Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 4ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2.5 – 3.3

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

<u>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</u>

Δημήτριος Αργυράκης, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Παναγιώτης Βουργάνας, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Κωνσταντίνος Μεντής, ***Μαθημ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Σταματούλα Τσικοπούλου, ***Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

Μιχαήλ Χρυσοβέργης, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

<u>ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ</u>

Εμμανουήλ Μανατάκης, ***Επίκ. Καθ. Πολυτεχν. Σχολής Παν/μίου Πατρών***

Μιχαήλ Σαλίχος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

Νικόλαος Παπαευστρατίου, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

<u>ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ</u>

Νικόλαος Μαρουλάκης, ***Σκιτσογράφος - Εικονογράφος***

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευγενία Βελάγκου, *Φιλόλογος*

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Δημήτριος Κοντογιάννης,
Σύμβουλος του Παιδαγ. Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Παναγιώτης Γράββαλος, *Ζωγράφος*

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

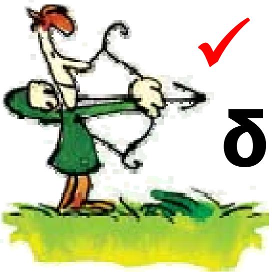
Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

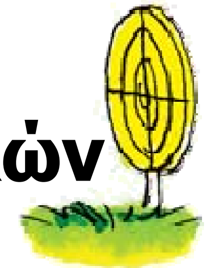
ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 4ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2.5 – 3.3

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο



✓ Θυμάμαι πώς ορίζεται η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών.

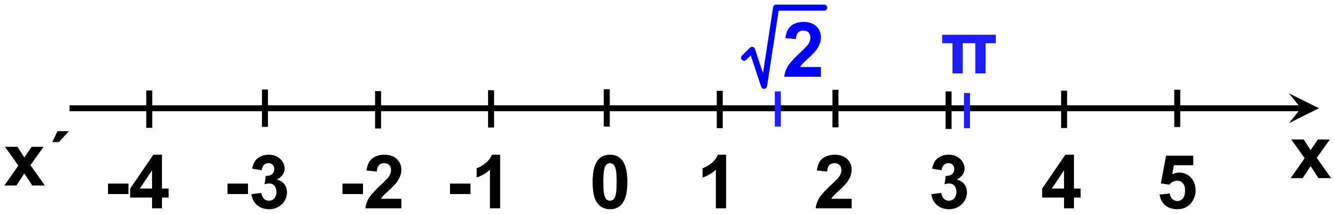


✓ Μαθαίνω να αποδεικνύω και να χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της διάταξης.

✓ Θυμάμαι πώς λύνονται οι ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.

Α Διάταξη πραγματικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο ενός άξονα. Αν στον άξονα έχουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα π.χ. $-2 > -4$, $-3 < 2$, $\pi > \sqrt{2}$.



Δύο ή περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί που έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα είναι διατεταγμένοι, οπότε μπορούμε να τους συγκρίνουμε.

Επομένως:

- **Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.**
- **Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.**
- **Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.**

Πώς όμως θα συγκρίνουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς

αριθμούς που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα;
Αν πάρουμε δύο αριθμούς. π.χ. τους 5 και 3, για τους οποίους ισχύει $5 > 3$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού
$5 - 3 = 2 > 0$.
Ομοίως, οι αριθμοί -2 και -4, για τους οποίους ισχύει $-2 > -4$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού
$(-2) - (-4) = -2 + 4 = 2 > 0$.
Αντίθετα, οι αριθμοί 3 και 5 ή -4 και -2, για τους οποίους ισχύει $3 < 5$ και $-4 < -2$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά έναν αρνητικό αριθμό, αφού $3 - 5 = - 2 < 0$ και
$(-4) - (-2) = -4 + 2 = -2 < 0$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$

ενώ

Αν $α < β$ τότε $α - β < 0$

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο πραγματικούς αριθμούς α και β, που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους $α - β$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- Αν $α - β > 0$ τότε $α > β$
- Αν $α - β < 0$ τότε $α < β$
- Αν $α - β = 0$ τότε $α = β$

B Ιδιότητες της διάταξης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αφού διατάξετε τους αριθμούς 0, 8, -2, 4, -5, τότε:

1. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν σε καθέναν

από τους παραπάνω αριθμούς προσθέσετε τον αριθμό 3
2. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν

i) αφαιρέσετε τον αριθμό 3
ii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό 2
iii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό -2

Σε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις η φορά των ανισοτήτων διατηρείται και σε ποια αλλάζει;

Ο ορισμός της διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών χρησιμοποιείται και για την απόδειξη των ιδιοτήτων της διάταξης. Οι ιδιότητες αυτές είναι:
α) Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό,

τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 + 3 > 4 + 3$ και $8 - 3 > 4 - 3$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

Απόδειξη

• Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha + \gamma$ και $\beta + \gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.
Έτσι έχουμε:
$(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta$.
Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$.
Δηλαδή η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε
$\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

• Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

β) Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot 2 > 4 \cdot 2$ και $\frac{8}{2} > \frac{4}{2}$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$

τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Απόδειξη

• Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha\gamma$ και $\beta\gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta)$ (1). Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$. Άρα οι αριθμοί γ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί,

οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλαδή $\gamma(\alpha - \beta) > 0$. Από την ισότητα (1) έχουμε ότι η διαφορά $\alpha\gamma - \beta\gamma$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

- **Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$**

γ) Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$ και -8- < -4. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma < 0 \\ \text{τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma \text{ και } \dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}\end{array}}$$

δ) Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Π.χ. είναι 3 > 2 και 7 > 4, οπότε 3 + 7 > 2 + 4. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν α > β και γ > δ τότε α + γ > β + δ

Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει και η **μεταβατική ιδιότητα**:

Αν α > β και β > γ τότε α > γ

Π.χ. είναι 3 > 1 και 1 > -2,5 οπότε 3 > -2,5.

ε) Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε

προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.
Π.χ. είναι $3 > 2 > 0$ και $7 > 4 > 0$, οπότε $3 \cdot 7 > 2 \cdot 4$. Γενικά ισχύει:

Αν α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $α > β$ και $γ > δ$ τότε $αγ > βδ$

Απόδειξη
Είναι $α > β$ και $γ > 0$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (β) έχουμε $αγ > βγ$ (1)
Είναι $γ > δ$ και $β > 0$, οπότε για τον ίδιο λόγο έχουμε $βγ > βδ$ (2)
Από τις ανισότητες (1), (2) και σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $αγ > βδ$.

Παρατηρήσεις:
1) Υπενθυμίζουμε ότι το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού α είναι

μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

Επομένως:

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

2) Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα. Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $\begin{cases} 6 > 4 \\ 3 > 1 \end{cases}$, τότε καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

Γ Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Οι ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούνται και για την

επίλυση ανισώσεων. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $x - \frac{3x + 1}{2} > \frac{3}{4}$, που είναι πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. (Στο παράδειγμα έχουμε Ε.Κ.Π. = 4> 0, οπότε η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει, ιδιότητα β),

$$x - \frac{3x + 1}{2} > \frac{3}{4}$$

$$4 \cdot x - 4 \cdot \frac{3x + 1}{2} > 4 \cdot \frac{3}{4}$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

$$4x - 2(3x + 1) > 3$$

Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις

$4x - 6x - 2 > 3$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, ιδιότητα α).

$4x - 6x > 3 + 2$

$2x > 5$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου. (Στο παράδειγμα ο συντελεστής είναι -2 < 0 και γι' αυτό αλλάζει η φορά της ανίσωσης, ιδιότητα γ).

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{5}{-2}$$

$$x < -\frac{5}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα α > 4 για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;**

α) $-3\alpha + 2 < -10$

β) $\frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$

γ) $-2(\alpha + 2) < -12$

Λύση

α) (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με -3)
(προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το 2)

$$\alpha > 4$$
$$-3\alpha < -12$$
$$-3\alpha + 2 < -12 + 2$$
$$-3\alpha + 2 < -10$$

β) (πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της ανισότητας με $\frac{5}{4}$)

$\alpha > 4$

$$\frac{5}{4} \cdot \alpha > \frac{5}{4} \cdot 4$$

$$\frac{5\alpha}{4} > 5$$

(αφαιρούμε και από τα δυο μέλη της ανίσωσης το 1)

$$\frac{5\alpha}{4} - 1 > 5 - 1$$

οπότε $\frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$

γ) $\alpha > 4$
(προσθέτουμε και στα δυο μέλη της ανίσωσης το 2)
$\alpha + 2 > 4 + 2$
$\alpha + 2 > 6$

(πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της ανίσωσης με το -2)

$-2(α + 2) < -2 \cdot 6$
$-2(α + 2) < -12$

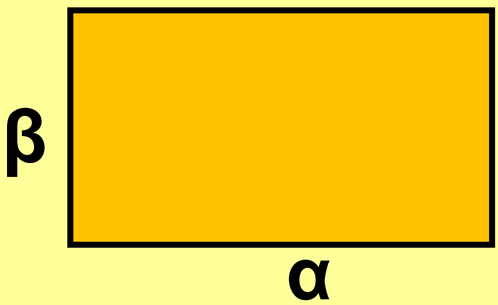
2 **Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου ισχύουν**

$4 \leq α \leq 6$ **και** $2{,}5 \leq β \leq 4{,}5$.

Ποιες τιμές μπορεί να πάρει

α) η περίμετρος του ορθογωνίου;

β) το εμβαδόν του ορθογωνίου;



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι Π = 2α + 2β.
Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των

ανισοτήτων $\begin{cases} 4 \le \alpha \le 6 \\ 2{,}5 \le \beta \le 4{,}5 \end{cases}$

με το 2, οπότε έχουμε $\begin{cases} 8 \le 2\alpha \le 12 \\ 5 \le 2\beta \le 9 \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και έχουμε

$8 + 5 \le 2\alpha + 2\beta \le 12 + 9$ ή
$13 \le 2\alpha + 2\beta \le 21$ ή $13 \le \Pi \le 21$.

Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογωνίου είναι από 13 έως και 21.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι Ε = αβ. Οι ανισότητες

$$\begin{cases} 4 \le \alpha \le 6 \\ 2{,}5 \le \beta \le 4{,}5 \end{cases}$$

έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$4 \cdot 2{,}5 \leq αβ \leq 6 \cdot 4{,}5$ ή
$10 \leq αβ \leq 27$ ή $10 \leq Ε \leq 27$.
Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι από 10 έως και 27.

3 Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδειχτεί ότι ισχύει $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι $x^2 + y^2 \geq 2xy$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ ή $(x - y)^2 \geq 0$. Η τελευταία σχέση είναι αληθής, αφού το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Η ισότητα ισχύει όταν $(x - y)^2 = 0$, οπότε $x - y = 0$ δηλαδή $x = y$.

4 **Οι μαθητές μιας τάξης προκειμένου να πάνε μια εκδρομή ζήτησαν προσφορά από δύο πρακτορεία.**

– Το πρώτο πρακτορείο ζήτησε 15 ευρώ για κάθε μαθητή και εφόσον οι μαθητές ήταν πάνω από 25 θα έκανε και έκπτωση 10%.

– Το δεύτερο πρακτορείο ζήτησε 12 ευρώ για κάθε μαθητή και 45 ευρώ για τα διάφορα έξοδα (διόδια, ναύλα φεριμπότ κ.τ.λ.)

Αν οι μαθητές που συμμετέχουν στην εκδρομή είναι περισσότεροι από 25, ποιο πρακτορείο έκανε την καλύτερη προσφορά;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι μαθητές που τελικά συμμετέχουν στην εκδρομή είναι x, όπου x > 25.

Στο πρώτο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $15x - \frac{10}{100}15x = 15x - \frac{3}{2}x$ ευρώ, ενώ στο δεύτερο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $12x + 45$ ευρώ.
Για να είναι καλύτερη η προσφορά του πρώτου πρακτορείου, πρέπει να ισχύει

$$15x - \frac{3}{2}x < 12x + 45 \text{ ή}$$

$$30x - 3x - 24x < 90 \text{ ή}$$
$$3x < 90 \text{ ή } x < 30.$$

Επομένως αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 25 και λιγότεροι από 30, τότε την καλύτερη προσφορά έκανε το πρώτο πρακτορείο, ενώ αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 30, την καλύτερη προσφορά έκανε το δεύτερο πρακτορείο. Αν οι μαθητές είναι 30,

τότε οι προσφορές των δύο πρακτορείων είναι ίδιες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $α < 6$, τότε $α - 6 < 0$. ☐

β) Αν $α > β$, τότε $-α < -β$. ☐

γ) Αν $α < 0$, τότε $-α > 0$. ☐

δ) Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$. ☐

ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$. ☐

στ) Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$. ☐

ζ) Αν $α > 6$ και $β > -4$, τότε $α + β > 2$. ☐

η) Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$. ☐

2 Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα >, <, ≥ , ≤, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν $α > 3$, τότε $α - 3$ ... 0
β) Αν $α < β$ και $β < γ$, τότε α ... γ
γ) Αν $α > 0$ και $β < 0$, τότε $\frac{α}{β}$ ... 0
δ) Αν $γ < 0$ και $αγ < βγ$, τότε α ... β
ε) Αν $α \neq 0$, τότε $α^2$ ... 0
στ) Αν $α < 0$ και $β < 0$, τότε $α + β$ ... 0

3 Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε, ώστε από την ανίσωση $3x - 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

4 Με ποιες ιδιότητες της διάταξης από την ανισότητα $x > 3$ προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες;

α) $x + 4 > 7$ β) $x - 2 > 1$

γ) $5x > 15$ δ) $-6x < -18$

5 Αν $α > 12$ και $β > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;

α) $α + β > 15$ β) $α - β > 9$

γ) $αβ > 36$ δ) $\frac{α}{β} > 4$

6 Ένας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, αρκεί να ισχύει $αδ = βγ$. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{α}{β} > \frac{γ}{δ}$ αρκεί να αποδείξει ότι $αδ > βγ$. Η σκέψη που έκανε είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν ισχύει $3(\alpha - \beta) > 2(\alpha + \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha > 5\beta$.

2 Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $x > -6$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;
α) $-5x - 30 < 0$
β) $3x + 18 > 0$
γ) $2(x + 4) > 4$

3 Αν $2 < \alpha < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί
α) $\alpha - 2$
β) $2\alpha - 5$
γ) $1 - 3\alpha$

4 Αν $\alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι
α) $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$
β) $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$

γ) $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ δ) $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

5 Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:

α) $3 < x + y < 8$

β) $4 < 2x + y < 11$

γ) $-4 < x - y < 1$

6 Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xy > 6$

β) $(x - 2)(y - 3) > 0$

γ) $(x + 2)y > 12$

7 Αν α, β θετικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta^2$.

8 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^2 > \alpha$

β) Αν $x > 2$, τότε $x^3 > 2x^2$

9 Αν $\alpha > \beta$ και α, β ομοσημοι, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

10 **Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι:**

α) $(x - 3)(y - 2) < 0$

β) $xy + 6 < 2x + 3y$

11 **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδείξετε ότι:**

α) $x^2 + 1 \geq 2x$

β) $(x + y)^2 \geq 4xy$

γ) $x^2 + y^2 + 1 \geq 2y$

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε πότε ισχύει η ισότητα

12 **Να αποδείξετε ότι:**

α) Αν $x > 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \geq 2$

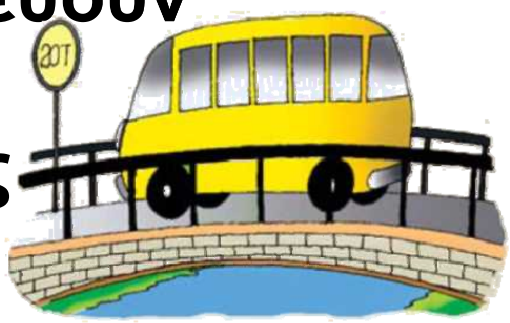
β) Αν $x < 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \leq -2$

13 **Να βρείτε το φυσικό αριθμό που είναι μεταξύ των αριθμών 114 και**

135 και ο οποίος, όταν διαιρεθεί με το 15, δίνει υπόλοιπο 6.

14 **Η τιμή ενός παντελονιού κυμαίνεται από 30 έως 35 € και μιας μπλούζας από 22 έως 25 €. Αν κάποιος θέλει ν’ αγοράσει 2 παντελόνια και 3 μπλούζες, τότε μεταξύ ποιων ποσών θα κυμαίνονται τα χρήματα που πρέπει να πληρώσει;**

15 **Μ’ ένα πούλμαν ταξιδεύουν 51 άτομα (ο οδηγός και 50επιβάτες). Αν το βάρος κάθε ατόμου κυμαίνεται μεταξύ 60 kg και 100 kg, οι αποσκευές κάθε επιβάτη ζυγίζουν από 4 kg έως και 15 kg και το πούλμαν έχει απόβαρο 13,25 t, τότε να εκτιμήσετε το συνολικό βάρος του πούλμαν. Είναι δυνατόν το πούλμαν να διασχίσει μια γέφυρα**



επαρχιακού δρόμου που το ανώτατο επιτρεπόμενο βάρος διέλευσης είναι 20 t;

16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $11 - 3x < 7x + 1$

β) $2x - 9 > 5x + 6$

γ) $4(3x - 5) > 3(4x + 5)$

δ) $\dfrac{3 - 4x}{5} - \dfrac{3x}{10} > \dfrac{6 - x}{2}$

ε) $\dfrac{2x + 1}{6} - x < \dfrac{3 - 2x}{3}$

στ) $1 - \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{3}\right) < \dfrac{x + 4}{6}$

17 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 4x + 3 < 9 + 5x \\ 1 - x < 2x + 7 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2x + 5 < \dfrac{x}{2} + 2 \\ \dfrac{x - 1}{2} + 1 > x + \dfrac{1}{3} \end{cases}$

18 Να βρείτε θετικό ακέραιο αριθμό x, ώστε $\dfrac{x + 1}{x + 2} > \dfrac{31}{40}$ και $\dfrac{x}{x + 1} < \dfrac{31}{40}$

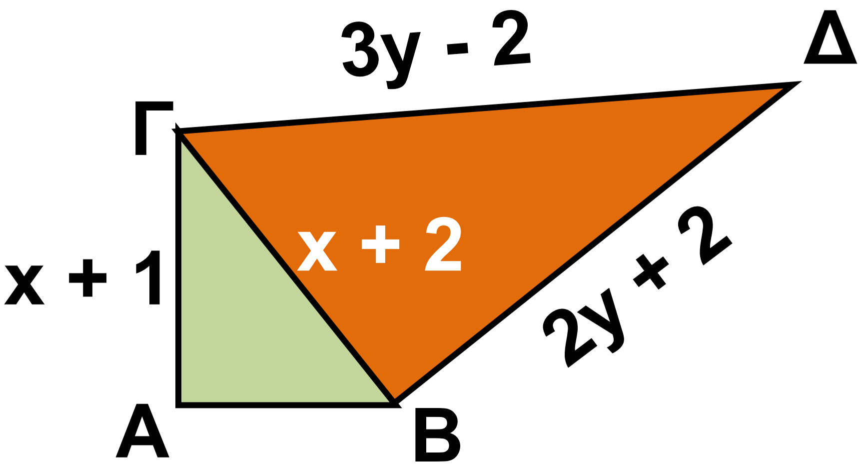
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x + \alpha)^2 - (x + \beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2$

β) $\dfrac{x + \alpha}{\beta} - \dfrac{x + \beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} - 1$

2 Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια. Να βρείτε τις τιμές των x, y.



3 Το γινόμενο δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών, αν διαιρεθεί με το άθροισμά τους, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23. Να βρείτε τους αριθμούς.

4 Να λύσετε τις εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$.

α) $\dfrac{x}{x - \alpha} + \dfrac{2x}{x + \alpha} = \dfrac{2\alpha^2}{x^2 - \alpha^2}$

β) $\dfrac{3\alpha}{x^2 - \alpha x} + \dfrac{1}{x^2 + \alpha x} = \dfrac{6x}{x^2 - \alpha^2}$

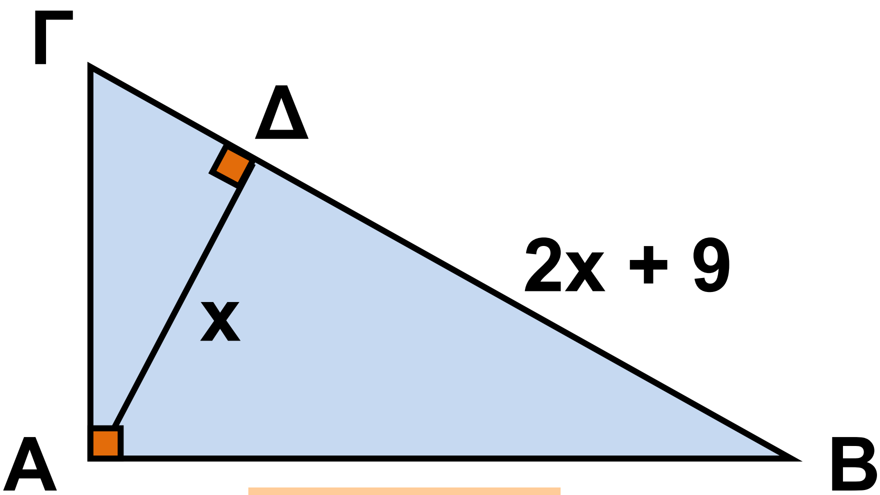
5 Αν μια λύση της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda = 0$ είναι ο αριθμός 1, να βρείτε την άλλη λύση.

6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$, αν είναι γνωστό ότι το $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

7 Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους αυξημένο κατά τον αντίστροφο του γινομένου τους να είναι ίσο με 1.

8 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 m και το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 399 m^2.

9 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΔ. Αν είναι ΑΔ = x, ΒΔ = 2x + 9 και ΓΔ = 3, να υπολογίσετε τον αριθμό x.



10 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(1 + \alpha)(1 + \beta)$ και $1 + \alpha + \beta$.

11 α) Να αποδείξετε ότι
$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 =$
$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$.
β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

12 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{4}{\nu(\nu + 2)} - \frac{1}{(\nu + 1)(\nu + 2)} > \frac{2}{\nu(\nu + 1)}$$

για κάθε θετικό ακέραιο ν.

13 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$
β) $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$
γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

14 Να διατάξετε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, αν ισχύει $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma$.

15 Αν $\alpha > 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + 1)x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

16 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$.
(**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995**).

17 Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης
$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$. Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη;
(**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001**).

18 - Ο καθηγητής:
Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x - 19}{2001} + \frac{x - 17}{2003} + \frac{x - 15}{2005} + \frac{x - 13}{2007} = 4$$

- Ο μαθητής:
Κύριε, αυτή η εξίσωση ούτε μέχρι το 2020 δε λύνεται. Εσείς μπορείτε να τη λύσετε;
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι

$$\frac{x - 19}{2001} = \frac{x - 2020 + 2001}{2001} = \frac{x - 2020}{2001} + 1$$

κ.τ.λ.

19 Να λύσετε το σταυρόλεξο

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

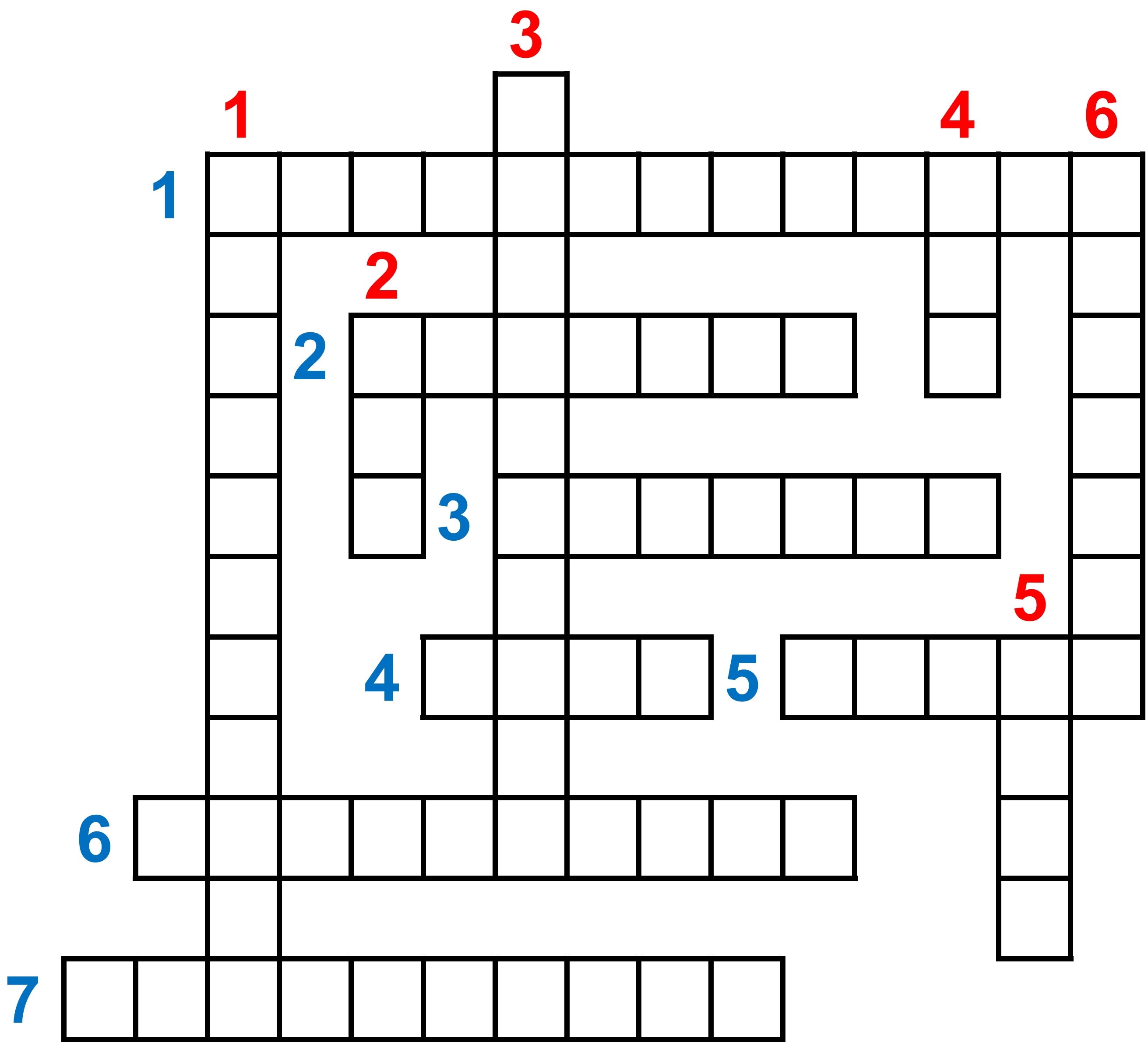
1. Είναι η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$..
2. Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών.

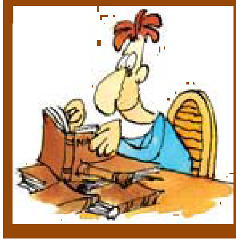
3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου.
4. Ο αριθμός 2 είναι .... της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x - 1)^2 = 0$.
6. Η επίλυση μιας εξίσωσης 2ου βαθμού γίνεται και με .... τετραγώνου.
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΚΑΘΕΤΑ

1. Το πρόσημο της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.
2. Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$ με $β^2 - 4αγ > 0$ έχει .... λύσεις.
3. Ιδιότητα που ισχύει και στη διάταξη πραγματικών αριθμών.

4. **Η εξίσωση αx + β = 0 με α ≠ 0 έχει....................λύση.**
5. **Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης.**
6. **Είναι η εξίσωση 0x = 7.**





ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

• **Η γενική μορφή** μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $αx + β = 0$ με $α \neq 0$,
π.χ. $3x + 18 = 0$

• **Λύση ή ρίζα** μιας εξίσωσης είναι η τιμή του αγνώστου που την επαληθεύει. Π.χ. ο αριθμός $x = -6$ είναι λύση της εξίσωσης $3x + 18 = 0$, αφού $3 \cdot (-6) + 18 = 0$.

• **Η εξίσωση $αx + β = 0$**

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $αx + β = 0$			Παρα-δείγματα
$α \neq 0$		έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{β}{α}$	$4x + 3 = 0$ ή $4x = -3$ ή $x = -\frac{3}{4}$
$α = 0$	$β \neq 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	$0x = 2$ (αδύνατη)
	$β = 0$	έχει λύση κάθε αριθμό (ταυτότητα)	$0x = 0$ (ταυτότητα)

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

• **Η γενική μορφή** μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, π.χ. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ με $α = 2$, $β = -5$ και $γ = 3$

• **Η εξίσωση $x^2 = α$**

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $x^2 = α$		Παρα-δείγματα
$α > 0$	έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$	$x^2 = 2$ άρα $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$
$α < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	$x^2 = -4$ (αδύνατη)
$α = 0$	έχει μία λύση τη $x = 0$ (διπλή)	$x^2 = 0$ άρα $x = 0$ (διπλή λύση)

- Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	**Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$**	
	$\Delta > 0$	έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
	$\Delta = 0$	έχει μία διπλή λύση, την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
	$\Delta < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)

• **Παραγοντοποίηση τριωνύμου:**

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha x2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

3. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- **Κλασματική εξίσωση** ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.
- Ένας αριθμός που μηδενίζει κάποιον παρονομαστή μιας κλασματικής εξίσωσης δεν μπορεί να είναι λύση (ή ρίζα) της.

4. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

Ορισμός διάταξης:

Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε $\alpha > \beta$
Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε $\alpha < \beta$
Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε $\alpha = \beta$

Ιδιότητες της διάταξης

- Αν $α > β$, τότε $α + γ > β + γ$ και $γ > β - γ$

- Αν $α > β$ και $γ > 0$, τότε $αγ > βγ$ και
$$\frac{α}{γ} > \frac{β}{γ}$$

- Αν $α > β$ και $γ < 0$, τότε $αγ < βγ$ και
$$\frac{α}{γ} < \frac{β}{γ}$$

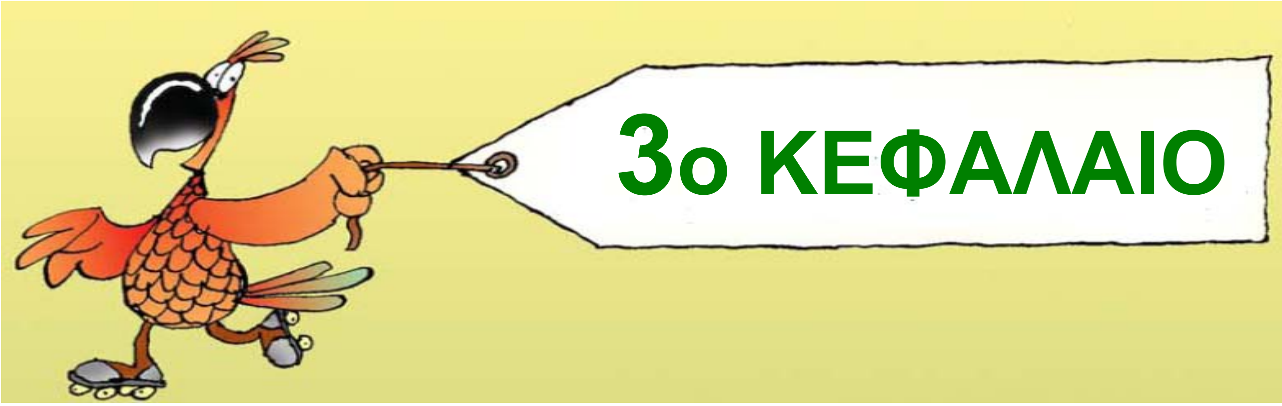
- Αν $α > β$ και $γ > δ$, τότε $α + γ > β + δ$

- Αν $α > β$ και $β > γ$, τότε $α > γ$
(Μεταβατική ιδιότητα)

- Αν $α > β > 0$ και $γ > δ > 0$, τότε
$αγ > βδ$

Παρατηρήσεις:

- **Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $α^2 \geq 0$.**
- **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $α^2 + β^2 = 0$, τότε α = β = 0**
- **Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.**



3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εσύ που τα ξέρεις όλα, βρες μου δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 100 και διαφορά 40

Σπουδαία τα λάχανα.
$x + y = 100$
$x - y = 40$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

✓ **Μαθαίνω τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δυο αγνώστους και πώς παριστάνεται γραφικά.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y, βρίσκουμε άθροισμα 6.

α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y.

β) Ποια από τα ζεύγη (-1, 8), (0, 6), (-2, 7), (2, 2) (3, 0), (3, 5) επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;

γ) Σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία όσα από τα προηγούμενα ζεύγη επαληθεύουν τη σχέση. Με τη βοήθεια ενός

χάρακα να εξετάσετε αν όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ε.
δ) Πάνω στην ευθεία ε να πάρετε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ και να εξετάσετε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση.

Η εξίσωση $αx + βy = γ$

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυση τους οδηγεί σε εξίσωση με δύο αγνώστους x, y και η οποία είναι της μορφής $αx + βy = γ$.
Για παράδειγμα, η εξίσωση
$2x + y = 6$ είναι της μορφής αυτής, με $α = 2$, $β = 1$ και $γ = 6$.
Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ και $y = 4$ η εξίσωση $2x + y = 6$ επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 1 + 4 = 6$, ενώ για $x = 3$ και $y = 5$ δεν επαληθεύεται, αφού

$2 \cdot 3 + 5 = 11 \neq 6$. Το ζεύγος των αριθμών (1, 4) που επαληθεύει την εξίσωση $2x + y = 6$, λέμε ότι είναι μία **λύση** της.

Γενικά

Λύση μιας εξίσωσης $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

Η εξίσωση όμως $2x + y = 6$ δεν έχει λύση μόνο το ζεύγος (1, 4), αλλά έχει **άπειρες λύσεις**. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη τιμή του y, ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση της και έτσι να σχηματίσουμε έναν πίνακα τιμών.

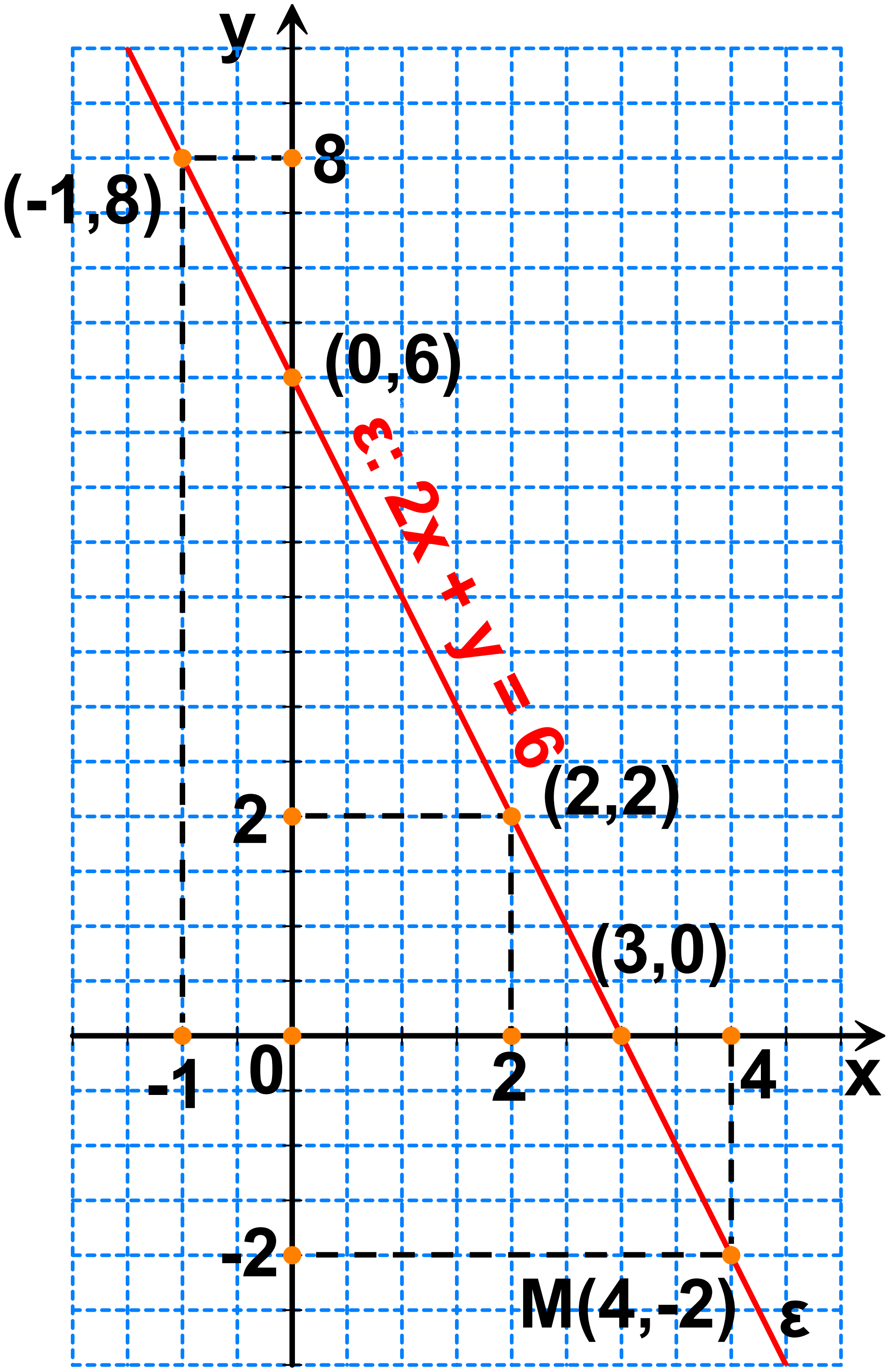
Για $x = -1$ έχουμε $2 \cdot (-1) + y = 6$, οπότε $y = 8$.
Για $x = 0$ έχουμε $2 \cdot 0 + y = 6$, οπότε $y = 6$.

Για x = 2 έχουμε 2 • 2 + y = 6, οπότε y = 2.
Για x = 3 έχουμε 2 • 3 + y = 6, οπότε y = 0 κ.τ.λ.

Άρα τα ζεύγη (-1, 8), (0, 6), (2, 2), (3, 0), … είναι λύσεις της εξίσωσης 2x + y = 6.

x	-1	0	2	3
y	8	6	2	0

Αν σ' ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που καθένα έχει συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης 2x + y = 6, παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία ε.



Αντιστρόφως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε, π.χ. το M(4, -2), παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση 2x + y = 6, αφού

$2 \cdot 4 + (-2) = 6$. Άρα κάθε σημείο της ευθείας ε έχει συντεταγμένες (x, y) που είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση $2x + y = 6$ παριστάνει την ευθεία ε και συμβολίζεται
ε: $2x + y = 6$.

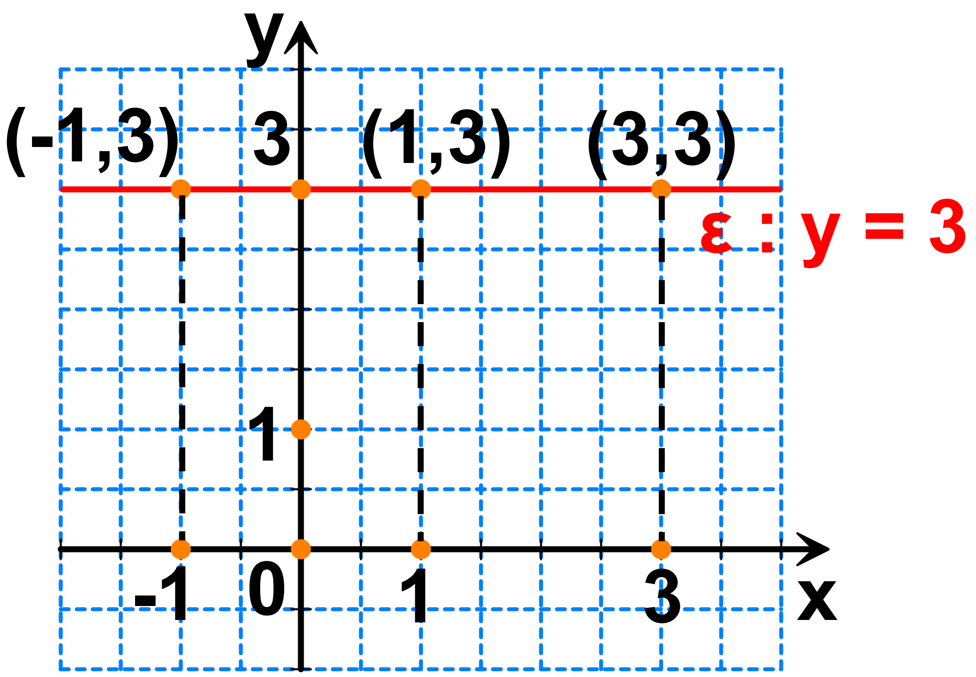
Γενικά

• Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
• Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

Ειδικές περιπτώσεις

Η εξίσωση $y = k$.

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $0x + 2y = 6$, που είναι της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του x έχουμε $y = 3$. Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(-1, 3)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$, κ.τ.λ. είναι λύσεις της. Επομένως, η εξίσωση $0x + 2y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη $y = 3$ και τετμημένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0, 3)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 3$



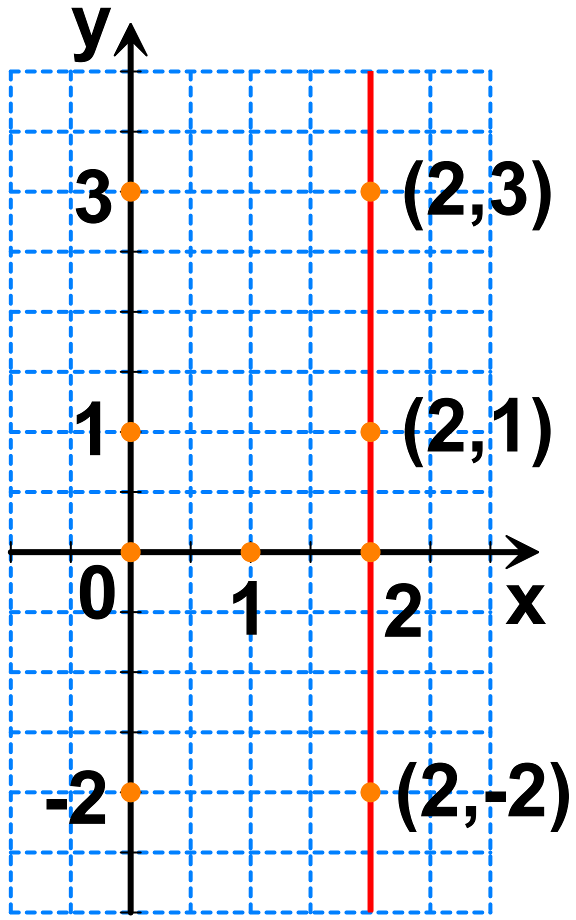
Γενικά

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, k), ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x΄x

Η εξίσωση x = k

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $3x + 0y = 6$, που είναι της μορφής $αx+βy = γ$ με $β = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του y έχουμε $x = 2$. Για παράδειγμα, τα ζεύγη (2, -2), (2, 1), (2, 3), κ.τ.λ. είναι λύσεις της. Επομένως, η εξίσωση $3x + 0y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τετμημένη $x = 2$ και τεταγμένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα

y΄y που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (2, 0).
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση
x = 2.



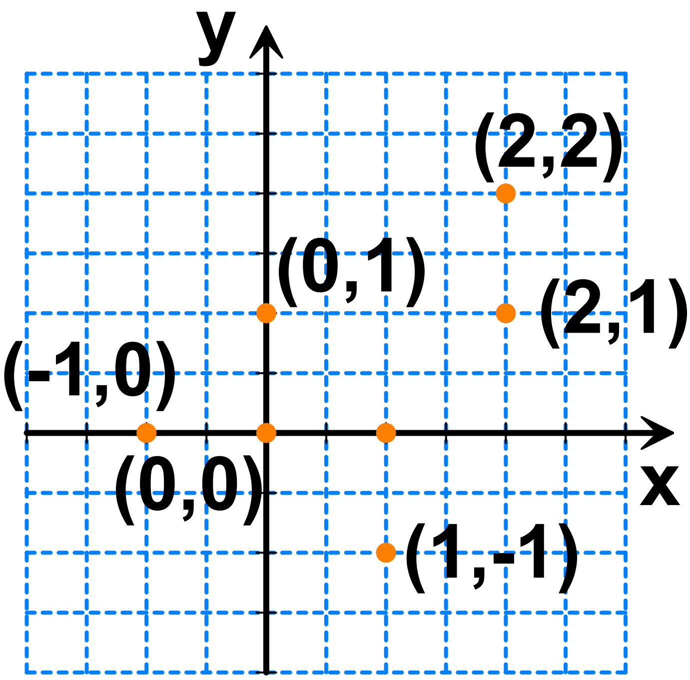
Γενικά

Η εξίσωση x = k με k ≠ 0 παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (k, 0), ενώ η εξίσωση x = 0 παριστάνει τον άξονα y΄y

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha = \beta = 0$

• Η εξίσωση $0x + 0y = 7$ δεν παριστάνει ευθεία, αφού κανένα ζεύγος αριθμών (x, y) δεν είναι λύση της (**αδύνατη εξίσωση**).

• Η εξίσωση $0x + 0y = 0$ επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών (x, y). Για παράδειγμα, τα ζεύγη (-1, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 2), κ.τ.λ. είναι λύσεις της (**αόριστη εξίσωση**). Τα σημεία όμως, που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Άρα η εξίσωση $0x + 0y = 0$ δεν παριστάνει ευθεία, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Εξισώσεις, όπως οι $2x + y = 6$, $0x + 2y = 6$, $3x + 0y = 6$, $0x + 0y = 7$, $0x + 0y = 0$, ονομάζονται γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y. Όπως διαπιστώσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα μόνο οι τρεις πρώτες παριστάνουν ευθεία. Στις εξισώσεις αυτές ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές των x,y είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Γενικά

Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ και παριστάνει ευθεία όταν $α \neq 0$ ή $β \neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

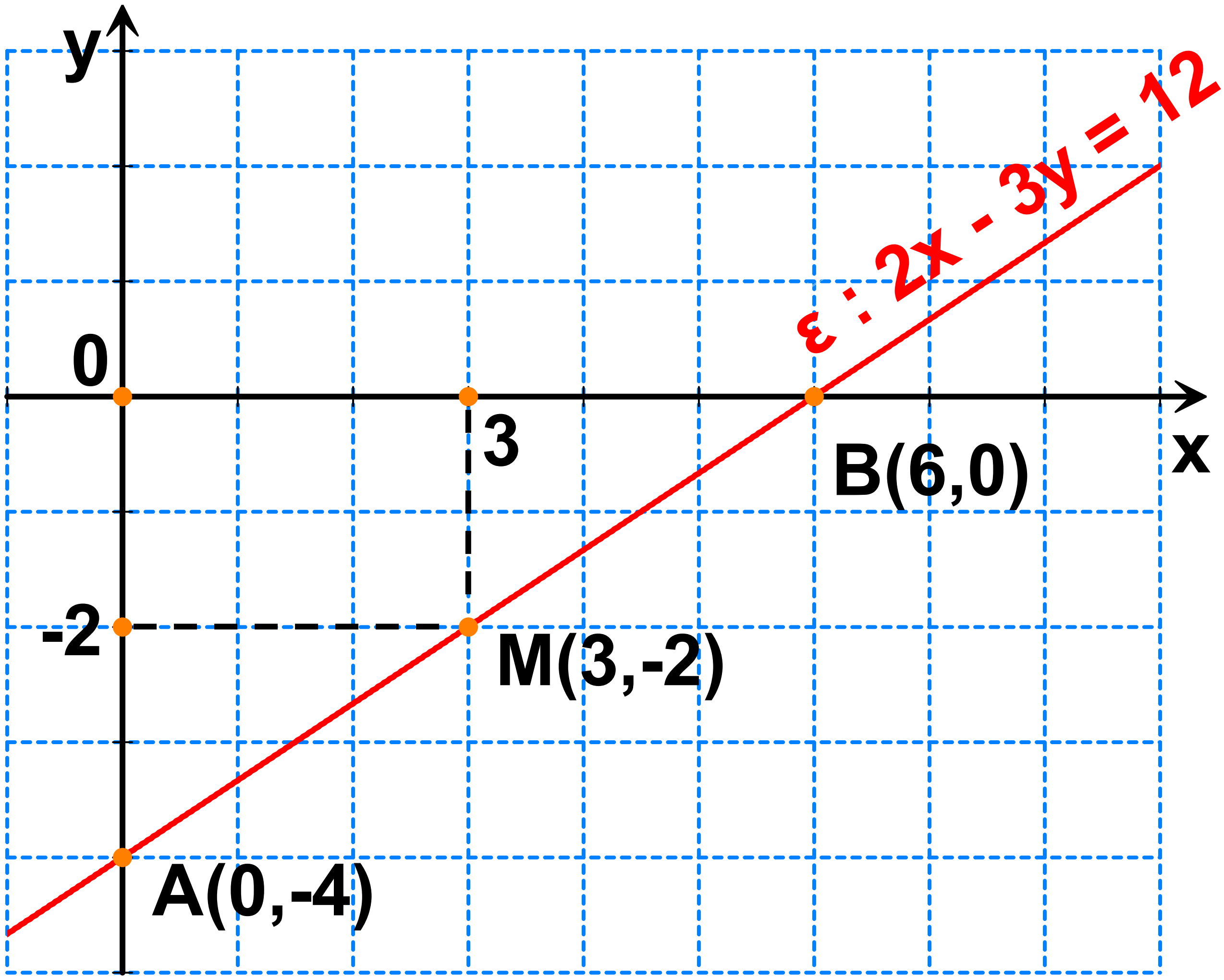
1 α) Να σχεδιαστεί η ευθεία

ε : $2x - 3y = 12$.

β) Ένα σημείο Μ έχει τεταγμένη -2. Ποια πρέπει να είναι η τετμημένη του, ώστε το σημείο ν' ανήκει στην ευθεία ε;

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία ε : $2x - 3y = 12$ αρκεί να προσδιορίσουμε δύο σημεία της. Για $x = 0$ έχουμε $-3y = 12$, οπότε $y = -4$. Για $y = 0$ έχουμε $2x = 12$, οπότε $x = 6$. Άρα η εξίσωση $2x - 3y = 12$ παριστάνει ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α(0, -4) και Β(6, 0).



β) Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε, αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της.
Αφού το σημείο Μ έχει τεταγμένη $y = -2$ για την τετμημένη του x πρέπει να ισχύει
$2x - 3(-2) = 12$ ή $2x + 6 = 12$ ή $2x = 6$ ή $x = 3$.
Άρα η τετμημένη του Μ είναι $x = 3$.

2 **Αν η ευθεία ε : αx - y = 1 διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), τότε να προσδιοριστεί η τιμή του α και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της ε με τους άξονες.**

Λύση

Η ευθεία ε : αx - y = 1 διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση αx - y = 1. Άρα έχουμε 2α - 5 = 1 ή 2α = 6 ή α = 3. Επομένως η ευθεία ε έχει εξίσωση 3x - y = 1.

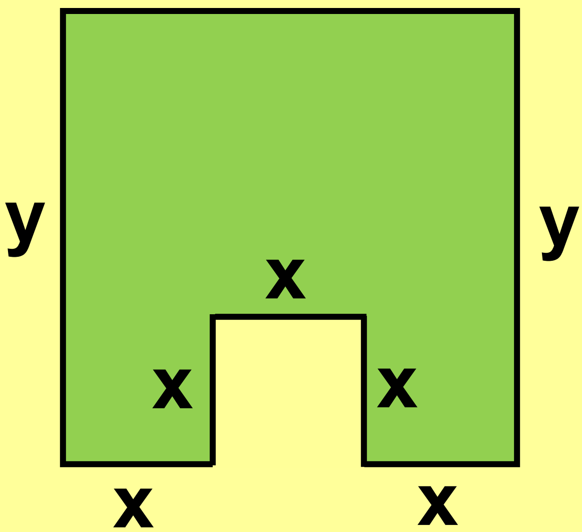
Για x = 0 έχουμε 3 · 0 - y = = 1 ή -y = 1 ή y = -1, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, -1).

Για y = 0 έχουμε 3x - 0 = 1 ή 3x = 1 ή $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $(\frac{1}{3}, 0)$.

3 **Η περίμετρος του παρακάτω σχήματος είναι 40 m.**

α) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα x, y.

β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, ποια είναι η μέγιστη τιμή του x;



Λύση

α) Η περίμετρος του σχήματος είναι $5x + y + 3x + y$, άρα ισχύει $5x + y + 3x + y = 40$ ή $8x + 2y = 40$ ή $4x + y = 20$ (1).

β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, τότε η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 10 και πάνω, δηλαδή ισχύει

$y \geq 10$. Από την ισότητα (1) έχουμε $y = 20 - 4x$, οπότε πρέπει $20 - 4x \geq 10$ ή $-4x \geq 10 - 20$ ή $-4x \geq -10$ ή $x \leq 2{,}5$. Άρα η μεταβλητή x παίρνει τιμές από 2,5 και κάτω, οπότε η μέγιστη τιμή της είναι 2,5 m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα ζεύγη (3, 2), (1, 5), (0, 6), (-3, 10), (-2, 8) είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Το σημείο (3, -2) ανήκει στην ευθεία ε : $3x - y = 7$. ☐

β) Η ευθεία ε : $5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (-2, 0). ☐

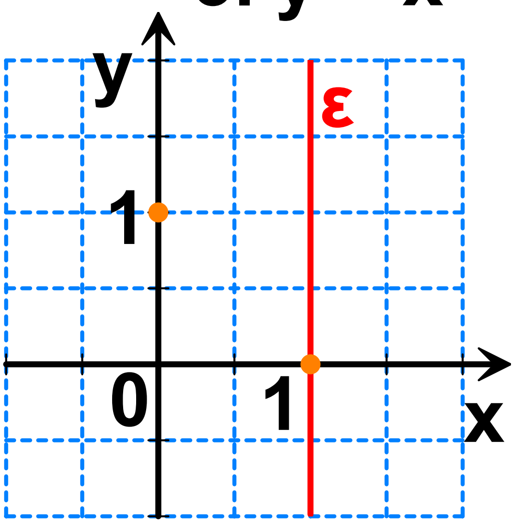
γ) Η ευθεία ε : $2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. ☐

δ) Η ευθεία ε : 3x + y = 6 τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, 3). ☐

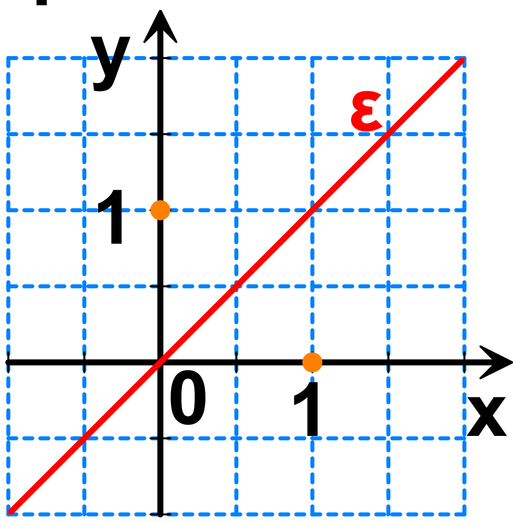
3 **Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:**

1. y = 1 2. x = -1

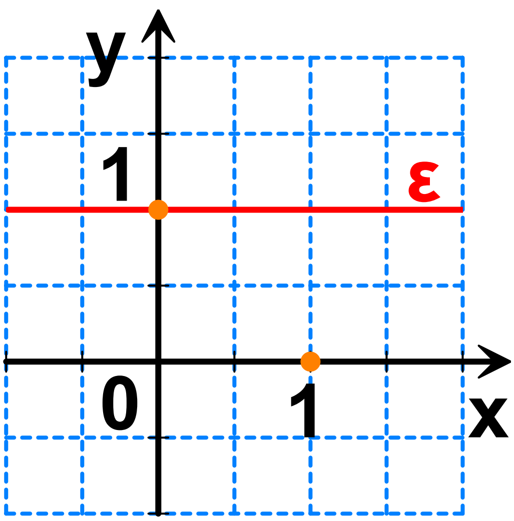
3. y = x 4. x = 1



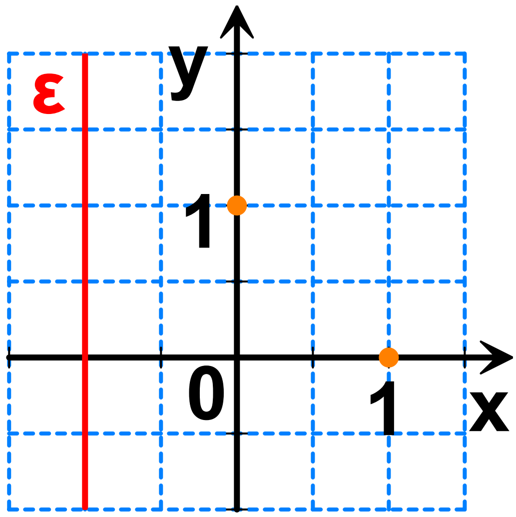
(σχήμα α)



(σχήμα β)



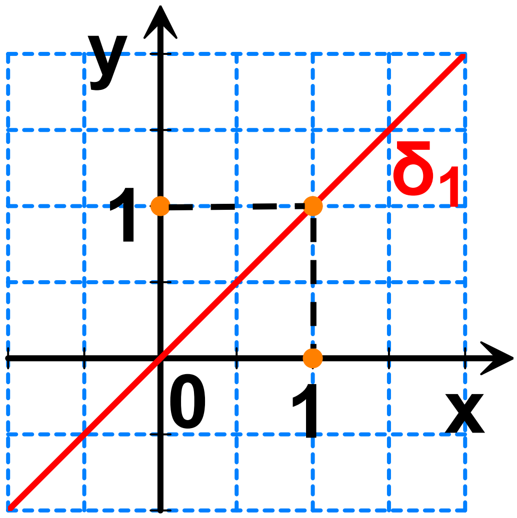
(σχήμα γ)

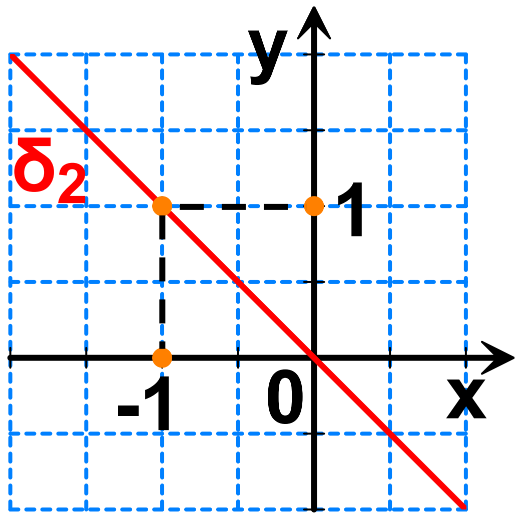


(σχήμα δ)

α	β	γ	δ

4 Οι ευθείες δ1, δ2 διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.





i) Η εξίσωση της δ_1 είναι:

α) $x = 1$ β) $y = 1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι:

α) $x = -1$ β) $y = -1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, -3) και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -3$

δ) $y = -3$ ε) $4x - 3y = 0$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, -2) και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -2$

δ) $y = -2$ ε) $4x - 2y = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 **Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:**

α) $\varepsilon_1 : 2x - y = 2$

β) $\varepsilon_2 : -4x + 2y = 10$

γ) $\varepsilon_3 : 10x - 5y = 20$

Τι παρατηρείτε;

2 **Δίνεται η ευθεία ε : $6x + 2y = 8 - 2\lambda$**

α) Να βρείτε τον αριθμό λ, ώστε η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για $\lambda = 4$ να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

3 **Αν η ευθεία ε : $4x + 3y = 12$ τέμνει τους άξονες x΄ και y΄y στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, τότε:**

α) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

4 **α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x = -4$, $\varepsilon_2 : 3y = 6$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.**

β) Ποια από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το προηγούμενο σημείο;

$\zeta_1 : 2x - y = 6$,

$\zeta_2 : 3x + y = 10$

και $\zeta_3 : -5x + 3y = 16$

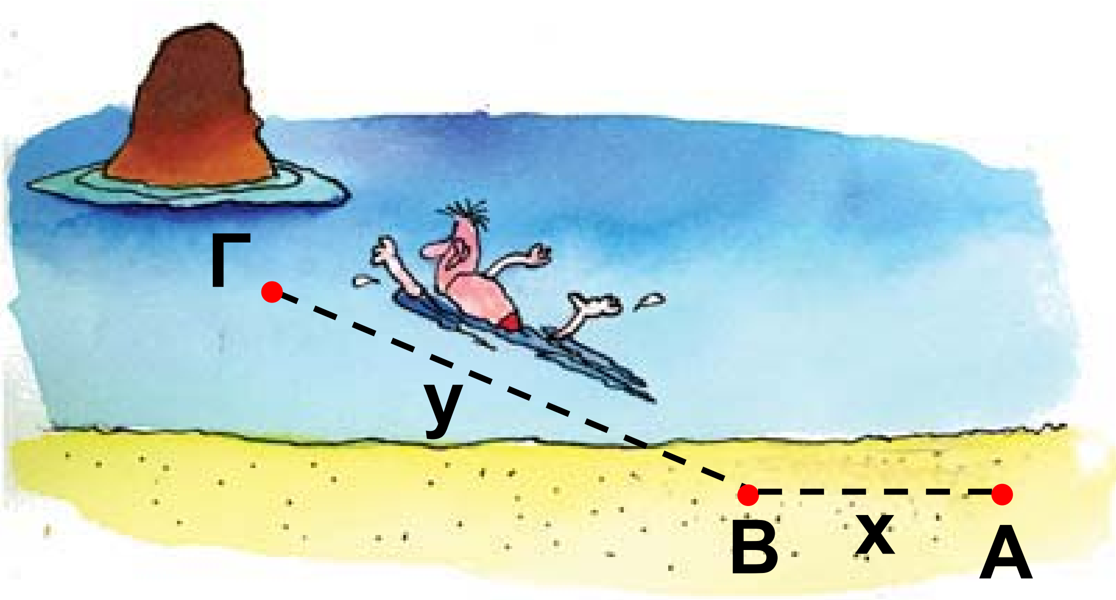
5 **α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:**

$x = -1$, $x = 5$, $y = -2$ και $y = 3$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται.

6 α) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι:
α) παράλληλη στον άξονα x'x
β) παράλληλη στον άξονα y'y.
Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.

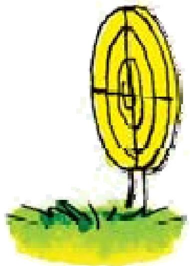
7 Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύμπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:
α) Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x, y.
β) Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύμπησε;



8 **Σ’ ένα ξενώνα υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Αν ο ξενώνας έχει συνολικά 25 κρεβάτια, τότε να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x, y. Να χαράξετε σε τετραγωνισμένο χαρτί την αντίστοιχη ευθεία και από το σχήμα να διαπιστώσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια είναι δυνατό να έχει ο ξενώνας.**

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

✓ **Μαθαίνω τι λέγεται γραμμικό σύστημα και πώς επιλύεται γραφικά.**



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε τις ευθείες
$\varepsilon_1 : x + y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + y = 8$.

2. Να βρείτε το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους και να εξετάσετε αν είναι λύση και των δύο εξισώσεων.

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y,

π.χ. $x + y = 5$ και $2x + y = 8$ και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y.

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος των αριθμών (3, 2) επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του γραμμικού συστήματος, $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

αφού $\begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot 3 + 2 = 8 \end{cases}$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ζεύγος (3, 2) είναι λύση του συστήματος.

Γενικά

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και

y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Πώς όμως μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y; Δηλαδή πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε ζεύγος (x, y) που να είναι λύση του;
Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y επιλύεται γραφικά αλλά και αλγεβρικά.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

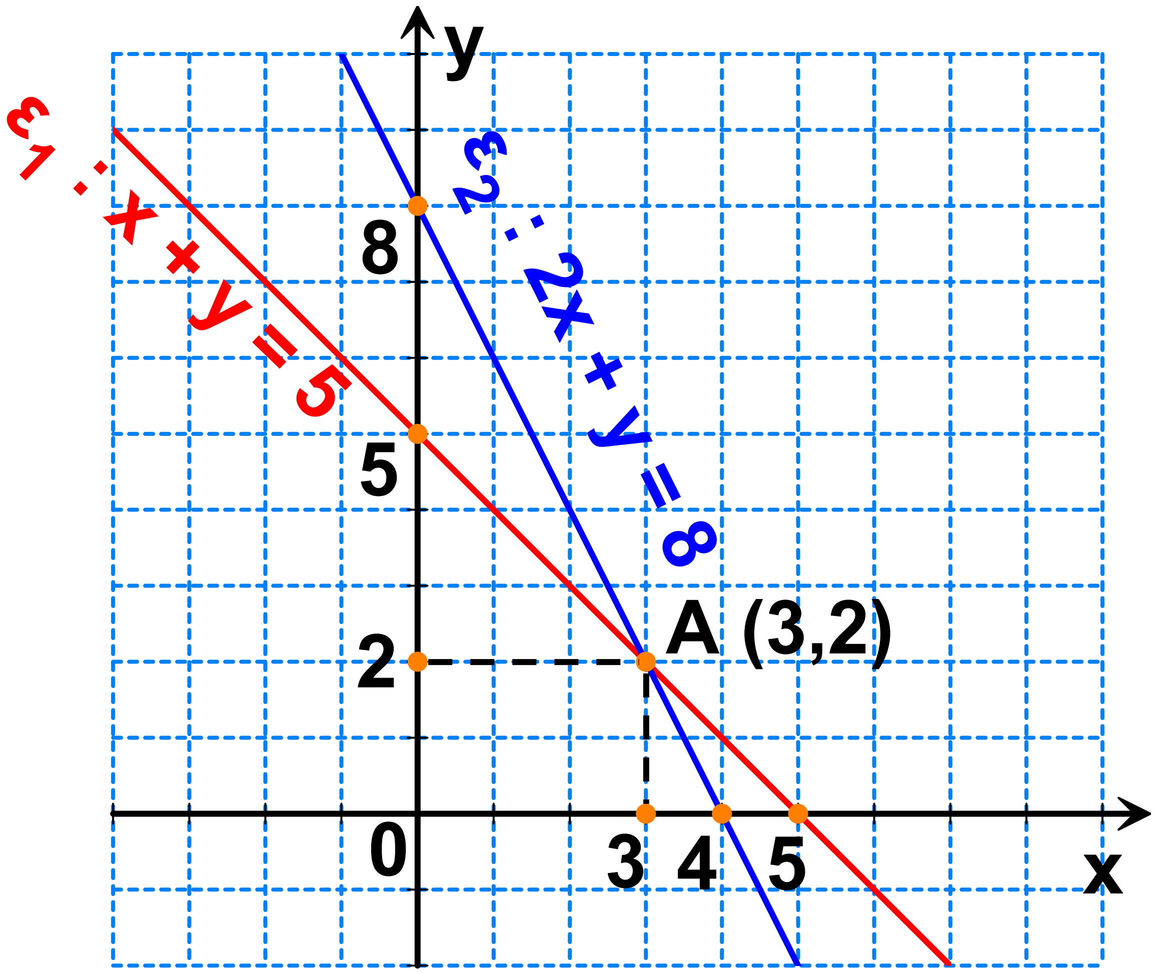
Σύστημα με μοναδική λύση

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος π.χ. του $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες

$ε_1$: x + y = 5 και

$ε_2$: 2x + y = 8, οι οποίες όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα τέμνονται στο σημείο Α.



Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (3, 2) του κοινού σημείου Α των ευθειών αυτών.

Επειδή το σημείο Α(3, 2) ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του $x = 3$ και $y = 2$ επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα το ζεύγος (3, 2) είναι λύση του συστήματος. Οι ευθείες όμως $ε_1$, $ε_2$ δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε και το σύστημα δεν έχει άλλη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος (3, 2) είναι η **μοναδική** λύση του συστήματος.

Αδύνατο σύστημα

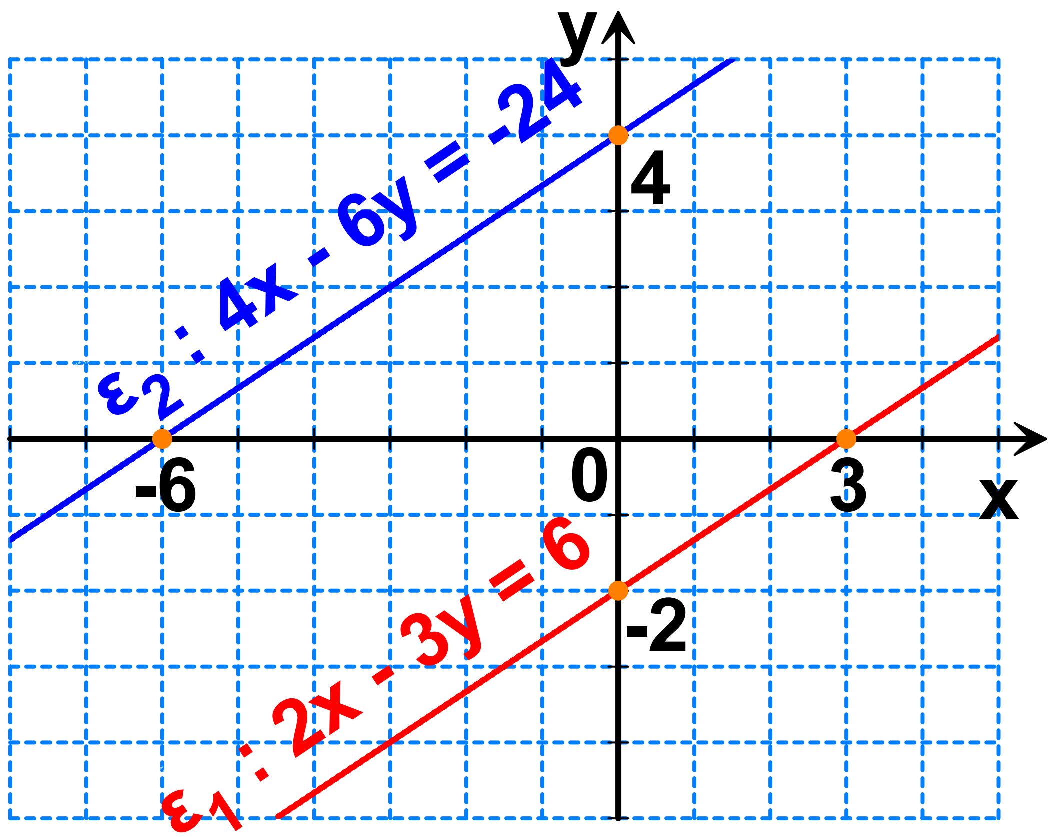
Για να επιλύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$ε_1 : 2x - 3y = 6$ και $ε_2 : 4x - 6y = -24$, οι οποίες όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα είναι **παράλληλες**.

Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.



Αόριστο σύστημα

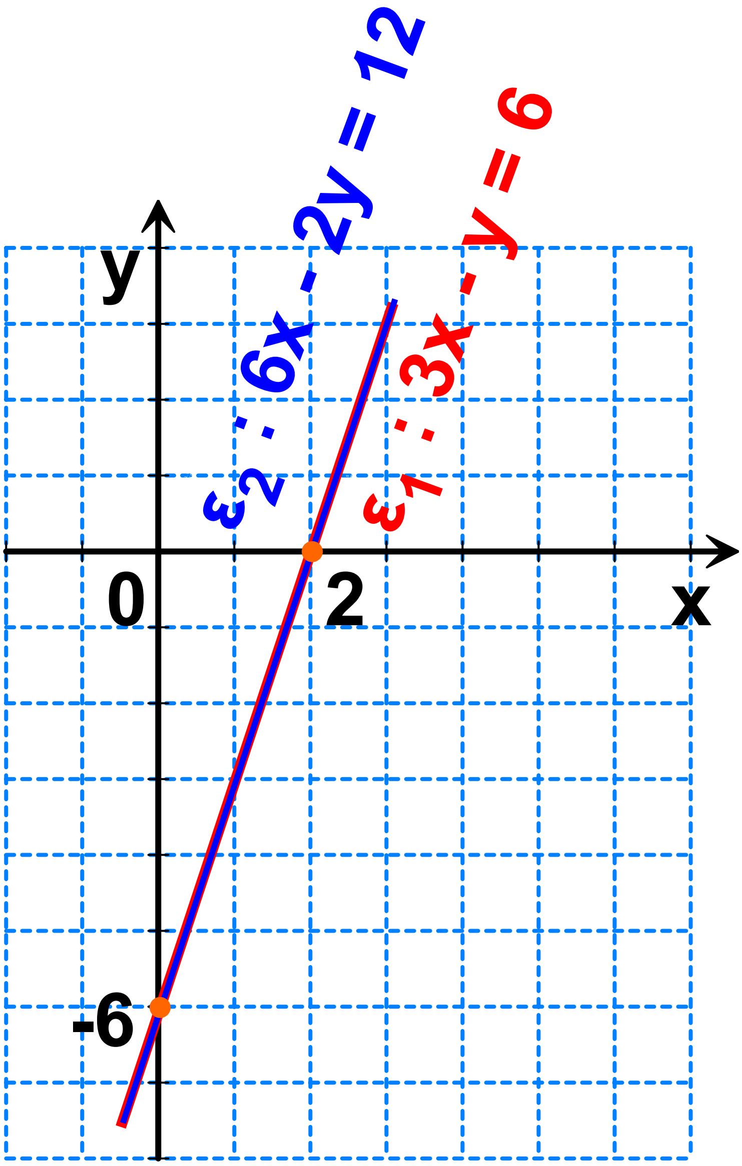
Για να επιλύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 3x - y = 6$ και $\varepsilon_2 : 6x - 2y = 12$,

οι οποίες, όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα, **συμπίπτουν (ταυτίζονται)**. Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **α) Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα**

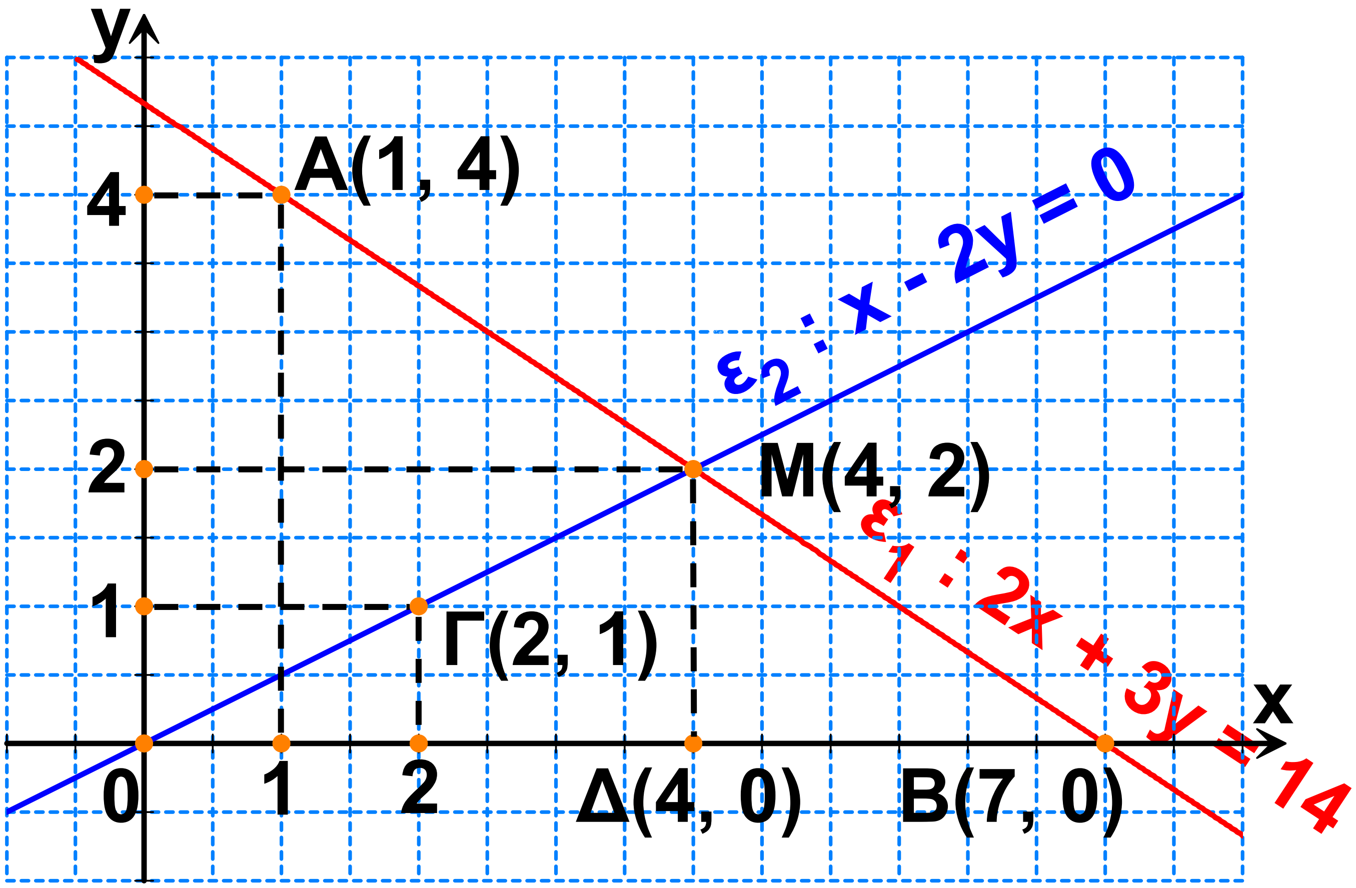
$$(\Sigma):\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1: $2x + 3y = 14$, ε_2: $x - 2y = 0$ και ο άξονας x'x.

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1 : 2x + 3y = 14$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 1$ έχουμε $2 + 3y = 14$ ή $3y = 12$, οπότε $y = 4$. Για $x = 7$ έχουμε $2 \cdot 7 + 3y = 14$ ή $3y = 0$, οπότε $y = 0$. Άρα η ευθεία ε_1

διέρχεται από τα σημεία Α(1, 4) και Β(7, 0).
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $ε_2$: $x - 2y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.



Για $x = 0$ έχουμε $-2y = 0$, οπότε $y = 0$. Για $x = 2$ έχουμε $2 - 2y = 0$ ή $-2y = -2$, οπότε $y = 1$. Άρα η ευθεία $ε_2$ διέρχεται από τα σημεία 0(0, 0) και Γ(2, 1). Παρατηρούμε ότι οι

ευθείες $ε_1$, $ε_2$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το Μ(4, 2), οπότε το σύστημα (Σ) έχει μία λύση την
(x, y) = (4, 2).

β) Το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και ο άξονας x'x είναι το ΟΜΒ, το οποίο έχει βάση ΟΒ = 7 και ύψος ΜΔ = 2.

Άρα το εμβαδόν του είναι $Ε = \dfrac{7 \cdot 2}{2} = 7$ τετραγωνικές μονάδες.

2 Να σχεδιάσετε τις ευθείες:

$ε_1 : x - y = 0$, $ε_2 : x + y = 0$,
$ε_3 : -x + y = -3$.

Πόσες λύσεις έχει καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

$$(Σ_1) : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad (Σ_2) : \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Λύση

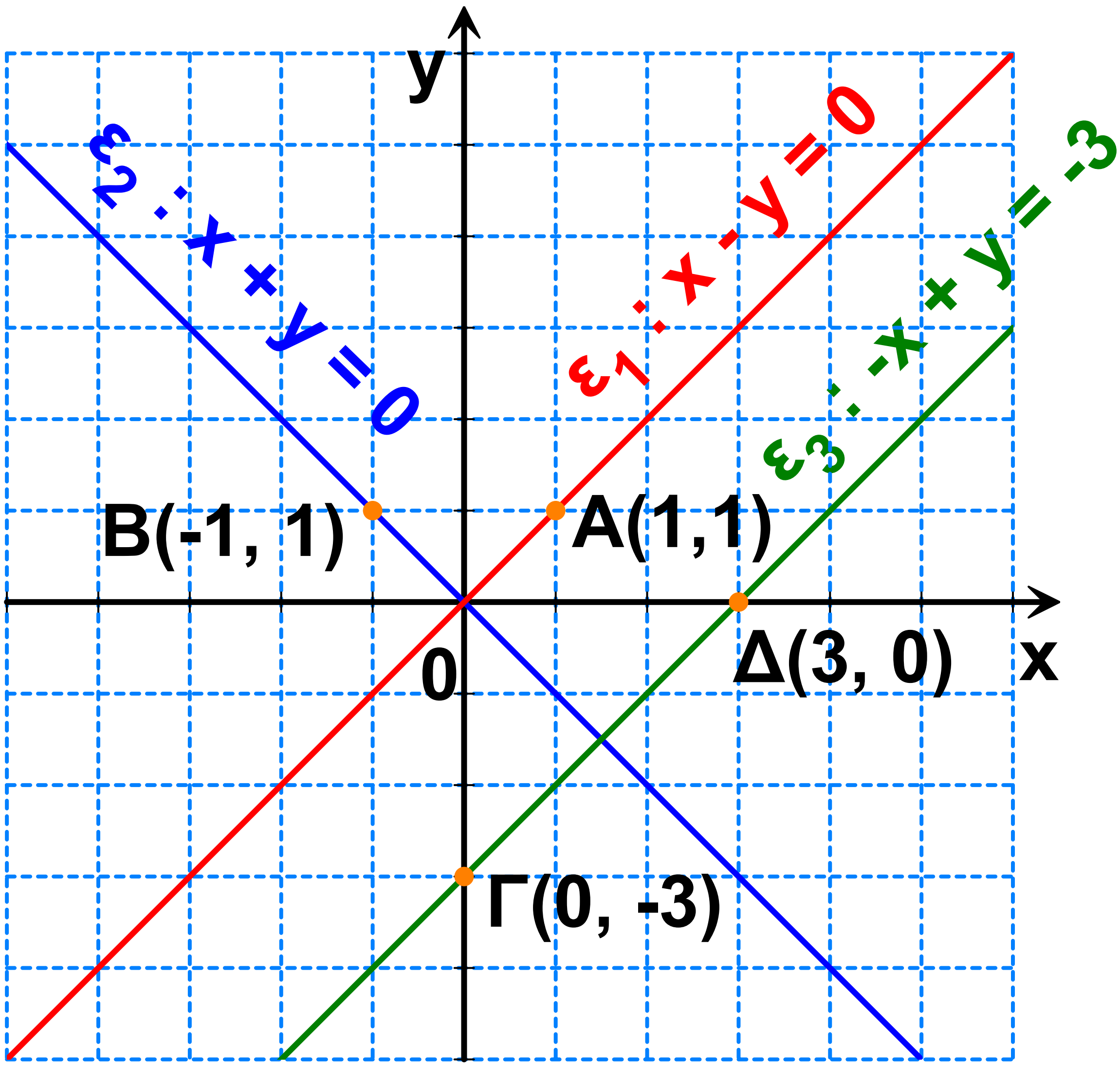
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $ε_1 : x - y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της. Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = 1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(1, 1)$.

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $ε_2 : x + y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.

Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = -1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία $ε_2$ διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $B(-1, 1)$.

Σχεδιάζουμε και την ευθεία $ε_3 : -x + y = -3$. Για $x = 0$ έχουμε $y = -3$ και για $y = 0$ έχουμε $x = 3$.

Άρα η ευθεία $ε_3$ διέρχεται από τα σημεία $Γ(0, -3)$ και $Δ(3, 0)$.



Το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση την (0, 0), αφού οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Ο(0, 0), ενώ το σύστημα (Σ_2) είναι αδύνατο, αφού οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου:

α) Α(-3, 2) β) Β(1, -1)
γ) Γ(1, -4) δ) Δ(2, -3)

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται.	1.Το σύστημα είναι αόριστο.
β. Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ είναι παράλληλες.	2. Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ συμπίπτουν.	3. Το σύστημα είναι αδύνατο.

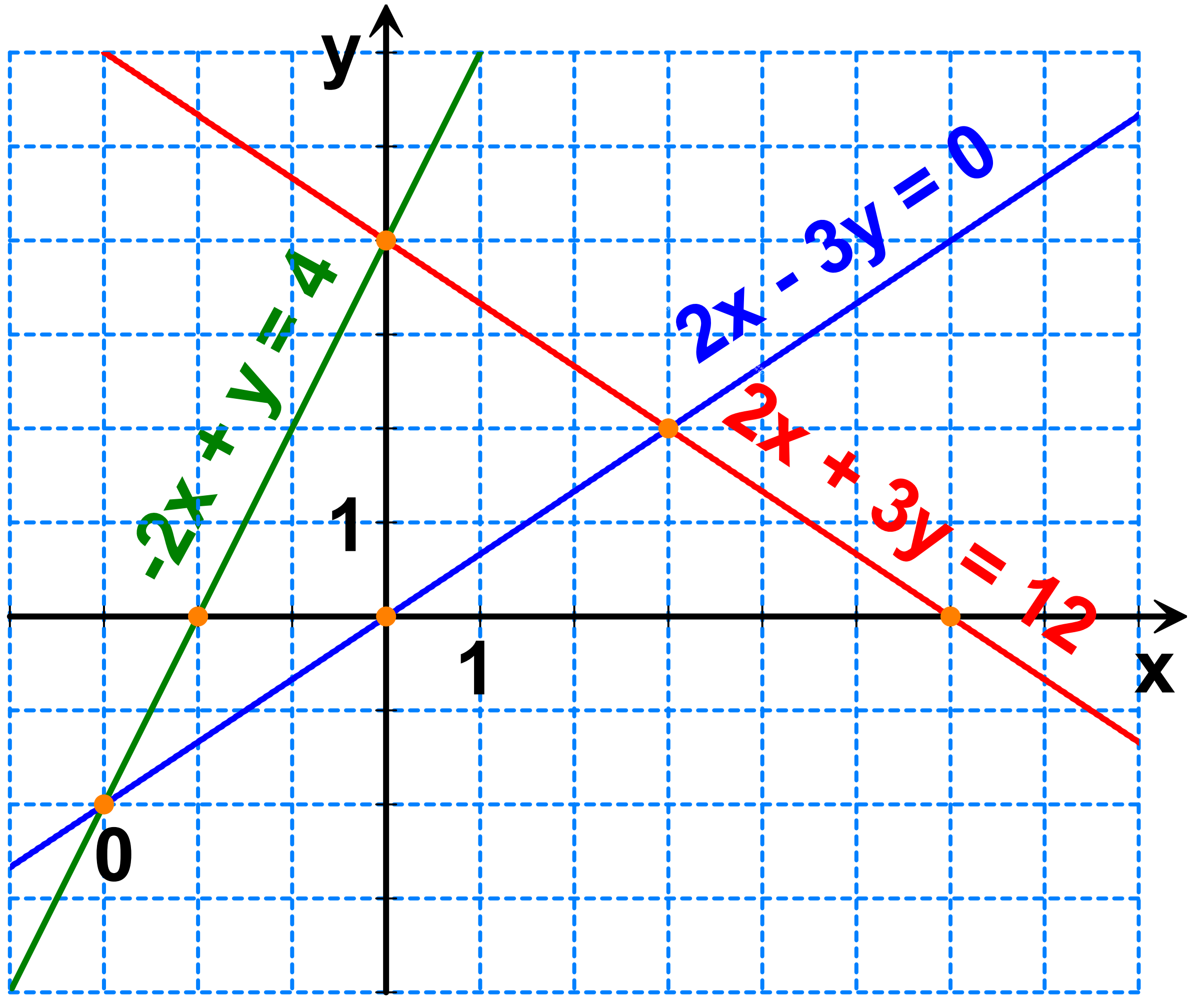
α	β	γ

3 **Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.**

α) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$

2 **Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:**

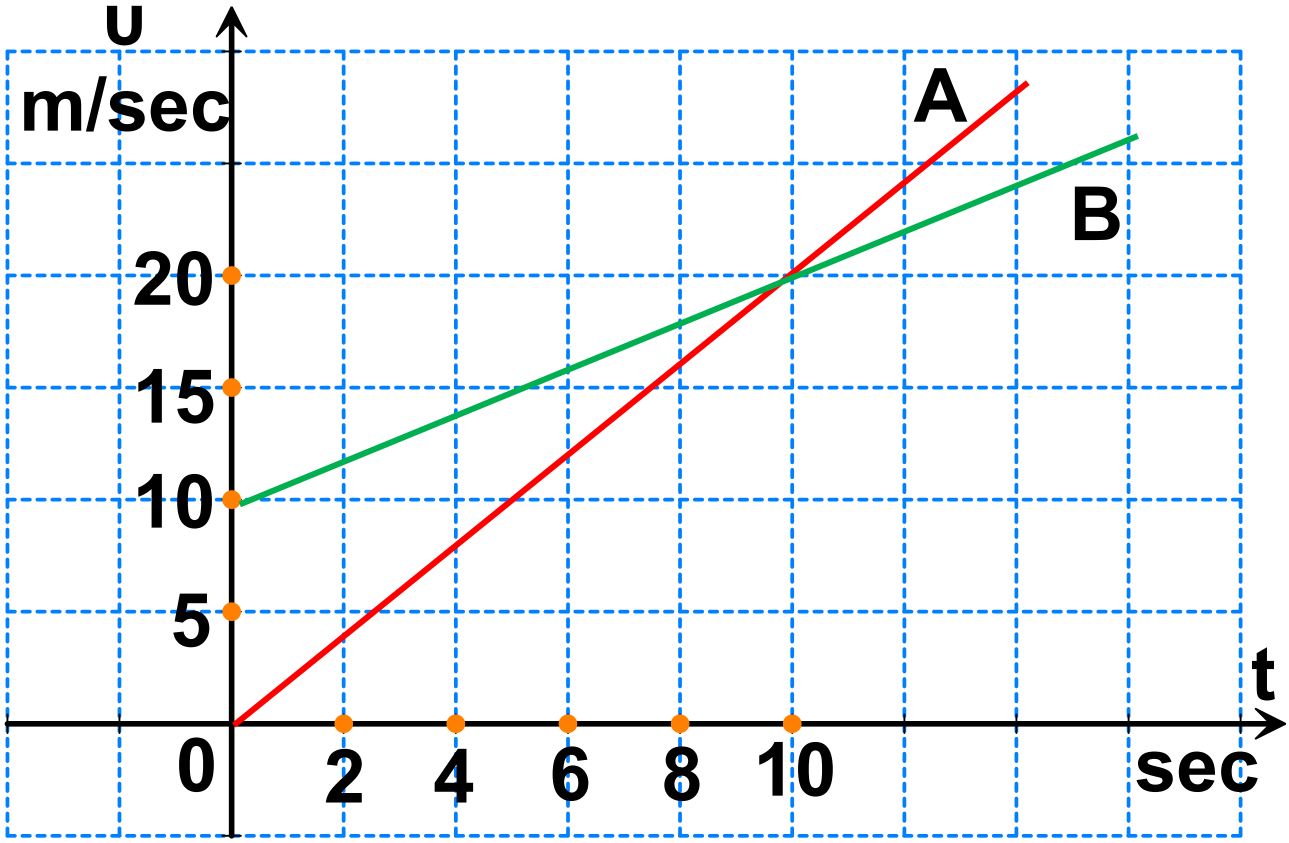
α) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

3 **Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου δύο αυτοκινήτων Α και Β. Να βρείτε:**

α) Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου.

β) Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνησή τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και ποια θα είναι αυτή;



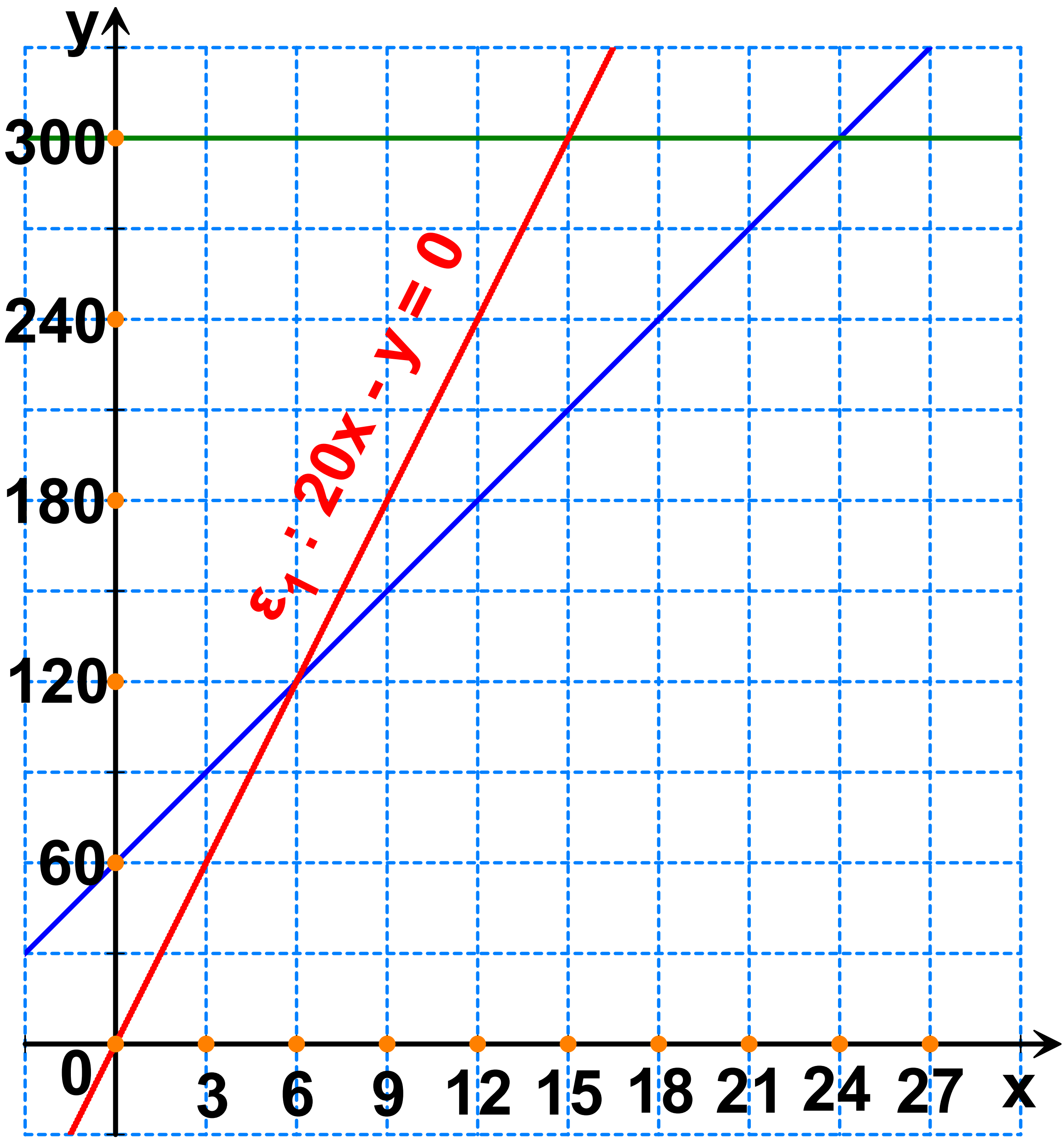
4 Ένας φίλαθλος για να παρακολουθήσει τους αγώνες μιας ομάδας έχει τις εξής δυνατότητες:

- Να πληρώνει 20 € για κάθε αγώνα που παρακολουθεί.
- Να πληρώσει 60 € ως αρχική συνδρομή και για κάθε αγώνα που παρακολουθεί να πληρώνει 10 €.

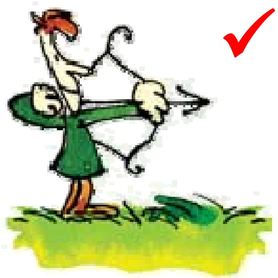
- Να πληρώσει 300 € και να παρακολουθεί όσους αγώνες επιθυμεί.
Η σχέση που συνδέει το πλήθος των αγώνων που θα παρακολουθήσει ο φίλαθλος με το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει σε κάθε περίπτωση παριστάνεται με σημεία μιας από τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$.
α) Να αντιστοιχίσετε κάθε περίπτωση σε μια από τις τρεις ευθείες.
β) Πόσους αγώνες πρέπει να παρακολουθήσει ένας φίλαθλος, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει να είναι τα ίδια στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση;
γ) Αν ο φίλαθλος παρακολούθησε τελικά 12 αγώνες, ποια περίπτωση ήταν η πιο συμφέρουσα;
δ) Αν παρακολούθησε μόνο 15 αγώνες και δεν είχε επιλέξει την πιο

συμφέρουσα περίπτωση, πόσα ευρώ ζημιώθηκε;

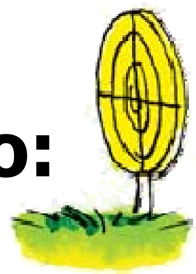
ε) Πότε είναι πιο συμφέρουσα κάθε περίπτωση;



3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος



✓ Μαθαίνω να λύνω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο:



α) της αντικατάστασης
β) των αντίθετων συντελεστών

✓ Μαθαίνω να λύνω προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Κατά τη διάρκεια ενός ποδοσφαιρικού πρωταθλήματος, από τους 30 αγώνες που έδωσε μια ομάδα ηττήθηκε στους 10, ενώ στους υπόλοιπους κέρδισε ή έφερε ισοπαλία. Για κάθε νίκη της πήρε 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία πήρε 1

βαθμό και για κάθε ήττα δεν πήρε βαθμό. Αν τελικά συγκέντρωσε 44 βαθμούς, πόσες φορές νίκησε και πόσες έφερε ισοπαλία;

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.
Η αλγεβρική όμως επίλυσή του, όπως θα δούμε σ’ αυτή την παράγραφο, μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.
Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον

ένα από τους δύο αγνώστους και να καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο. Δύο από τις μεθόδους με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό είναι οι εξής:

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να επιλύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$$

με τη μέθοδο της αντικατάστασης εργαζόμαστε ως εξής:

• Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

• Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

• Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

• Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Λύνουμε την εξίσωση $x + y = 20$ ως προς x και έχουμε $x = 20 - y$
Αντικαθιστούμε το x με $20 - y$ στην εξίσωση $x + 3y = 44$ και έχουμε:

$$(20 - y) + 3y = 44$$
$$20 + 2y = 44$$
$$2y = 44 - 20$$
$$2y = 24 \text{ άρα } y = 12$$

Για $y = 12$ από την εξίσωση $x = 20 - y$ έχουμε:

$$x = 20 - 12$$
$$x = 8$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 8$, $y = 12$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (8, 12)$

Για επαλήθευση, αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 8$ και $y = 12$ στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (8, 12) είναι λύση του,

αφού $\begin{cases} 8 + 12 = 20 \\ 8 + 3 \cdot 12 = 44 \end{cases}$

Στην ίδια λύση θα καταλήγαμε και αν λύναμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς y.

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Αν στις δύο εξισώσεις, οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι αντίθετοι αριθμοί, τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα πιο

γρήγορα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

Για παράδειγμα, στο σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

οι συντελεστές του y είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, τότε ο άγνωστος y απαλείφεται.

Έτσι έχουμε:
$3x + 5x = 12 + 4$ ή $8x = 16$, οπότε $x = 2$.
Αν αντικαταστήσουμε την τιμή του x σε μια από τις δύο εξισώσεις, π.χ. στην πρώτη, τότε έχουμε:
$3 \cdot 2 + 2y = 12$ ή $2y = 6$ ή $y = 3$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$.

Όταν όμως έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$ στο οποίο δεν υπάρχουν αντίθετοι συντελεστές στον ίδιο άγνωστο τότε:

- **Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε**

- **Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.**

- **Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.**

• **Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.**

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο x, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το -2 και της δεύτερης με το 3, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ (-2) \\ \cdot\ 3 \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases}$$

$$-\cancel{6x} - 10y + \cancel{6x} + 21y = -2 + 24$$

$$11y = 22, \text{ οπότε } y = 2$$

Αφού y = 2, η εξίσωση 3x + 5y = 1 γράφεται:

$$3x + 5 \cdot 2 = 17 \quad \text{ή} \quad 3x + 10 = 1$$

$$3x = -9 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι x = -3, y = 2, δηλαδή το ζεύγος (x, y) = (-3, 2) είναι λύση του, αφού

$$\begin{cases} 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1 \\ 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 8 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12°.**

Λύση

Αν ω, φ είναι οι δύο παραπληρωματικές γωνίες, τότε ω + φ = 180°. Αν ω είναι η μεγαλύτερη, τότε έχουμε και ω = 3φ + 12°. Για να βρούμε τις γωνίες ω, φ λύνουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων.

$$\begin{cases} \omega + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3\varphi + 12^\circ + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3φ + φ = 180° - 12° \\ ω = 3φ + 12° \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} 4φ = 168° \\ ω = 3φ + 12° \end{cases}$$

$$ή \begin{cases} φ = 42° \\ ω = 3 \cdot 42° + 12° \end{cases} \quad ή \begin{cases} φ = 42° \\ ω = 138° \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες γωνίες είναι
$ω = 138°$ και $φ = 42°$.

2 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (x + 2y) + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Λύση

Αντικαθιστούμε το $x + 2y$ με 4 στην πρώτη εξίσωση του συστήματος, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 4 + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} y = 7 - 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$ή \begin{cases} y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} y = 3 \\ x + 2 \cdot 3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + 6 = 4 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 - 6 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$.

3 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{3x - y}{2} - \dfrac{x + y}{8} = 1 \\ \dfrac{2x - 1}{5} + \dfrac{y - 3}{2} = 2 \end{cases}$$

Λύση

Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και τις απαιτούμενες πράξεις, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 8 \cdot \dfrac{3x - y}{2} - 8 \cdot \dfrac{x + y}{8} = 8 \cdot 1 \\ 10 \cdot \dfrac{2x - 1}{5} + 10 \cdot \dfrac{y - 3}{2} = 10 \cdot 2 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} 4(3x - y) - (x + y) = 8 \\ 2(2x - 1) + 5(y - 3) = 20 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y - 15 = 20 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y = 20 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} 11x - 5y = 8 \\ 4x + 5y = 37 \end{cases}$$

Οι συντελεστές του αγνώστου y είναι αντίθετοι, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
$11x + 4x = 8 + 37$ ή $15x = 45$ ή $x = 3$.

Αντικαθιστούμε την τιμή $x = 3$ στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:
$4 \cdot 3 + 5y = 37$ ή $12 + 5y = 37$ ή $5y = 25$ ή $y = 5$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 3$, $y = 5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, 5)$.

4 Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;

Λύση

Αν x ήταν τα κέρματα των 50 λεπτών και y ήταν τα κέρματα του 1 ευρώ, τότε έχουμε την εξίσωση
$x + y = 126$ (1).

Η συνολική αξία των κερμάτων σε ευρώ ήταν $0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y$, οπότε έχουμε την εξίσωση
$0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90$ (2).
Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\left\{\begin{array}{r} x + y = 126 \\ 0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90 \end{array}\right.\left|\begin{array}{l} \\ \cdot\ (-2) \end{array}\right. \qquad ή$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 126 \\ -x - 2y = -180 \end{array}\right.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε
$y - 2y = 126 - 180$ ή $-y = -54$ ή $y = 54$.
Αντικαθιστούμε την τιμή $y = 54$ στην πρώτη εξίσωση και έχουμε:
$x + 54 = 126$ ή $x = 126 - 54$
ή $x = 72$.
Άρα υπήρχαν 72 κέρματα των 50 λεπτών και 54 κέρματα του 1 ευρώ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

α) (2, 4) β) (7, -1)
γ) (6, 2) δ) (5, 1)

2 Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:

α) την πρώτη εξίσωση ως προς x;
β) την πρώτη εξίσωση ως προς y;
γ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς x;
δ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς y;

3 Αν στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$

εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει;

α) $3x = -1$ β) $2x = -9$

γ) $5x = -10$ δ) $5x = 10$

4 Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα;

$\begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} \left|\begin{matrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right.$

$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases} \left|\begin{matrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right.$

5 **Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;**

α) $\begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

6 **Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα**

$(\Sigma_1): \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $(\Sigma_2): \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ -5x + 7y = 4 \end{cases}$

αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 4x - y = 10 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

2 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$

3 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2x + y}{4} = 3 \\ \dfrac{3x - y}{2} = 4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{4} - y = 1 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \dfrac{x - 5}{2} + \dfrac{2y + 1}{3} = 3 \\ \dfrac{x + 4}{3} - \dfrac{y - 6}{2} = 4 \end{cases}$

4 **Να λύσετε τα συστήματα:**

α) $\begin{cases} 4x - 3(2x + 3y) = 20 - x + y \\ 2(x - 2y) + 5(x - 2) = 3y + 4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} x(y + 4) = y(x - 6) - 15 + 3x \\ (x - 1)(x + 2y) = (x + y)^2 - y(y + 1) \end{cases}$

5 **Να λύσετε τα συστήματα:**

α) $\begin{cases} 1{,}3\alpha - 0{,}8\beta = 2{,}1 \\ 0{,}9\alpha + 0{,}4\beta = 0{,}5 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{\omega}{4} - 0{,}2\varphi = 1{,}5 \\ 3\omega + 1{,}4\varphi = -1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2{,}5x + 3{,}2y = -1{,}8 \\ 1{,}6x - 2{,}4y = -5{,}6 \end{cases}$

6 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{\alpha} + \dfrac{4}{\beta} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \dfrac{2}{\omega} - \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-6}{\omega} + \dfrac{9}{\varphi} = 1 \end{cases}$

7 Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x + 5y = 10$ και $\varepsilon_2 : x - y = 1$.

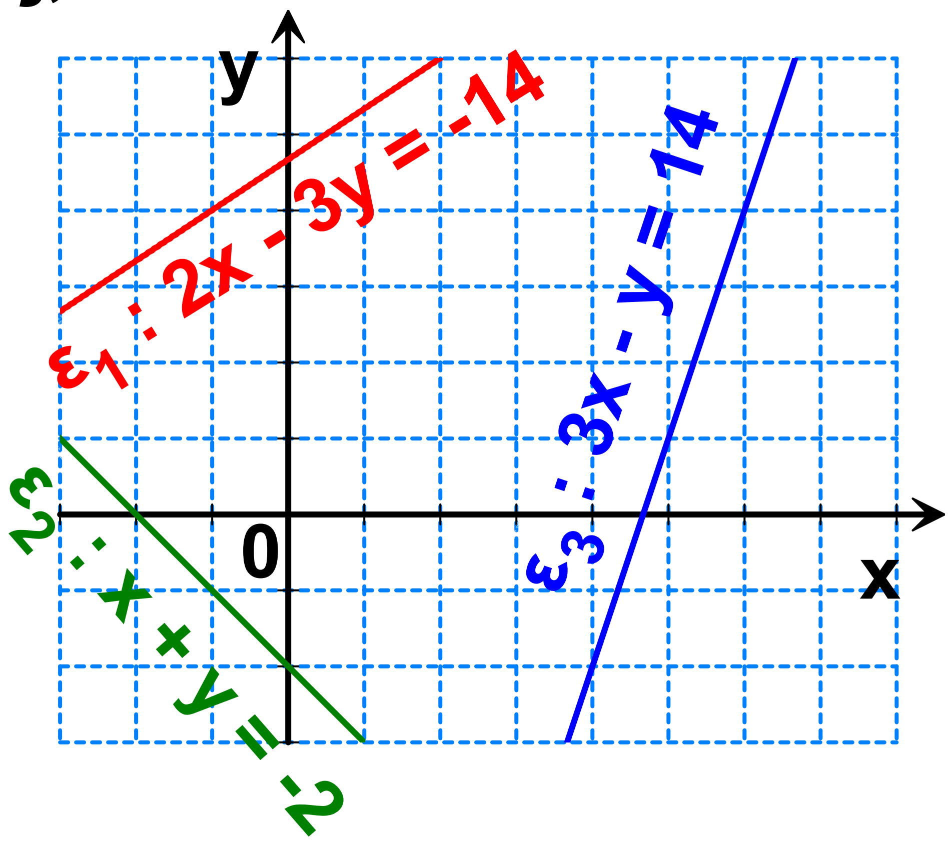
8 Οι ευθείες:

$\varepsilon_1 : 2x - 3y = -14$

$\varepsilon_2 : x + y = -2$

$\varepsilon_3 : 3x - y = 14$

τέμνονται έξω από το χαρτί σχεδίασης. Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων τους;



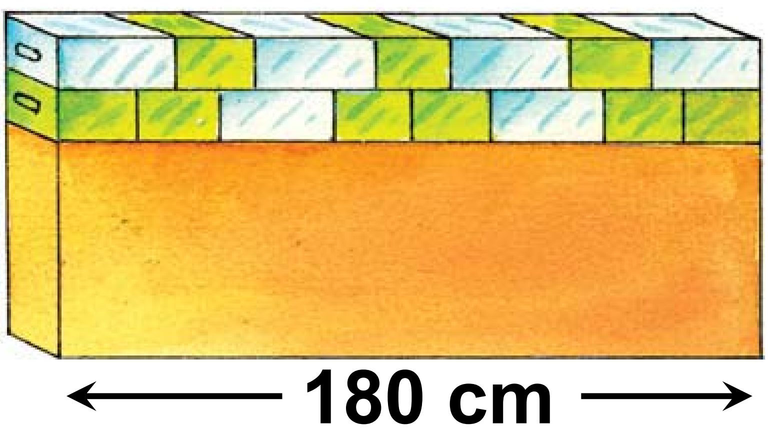
9 Αν 3 + 3 + 3 + … + 3 + 5 + 5 + 5 + + … + 5 = 410 και το πλήθος των προσθετέων του πρώτου μέλους είναι 100, να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 3 και πόσες φορές ο αριθμός 5.

10 Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει ως λύση x = 1 και y = 2, να βρείτε τις τιμές των αριθμών α, β.

11 Η ευθεία με εξίσωση αx + y = β διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(-3, -2). Να βρείτε τις τιμές των α, β.

12 Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - \mu)x +$ $+ \mu - 2\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 3.

13 Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



14 Συσκευάσαμε 2,5 τόνους ελαιόλαδου σε 800 δοχεία των 2 και 5 κιλών. Να βρείτε πόσα δοχεία χρησιμοποιήσαμε από κάθε είδος.

15 Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και τη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16. Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες, ο βαθμός της Χημείας αυξήθηκε κατά 4 μονάδες με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε καθένα από τα δύο μαθήματα κατά το πρώτο τρίμηνο;

16 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα του απέχουν 58 cm.

Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

17 Αν οι μαθητές ενός τμήματος καθίσουν ανά ένας σε κάθε θρανίο, τότε θα μείνουν όρθιοι 8 μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δύο θα μείνουν κενά 4 θρανία. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία.

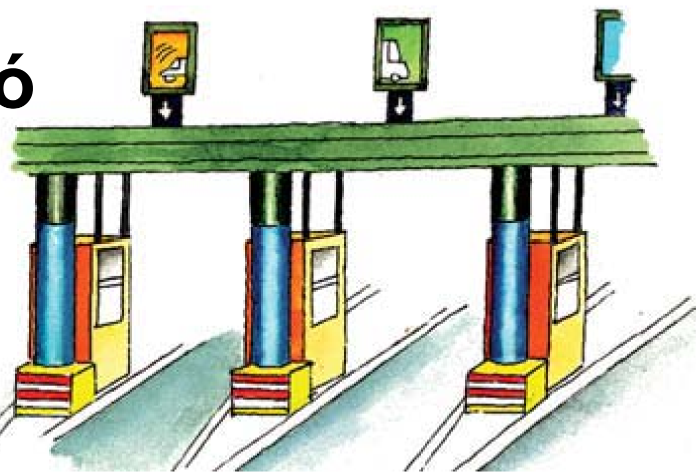
18 Μια ποτοποιία παρασκεύασε 400 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 38% vol, αναμειγνύοντας δύο ποιότητες με περιεκτικότητες 32% vol και 48% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποιότητα χρησιμοποίησε;

19 Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$, όπου t ο χρόνος που

μεσολάβησε από τη στιγμή του φρεναρίσματος.

Αν 2 sec μετά το φρενάρισμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12m/sec και 2sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα $υ_0$ και την επιβράδυνση α. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο;

20 Από ένα σταθμό διοδίων πέρασαν 945 αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες και εισπράχτηκαν



1810 €. Αν ο οδηγός κάθε αυτοκινή-του πλήρωσε 2 € και ο οδηγός κάθε μοτοσικλέτας πλήρωσε 1,2 €, να βρείτε πόσα ήταν τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες.

21 Σ’ ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί τού αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = k \end{cases}$, οπου k πραγματικός αριθμός.

2 Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda + \mu)x + y = 7$ και $\varepsilon_2 : x + (\lambda + 3\mu)y = 1$ τέμνονται στο σημείο Α(2, 1), να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ.

3 Αν τα συστήματα $\Sigma_1)\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$, και $\Sigma_2)\begin{cases} 2x + \alpha y = \beta \\ 3x - \beta y = \alpha \end{cases}$ έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τους αριθμούς α, β.

4 Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y όταν:

α) $(x + y - 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 0$

β) $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$

5 **Να λύσετε τα συστήματα:**

α) $\begin{cases} (2x - 3y + 4)(x + y) = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} (3x - 4y)(x + 2y) = 8 \\ \dfrac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$

6 **Να βρείτε δύο αριθμούς, που έχουν άθροισμα 100 και αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο, τότε θα προκύψει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 15.**

7 Αν η εξίσωση $(2λ - κ - 3)x = κ - λ + 1$ είναι αόριστη, να βρείτε τους αριθμούς κ, λ.

8 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά απέχουν 18 cm. Αν τα εμβαδά των δύο κύκλων διαφέρουν κατά 72π cm^2, να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

9 Να βρείτε τις ηλικίες δύο αδελφών, αν σήμερα διαφέρουν κατά 5 χρόνια, ενώ μετά από 11 χρόνια οι ηλικίες τους θα έχουν λόγο $\frac{4}{3}$.

10 Σ' ένα ταξίδι με πλοίο, το εισιτήριο της Α' θέσης κοστίζει 18 € και της Β' θέσης κοστίζει 6 € λιγότερα. Αν σ' ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας 4500 €,

να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.

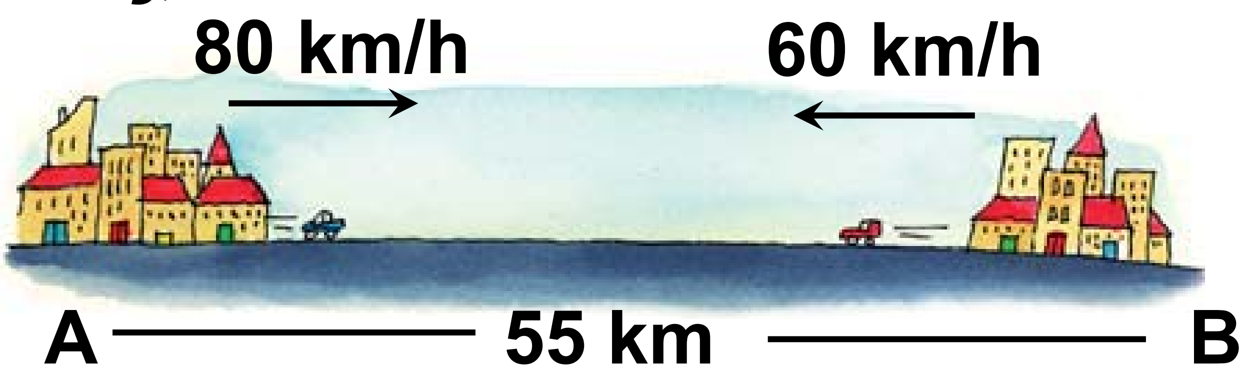
11 Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 10 και αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, τότε θα προκύψει αριθμός κατά 18 μικρότερος.

12 Αν διαιρέσουμε ένα διψήφιο αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 3. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του και τον αριθμό που προκύπτει τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 9. Ποιος είναι ο αρχικός διψήφιος αριθμός;

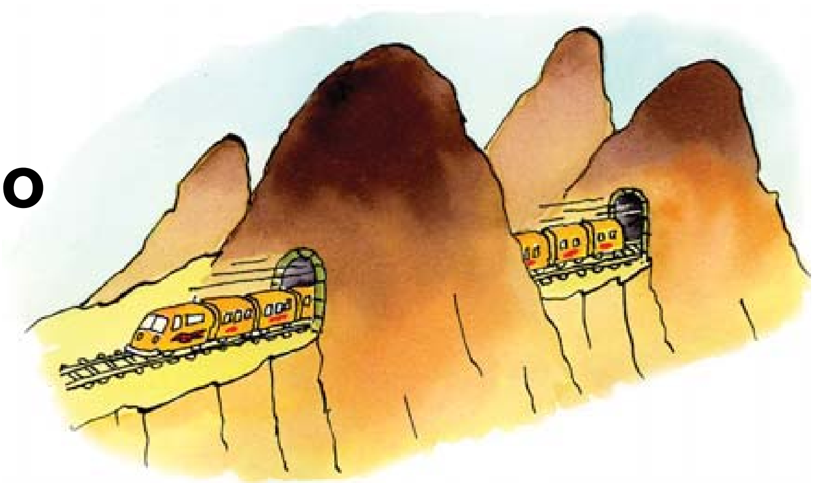
13 Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5 m,

το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2. Αν όμως, αυξήσουμε το μήκος του κατά 4 m και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 6 m, το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

14 Οι πόλεις Α και Β απέχουν 55 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και με μέση ταχύτητα 80 km/h κινείται προς την πόλη Β. Δεκαπέντε λεπτά μετά την εκκίνησή του ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 60 km/h κινείται προς την πόλη Α. Πόσο χρόνο κινήθηκε κάθε αυτοκίνητο μέχρι τη συνάντησή τους;



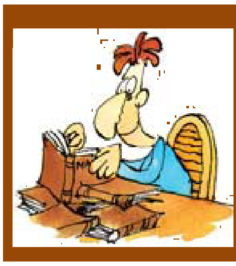
15 **Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 km. Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες, ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Με ποια ταχύτητα κινείται κάθε αυτοκίνητο;**



16 **Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος, που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα εισέλθει σε μια σήραγγα μήκους 180 m μέχρι τη στιγμή που και το τελευταίο του βαγόνι θα εξέλθει απ' αυτή, είναι 12 sec. Σε μια δεύτερη σήραγγα μήκους 930 m ο αντίστοιχος χρόνος που μεσολαβεί είναι 42 sec. Να**

βρείτε την ταχύτητα και το μήκος του τρένου.

17 Οι αντιστάσεις R_1, R_2, αν συνδεθούν παράλληλα, έχουν ολική αντίσταση 2,4 Ω. Αν η αντίσταση R_2 συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση 12 Ω, τότε η ολική τους αντίσταση είναι R_1, Να βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2.



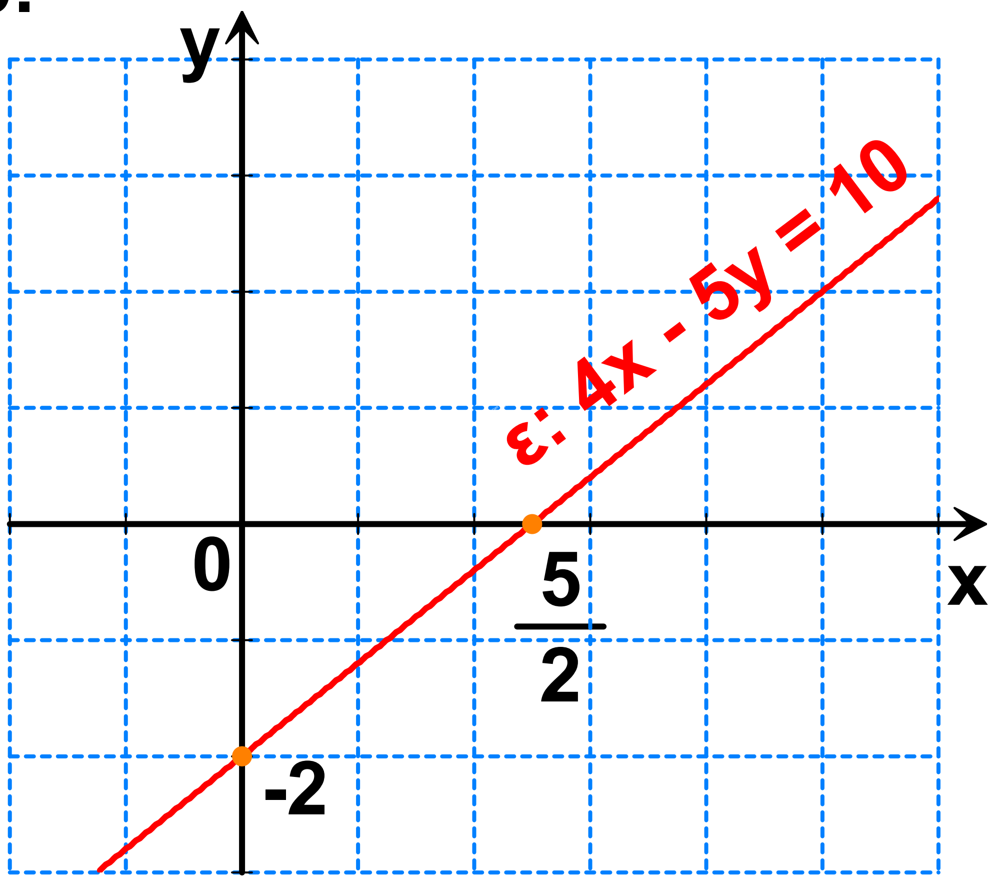
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

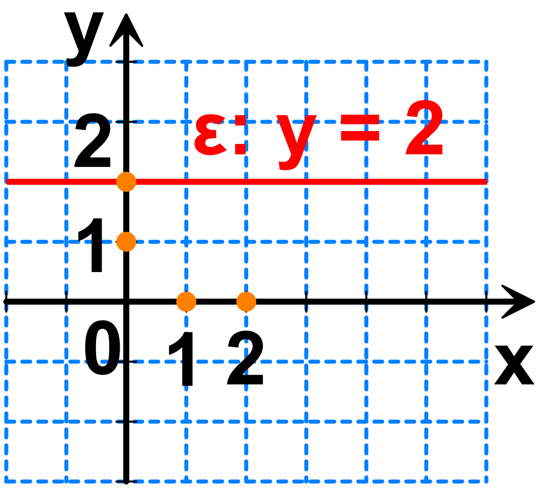
• **Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$, π.χ. $3x + 2y = 7$.**

• **Λύση** της γραμμικής εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.
Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος $(1, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης $3x + 2y = 7$, αφού $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$.

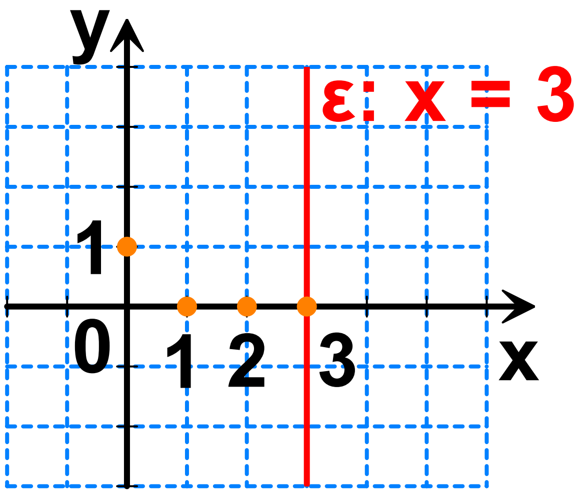
• Η γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει ευθεία ε, αν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.



Αν α ≠ 0 και β ≠ 0, τότε η γραμμική εξίσωση αx + βy = γ παριστάνει ευθεία που τέμνει και τους δύο άξονες.



Αν α = 0, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής y = κ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x ή τον άξονα x'x.



Αν β = 0, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $x = κ$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y ή τον άξονα y΄y.

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Π.χ. αν το σημείο Μ(3, 4) ανήκει στην ευθεία $ε : αx - y = 0$, τότε ισχύει $3 \cdot α - 4 = 0$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή. Π.χ. το σημείο Μ(0, -2) ανήκει στην ευθεία $ε : 4x - 5y = 10$, αφού $4 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) = 10$.

2. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

π.χ. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$

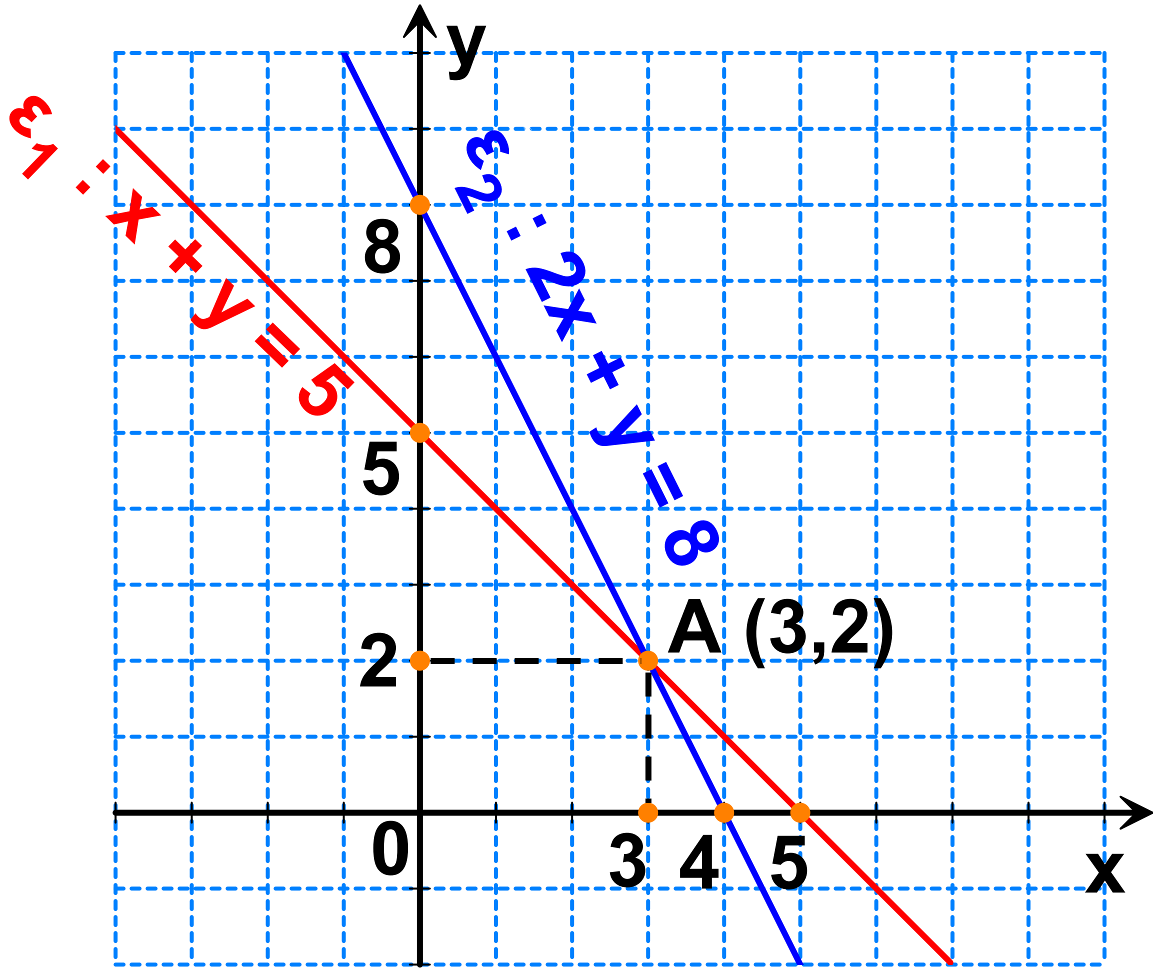
• Λύση του γραμμικού συστήματος (Σ) είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του. Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (2, -1) είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$,

αφού $\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \\ 2 - 3 \cdot (-1) = 5 \end{cases}$

• Ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x, y λύνεται με τους εξής τρόπους:

α) Γραφικά

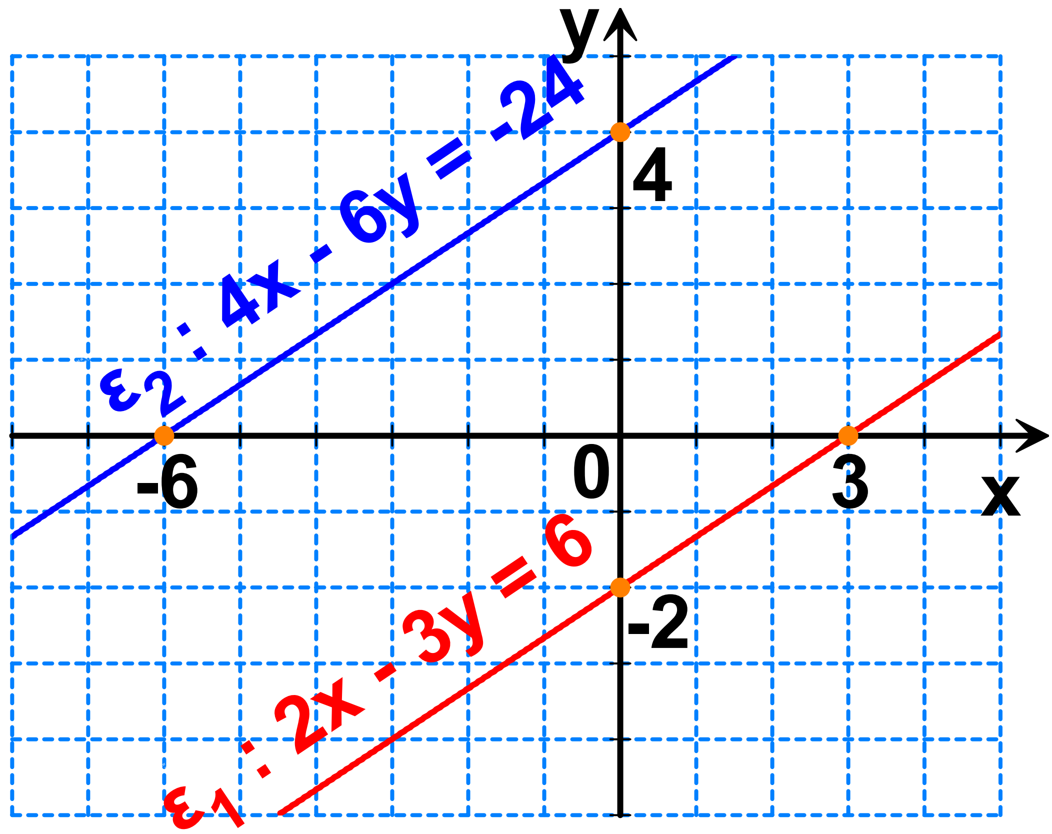
Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις εξισώσεις του συστήματος με δύο ευθείες ε_1, ε_2.



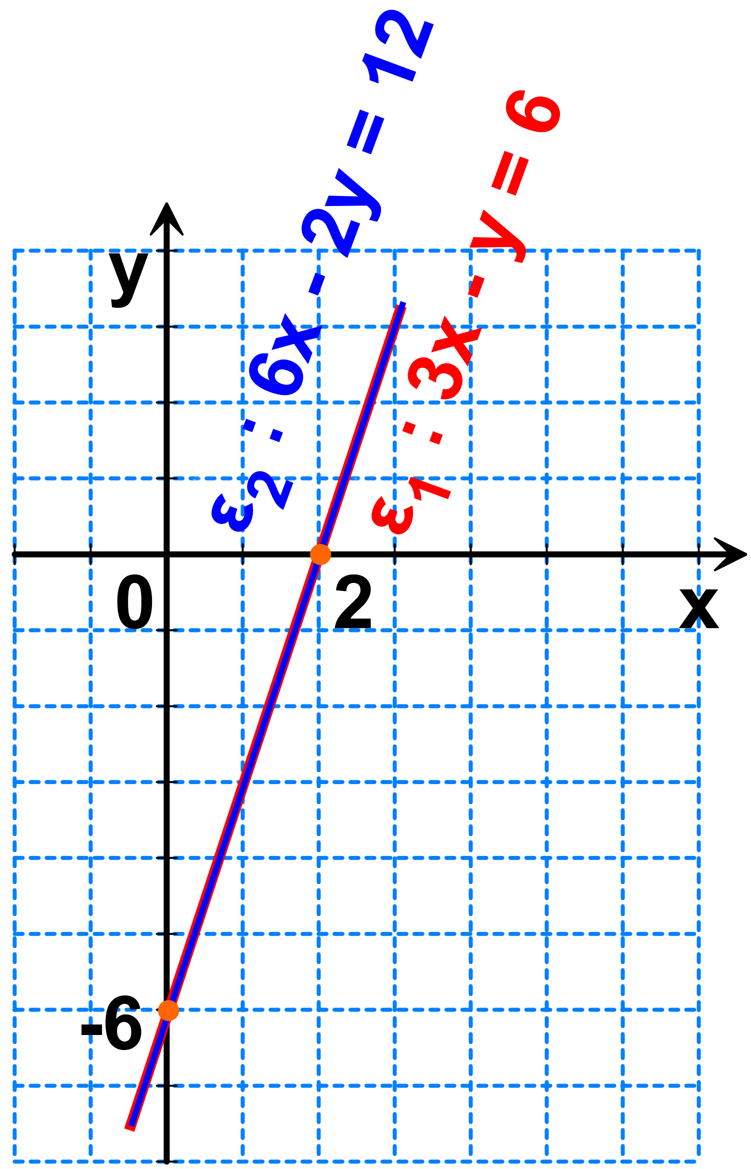
Αν οι $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται σ' ένα σημείο, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους. Π.χ. το

σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ **έχει μοναδική**

λύση την $(x, y) = (3, 2)$.



Αν οι ε_1, ε_2 είναι παράλληλες τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.



Αν οι $ε_1$, $ε_2$ ταυτίζονται, τότε έχουν όλα τους τα σημεία κοινά, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αόριστο.

β) Αλγεβρικά

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ή των αντιθέτων συντελεστών προκειμένου να απαλείψουμε τον έναν από τους δύο αγνώστους του συστήματος και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο.

Περιεχόμενα 4ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Α΄ • ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ