε ότι το σύνολο Β με αναγραφή των στοιχείων του γράφεται Β = {ε, υ, ι, α} και έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το σύνολο Α. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα σύνολα Α, Β είναι ίσα και γράφουμε Α = Β.

Γενικά

Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Υποσύνολο συνόλου

Αν πάρουμε τα σύνολα Α = {α, ε, ι, υ} και Β = {ε, λ, υ, θ, ρ, ι, α}, παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β και το συμβολίζουμε Α ⊆ Β.



Γενικά

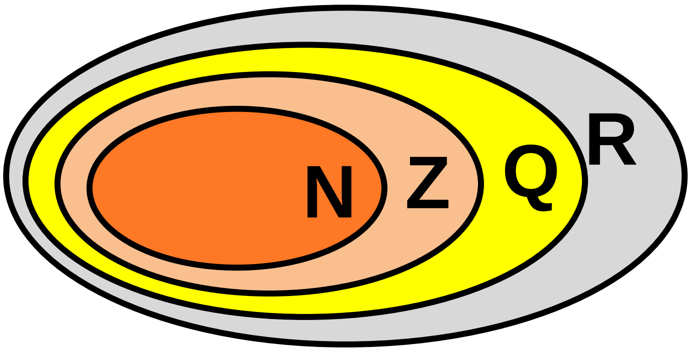
Ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Άμεσες συνέπειες του προηγούμενου ορισμού είναι και οι προτάσεις:

- Για κάθε σύνολο Α ισχύει Α ⊆ Α.

- Αν Α$\subseteq$ Β και Β$\subseteq$ Γ, τότε Α$\subseteq$ Γ.
Οι γνωστοί μας αριθμοί και τα αντίστοιχα σύνολά τους συμβολίζονται ως εξής:

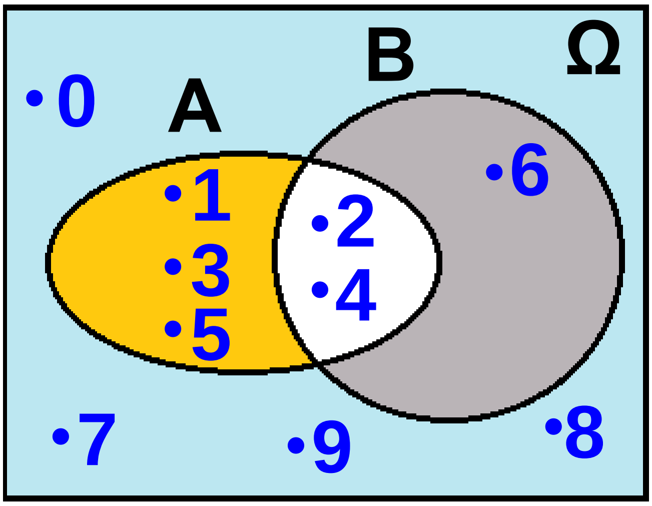
Φυσικοί αριθμοί Ν = {0, 1, 2, 3, 4, …}
Ακέραιοι αριθμοί Ζ = {… , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
Ρητοί αριθμοί Q = { $\frac{α}{β}$, όπου α, β ακέραιοι, με β ≠ 0}
Πραγματικοί αριθμοί R = {ρητοί ή άρρητοι αριθμοί}



Είναι N $\subseteq$ Z $\subseteq$ Q $\subseteq$ R

Τα σύνολα με τα οποία ασχολούμαστε κάθε φορά είναι συνήθως υποσύνολα ενός ευρύτερου συνόλου,

που ονομάζεται **βασικό σύνολο.** Αυτό παριστάνεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου και συμβολίζεται με Ω. Π.χ. με βασικό σύνολο Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} μπορούμε να δημιουργήσουμε διάφορα υποσύνολά του, όπως Α = {1, 2, 3, 4, 5}, Β = {2, 4, 6} κ.τ.λ.



Κενό σύνολο

Το σύνολο Α = {ημέρα της εβδομάδας που αρχίζει από Μ} δεν περιέχει κανένα στοιχείο, αφού δεν υπάρχει ημέρα της εβδομάδας που να αρχίζει από Μ. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο Α ονομάζεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται Ø.

Γενικά

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται Ø .

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Πράξεις με σύνολα

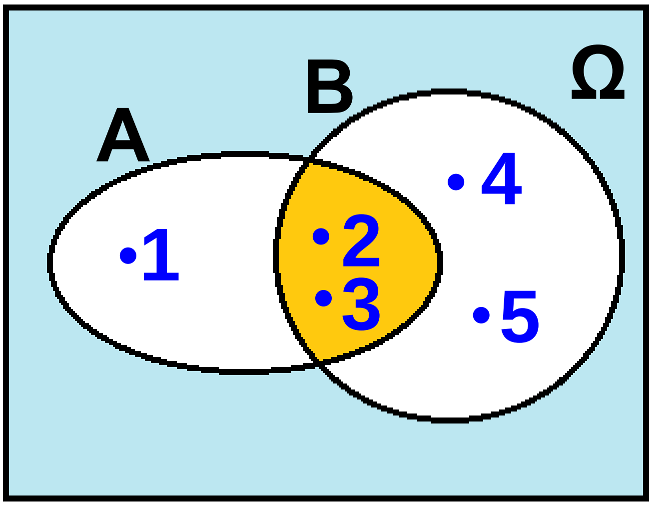
α) Ένωση συνόλων

Αν πάρουμε τα σύνολα Α = {1, 2, 3}, Β = {2, 3, 4, 5}, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά και μη κοινά** στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **ένωση** των συνόλων Α και Β και

συμβολίζεται A U B. Άρα A U B = {1, 2, 3, 4, 5}.
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση δύο συνόλων A, B, αν ανήκει **στο σύνολο A ή στο σύνολο B**, δηλαδή αν ανήκει σ' ένα τουλάχιστον από αυτά.

β) Τομή συνόλων

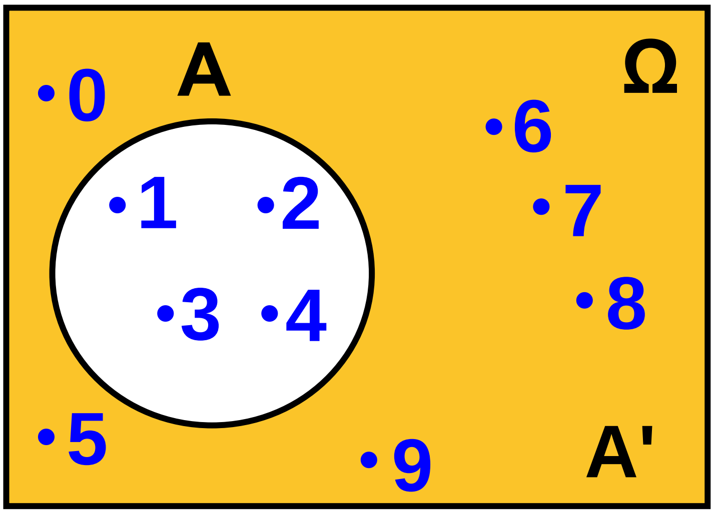
Αν πάρουμε τα σύνολα A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4, 5}, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά** στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **τομή** των συνόλων A, B και συμβολίζεται A ∩ B. Άρα A ∩ B = {2, 3}. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην τομή δύο συνόλων A, B, αν ανήκει **και στο σύνολο A και στο σύνολο B.**



γ) Συμπλήρωμα συνόλου

Αν πάρουμε το σύνολο Α = {1, 2, 3, 4} και ως βασικό σύνολο Ω θεωρήσουμε το σύνολο Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται συμπλήρωμα του Α ως προς το Ω και συμβολίζεται Α΄. Άρα Α΄ = {0, 5, 6, 7, 8, 9}. Όπως φαίνεται και από το παρακάτω διάγραμμα Venn, ισχύουν:

$$A \cup A' = \Omega \text{ και } A \cap A' = \varnothing$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:**
$A = \{x \in Z$, όπου $-3 \le x < 2\}$,
$B = \{$περιττοί φυσικοί αριθμοί$\}$ και
$\Gamma = \{x \in R$, όπου $x^3 = x\}$.

Λύση

Τα στοιχεία του συνόλου A είναι οι ακέραιοι αριθμοί x, για τους οποίους ισχύει $-3 \le x < 2$, οπότε $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.
Τα στοιχεία του συνόλου B είναι οι περιττοί φυσικοί αριθμοί, οπότε

Β = {1, 3, 5, 7, …}. Τα στοιχεία του συνόλου Γ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^3 = x$ ή $x^3 - x = 0$ ή $x(x^2 - 1) = 0$ ή $x(x - 1)(x + 1) = 0$. Άρα $x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 0$, οπότε Γ ={-1, 0, 1}.

2 Με βασικό σύνολο Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} θεωρούμε τα σύνολα Α = {x∈ Ω, όπου x άρτιος} και Β = {x∈ Ω, όπου x ψηφίο του αριθμού 1821}.

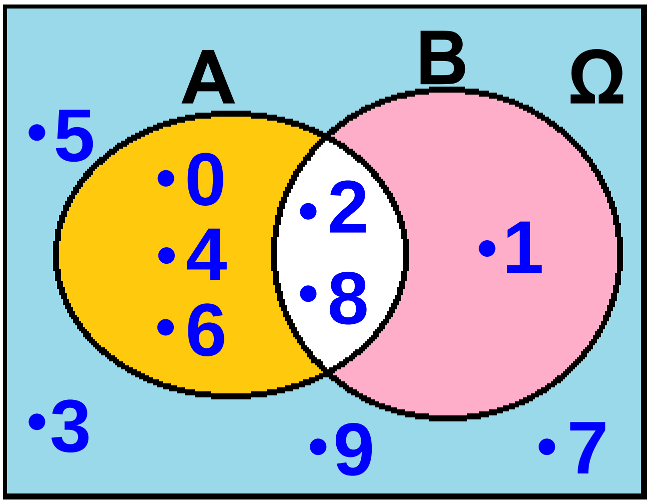
α) Να παρασταθούν τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους και να γίνει το διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιοριστούν τα σύνολα Α ∪ Β, Α ∩ Β, Α΄ και Β΄.

γ) Να επαληθευτεί ότι (Α ∪ Β)΄ = = Α΄ ∩ Β΄ και (Α ∩ Β)΄ = Α΄ ∪ Β΄.

Λύση

α) Τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:
Α = {0, 2, 4, 6, 8} και Β = {1, 8, 2}. Το διάγραμμα Venn φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



β) Έχουμε ότι:
Α ∪ Β = {0, 1, 2, 4, 6, 8},
Α ∩ Β = {2, 8}, Α΄ = {1, 3, 5, 7, 9} και
Β΄ = {0, 3, 4, 5, 6, 7, 9}.

γ) Επειδή Α ∩ Β = {0, 1, 2, 4, 6, 8}, έχουμε ότι (Α ∪ Β)΄ = {3, 5, 7, 9}.
Επίσης Α΄ ∩ Β΄ = {3, 5, 7, 9}, οπότε (Α ∪ Β)΄ = Α΄ η Β΄.
Επειδή Α ∩ Β = {2, 8}, έχουμε ότι (Α ∩ Β)΄ = {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9}.

Επίσης $A' \cup B' = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, οπότε $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:**

α) Τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 2, 1\}$ είναι ίσα. ☐

β) Τα σύνολα $A = \{6, 7\}$ και $B = \{67\}$ είναι ίσα. ☐

γ) Αν $A = \{α, β\}$ και $B = \{α, γ, δ, ε\}$, τότε $A \subseteq B$. ☐

δ) Το σύνολο $A = \{x \in R$, όπου $0x = 2\}$ είναι το κενό σύνολο. ☐

ε) $A \cup A' = Ω$. ☐

στ) $A \cap A' = \varnothing$. ☐

2 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε**

σύνολο της στήλης Α, το ίσο του σύνολο από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. {x ∈ R, όπου $x^2 = 4$}	1. {0, 1, 2}
β. {x ∈ N, όπου $x^2 = 4$}	2. Ø
γ. {x ∈ Z, όπου 3x = 4}	3. {-2, 2}
δ. {x ∈ N, όπου x < 2}	4. {2}
	5. {1, 2}

α	β	γ	δ

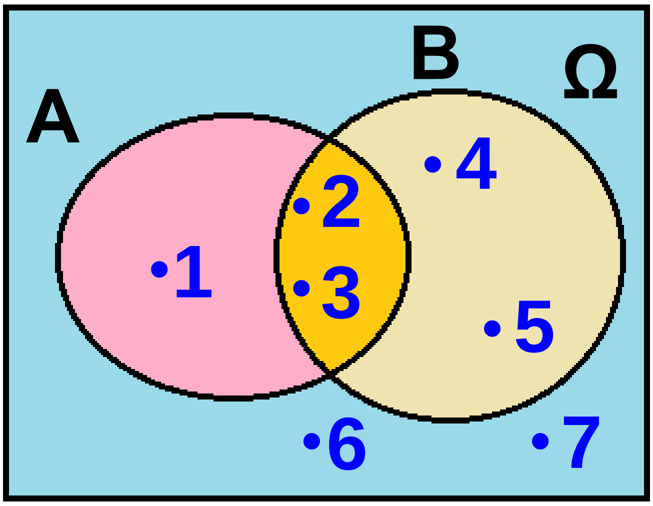
3 **Από το διάγραμμα Venn του παρακάτω σχήματος να προσδιορίσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:**

Ω = ...

Α = ... Β = ...

Α΄ = ... Β΄ = ...

A U B = …………… A U B = …………



4 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε σύνολο της στήλης Α, το συμπλήρωμα του ως προς Ω = {α, β, γ, δ, ε} από τη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
α. {β} β. {α, β, ε} γ. {α, β, γ, δ, ε} δ. {γράμματα της λέξης δάδα} ε. Ø	1. {α, β, γ, δ, ε} 2. Ø 3. {β, γ, ε} 4. {α, δ} 5. {α, γ, δ, ε} 6. {γ, δ}

α	β	γ	δ	ε

5 **Με βάση το παρακάτω διάγραμμα Venn να καθορίσετε το χρώμα ή τα χρώματα των παρακάτω συνόλων:**

α) Α U Β: ....

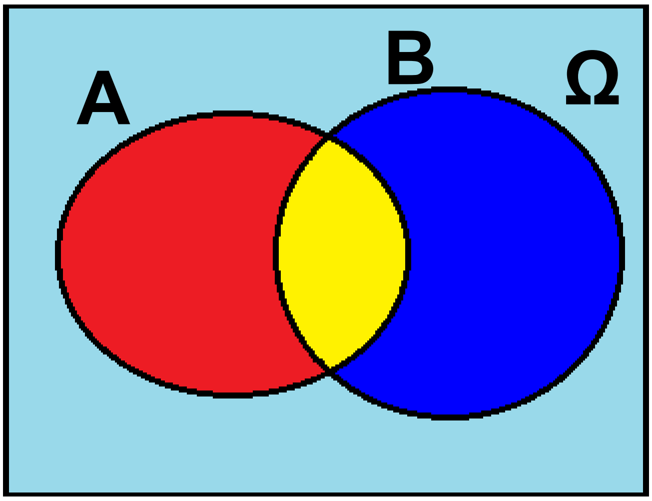
β) Α ∩ Β: ....

γ) Α΄: ....

δ) Β΄: ....

ε) (Α U Β)΄: ....

στ) (Α ∩ Β)΄: ....



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 **Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:**

α) $A = \{x \in R$, όπου $x^2 = 25\}$
β) $A = \{x \in N$, όπου $x^2 = 25\}$
γ) $Γ = \{x \in Z$, όπου $-2 < x < 4\}$
δ) $Δ = \{x \in N$, όπου x διαιρέτης του 12}

2 Ποιο από τα σύνολα Α = {0, 2, 4}, Β = {-1, 0}, Γ = {1, 2, 3}, Δ = {(1, 2), (4, 5)} είναι υποσύνολο του συνόλου Κ = {0, 1, 2, 3, 4, 5} και ποιο είναι ίσο με το σύνολο Λ = {άρτιοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 6} ή με το σύνολο $M = \{x \in R$, όπου $x^2 + x = 0\}$;

3 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:
Α = {ψηφία του αριθμού 2123} και να βρείτε όλα τα υποσύνολά του.

4 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:
$A = \{(x, y)$, όπου $x, y \in N$ και $x + y = 4\}$

5 **Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:**

α) Α = {1, 3, 5, 7, 9, ...}

β) Β = {ι, σ, τ, ο, ρ, α}

γ) Γ = {0, 2}

6 **Με βασικό σύνολο Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, θεωρούμε τα σύνολα Α = {1, 2, 4, 5} και Β = {2, 4, 6}. Να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn και να προσδιορίσετε τα σύνολα:**

α) Α ∪ Β β) Α ∩ Β γ) Α΄ δ) Β΄

7 **Δίνονται τα σύνολα:**

Α = {γράμματα της λέξης άλγεβρα},
Β = {γράμματα της λέξης φρεγάτα}
και Γ = {γράμματα της λέξης ελάφι}.

α) Να γράψετε τα σύνολα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα
$B \cup \Gamma$, $A \cap B$, $A \cap \Gamma$.
γ) Να επαληθεύσετε ότι
$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

8 Θεωρούμε τα σύνολα:
Α = {θεατές της τελετής έναρξης των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004}.
Β = {θεατές της τελετής λήξης των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004}.
Σε ποιο σύνολο ανήκει εκείνος που:
α) Παρακολούθησε και τις δύο τελετές.
β) Παρακολούθησε μία τουλάχιστον τελετή.
γ) Παρακολούθησε την τελετή έναρξης και όχι την τελετή λήξης.
δ) Δεν παρακολούθησε την τελετή έναρξης αλλά ούτε και την τελετή λήξης.

9 Δίνονται τα σύνολα Α = {αθλητές στίβου} και Β = {φοιτητές

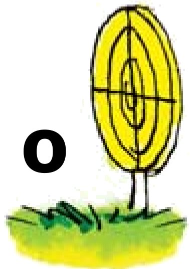
Πανεπιστημίου} Τι συμπεραίνετε για εκείνον που ανήκει στο σύνολο:

α) Α ∪ Β   β) Α ∩ Β   γ) Α΄   δ) Β΄

ε) Α ∩ Β΄   στ) Α΄ ∩ Β   ζ) Α΄ ∩ Β΄

5.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

✓ **Μαθαίνω τι ονομάζεται πείραμα τύχης, ποιός είναι ο δειγματικός χώρος του και πώς αυτός προσδιορίζεται.**



✓ **Μαθαίνω τι ονομάζεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης, πότε πραγματοποιείται και πότε είναι βέβαιο ή αδύνατο.**

✓ **Γνωρίζω πως γίνονται οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων και ποια ενδεχόμενα ονομάζονται ασυμβίβαστα.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. **Σε ποιο από τα παρακάτω πειράματα μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμα του με απόλυτη βεβαιότητα;**

α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Ποια θα είναι η ένδειξή του;
β) Μετράμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει. Ποια θα είναι η ένδειξη του θερμομέτρου;
γ) Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Ποια θα είναι η πάνω όψη του;
δ) Επιλέγουμε ένα τυχαίο άρτιο αριθμό και τον διαιρούμε με το 2. Ποιο θα είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης;
ε) Επιλέγουμε στην τύχη ένα τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2. Ποιος θα είναι ο αριθμός αυτός;
στ) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ποιο θα είναι το ζεύγος των ενδείξεων;
2. Σε καθένα από τα πειράματα που δεν μπορείτε να προβλέψετε το

αποτέλεσμά του, γνωρίζετε τα δυνατά του αποτελέσματα; Ποια είναι αυτά;

Πείραμα τύχης - Δειγματικός χώρος

Σε πολλές περιπτώσεις, όταν κάνουμε ένα πείραμα, μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του. Για παράδειγμα:
- Αν μετρήσουμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει, είμαστε βέβαιοι ότι η ένδειξη του θερμομέτρου θα είναι 100° Κελσίου.
- Αν επιλέξουμε ένα τυχαίο άρτιο αριθμό και τον διαιρέσουμε με το 2, είμαστε επίσης βέβαιοι ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι μηδέν.

Υπάρχουν όμως και πειράματα, τα οποία όσες φορές και αν τα επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά τους με απόλυτη βεβαιότητα. Ένα τέτοιο πείραμα λέγεται **πείραμα τύχης**. Για παράδειγμα,

- Αν ρίξουμε ένα ζάρι δεν είμαστε σε θέση κάθε φορά να προβλέψουμε την ένδειξή του, αν και γνωρίζουμε ότι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του είναι το {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με Ω και ονομάζεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος.

Γενικά

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.

Για παράδειγμα, κατά τη ρίψη ενός

νομίσματος τα δυνατά αποτελέσματα είναι κεφαλή (Κ) και γράμματα (Γ), οπότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι Ω = {Κ, Γ}.
Το πλήθος των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου Ω συμβολίζεται με N(Ω) .

Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού είναι N(Ω) = 6, ενώ στη ρίψη ενός νομίσματος είναι N(Ω) = 2.

Εύρεση δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης

Σε πολλά πειράματα τύχης, όπως στη ρίψη ενός ζαριού ή ενός νομίσματος, μπορούμε να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εύκολα και άμεσα.
Υπάρχουν όμως και πειράματα τύχης στα οποία προσδιορίζουμε ευκολότερα το δειγματικό τους

χώρο, αν εφαρμόσουμε ειδικές τεχνικές ή μεθόδους. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε στην τύχη ένα τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2, για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εργαζόμαστε ως εξής: Γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το πρώτο ψηφίο και σε κάθε περίπτωση γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το δεύτερο ψηφίο κ.ο.κ.

Με το παρακάτω διάγραμμα, που ονομάζεται **δεντροδιάγραμμα**, βρίσκουμε ευκολότερα όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου.
Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 1 ή 2, δηλαδή είναι:
$\Omega = \{111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222\}$,
και περιέχει 8 στοιχεία ($N(\Omega) = 8$).

1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	Αποτέλεσμα
		1	111
	1		
		2	112
1			
		1	121
	2		
		2	122
		1	211
	1		
		2	212
2			
		1	221
	2		
		2	222

Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές και σημειώσουμε κάθε φορά την ένδειξή του, τότε για να προσδιορίσουμε ευκολότερα το δειγματικό χώρο, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω

πίνακα. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη του πίνακα, δηλαδή είναι: Ω = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), …, (6, 5), (6,6)}, και περιέχει 36 στοιχεία (Ν(Ω) = 36).

2η ρίψη

1η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(6,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(6,3)	(4,4)	(6,5)	(4,6)
5	(6,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(6,6)
6	(5,1)	(6,2)	(4,3)	(3,4)	(4,5)	(5,6)

Ενδεχόμενα

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Το σύνολο Α = {2, 4, 6}, που είναι υποσύνολο του Ω, ονομάζεται **ενδεχόμενο** του πειράματος και συγκεκριμένα είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό. Ομοίως, το Β = {1, 2, 3} είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε αριθμό μικρότερο του 4.

Γενικά

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

Αν ρίξουμε ένα ζάρι και φέρουμε τον αριθμό 6, που ανήκει στο σύνολο Α = {2, 4, 6}, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο Α **πραγματοποιείται.** Το ενδεχόμενο όμως Α πραγματοποιείται ακόμη και αν κατά τη συγκεκριμένη εκτέλεση του πειράματος εκτός από 6 φέρουμε 2 ή 4. Γι' αυτό τα στοιχεία 2, 4, 6 του ενδεχομένου Α ονομάζονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.

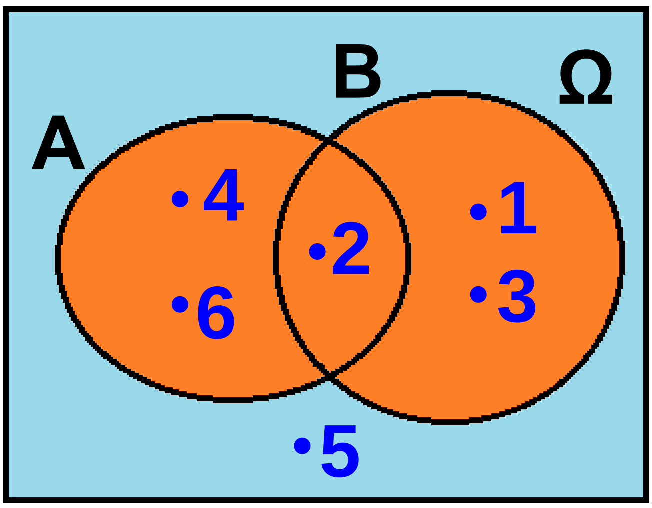
Για ένα ενδεχόμενο Α, το πλήθος των ευνοϊκών του περιπτώσεων, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του, συμβολίζεται με **Ν(Α)**. Για το ενδεχόμενο Α = {2, 4, 6} είναι Ν(Α) = 3.

Βέβαιο - Αδύνατο ενδεχόμενο
Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε το ενδεχόμενο να φέρουμε ένδειξη μικρότερη του 7 είναι το Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο.**
Το ενδεχόμενο όμως να φέρουμε ένδειξη μεγαλύτερη του 6 είναι Ø. Το ενδεχόμενο αυτό δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο.**

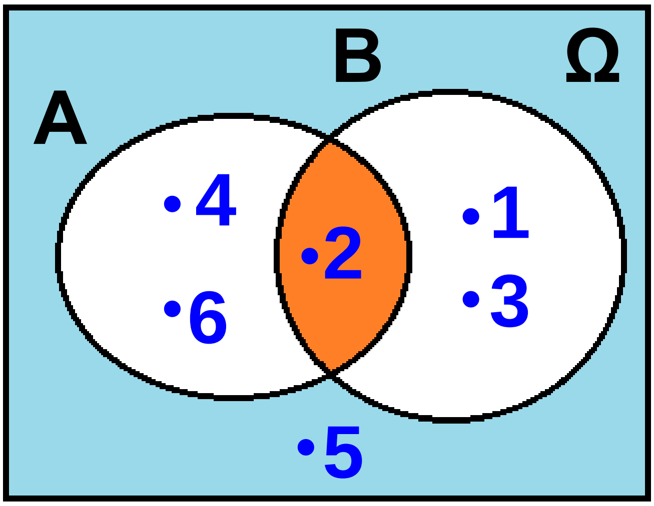
Πράξεις με ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, το ενδεχόμενο είναι σύνολο, οπότε παριστάνεται και με διάγραμμα Venn. Οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων γίνονται όπως και οι πράξεις μεταξύ συνόλων. Έτσι έχουμε:

- **Ένωση δύο ενδεχομένων A, B ονομάζεται το ενδεχόμενο A U B που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B. Π.χ. αν A = {2, 4, 6} και B = {1, 2, 3}, τότε A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.**

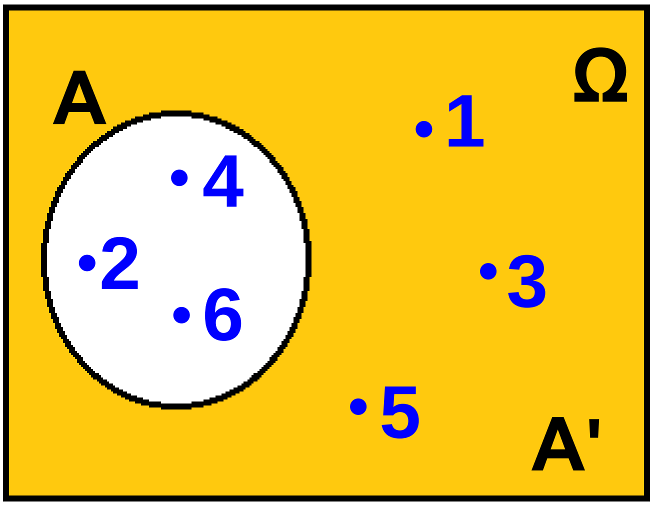


• **Τομή** δύο ενδεχομένων Α, Β ονομάζεται το ενδεχόμενο Α ∩ Β που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το Α και το Β. Π.χ. αν Α = {2, 4, 6} και Β = {1, 2, 3}, τότε Α ∩ Β = {2}.

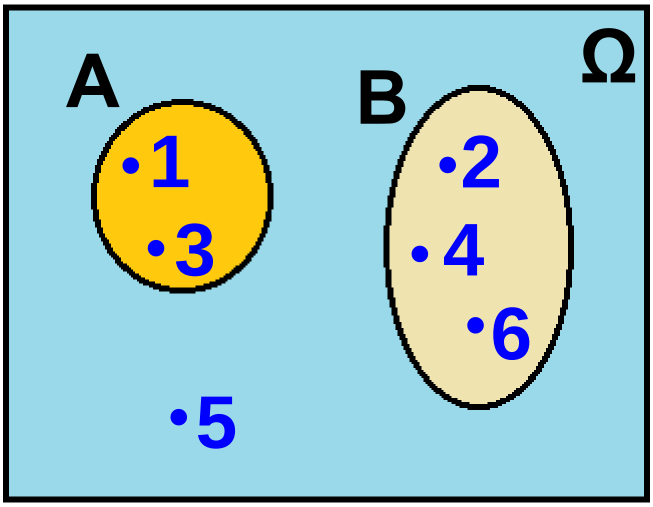


• **Συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται το ενδεχόμενο Α΄ που πραγματοποιείται, όταν **δεν πραγματοποιείται το Α.**

Π.χ. στο πείραμα τύχης «ρίψη ενός ζαριού» αν Α = {2, 4, 6}, τότε Α΄ = {1, 3, 5}.



Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα
Σ' ένα πείραμα τύχης δύο ενδεχόμενα Α, Β είναι δυνατόν να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή να ισχύει $A \cap B = \varnothing$.
Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού, τα ενδεχόμενα Α = {1, 3} και Β = {2, 4, 6} δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, οπότε σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.



Γενικά

Δύο ενδεχόμενα Α και Β ονομάζο-νται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Σ’ ένα τουρνουά σκακιού ένας παίκτης αποκλείεται από τη συνέχεια των αγώνων, αν ηττηθεί μία φορά ή φέρει δύο ισοπαλίες. Αν ένας παίκτης έδωσε το πολύ τρεις αγώνες, ποια είναι τα αποτελέσματα που θα μπορούσε να έχει φέρει μέχρι εκείνη τη στιγμή;**

Λύση

1ο παιχνίδι	2ο παιχνίδι	3ο παιχνίδι	Αποτέ-λεσμα
H			H
	H		IH
I	I		II
		H	INH
	N	I	INI
		N	INN
	H		NH
		H	NIH
N	I	I	NII
		N	NIN
		H	NNH
	N	I	NNI
		N	NNN

Το πιθανό αποτέλεσμα ενός σκακι-στή για κάθε παιχνίδι είναι ήττα (H), ισοπαλία (I) ή νίκη (N). Τα δυνατά

αποτελέσματα που έφερε ένας παίκτης που έδωσε το πολύ τρεις αγώνες, προκύπτουν ευκολότερα από το παραπάνω διάγραμμα. Το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων είναι:
Ω = {Η, ΙΗ, ΙΙ, ΙΝΗ, ΙΝΙ, ΙΝΝ, ΝΗ, ΝΙΗ, ΝΙΙ, Ν!Ν, ΝΝΗ, ΝΜ, ΝΝΝ}

2 Σ' ένα κουτί υπάρχουν 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 4. Επιλέγουμε στην τύχη μια μπάλα, καταγράφουμε τον αριθμό της, την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.
α) Να προσδιοριστεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.
β) Να προσδιοριστούν τα ενδεχόμενα.
Α. Οι δύο μπάλες έχουν τον ίδιο αριθμό.

Β. Ο αριθμός της πρώτης μπάλας είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό της δεύτερης μπάλας.
Γ. Ο αριθμός μιας μόνο μπάλας είναι 3.

Λύση

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τα 16 στοιχεία του παρακάτω πίνακα, οπότε είναι:

Ω = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), …, (4, 3) (4, 4)}.

2η μπάλα

1η μπάλα	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

β) Το ενδεχόμενο Α έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα

οποία ο πρώτος αριθμός είναι ίδιος με τον δεύτερο.
Άρα: Α = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}.
Το ενδεχόμενο Β έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία ο πρώτος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο.
Άρα: Β = {(2, 1) (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2) (4, 3)}.
Το ενδεχόμενο Γ έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία μόνο ένας από τους δύο αριθμούς είναι το 3.
Άρα: Γ = {(3, 1), (3, 2), (3, 4), (1, 3), (2, 3), (4, 3)}.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης:
α) Ρίχνω ένα ζάρι και καταγράφω την πάνω όψη του.

β) Αφήνω ένα βαρύ σώμα να πέσει και καταγράφω τη φορά της κίνησής του.
γ) Βγάζω ένα φύλλο από μία τράπουλα και σημειώνω ποιο είναι.
δ) Ανοίγω ένα βιβλίο και σημειώνω τον αριθμό που αντιστοιχεί στη δεξιά σελίδα του.

2 Επιλέγουμε διαδοχικά δύο μαθητές Γυμνασίου και καταγράφουμε την τάξη όπου φοιτούν. Ένας μαθητής για να βρει το δειγματικό χώρο έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα. Μήπως έκανε κάποιο λάθος;

2ος μαθητής

1ος μαθητής	Α	Β	Γ
Α	ΑΑ	ΑΒ	ΑΓ
Β	ΑΒ	ΒΒ	ΒΓ
Γ	ΓΑ	ΓΒ	ΓΓ

3 Το δεντροδιάγραμμα με το οποίο ένας μαθητής ήθελε να προσδιορίσει όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 2, 3, 5, που το καθένα χρησιμοποιείται μία μόνο φορά, έμεινε ημιτελές. Μπορείτε να το συμπληρώσετε;

1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	Αποτέλεσμα
2			
3			
5			

4 Αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι Ω = {0, 2, 4, 6, 8, 10}, ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ενδεχόμενα του πειράματος;

α) Α = {4, 8, 10}		β) Β = {0, 2, 3, 6}
γ) Γ = {4, 7, 8, 10}	δ) Δ = {6}

5 Ρίχνουμε ένα ζάρι και φέρνουμε 6. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα πραγματοποιούνται:

α) Α = {2, 4, 6}		β) Β = {1, 3, 5}
γ) Γ = {4, 5, 6}		δ) Δ = {1, 2, 3}

6 Ένα κουτί περιέχει κόκκινες, κίτρινες και μαύρες μπίλιες. Αν επιλέξω μια μπίλια ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι αδύνατο;
α) Η μπίλια είναι κόκκινη.
β) Η μπίλια είναι κίτρινη.
γ) Η μπίλια είναι πράσινη.
δ) Η μπίλια δεν είναι μαύρη.

7 Επιλέγω στην τύχη ένα μήνα του έτους. Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι βέβαιο;
α) Ο μήνας έχει 31 ημέρες.

β) Ο μήνας είναι θερινός.
γ) Το όνομα του μήνα αρχίζει από Μ.
δ) Ο μήνας έχει περισσότερες από 27 ημέρες.

8 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ενδεχόμενο της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).**

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Α U Β	1. Δεν πραγματοποιείται το Α.
β. Α ∩ Β	2. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.
γ. Α'	3. Δεν πραγματοποιείται το Β.
	4. Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το Α και το Β.

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Το κυλικείο ενός σχολείου διαθέτει για φαγητό σάντουιτς (σ), τυρόπιτα (τ), γλυκό (γ) και για αναψυκτικό πορτοκαλάδα (π), λεμονάδα (λ).
Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή που αγόρασε ένα είδος φαγητού και ένα είδος αναψυκτικού και καταγράφουμε την προτίμησή του. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

2 Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

3 Σ' έναν προκριματικό όμιλο των Πανευρωπαϊκών αγώνων Μπάσκετ κληρώθηκαν να παίξουν τέσσερις ομάδες Α, Β, Γ, Δ δίνοντας μεταξύ τους από δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Με τη βοήθεια ενός πίνακα να βρείτε όλα τα ζεύγη των αντιπάλων.

4 Σ’ ένα κουτί υπάρχουν τρεις όμοιες μπάλες, μία κόκκινη, μία άσπρη, μία μπλε και επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα.
α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Με πόσες το πολύ κινήσεις θα πάρουμε την κόκκινη μπάλα;
γ) Με πόσες κινήσεις μπορούμε να αναγνωρίσουμε το χρώμα κάθε μπάλας;

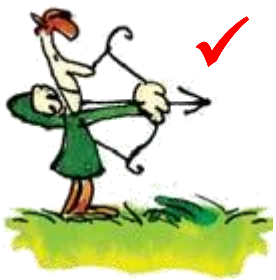
5 Σ’ ένα τηλεοπτικό παιχνίδι συμμετέχουν 4 άντρες (Δημήτρης, Κώστας, Μιχάλης, Παναγιώτης) και 3 γυναίκες (Ειρήνη, Ζωή, Σταματίνα). Επιλέγουμε στην τύχη έναν άντρα και μια γυναίκα για να

διαγωνιστούν και καταγράφουμε τα ονόματα των αντιπάλων. Να προσδιορίσετε:
α) Το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Τα ενδεχόμενα
Α: διαγωνίστηκαν η Ειρήνη ή η Ζωή.
Β: Δε διαγωνίστηκε ο Μιχάλης.

6 Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα ενδεχόμενα
Α = { x   Ω, όπου x διαιρέτης του 9}
και Β = {x ∈ Ω, όπου x < 6}
και να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν:
α) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

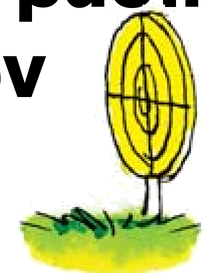
β) Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το Α και το Β.
γ) Δεν πραγματοποιείται το Β.

5.3 Έννοια της πιθανότητας



✓ **Μαθαίνω τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.**

✓ **Γνωρίζω τους βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων.**



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Επιλέγουμε στην τύχη ένα αυτοκίνητο του οποίου ο αριθμός κυκλοφορίας είναι ζυγός και καταγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του.
- Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι είναι πιθανότερο να είναι μικρότερο του 6 παρά να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα άρτιο μονοψήφιο φυσικό αριθμό, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι Ω = {0, 2, 4, 6, 8}.
Αν κάθε αριθμός επιλέγεται στην τύχη και δεν έχει κανένα πλεονέκτημα έναντι των άλλων, τότε όλοι οι αριθμοί έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής και λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του δειγματικού χώρου είναι **ισοπίθανα**.
Στο εξής, όταν λέμε ότι η επιλογή γίνεται στην τύχη θα εννοείται ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.
Το ενδεχόμενο να επιλέξουμε από τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω αριθμό μικρότερο του 6, είναι το Α = {0, 2, 4} και πραγματοποιείται αν επιλέξουμε 0 ή 2 ή 4, ενώ το

ενδεχόμενο να επιλέξουμε αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 6 είναι Β = {6, 8} και πραγματοποιείται αν επιλέξουμε 6 ή 8. Βλέπουμε λοιπόν ότι από τους 5 αριθμούς του δειγματικού χώρου Ω, 3 αριθμοί εξασφαλίζουν την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α και 2 αριθμοί εξασφαλίζουν την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α είναι $\frac{3}{5}$ ή 60% και συμβολίζουμε $P(A) = \frac{3}{5}$ ή 60%, ενώ η πιθανότητα της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Β είναι $P(B) = \frac{2}{5}$ ή 40%. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ο αριθμητής του κλάσματος είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου, αφού N(A) = 3 και N(B) = 2, ενώ ο παρονομαστής του κλάσματος είναι το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος, αφού N(Ω) = 5.

Γενικά

Σ' ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται ο αριθμός

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Για παράδειγμα, από ένα κουτί που περιέχει 25 όμοιες μπάλες, από τις οποίες οι 11 είναι πράσινες και οι 14 είναι κόκκινες, αν βγάλουμε στην τύχη μία, τότε οι πιθανότητες

των ενδεχομένων Π: Βγάζω πράσινη μπάλα και Κ: Βγάζω κόκκινη μπάλα είναι:

$$P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{11}{25} \text{ ή } 44\% \text{ και}$$

$$P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{14}{25} \text{ ή } 56\%$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ακόμη ότι:

$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1 \text{ και } P(\varnothing) = \frac{N(\varnothing)}{N(\Omega)} = 0$$

Η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου Α είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το 0 και μικρότερος ή ίσος από το 1, αφού το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6} του οποίου τα 6 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.
Έτσι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α = {1, 2} είναι

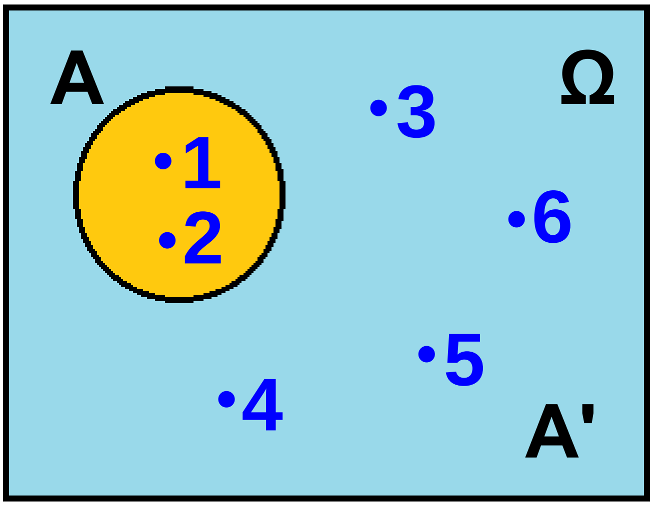
$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

. Το συμπληρωματικό του Α είναι το Α' = {3, 4, 5, 6} και η πιθανότητά του είναι

$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Παρατηρούμε οτι

$$P(A) + P(A') = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$



Γενικά

Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α, Α' ισχύει P(A) + P(A') = 1.

Αν τώρα πάρουμε τα ενδεχόμενα Α = {1, 2}, Β = {2, 3, 5} και προσδιορίσουμε την ένωση και την τομή τους, τότε έχουμε:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ και $A \cap B = \{2\}$.

Άρα $P(A) = \dfrac{2}{6}$, $P(B) = \dfrac{3}{6}$,

$P(A \cup B) = \dfrac{4}{6}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

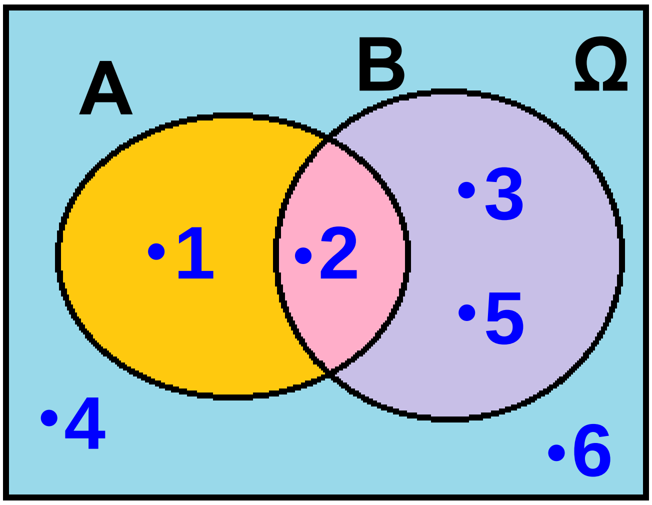
Παρατηρούμε οτι:

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

και $P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$,

δηλαδή ισχύει

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$



Γενικά

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ισχύει

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Τις προηγούμενες ιδιότητες χρησιμοποιούμε συχνά για να υπολογίσουμε πιθανότητες και γι’ αυτό λέμε ότι αποτελούν **βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Επιλέγουμε στην τύχη ένα μήνα του έτους. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:**
Α: Ο μήνας αρχίζει από Μ.
Β: Ο μήνας είναι θερινός.
Γ: Ο μήνας έχει 31 ημέρες.

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει 12 στοιχεία, οπότε το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι N(Ω) = 12.
Το ενδεχόμενο Α είναι Α ={Μάρτιος, Μάϊος}, οπότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για την πραγματοποίησή του είναι N(A) = 2.

Άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ **ή**

περίπου 16,7%.

Το ενδεχόμενο Β είναι Β = {Ιούνιος, Ιούλιος, Αύγουστος}, οπότε έχουμε Ν(Β) = 3.

Άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ **ή 25%.**

Το ενδεχόμενο Γ είναι Γ = {Ιανουάριος, Μάρτιος, Μάϊος, Ιούλιος, Αύγουστος, Οκτώβριος, Δεκέμβριος}, οπότε Ν(Γ) = 7.

Άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{7}{12}$ **ή περίπου 58,3%.**

2 Μια ομάδα δίνει δύο αγώνες. Αν η πιθανότητα να κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι 45%, η πιθανότητα να κερδίσει τον δεύτερο αγώνα είναι 60% και η πιθανότητα να κερδίσει και τους δύο αγώνες είναι 27%, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα.

β) Να κερδίσει έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες.

Λύση

Ονομάζουμε Α το ενδεχόμενο να κερδίσει η ομάδα τον πρώτο αγώνα και ενδεχόμενο να κερδίσει τον δεύτερο αγώνα. Το ενδεχόμενο να κερδίσει και δύο αγώνες είναι $A \cap B$, οπότε έχουμε:

$$P(A) = \frac{45}{100}, \ P(B) = \frac{60}{100} \text{ και}$$

$$P(A \cap B) = \frac{27}{100}.$$

α) Το ενδεχόμενο να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι το συμπλήρωμα του Α, δηλαδή το Α΄. Γνωρίζουμε όμως ότι $P(A) + P(A΄) = 1$, οπότε έχουμε:

$$\frac{45}{100} + P(A') = 1 \text{ ή } P(A') = 1 - \frac{45}{100}$$

$$\text{ή } P(A') = \frac{55}{100}$$

Άρα η πιθανότητα να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι 55%.

β) Το ενδεχόμενο να κερδίσει η ομάδα έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B, οπότε είναι το A U B.

Γνωρίζουμε όμως ότι

$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$,

οπότε έχουμε:

$$P(A \cup B) + \frac{27}{100} = \frac{45}{100} + \frac{60}{100} \text{ ή}$$

$$P(A \cup B) = \frac{45}{100} + \frac{60}{100} - \frac{27}{100} = \frac{78}{100}$$

Άρα η πιθανότητα να κερδίσει έναν

τουλάχιστον από τους δύο αγώνες είναι 78%.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Σε ποιο από τα παρακάτω πειράματα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα;

α) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες, από τις οποίες 4 είναι πράσινες, 4 κόκκινες και 4 άσπρες, επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της.

β) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες, από τις οποίες 5 είναι πράσινες, 5 κόκκινες και 2 άσπρες, επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της.

γ) Από τη λέξη «χαρά» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι.

δ) Από τη λέξη «χώρα» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι.

2 Αν επιλέξουμε τυχαία ένα γράμμα της αλφαβήτου, τότε η πιθανότητα να είναι φωνήεν είναι:

α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{24}$ γ) $\frac{7}{24}$ δ) $\frac{17}{24}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α μπορεί να είναι P(A) = 1,02. ☐

β) Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι 80%, τότε γράφουμε P(A) = 80. ☐

γ) Το βέβαιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 1 και το αδύνατο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 0. ☐

δ) Αν η πιθανότητα να βρέξει είναι 32%, τότε η πιθανότητα να μη βρέξει είναι 68%. ☐

4 **Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο Α είναι $\frac{3}{5}$, τότε η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το Α είναι:**

α) $\frac{5}{3}$ **β)** $\frac{1}{5}$ **γ)** $\frac{2}{5}$ **δ)** $\frac{4}{5}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5 **Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύουν $P(A) = \frac{4}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{11}$.**

Ένας μαθητής υπολόγισε ότι $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$. Είναι σωστή η απάντησή του; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Επιλέγουμε στην τύχη έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως και το 13. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι:
α) άρτιος   β) πολλαπλάσιο του 4;

2 Σε μια κλήρωση υπάρχουν 1200 λαχνοί από τους οποίους κερδίζει ο ένας. Πόσο % πιθανότητα έχει να κερδίσει κάποιος που αγόρασε 6 λαχνούς;

3 Σε μια τράπουλα 52 φύλλων υπάρχουν 12 φιγούρες. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα φύλλο, ποια είναι η πιθανότητα να μην είναι φιγούρα;

4 Σε ένα κουτί υπάρχουν 20 όμοιες μπάλες, από τις οποίες οι 8 είναι

γαλάζιες, οι 7 είναι κίτρινες και οι 5 είναι άσπρες. Βγάζουμε στην τύχη μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Η μπάλα να είναι κίτρινη.
Β: Η μπάλα να μην είναι άσπρη.
Γ: Η μπάλα να είναι γαλάζια ή άσπρη.

5 Στο παρακάτω πίνακα φαίνεται η βαθμολογία των 25 μαθητών ενός τμήματος στα Μαθηματικά.
Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα να έχει βαθμό:
α) 15
β) μικρότερο του 14
γ) μεγαλύτερο ή ίσο του 16
δ) 19 ή 20

Βαθμός	Μαθητές
9	1
10	2
12	3
13	2
14	4
15	3
16	2
17	2
18	3
19	2
20	1

6 **Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές την ίδια ένδειξη;**

7 **Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:**
Α: Φέρνουμε και τις δύο φορές 6.

Β: Φέρνουμε την ίδια ένδειξη και τις δύο φορές.
Γ: Φέρνουμε μία τουλάχιστον φορά 5.

8 Από τους 25 μαθητές μιας τάξης μόνο οι 12 έλυσαν μια άσκηση. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει λύσει την άσκηση;
Αν ο πρώτος μαθητής που επιλέξαμε δεν έλυσε την άσκηση και από τους υπόλοιπους επιλέξουμε στην τύχη ένα δεύτερο μαθητή, τότε ποια είναι η πιθανότητα να έχει λύσει την άσκηση;

9 Η πιθανότητα να μην πάει κάποιος στο θέατρο είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να πάει. Ποια είναι τελικά η πιθανότητα να πάει στο θέατρο;

10 Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύουν $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$ και $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

11 Αν $P(A) = \frac{5}{14}$, $P(B') = \frac{11}{14}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

12 Η πιθανότητα να γνωρίζει κάποιος Αγγλικά είναι 42%, να γνωρίζει Γαλλικά είναι 21% και να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι 15%. Ποια είναι η πιθανότητα να γνωρίζει μία τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες;

13 Ο καθηγητής των Μαθηματικών διαπίστωσε ότι στο μάθημα της

Γεωμετρίας, από τους 24 μαθητές ενός τμήματος, 18 είχαν κανόνα, 14 είχαν διαβήτη και 20 είχαν κανόνα ή διαβήτη. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να έχει κανόνα και διαβήτη;

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ:

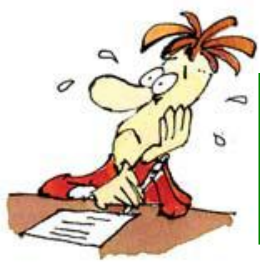
Η μεταβίβαση χαρακτηριστικών από γενιά σε γενιά - Ο Μέντελ και οι νόμοι της κληρονομικότητας.

Η μεταβίβαση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών από γονείς σε απογόνους, μελετήθηκε στα φυτά από τον Γ. Μέντελ.
Αν διασταυρώσουμε δύο ροζ λουλούδια μοσχομπίζελου, υβρίδια πρώτης γενιάς, τότε στα 4 λουλούδια που θα πάρουμε στη δεύτερη γενιά, 1 θα είναι κόκκινο, 2 ροζ και 1

λευκό. Δηλαδή η πιθανότητα να πάρουμε στη δεύτερη γενιά κόκκινο λουλούδι είναι $\frac{1}{4}$ ή 25%, ροζ λουλούδι $\frac{2}{4}$ ή 50% και λευκό λουλούδι $\frac{1}{4}$ ή 25%.

- Πώς συνέβαλε η θεωρία των πιθανοτήτων στη διατύπωση των νόμων της κληρονομικότητας;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



1 Δίνονται τα σύνολα $Ω = \{x \in N$, όπου $x < 8\}$, $Α = \{x \in Ω$, όπου x άρτιος$\}$ και $Β = \{x \in Ω$, όπου x διαιρέτης του 8$\}$.
α) Να γράψετε τα σύνολα Ω, Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους και

να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και τα $A΄$, $B΄$ ως προς βασικό σύνολο Ω.

γ) Αν επιλέξετε τυχαία ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε την πιθανότητα:

i) να ανήκει στο A

ii) να μην ανήκει στο B

iii) να ανήκει στο A και στο B

iv) να ανήκει στο A ή στο B.

2 Σ' ένα καταψύκτη υπάρχουν 12 παγωτά, από τα οποία 3 είναι βανίλια, 3 σοκολάτα, 3 φράουλα και 3 φιστίκι. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει η Μαρία τυχαία ένα παγωτό με γεύση φράουλας που μόνο αυτό δεν της αρέσει; Δύο μέρες αργότερα 1 παγωτό βανίλια, 2 παγωτά σοκολάτα και 1 παγωτό φράουλα έχουν καταναλωθεί. Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να πάρει η

Μαρία τυχαία ένα παγωτό που να της αρέσει;

3 Τα 80 παιδιά της Γ΄ τάξης ενός Γυμνασίου επέλεξαν να διδαχτούν μια δεύτερη ξένη γλώσσα ανάμεσα στα Γαλλικά και τα Γερμανικά. Τα 18 από τα 30 αγόρια επέλεξαν τα Γερμανικά, ενώ 36 κορίτσια επέλεξαν τα Γαλλικά.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	Αγόρια	Κορίτσια
Γαλλικά		
Γερμανικά		

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί. Να βρείτε την πιθανότητα:

i) να είναι αγόρι

ii) να έχει επιλέξει τα Γερμανικά

iii) να είναι αγόρι και να έχει επιλέξει τα Γαλλικά

iv) να είναι κορίτσι ή να έχει επιλέξει τα Γερμανικά.

4 Από το σύνολο {25°, 36°, 65°, 92°} που περιέχει ως στοιχεία μέτρα γωνιών, επιλέγουμε τυχαία δύο διαφορετικούς αριθμούς. Αν αυτοί εκφράζουν τα μέτρα δύο γωνιών ενός τριγώνου, ποια είναι η πιθανότητα το τρίγωνο αυτό να είναι ορθογώνιο;

5 Από το σύνολο {8, 12, 16, 20} επιλέγουμε τυχαία τρεις διαφορετικούς αριθμούς. Ποια η πιθανότητα οι τρεις αυτοί αριθμοί να εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου;

6 Από το σύνολο {1, 2, 3, 4} επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς τον ένα μετά τον άλλο και με αυτούς σχηματίζουμε ένα κλάσμα. Ο

πρώτος είναι ο αριθμητής και ο δεύτερος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος. Να βρείτε την πιθανότητα ώστε το κλάσμα
α) να εκφράζει ακέραιο αριθμό
β) να είναι μικρότερο της μονάδας.

7 Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A \cup B) = \frac{7}{10} \text{ και } P(A') + P(B') = \frac{11}{10},$$

να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

8 Ο Νίκος ισχυρίζεται ότι, όταν ρίχνουμε δύο ζάρια, η πιθανότητα να έχουν άθροισμα 8 είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να έχουν άθροισμα 7. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Το τρίγωνο του Πασκάλ και οι Πιθανότητες

Ο Πασκάλ χρησιμοποίησε το αριθμητικό τρίγωνο (τρίγωνο Πασκάλ) προκειμένου να προσδιορίσει το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων κατά τη ρίψη ενός νομίσματος. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα νόμισμα μία, δύο, τρεις φορές, τότε τα δυνατά αποτελέσματα και το πλήθος τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ρίψεων	Δυνατά αποτελέσματα	Τρίγωνο Πασκάλ	Πλήθος δυνατών αποτελε-σμάτων
1	Κ Γ	1 1	$2 = 2^1$
2	ΚΓ ΚΚ ΓΓ ΓΚ	1 2 1	$4 = 2^2$
3	ΚΚΓ ΓΓΚ ΚΚΚ ΚΓΚ ΓΚΓ ΓΓΓ ΓΚΚ ΚΓΓ	1 3 3 1	$8 = 2^3$

Να βρείτε:
α) Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων σε 5 ρίψεις του νομίσματος.
β) Την πιθανότητα να φέρουμε την ίδια ένδειξη και τις 5 φορές.
γ) Την πιθανότητα να φέρουμε όλες τις φορές γράμματα, αν ρίξουμε το νόμισμα 6 φορές.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΣΥΝΟΛΑ

• **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που καθορίζονται με απόλυτη σαφήνεια και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
• Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με **αναγραφή** ή με

περιγραφή των στοιχείων του και με το διάγραμμα Venn.

• Ίσα ονομάζονται δύο σύνολα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

• Ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β και συμβολίζεται $A \subseteq B$.

• Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\varnothing$.

Πράξεις με σύνολα

• Ένωση δύο συνόλων Α, Β ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων και συμβολίζεται $A \cup B$.

• **Τομή** δύο συνόλων Α, Β ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία και των δύο συνόλων και συμβολίζεται **Α ∩ Β**.

• **Συμπλήρωμα** ενός συνόλου Α ως προς ένα βασικό σύνολο Ω ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται **Α΄**.

Β. ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

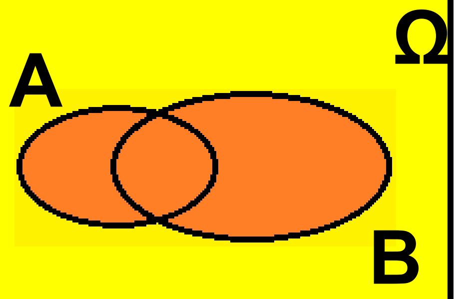
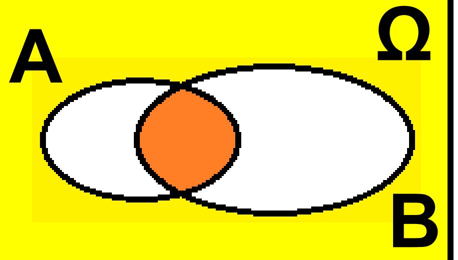
• **Πείραμα τύχης** ονομάζεται κάθε πείραμα που όσες φορές και αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του με απόλυτη βεβαιότητα.

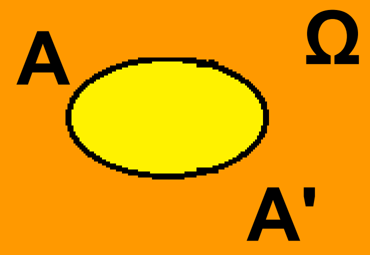
• **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το

σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.

- **Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω. Ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του ενδεχομένου.**
- **Βέβαιο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος.**
- **Αδύνατο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος.**

Πράξεις με σύνολα

	Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Σημασία	Παράσταση
Ένωση	A U B	« A ή B»	Το A U B πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.	
Τομή	A ∩ B	« A και B»	Το A ∩ B πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B.	

Συμπλήρωμα	Α΄	« Όχι Α»	Το Α΄ πραγματο-ποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.	

- **Ασυμβίβαστα ονομάζονται δύο ενδεχόμενα Α και Β, όταν $A \cap B = \varnothing$.**

Γ. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

• **Κλασικός ορισμός της πιθανότητας**

Σ' ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ονομάζουμε τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

- Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$.

- Ισχύουν $P(\Omega) = 1$ και $P(\varnothing) = 0$.

• **Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων**

Σ' ένα πείραμα τύχης

- για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α ισχύει $P(A) + P(A΄) = 1$

- για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ισχύει
$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Περιεχόμενα 5ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Α΄ • ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ