

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 3ος ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.10 – 2.4

**Γ' Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 /
Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:**

**«Αναμόρφωση των προγραμμάτων
σπουδών και συγγραφή νέων
εκπαιδευτικών πακέτων»**

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος

Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ

Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων
βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού
εκπαιδευτικού υλικού με βάση το
ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»**

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου

Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου

Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου

Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

**Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από
το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και**

25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Δημήτριος Αργυράκης, *Μαθημ/κός,
Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
Παναγιώτης Βουργάνας, *Μαθ/κός,
Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
Κωνσταντίνος Μεντής, *Μαθημ/κός
Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
Σταματούλα Τσικοπούλου, *Μαθ/κός
Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
Μιχαήλ Χρυσοβέργης, *Σχολικός
Σύμβουλος Μαθηματικών*

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Εμμανουήλ Μανατάκης, *Επίκ. Καθ.
Πολυτεχν. Σχολής Παν/μίου Πατρών*
Μιχαήλ Σαλίχος, *Σχολικός
Σύμβουλος Μαθηματικών*
Νικόλαος Παπαευστρατίου,
Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Νικόλαος Μαρουλάκης,
Σκιτσογράφος - Εικονογράφος

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευγενία Βελάγκου, Φιλολόγος

**ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ
ΣΥΓΓΡΑΦΗ**

**Δημήτριος Κοντογιάννης,
Σύμβουλος του Παιδαγ. Ινστιτούτου**

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Παναγιώτης Γράββαλος, Ζωγράφος

**ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και

75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης**

**ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

**Τόμος 3ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.10 – 2.4**

1.10. Πράξεις ρητών παραστάσεων



✓ Μαθαίνω να πολλαπλασιάζω και να διαιρώ ρητές παραστάσεις.

✓ Μαθαίνω να προσθέτω και αφαιρώ ρητές παραστάσεις.



Α Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$4 \cdot \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{7}$$

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$$2x \cdot \frac{3xy}{5\omega}, \quad \frac{3x^2}{2\alpha\beta} \cdot \frac{2\alpha^2\beta}{9xy},$$
$$\frac{9x}{y+1} \div \frac{3x^2}{5y+5}$$

Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες.

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

και

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

Με τον ίδιο τρόπο
πολλαπλασιάζουμε και μια ακέραια
με μια ρητή παράσταση ή δύο
ρητές παραστάσεις.
Για παράδειγμα,

$$3x \cdot \frac{5x^2}{2y} = \frac{3x \cdot 5x^2}{2y} = \frac{15x^3}{2y}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{3x + 3} \cdot \frac{2x}{x - 1} &= \frac{(x^2 - 1) \cdot 2x}{(3x + 3)(x - 1)} = \\ &= \frac{2x(\cancel{x - 1})(\cancel{x + 1})}{3(\cancel{x + 1})(\cancel{x - 1})} = \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε στο προηγούμενο
παράδειγμα, μετά τις πράξεις
εκτελούμε και τις δυνατές
απλοποιήσεις.

Διαίρεση

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Με τον ίδιο τρόπο διαιρούμε και δύο ρητές παραστάσεις. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} : \frac{2x^2}{x^2-1} &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \\ &= \frac{x(x^2-1)}{(x+1) \cdot 2x^2} = \frac{\cancel{x}(x-1)(\cancel{x+1})}{2x^2(\cancel{x+1})} = \frac{x-1}{2x} \end{aligned}$$

Σύνθετα κλάσματα

Το σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$, ως

γνωστόν, εκφράζει το πηλίκο

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} \text{ που είναι ίσο με } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

και επομένως ισχύει

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Μνημονικός Κανόνας

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα, $\frac{\frac{2\alpha^2}{x}}{\frac{4\alpha}{x^2}} = \frac{2\alpha^2 x^2}{4\alpha x} = \frac{\alpha x}{2}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθούν τα γινόμενα:

$$\alpha) (5x^2 + 5x) \cdot \frac{3x}{2x + 2}$$

$$\beta) \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) (5x^2 + 5x) \cdot \frac{3x}{2x + 2} &= \\ &= \frac{(5x^2 + 5x)3x}{2x + 2} = \frac{5x(\cancel{x+1})3x}{2(\cancel{x+1})} = \frac{15x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x - 1} &= \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x)}{(3x + 6)(x - 1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(x-1)^2 \cancel{x(x+2)}}{3 \cancel{(x+2)} \cancel{(x-1)}} = \frac{(x-1)x}{3} = \frac{x^2 - x}{3}$$

2 Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}$

$$\alpha) \frac{x^2 - \alpha^2}{x} : \frac{x^3 - \alpha^3}{x^2} \quad \beta) \frac{\alpha^2}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{x^2 - \alpha^2}{x} : \frac{x^3 - \alpha^3}{x^2} = \frac{x^2 - \alpha^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x^3 - \alpha^3} =$$

$$= \frac{(x^2 - \alpha^2)x^2}{x(x^3 - \alpha^3)} = \frac{\cancel{(x-\alpha)}(x+\alpha)x^2}{x\cancel{(x-\alpha)}(x^2 + x\alpha + \alpha^2)} =$$

$$= \frac{(x+\alpha)x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2} = \frac{x^2 + \alpha x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2}$$

$$\beta) \frac{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}} = \frac{\alpha(\alpha^2 - x^2)}{\alpha^2(2\alpha + 2x)} =$$

$$= \frac{\cancel{\alpha}(\alpha - x)(\cancel{\alpha + x})}{2\alpha^2(\cancel{\alpha + x})} = \frac{\alpha - x}{2\alpha}$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{xy}$

β) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

γ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3}{2}$

δ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3x^2}{2}$

ε) $\frac{x-1}{y} \cdot \frac{5}{x-1} = \frac{5}{y}$

$$\sigma\tau) \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{\alpha x - 2}{x^2}$$



$$\zeta) \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \cdot \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = 0$$



$$\eta) \frac{\alpha}{\beta + 2} : \frac{\alpha}{\beta + 2} = 1$$



2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) 3x \cdot \frac{\dots\dots\dots}{y} = \frac{6x^2}{y}$$

$$\beta) \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\dots\dots\dots} = \frac{1}{y^2}$$

$$\gamma) \frac{4x}{y} : \frac{\dots\dots\dots}{\omega} = \frac{\omega}{y}$$

$$\delta) \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$$

$$\varepsilon) \frac{x+2}{x-1} : \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$$

$$\sigma\tau) \frac{x}{y} : \frac{x+2}{\dots\dots\dots} = \frac{x}{x+2}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\beta) \frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$$

$$\gamma) 12x^2 \cdot \frac{1}{9x}$$

$$\delta) \frac{2\alpha^3}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4\alpha^2}$$

$$\varepsilon) (-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega}$$

$$\sigma\tau) \left(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\alpha^2}\right)$$

2 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) 8x : \frac{6}{x}$$

$$\beta) \frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right)$$

$$\gamma) \left(-\frac{\alpha^2}{\beta^3} \right) : 3\alpha^2 \quad \delta) \left(-\frac{x^3}{2\omega} \right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2} \right)$$

3 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) \frac{2x + 6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x + 3} \quad \beta) \frac{y - 5}{y + 2} \cdot \frac{2 + y}{5 - y}$$

$$\gamma) \frac{x - \omega}{x^2 \omega^3} \cdot \frac{x^3 \omega^2}{x^2 - \omega^2} \quad \delta) \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2 + \alpha - 6} \cdot \frac{\alpha + 3}{\alpha^2 + 2\alpha}$$

$$\epsilon) \frac{x^2 + x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x}$$

$$\sigma\tau) \frac{4y^2 - 9}{4y^2 - 12y + 9} \cdot \frac{y^2 + 3y}{2y^2 + 3y}$$

4 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{x + 4}{5} : \frac{x + 4}{15} \quad \beta) \frac{2y - 1}{y + 1} : \frac{1 - 2y}{1 + y}$$

$$\gamma) \left(-\frac{\omega + 2}{\omega} \right) : (\omega + 2) \quad \delta) \frac{\alpha + 1}{\beta^2} : \frac{(\alpha + 1)^2}{\beta}$$

$$\epsilon) \frac{x + y}{x^2 - xy} : \frac{x^2 + xy}{x - y}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8} : \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 4}$$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x - 2}{x + 1} \cdot \frac{4x + 4}{x + 2} \right) : \frac{8x - 8}{x + 2}$$

$$\beta) \frac{x + 2}{x - 1} : \left(\frac{2x + 6}{x - 1} \cdot \frac{x + 2}{x + 3} \right)$$

$$\gamma) \left(\frac{x + 2}{x - 1} : \frac{2x + 6}{x - 1} \right) \cdot \frac{x + 2}{x + 3}$$

B Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{7}{9} + \frac{19}{9} - \frac{11}{9}, \quad \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}.$$

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$$\frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2},$$

$$\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{6\alpha\beta} - \frac{1}{3\beta}.$$

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

και

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

Με τον ίδιο τρόπο προσθέτουμε ή αφαιρούμε και ρητές παραστάσεις που έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2} = \\ & = \frac{3x + (2x-1) - (7+x)}{x-2} = \\ & = \frac{3x + 2x - 1 - 7 - x}{x-2} = \\ & = \frac{4x - 8}{x-2} = \frac{4(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = 4 \end{aligned}$$

Αν όμως οι ρητές παραστάσεις δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τότε βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και τις μετατρέπουμε σε ρητές παραστάσεις με τον ίδιο

παρονομαστή, όπως και στα αριθμητικά κλάσματα. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$\frac{2}{3x^2 - 3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x - 3}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

$$3x^2 - 3x = 3x(x - 1) \text{ και}$$
$$3x - 3 = 3(x - 1)$$

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 6x(x-1)$$

- Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

$$\frac{2}{3x^2 - 3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x - 3} =$$

$$= \frac{\overset{2}{2}}{3x(x-1)} + \frac{\overset{x-1}{5}}{6x} - \frac{\overset{2x}{2}}{3(x-1)} =$$

• Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις.

$$= \frac{4 + 5(x-1) - 4x}{6x(x-1)} = \frac{4 + 5x - 5 - 4x}{6x(x-1)} =$$

$$= \frac{\cancel{x-1}}{6x(\cancel{x-1})} = \frac{1}{6x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{9x + 6}{x^2 - 1} - \frac{15}{2x - 2}$$

$$\beta) \frac{4}{x^2 - \alpha^2} - \frac{2}{x^2 - \alpha x} - \frac{1}{x^2 + \alpha x}$$

Λύση

α) Παραγοντοποιούμε τους παρανομαστές, οπότε έχουμε:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \text{ και}$$

$$2x - 2 = 2(x - 1)$$

Το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών είναι $2(x - 1)(x + 1)$. Άρα

$$\begin{aligned} & \frac{9x + 6}{x^2 - 1} - \frac{15}{2x - 2} = \\ & = \frac{\overset{2}{9x + 6}}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{\overset{x + 1}{15}}{2(x - 1)} = \\ & = \frac{2(9x + 6) - 15(x + 1)}{2(x - 1)(x + 1)} = \\ & = \frac{18x + 12 - 15x - 15}{2(x - 1)(x + 1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3x - 3}{2(x - 1)(x + 1)} = \frac{3(\cancel{x - 1})}{2(\cancel{x - 1})(x + 1)} = \\
 &= \frac{3}{2(x + 1)}
 \end{aligned}$$

β) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε:

$$x^2 - \alpha^2 = (x - \alpha)(x + \alpha),$$

$$x^2 - \alpha x = x(x - \alpha),$$

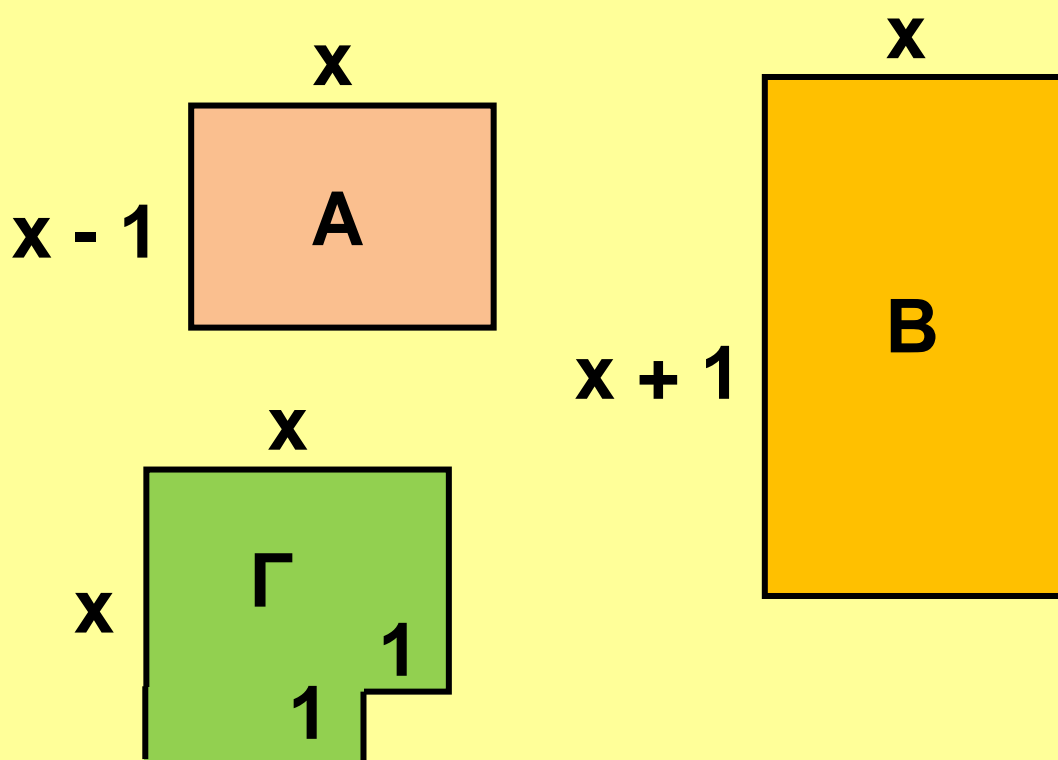
$$x^2 + \alpha x = x(x + \alpha)$$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x - \alpha)(x + \alpha)$. Άρα

$$\begin{aligned}
 &\frac{4}{x^2 - \alpha^2} - \frac{2}{x^2 - \alpha x} - \frac{1}{x^2 + \alpha x} = \\
 &= \frac{\overbrace{x}^{\quad}}{4(x - \alpha)(x + \alpha)} - \frac{\overbrace{x + \alpha}^{\quad}}{x(x - \alpha)} - \frac{\overbrace{x - \alpha}^{\quad}}{x(x + \alpha)} = \\
 &= \frac{4x - 2(x + \alpha) - (x - \alpha)}{x(x - \alpha)(x + \alpha)} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{x - \alpha}}{x(\cancel{x - \alpha})(x + \alpha)} = \frac{1}{x(x + \alpha)}$$

2 Πούλησε κάποιος τα οικόπεδα A και B και από το καθένα εισέπραξε 50.000 ευρώ. Αν με τα χρήματα αυτά αγόρασε το διαμέρισμα Γ, να αποδειχθεί ότι κάθε m^2 του διαμερίσματος στοιχίζει όσο ένα m^2 του οικοπέδου A και ένα m^2 του οικοπέδου B. (Οι διαστάσεις δίνονται σε m).



Λύση

Από κάθε οικόπεδο εισέπραξε 50000 ευρώ, οπότε για την αγορά του διαμερίσματος έδωσε 100000 ευρώ. Το εμβαδόν του οικοπέδου Α είναι $x(x - 1) \text{ m}^2$, του οικοπέδου Β είναι $x(x + 1) \text{ m}^2$ και του διαμερίσματος Γ είναι $(x^2 - 1) \text{ m}^2$. Κάθε m^2 του οικοπέδου Α στοιχίζει $\frac{50000}{x(x - 1)}$

ευρώ, του οικοπέδου Β στοιχίζει $\frac{50000}{x(x + 1)}$ ευρώ και του διαμερίσματος Γ στοιχίζει $\frac{100000}{x^2 - 1}$ ευρώ.

$$\begin{aligned} \text{Άρα έχουμε: } & \frac{50000}{x(x - 1)} + \frac{50000}{x(x + 1)} = \\ & = \frac{50000(x + 1) + 50000(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{100000x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{100000}{x^2-1}$$

Δηλαδή, κάθε m^2 του διαμερίσματος Γ στοιχίζει όσο ένα m^2 του οικοπέδου Α και ένα m^2 του οικοπέδου Β.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1$

β) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$

γ) $\frac{\alpha+4}{\alpha} - \frac{4}{\alpha} = 1$

δ) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} = 0$

$$\varepsilon) 1 + \frac{x}{\omega} = \frac{1+x}{\omega}$$



$$\sigma\tau) \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha+2}{x} = \frac{2}{x}$$



2 Ένας μαθητής έγραψε τις παρακάτω ισότητες και ο καθηγητής του είπε ότι σε κάποιο σημείο έκανε ένα λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος αυτό;

$$\alpha) \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + \frac{\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} =$$
$$= \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$$

$$\beta) \frac{3x + 2}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{3x + 2 - 2x - 1}{x + 1} =$$
$$= \frac{x + 1}{x + 1} = 1$$

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) \frac{x}{x+6} - \dots = 0$$

$$\beta) \frac{x}{x+6} + \dots = 1$$

$$\gamma) \dots + \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$$

$$\delta) \dots - \frac{5}{x+2} = \frac{1}{x+2}$$

$$\epsilon) \frac{2x-1}{x} + \dots = 2$$

$$\sigma\tau) \frac{3x+8}{x} + \dots = 3$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\beta) \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}$$

$$\gamma) \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}$$

$$\delta) \frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$$

$$\beta) \frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$$

$$\gamma) \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$$

$$\delta) \frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$$

$$\epsilon) \frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$$

$$\sigma\tau) \frac{\alpha + 7}{\alpha^2 + 4\alpha + 3} - \frac{3}{\alpha + 1}$$

3 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\beta) \frac{y - 2 + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}}$$

$$\gamma) \frac{\omega + 1 + \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{1}{\omega^3}}$$

$$\delta) \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}}$$

4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x - 2}{x} + \frac{4}{x - 2} - \frac{8}{x^2 - 2x}$$

$$\beta) \frac{3}{x + 2y} - \frac{2}{x - 2y} + \frac{2x + 16y}{x^2 - 4y^2}$$

$$\gamma) \frac{y^2 - 6}{y^2 - 5y + 6} - \frac{2}{y - 2} + \frac{3}{y - 3}$$

$$\delta) \frac{x^2}{x - y} + \frac{y^2}{x + y} - \frac{2xy^2}{x^2 - y^2}$$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x + 3}{2x + 1} - \frac{x}{2x - 1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x - 3} \right)$$

$$\beta) \left[\frac{x + 3}{x^2 - 1} + \frac{x - 3}{(x - 1)^2} \right] : \frac{x^2 - 3}{(x - 1)^2}$$

$$\gamma) \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\delta) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) : \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \right)$$

6 α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} + xy = (x + y)^2$$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$\frac{56^3 - 44^3}{12} + 56 \cdot 44.$$

7 α) Αν $A = \frac{2x}{x^2 + 1}$ και $B = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1,

$$\frac{200}{10001}, \frac{9999}{10001}$$
 αποτελούν μήκη

πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



1 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \alpha^3 - (1 + \alpha)^{-2} + 4\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 2004\right)^{2004}\right]^0, \text{ αν είναι } \alpha = -\frac{3}{2}$$

και $\beta = 3$.

(Διαγωνισμός «Θαλής» Ε.Μ.Ε. 2002).

2 Για κάθε θετικό ακέραιο n , να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta + 3\gamma)^{2n+1} + (\beta - \alpha - 3\gamma)^{2n+1} = 0$

β) $(x - y - \omega)^{2n} - (y + \omega - x)^{2n} = 0$

3 Αν ισχύει $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$, να βρείτε

την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$$A = \frac{4x^2 - 6xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$B = \frac{2x^3 - 2xy^2 + 3y^2}{x^2y + y^3}$$

4 Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = -2x^2 + 2x + 800.$$

α) Να αποδείξετε ότι $P(1 - x) = P(x)$.

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή $P(100)$ και $P(-99)$.

5 α) Να αποδείξετε ότι

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

(Ταυτότητα Euler).

β) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε
ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε την
παράσταση

$$(x - y)^3 + (y - \omega)^3 + (\omega - x)^3.$$

6 Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha\beta = -\frac{7}{3}$

τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$

β) $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 9(\alpha + \beta) = 40$

7 Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει
μια από τις παρακάτω ισότητες να
αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι
ίσοι ή αντίθετοι.

α) $x^4 - 2y^2 = x^2(y^2 - 2)$

β) $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2$

8 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + 2x - 3$.
β) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

9 Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x + 3)$ και $B = (x + 1)(x + 2)$.
α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A + 1)^2$.
β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$.

10 α) Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $16\pi x^4 + 8\pi x^2 + \pi$. Να βρείτε την ακτίνα του.
β) Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες $4x$ και $4x^2 - 1$.

11 α) Αν ο αριθμός k είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $k^2 + k$ είναι άρτιος.
β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων, αν διαιρεθεί με το 6, δίνει υπόλοιπο 1.
γ) Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8.

12 α) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^6 - 1) : (x - 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^6 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^5 + 1) : (x + 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{15} + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

13 α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} .$$

β) Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές 2, 3, 4,....., 2008 και να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2007 \cdot 2008} =$$
$$= \frac{2007}{2008}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



Α. ΜΟΝΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- **Αλγεβρική Παράσταση** είναι μια έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές

π.χ. $2x^2 - 3xy + 4$

- **Αριθμητική Τιμή** μιας παράστασης είναι ο αριθμός που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις.

- **Μονώνυμο** λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

π.χ. $-3x^2y$ (-3 συντελεστής, x^2y κύριο μέρος του μονώνυμου).

- **Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος, π.χ. $-3x^2y$, $7x^2y$, $-x^2y$

Πράξεις με μονώνυμα

- η **Πρόσθεση** και η **Αφαίρεση** μονωνύμων έχει σαν αποτέλεσμα μονώνυμο, εφόσον αυτά είναι όμοια.

Άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

π.χ. $2x^2y + 3x^2y - x^2y = 4x^2y$

Αναγωγή ομοίων όρων λέγεται η αντικατάσταση των ομοίων μονωνύμων με το άθροισμά τους.

π.χ. $6x^2 + 2x - 4x^2 + 3x = 2x^2 + 5x$

- ο **Πολλαπλασιασμός** και η **Διαίρεση** μονωνύμων γίνονται είτε τα μονώνυμα είναι όμοια είτε όχι.

Γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους, με εκθέτη καθεμιάς το άθροισμα των εκθετών τους. π.χ. $(3x^2y) \cdot (-2xy^3) = -6x^3y^4$

Πηλίκο δύο μονωνύμων είναι η αλγεβρική παράσταση που είναι γινόμενο του διαιρετέου με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

π.χ.

$$\begin{aligned} (-12x^4y) : (3x^2y) &= -12x^4y \cdot \frac{1}{3x^2y} = \\ &= \frac{-12x^4y}{3x^2y} = -4x^2 \end{aligned}$$

• **Πολυώνυμο** λέγεται το άθροισμα μονωνύμων, που δύο τουλάχιστον από αυτά δεν είναι όμοια. π.χ.

$$3x^2y - 5xy + 2 \quad (\text{Το μονώνυμο } 3x^2y,$$

5xy, 2 λέγονται όροι του πολυωνύμου).

Πράξεις με πολυώνυμα

- Για να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε πολυώνυμα βγάζουμε τις παρενθέσεις και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

- Για να πολλαπλασιάσουμε

α) μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β) πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

- Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$, τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ για τα οποία ισχύει:
 $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ (Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης) όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$. Αν $\upsilon(x) = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και τα $\delta(x)$ και $\pi(x)$ λέγονται παράγοντες ή διαιρέτες του $\Delta(x)$.

B. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- Οι ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και οι οποίες αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους ονομάζονται ταυτότητες. Αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

Τετράγωνο αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Τετράγωνο διαφοράς	$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Κύβος αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^3 =$ $= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
Κύβος διαφοράς	$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά	$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
Διαφορά κύβων	$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
Άθροισμα κύβων	$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

Γ. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση είναι ο μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο. Η παραγοντοποίηση γίνεται σε παράσταση που υπάρχει:

$ax + \beta x = x(a + \beta)$	Κοινός παράγοντας σ' όλους τους όρους
$ax + ay + \beta x + \beta y =$ $= a(x + y) + \beta(x + y) =$ $(a + \beta)(x + y)$	Κοινός παράγοντας σε ομάδες όρων της παραστάσης
$a^2 - \beta^2 = (a + \beta)(a - \beta)$	Διαφορά τετραγώνων
$a^3 + \beta^3 = (a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2) +$ $\beta^2(a - \beta) =$ $(a - \beta)(a^2 + a\beta + \beta^2)$	Άθροισμα - Διαφορά κύβων
$a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2$ $a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$	Ανάπτυγμα τετραγώνου
$x^2 + (a + \beta)x + a\beta =$ $= (x + a)(x + \beta)$	Τριώνιο της μορφής $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$

Δ. ΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση.

π.χ. $\frac{2x^2 - 5}{x + 4}$

Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Για να απλοποιήσουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση, παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και διαγράφουμε τον κοινό παράγοντα. Οι πράξεις με τις ρητές παραστάσεις γίνονται όπως και οι πράξεις των αριθμητικών κλασμάτων.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$



ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Η εξίσωση $ax + b = 0$

2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

2.3 Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού

2.4 Κλασματικές εξισώσεις

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

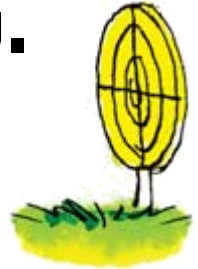
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση

2.1 Η εξίσωση $ax + \beta = 0$



✓ Θυμάμαι πώς λύνονται οι εξισώσεις πρώτου βαθμού.

✓ Αναγνωρίζω αν μια εξίσωση έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.



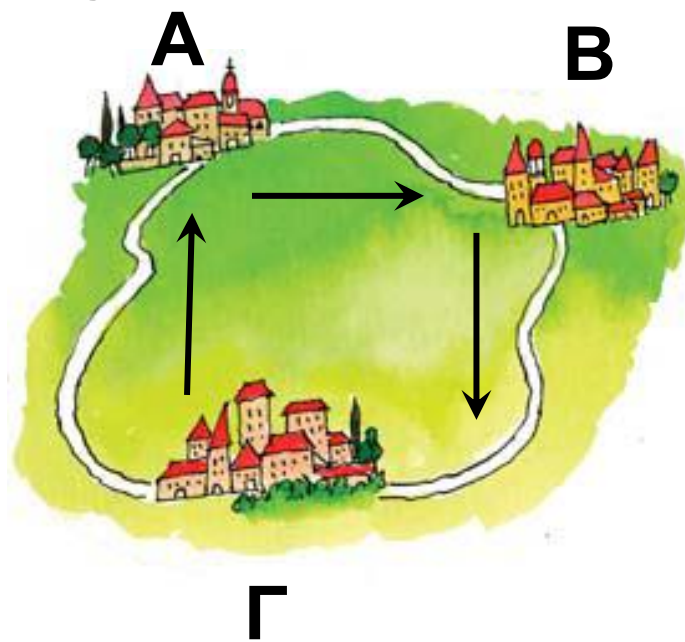
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το χωριό A και αφού επισκεφθεί διαδοχικά τα χωριά B και Γ, επιστρέφει στο χωριό A. Η διαδρομή BΓ είναι 1 km μεγαλύτερη από την AB και η ΓA είναι 1 km μεγαλύτερη από τη BΓ. Μπορείτε να υπολογίσετε πόσο απέχουν τα χωριά μεταξύ τους, αν γνωρίζετε ότι η συνολική απόσταση που διήνυσε ο ταχυδρόμος ήταν:

α) 15 km;

β) το τριπλάσιο της πρώτης διαδρομής;

γ) το τριπλάσιο της δεύτερης διαδρομής;



Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις, όπως $3x = 12$, $-4y + 11 = 0$, κ.τ.λ. Στις εξισώσεις αυτές υπάρχει ένας άγνωστος και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 1. Σε καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε εξίσωση 1ου

**βαθμού με έναν άγνωστο
(πρωτοβάθμια εξίσωση).**

Η εξίσωση $3x = 12$, της οποίας ο συντελεστής του αγνώστου είναι διάφορος του μηδενός επαληθεύεται για μία μόνο τιμή του αγνώστου, την $x = 4$. Ο αριθμός 4, που επαληθεύει την εξίσωση $3x = 12$, ονομάζεται λύση ή ρίζα της εξίσωσης.

Υπάρχουν όμως και εξισώσεις, όπως οι $0x = -3$ ή $0x = 0$, στις οποίες ο συντελεστής του αγνώστου είναι μηδέν.

Η εξίσωση $0x = -3$ δεν επαληθεύεται για καμιά τιμή του x , αφού το γινόμενο $0x$ είναι πάντοτε ίσο με το μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -3 . Μια τέτοια εξίσωση, που δεν έχει λύση, ονομάζεται αδύνατη.

Η εξίσωση όμως, $0x = 0$
επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή
του x και ονομάζεται ταυτότητα ή
αόριστη.

Από τα προηγούμενα
παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι:

- Αν $a \neq 0$, τότε; η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση την
$$x = -\frac{\beta}{a}$$
- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ γράφεται $0x = -\beta$ και
 - αν $\beta \neq 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη), ενώ
 - αν $\beta = 0$, κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα ή αόριστη)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x - 1}{2} - \frac{2x + 1}{6} = x + 1$$

Λύση

$$\frac{x - 1}{2} - \frac{2x + 1}{6} = x + 1$$

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

$$6 \cdot \frac{x - 1}{2} - 6 \cdot \frac{2x + 1}{6} = 6 \cdot x + 6 \cdot 1$$

- Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

$$3(x - 1) - (2x + 1) = 6x + 6$$

- Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις.

$$3x - 3 - 2x - 1 = 6x + 6$$

- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

$$3x - 2x - 6x = 6 + 3 + 1$$

- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$$-5x = 10$$

- Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου.

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{10}{-5}$$

$$x = -2$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -2$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3(x + 2) - 3 = 3x + 5$

β) $2(x - 1) - x = x - 2$

Λύση

α) $3(x + 2) - 3 = 3x + 5$

$$3x + 6 - 3 = 3x + 5$$

$$3x - 3x = 5 - 6 + 3$$

$$0x = 2$$

Η εξίσωση αυτή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x , οπότε είναι αδύνατη.

$$\begin{aligned}\beta) \quad 2(x - 1) - x &= x - 2 \\ 2x - 2 - x &= x - 2 \\ 2x - x - x &= 2 - 2 \\ 0x &= 0\end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του x , οπότε είναι ταυτότητα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση της στήλης A το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
α. $3x = 7$	1. Έχει μοναδική λύση
β. $0x = 0$	2. Είναι αδύνατη
γ. $0x = 5$	3. Είναι ταυτότητα
δ. $5x = 0$	

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $\frac{1}{3}x = 2$ έχει λύση την $x = 6$.

β) Η εξίσωση $4x = 0$ είναι αδύνατη.

γ) Η εξίσωση $0x = 0$ έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό.

δ) Η εξίσωση $0x = 6$ έχει λύση την $x = 6$.

ε) Η εξίσωση $5(x + 1) = 5x + 5$ είναι ταυτότητα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-3(x + 2) - 2(x - 1) = 8 + x$

β) $4y - 2(y - 3) = 2y + 1$

$$\gamma) 5(-\omega + 2) - 4 = 6 - 5\omega$$

$$\delta) (2x + 1)^2 + 5 = 4(x^2 - 10)$$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x - 1}{2} - \frac{x + 3}{6} = x - \frac{1}{3}$$

$$\beta) \frac{y + 5}{5} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{3y}{10}$$

$$\gamma) \frac{2(\omega - 1)}{3} - \frac{\omega + 1}{2} = \frac{\omega - 5}{6}$$

$$\delta) 0,2(3x - 4) - 5(x - 0,4) = 0,4(1 - 10x)$$

3 Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττούμενο κατά 5 είναι ίσο με το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 10. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

4 Ρώτησαν κάποιον πόσα ευρώ έχει στο πορτοφόλι του κι εκείνος απάντησε: «Αν είχα όσα έχω και τα

μισά ακόμα και δέκα παραπάνω, θα είχα εκατό». Μπορεί, άραγε, με τα χρήματα αυτά να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει 65 €;

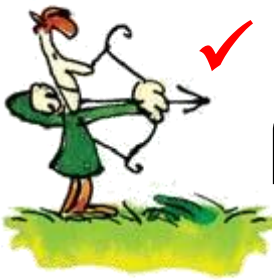
5 Ο καθηγητής των Μαθηματικών είπε στους μαθητές του:

- Σκεφτείτε έναν αριθμό και διπλασιάστε τον.
 - Στο αποτέλεσμα να προσθέσετε τον αριθμό 10.
 - Το άθροισμα που βρήκατε να το διαιρέσετε με το 2 και από το πηλίκο να αφαιρέσετε τον αριθμό που σκεφτήκατε αρχικά.
 - Κάθε μαθητής πρέπει να έχει βρει αποτέλεσμα τον αριθμό 5, ανεξάρτητα από ποιον αριθμό σκέφτηκε αρχικά.
- Μπορείτε να εξηγήσετε τον ισχυρισμό του καθηγητή;

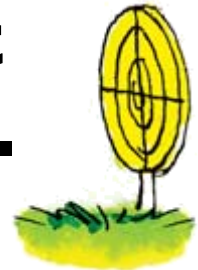
6 Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη A και κινείται προς την πόλη B με μέση ταχύτητα 16 km/h . Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη B και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη A για να τον συναντήσει. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km , σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν;



2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού



✓ Λύνω εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.



✓ Βρίσκω το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και υπολογίζω τις λύσεις της με τη βοήθεια τύπου.

✓ Μετατρέπω ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε μια οικοδομή και στην πρόσοψη της προέβλεψε την κατασκευή μιας τετραγωνικής βεράντας και ενός ορθογωνίου μπαλκονιού με διαστάσεις 9 m και 1 m. Στο σχέδιο που παρουσίασε στον ιδιοκτήτη

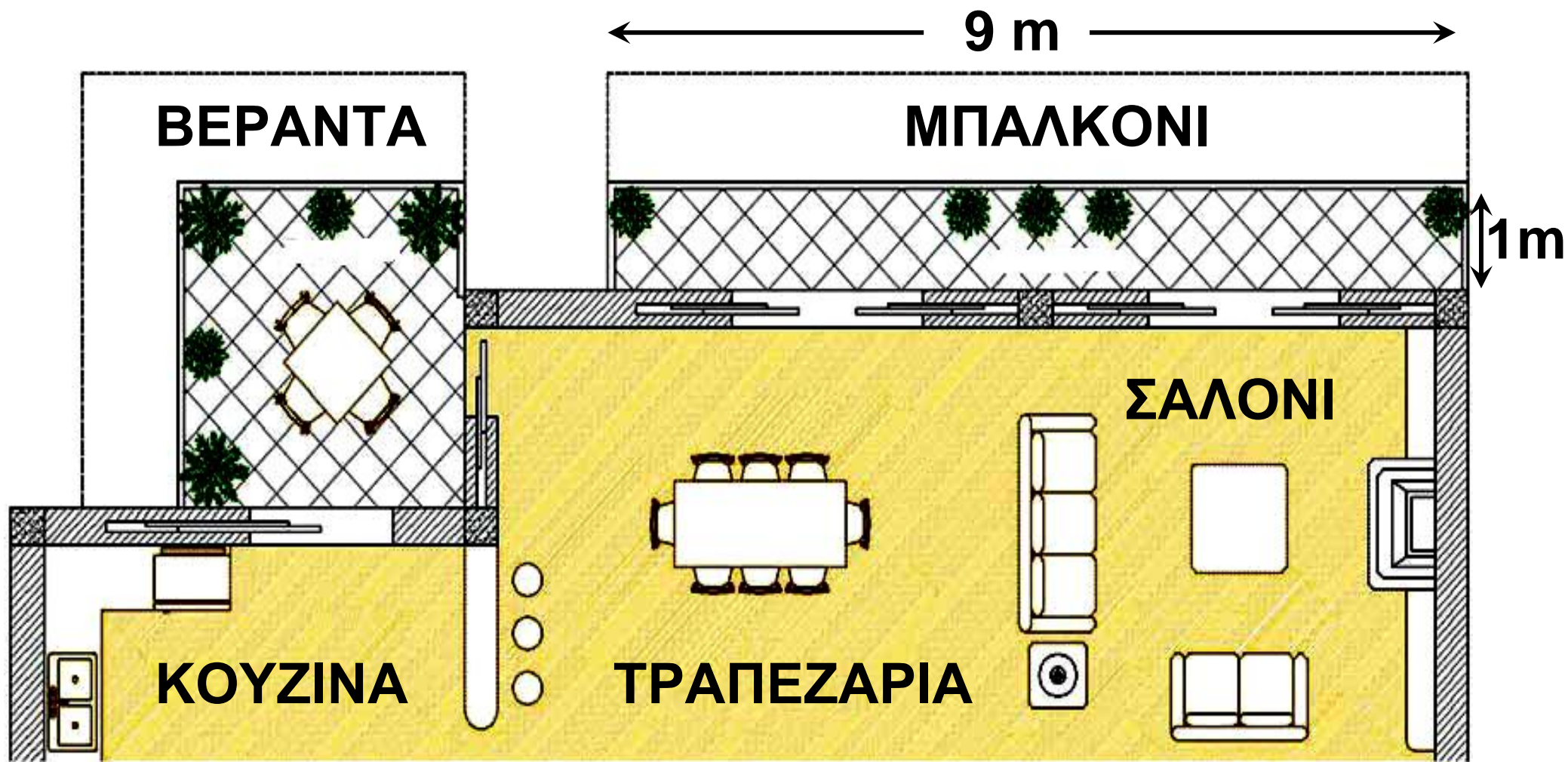
της οικοδομής η βεράντα και το μπαλκόνι είχαν το ίδιο εμβαδόν.

α) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα ήταν η πλευρά της βεράντας.

Ο ιδιοκτήτης όμως, θεώρησε στενό το μπαλκόνι και ζήτησε από το μηχανικό να αυξήσει το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας κατά τα ίδια μέτρα, ώστε να έχουν και πάλι το ίδιο εμβαδόν.

β) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Με το αίτημα όμως του ιδιοκτήτη, το συνολικό εμβαδόν της βεράντας και του μπαλκονιού ξεπερνούσε το όριο που καθορίζεται από τον πολεοδομικό κανονισμό.



Τελικά, αποφασίστηκε να μεγαλώσει η βεράντα και το μπαλκόνι, όπως το ζήτησε ο ιδιοκτήτης, με την προϋπόθεση όμως να μην έχουν πια το ίδιο εμβαδόν, αλλά να καλύπτουν συνολικά 34 m^2 .

γ) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα αυξήθηκε τελικά το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυση τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$$\begin{aligned}x^2 &= 9, \\x^2 - 3x &= 0, \\x^2 + 15x - 16 &= 0\end{aligned}$$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση).

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\boxed{ax^2 + bx + \gamma = 0 \text{ με } a \neq 0}$$

Οι αριθμοί a , b , γ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και σταθερός όρος. Οι συντελεστές σε καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$$x^2 - 9 = 0 : \quad \alpha = 1 \quad \beta = 0 \quad \gamma = -9$$

$$x^2 - 3x = 0 : \quad \alpha = 1 \quad \beta = -3 \quad \gamma = 0$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0 : \quad \alpha = 1 \quad \beta = 15 \quad \gamma = -16$$

A Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι:

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \text{ τότε } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής
 $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $x(x - 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$$x^2 = 3x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής

$$ax^2 + \gamma = 0 \text{ με } a \neq 0$$

Για να λύσουμε την εξίσωση

$x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:

- Το α' μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β' μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $(x - 3)(x + 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 3^2 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

2ος τρόπος:

• Όταν a είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = a$ έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \sqrt{a} \quad \text{και} \quad x = -\sqrt{a}$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση

αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -16.

Αν a είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = a$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται διπλή, γιατί η εξίσωση $x^2 = 0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
- Για να είναι $(3x - 1)^2 = 0$ πρέπει $3x - 1 = 0$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$(3x - 1)^2 = 0$$

$$3x - 1 = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση έχει μια διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ σχηματίζουμε στο α' μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α , όπου α ο συντελεστής του x^2 .
- Μεταφέρουμε στο β' μέλος το σταθερό όρο και στο α' μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $\alpha^2 + 2\alpha\beta$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2 .
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$

$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$$

$$(2x + 15)^2 = 289$$

$$2x + 15 = \sqrt{289} \quad \text{ή} \quad 2x + 15 = -\sqrt{289}$$

$$2x + 15 = 17 \quad \text{ή} \quad 2x + 15 = -17$$

$$2x = 2 \quad \text{ή} \quad 2x = -32$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2x^2 = 7x \quad \beta) 3x^2 - 75 = 0$$

$$\gamma) 2x^2 + 8 = 0$$

Λύση

$$\alpha) 2x^2 = 7x$$

$$2x^2 - 7x = 0$$

$$x(2x - 7) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } 2x - 7 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = \frac{7}{2}$$

$$\beta) 3x^2 - 75 = 0$$

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25} \text{ ή } x = -\sqrt{25}$$

$$x = 5 \text{ ή } x = -5$$

$$\gamma) 2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8$$

$$x^2 = -4$$

Δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση)

2 Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2(2x - 1) - 6x(2x - 1) + 9(2x - 1) = 0$$

Λύση

- Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$.
- Ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$x^2(2x - 1) - 6x(2x - 1) + 9(2x - 1) = 0$$

$$(2x - 1)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$(2x - 1)(x - 3)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = 3 \text{ (διπλή λύση)}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.

β) Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $(x - 2)(x + 1) = 0$

είναι $x = 2$ και $x = -1$.

δ) Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 4$.

ε) Η εξίσωση $x^2 = -9$ δεν έχει λύση.

στ) Η εξίσωση $(x - 2)^2 = 0$ έχει διπλή
λύση τον αριθμό $x = 2$.

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $5x - 6 = x^2$ είναι 2ου
βαθμού.

β) Η εξίσωση $x^2 + 3x + 8 = x(x + 2)$
είναι 2ου βαθμού.

γ) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 5x + 3 = 0$
είναι

i) 1ου βαθμού, όταν $\lambda = 2$

ii) 2ου βαθμού, όταν $\lambda \neq 2$.

3 Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x - 4)(x + 1) = 0$

β) $y(y + 5) = 0$

γ) $(3 - \omega)(2\omega + 1) = 0$

δ) $7x(x - 7) = 0$

ε) $3y\left(\frac{y}{3} - 2\right) = 0$

στ) $\left(\frac{1}{2} - \omega\right)(2\omega - 1) = 0$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + 7x$

β) $-y^2 = 9y$

γ) $2\omega^2 - 72 = 0$

δ) $-2t^2 - 18 = 0$

ε) $-0,2\varphi^2 + 3,2 = 0$

στ) $\frac{z^2}{6} - 0,5z = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x - 1)^2 - 1 = 0$

β) $3(x + 2)^2 = 12$

γ) $(x + 1)^2 = 2x$

δ) $\frac{(x - 9)^2}{3} = 27$

ε) $(3x - 1)^2 - 4x^2 = 0$

στ) $(x + \sqrt{3})^2 - 3 = 0$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x + 1)^2 = 5(3x + 1)$

β) $0,5(1 - y)^2 = 18$

γ) $(2\omega^2 + 1)(\omega^2 - 16) = 0$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x - 4) = -4$

β) $y^2 + y - 12 = 0$

γ) $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0$

$$\delta) 2t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$\varepsilon) 3\varphi^2 + 1 = 4\varphi$$

$$\sigma\tau) 5z^2 - 3z - 8 = 0$$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 25x^2 + 10x + 1 = 0$$

$$\beta) y^2(y - 2) + 4y(y - 2) + 4y - 8 = 0$$

$$\gamma) \omega^2 + 2006\omega - 2007 = 0$$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\beta) x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$$

8

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					

Οριζόντια:

1. Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης
 $x^2 = 12x$

- Ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 225 = 30x$

2. Γινόμενο ριζών της εξίσωσης
 $x(x + 4) + 8(x + 4) = 0$

3. Άθροισμα ριζών της εξίσωσης
 $x^2 - 10x + 9 = 0$

4. Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $x^2 = 25$
- Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης
 $x^2 = 32x$

Κάθετα:

1. Ρίζα της εξίσωσης
 $x^2 - 20x + 100 = 0$

3. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $(x - 5)^2 - (x - 5) = 0$

4. Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης
 $x^2 - 144 = 0$

5. Ρίζα της εξίσωσης
 $x^2(x - 12) + 2007(x - 12) = 0$

B Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με $4a$.
- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β' μέλος.
- Στο α' μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2ax + \beta)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2ax + \beta$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2 .

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$4\alpha \cdot \alpha x^2 + 4\alpha \cdot \beta x + 4\alpha \cdot \gamma = 0$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$$

$$(2\alpha x)^2 + 2 \cdot 2\alpha x \cdot \beta = -4\alpha\gamma$$

$$(2\alpha x)^2 + 2 \cdot 2\alpha x \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ με το γράμμα Δ , τότε η εξίσωση γράφεται $(2\alpha x + \beta)^2 = \Delta$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:

$$2\alpha x + \beta = \pm \sqrt{\Delta}$$

$$2\alpha x = -\beta \pm \sqrt{\Delta}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο **άνισες λύσεις**,

$$\text{ΤΙΣ } x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε:

$$(2\alpha x + \beta)^2 = 0$$

$$2\alpha x + \beta = 0$$

$$2\alpha x = -\beta$$

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή λύση**,

$$\text{την } x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

Η παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το

πλήθος των λύσεών της. Γι' αυτό λέγεται διακρίνουσα και συμβολίζεται με το γράμμα Δ , δηλαδή

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

- Αν $\Delta > 0$, έχει δύο άνισες λύσεις

τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

- Αν $\Delta = 0$, έχει μία διπλή λύση την

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta < 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\beta) 6x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\gamma) -16x^2 + 8x - 1 = 0$$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4},$$

δηλαδή είναι $x = \frac{-5 + 1}{4} = -1$ ή

$$x = \frac{-5 - 1}{4} = -\frac{3}{2}$$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $\alpha = 6$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$, οπότε η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0.$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι $\alpha = -16$, $\beta = 8$, $\gamma = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση,

$$\text{την } x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{8}{2 \cdot (-16)} = \frac{1}{4}$$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$

β) $\frac{x(x+3)}{3} - \frac{x-6}{6} = \frac{1}{2}$

Λύση

$$\alpha) 9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$$

$$9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) = 2x$$

$$9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x = 0$$

$$-16x^2 + 8x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \quad (\text{διπλή λύση})$$

(Παράδειγμα 1γ)

$$\beta) \frac{x(x+3)}{3} - \frac{x-6}{6} = \frac{1}{2}$$

$$6 \cdot \frac{x(x+3)}{3} - 6 \cdot \frac{x-6}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$2x(x+3) - (x-6) = 3$$

$$2x^2 + 6x - x + 6 - 3 = 0$$

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{3}{2}$$

(Παράδειγμα 1α)

3 α) Να λυθεί η εξίσωση

$$2x^2 - 8x + 6 = 0.$$

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = -8$, $\gamma = 6$, οπότε η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 4}{4},$$

δηλαδή είναι $x = 3$ ή $x = 1$.

$$\begin{aligned} \beta) \quad 2x^2 - 8x + 6 &= 2(x^2 - 4x + 3) = \\ 2(x^2 - 3x - x + 3) &= \\ 2[x(x - 3) - (x - 3)] &= \\ = 2(x - 3)(x - 1) \end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι:

- Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί 3 και 1.
- Το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:
 $2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 3)(x - 1)$

Γενικά

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση

$2x^2 + 5x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις -1 και

$-\frac{3}{2}$ (παράδειγμα 1α).

Άρα το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 3$

γράφεται

$$2x^2 + 5x + 3 =$$

$$= 2[x - (-1)] \left[x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right] =$$

$$= 2(x + 1) \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

Ομοίως η εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{4}$

(παράδειγμα 1γ).

Άρα το τριώνυμο $-16x^2 + 8x - 1$

γράφεται

$$-16x^2 + 8x - 1 =$$

$$= -16 \left(x - \frac{1}{4} \right) \left(x - \frac{1}{4} \right) = -16 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (A) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (B).

Στήλη A	Στήλη B
α. $\Delta > 0$	1. Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.
β. $\Delta = 0$	2. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. $\Delta > 0$	3. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ. $\Delta < 0$	4. Η εξίσωση δεν έχει λύση.

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση.

β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση.

γ) Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -3, οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$.

3 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με τη βοήθεια του τύπου

α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 2x + 8 = 0$

γ) $-2x^2 + 50 = 0$ δ) $5x^2 + x - 4 = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $ax^2 + bx + c = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Εξίσωση	$ax^2 + bx + c = 0$	α	β	γ
$x(x - 1) = -2$				
$3x^2 + 4 =$ $= 2(x + 2)$				
$(x - 1)^2 =$ $= 2(x^2 - x)$				

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$

β) $4y^2 + 3y - 1 = 0$

γ) $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$

$$\delta) 2z^2 - 3z + 1 = 0$$

$$\epsilon) -25t^2 + 10t - 1 = 0$$

$$\sigma\tau) 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\zeta) 3x^2 + 18x + 27 = 0$$

$$\eta) x^2 - 4x = 5$$

$$\theta) x^2 - 3x + 7 = 0$$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 7x = 0 \quad \beta) x^2 - 16 = 0$$

i) με τη βοήθεια του τύπου

ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$$

$$\beta) (y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3)$$

$$\gamma) (2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$$

$$\delta) \varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 1}{3} - \frac{x + 3}{5} = x - 2$$

$$\beta) \frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} = \frac{y - 2}{6} - 2$$

$$\gamma) 0,5t^2 - 0,4(t + 2) = 0,7(t - 2)$$

$$\delta) \frac{\omega}{2} (\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$\alpha) x^2 + 4x - 12$$

$$\beta) 3y^2 - 8y + 5$$

$$\gamma) -2\omega^2 + 5\omega - 3$$

$$\delta) x^2 - 16x + 64$$

$$\epsilon) 9y^2 + 12y + 4$$

$$\sigma\tau) -\omega^2 + 10\omega - 25$$

7 Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με

$\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση

α) $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$

β) $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

8 Δίνεται η εξίσωση

$(\alpha + \gamma)x^2 - 2\beta x + (\alpha - \gamma) = 0$, όπου α , β , γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):

« Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά

του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου».

Τους Λαούς της Μεσοποταμίας δεν τους απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι' αυτό πρόσθεταν μήκος με επιφάνεια).

Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x , τότε η Λύση του προβλήματος οδηγεί στη Λύση της εξίσωσης $x^2 - x = 870$. Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- ▶ Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$
- ▶ Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$,
αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$
- ▶ Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα
βρεις $870\frac{1}{4}$.
- ▶ Το $870\frac{1}{4}$ είναι το τετράγωνο
του $29\frac{1}{2}$
- ▶ Πρόσθεσε στο $29\frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που
βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- ▶ Αυτή είναι η πλευρά του
τετραγώνου.

- Το 1 είναι ο συντελεστής του x . (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

- Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.

- Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;

- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»
-

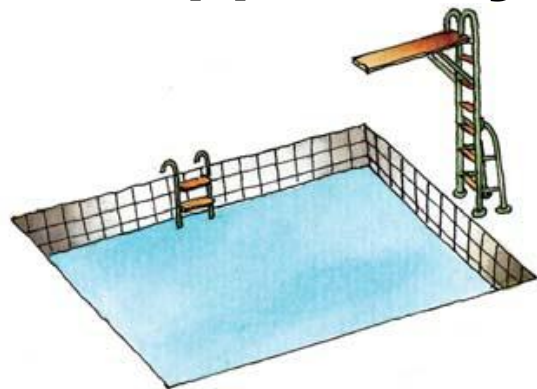
(*)(Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: Ιστορία των Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων, τόμος Α', Αθήνα 1997.

2.2 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της Οικονομίας, της Φυσικής κ.τ.λ.

Πρόβλημα 1ο

Το εμβαδόν μια κολυμβητικής πισίνας είναι 400 m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις της, αν αυτές έχουν άθροισμα 41 m .



Λύση

α) Αν η μία διάσταση της πισίνας είναι x , τότε η άλλη θα είναι $41 - x$,

αφού το άθροισμα τους είναι 41 m. Επειδή το εμβαδόν της πισίνας είναι 400 m^2 , έχουμε την εξίσωση $x(41 - x) = 400$ ή $41x - x^2 = 400$ ή $x^2 - 41x + 400 = 0$.

Στην εξίσωση αυτή είναι $\alpha = 1$, $\beta = -41$, $\gamma = 400$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 1681 - 1600 = 81 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{41 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{41 \pm 9}{2},$$

δηλαδή είναι $x = 25$ ή $x = 16$.

Αν $x = 25$, τότε $41 - x = 41 - 25 = 16$, ενώ αν $x = 16$, τότε $41 - x = 41 - 16 = 25$. Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις οι διαστάσεις της πισίνας είναι 25 m και 16 m.

Πρόβλημα 2ο

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα

ξοδεύει $\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500$ ευρώ. Αν η

βιοτεχνία πουλάει κάθε πουκάμισο 60 €, πόσα πουκάμισα πρέπει να πουλήσει, ώστε να κερδίσει 3500 €;

Λύση

α) Αν η βιοτεχνία πουλήσει x πουκάμισα, θα εισπράξει $60x$ €, οπότε θα κερδίσει

$$60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500 \right) \text{ €}.$$

Επειδή θέλουμε το κέρδος να είναι 3500€ έχουμε την εξίσωση

$$60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500 \right) = 3500 \text{ ή}$$

$$60x - \frac{1}{10}x^2 - 20x - 500 = 3500$$

$$600x - x^2 - 200x - 5000 = 35000$$

$$x^2 - 400x + 40000 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$= (-400)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40000 =$$

$$= 160000 - 160000 = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση,

$$\text{την } x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{400}{2 \cdot 1} = 200.$$

Επομένως, για να κερδίσει η βιοτεχνία 3500 €, πρέπει να πουλήσει 200 πουκάμισα.

Πρόβλημα 3ο

Από ένα ακίνητο αερόστατο που βρίσκεται σε ύψος h αφήνεται να πέσει ένας σάκος με άμμο για να ελαφρύνει. Ταυτόχρονα, το αερόστατο αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα άνω με σταθερή επιτάχυνση $0,5 \text{ m/sec}^2$. Τη

στιγμή που ο σάκος φτάνει στο έδαφος, το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 84 m. Να βρεθεί πόσο διήρκεσε η πτώση του σάκου.

Σημείωση:

Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι:

- Αν ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h m, τότε θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t sec, όπου

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/sec}^2 \text{ περίπου.}$$

- Αν ένα σώμα αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση a , τότε σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Λύση

α) Αν η πτώση του σάκου διήρκεσε t sec, τότε στο χρόνο αυτό ο σάκος διήνυσε απόσταση

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10t^2 = 5t^2$$

αφού $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

Στον ίδιο χρόνο το αερόστατο ανέβηκε κατά ύψος

$$h' = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot t^2 = \frac{1}{4}t^2$$

αφού $a = 0,5 \text{ m/sec}^2$.

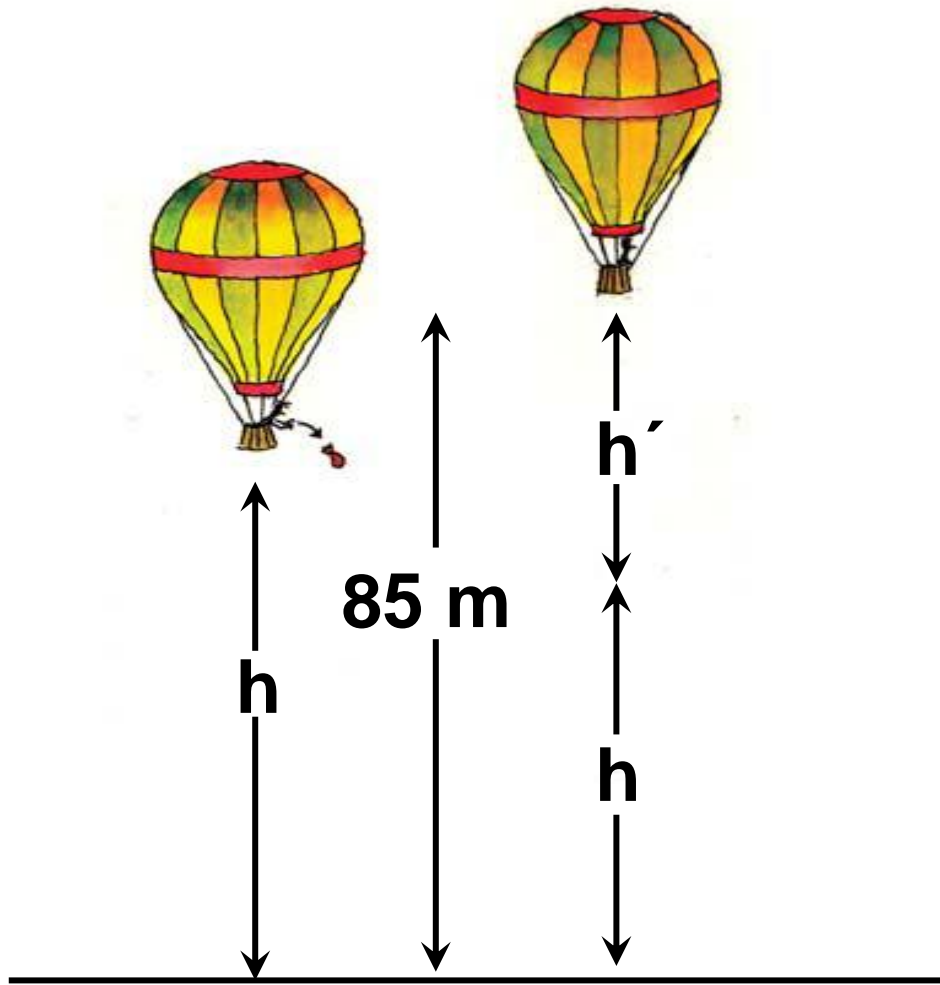
Επειδή $h + h' = 84$, έχουμε την

$$\text{εξίσωση } 5t^2 + \frac{1}{4}t^2 = 84 \text{ ή}$$

$$20t^2 + t^2 = 336 \text{ ή } 21t^2 = 336$$

$$\text{ή } t^2 = 16, \text{ οπότε } t = 4 \text{ ή } t = -4.$$

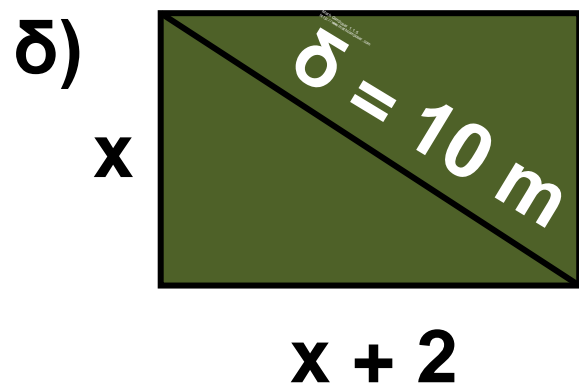
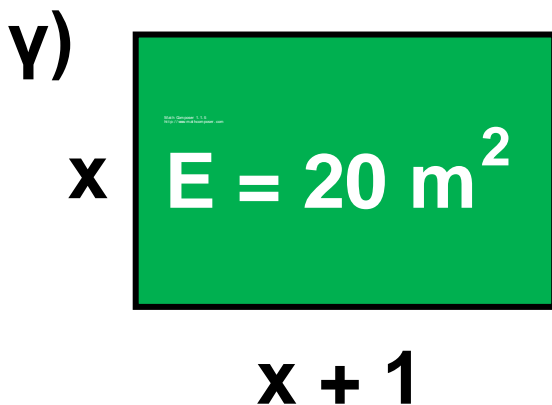
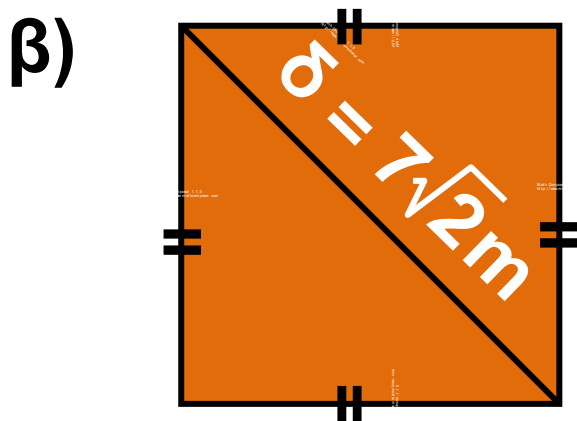
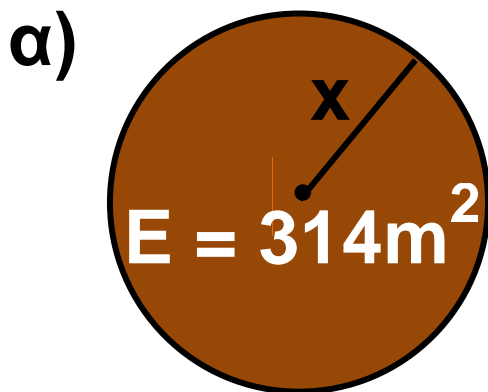
Επειδή το t παριστάνει χρόνο, πρέπει $t > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η διάρκεια της πτώσης του σώματος ήταν $t = 4 \text{ sec}$.



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.



2 Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε:

α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιο του.

β) Το γινόμενο του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.

γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιο του.

3 Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 2,5 dm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του. (1 λίτρο = 1dm^3)

4 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2 . Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περιφραξη του.

5 Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

6 Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικριστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;

7 Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο

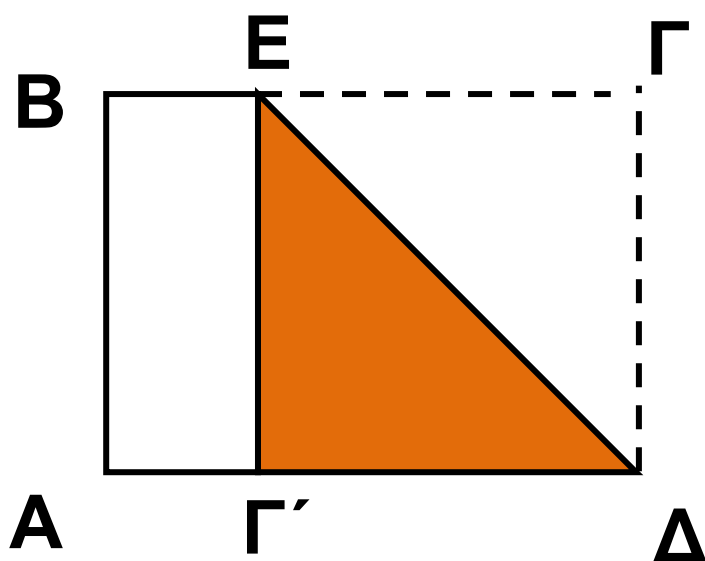
αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

8 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x .

9 Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσο ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μια ακόμη φορά, αφού τους είπε: «Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια, με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου, αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή

προσθέσετε τις ηλικίες τους βρίσκετε τον ίδιο αριθμό». Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του;

10 Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ, έτσι ώστε η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ, τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά τα 3 του αρχικού εμβαδού του. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου του βιβλίου.



11 Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με βότσαλα ένα κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3 m. Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το σιντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του σιντριβανιού.

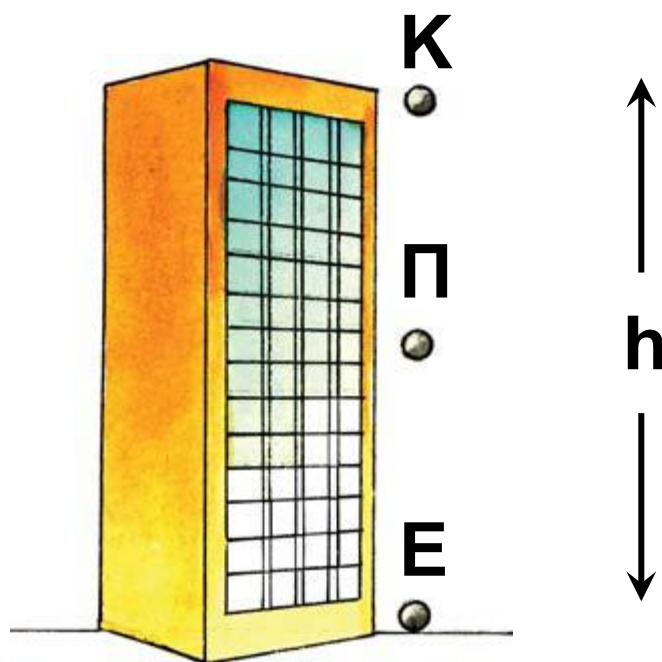


12 Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6 m, χρειάστηκαν $251,2 \text{ m}^2$ λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.

13 Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος, που αφέθηκε να πέσει από την κορυφή K ενός

ουρανοξύστη, διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησης του διήνυσε μια απόσταση Π Ε ίση με τα $\frac{5}{9}$ του

ύψους του ουρανοξύστη. Να βρείτε πόσο χρόνο διήρκεσε η πτώση του σώματος και ποιο ήταν το ύψος του ουρανοξύστη ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).



2.2 Κλασματικές εξισώσεις



✓ Μαθαίνω να λύνω κλασματικές εξισώσεις, που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{3} = \frac{x+8}{12}$$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των $x+2$, x , x^2+2x και να λύσετε και την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Επαληθεύεται η εξίσωση από όλες τις τιμές του x που βρήκατε;

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυση τους οδηγεί σε εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή και η οποία ονομάζεται κλασματική εξίσωση.

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{6},$$
$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

Τις κλασματικές εξισώσεις τις επιλύουμε όπως και τις υπόλοιπες εξισώσεις που έχουν παρονομαστή γνωστό αριθμό.

Για παράδειγμα, προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x(x+2)}$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

Πρέπει $x \neq 0$ και $x + 2 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x + 2) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} x(x + 2) \frac{x}{x + 2} + x(x + 2) \frac{4}{x} &= \\ &= x(x + 2) \frac{x + 8}{x(x + 2)} \end{aligned}$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$$\begin{aligned} x^2 + 4(x + 2) &= x + 8 \\ x^2 + 4x + 8 &= x + 8 \text{ ή } x^2 + 3x = 0 \text{ ή} \\ x(x + 3) &= 0, \text{ άρα } x = 0 \text{ ή } x = -3. \end{aligned}$$

Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Η λύση $x = 0$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x+1} - \frac{8}{x} = 1$$

$$\beta) \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

Λύση

α) Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x+1) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται

$$x(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} - x(x+1) \cdot \frac{8}{x} =$$

$$= x(x+1) \cdot 1$$

$$x^2 - 8(x+1) = x(x+1) \quad \text{ή}$$

$$x^2 - 8x - 8 = x^2 + x \quad \text{ή}$$

$$-9x = 8 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{8}{9}$$

(ικανοποιεί τους περιορισμούς).

Άρα η εξίσωση έχει λύση την $x = -\frac{8}{9}$

β) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)} \quad (1).$$

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x-2) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$\begin{aligned} x(x-2)\frac{1}{x-2} - x(x-2)\frac{1}{x} &= \\ &= x(x-2)\frac{2}{x(x-2)} \end{aligned}$$

$$x - (x-2) = 2 \quad \text{ή} \quad x - x = 2 - 2 \quad \text{ή} \quad 0x = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από τους αριθμούς 0 και 2.

2 Ένας μαραθωνοδρόμος διήνυσε την απόσταση των 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του, διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

Λύση

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε ήταν x km/h, τότε την απόσταση των 42 km τη διήνυσε σε χρόνο $\frac{42}{x}$ ώρες. Αν η ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, δηλαδή $(x + 1)$ km/h, τότε θα έκανε $\frac{42}{x + 1}$ ώρες. Ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος από τον προηγούμενο

κατά $\frac{1}{10}$ της ώρας, οπότε έχουμε την εξίσωση $\frac{42}{x} = \frac{42}{x+1} + \frac{1}{10}$ (1).

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $10x(x+1) \neq 0$ και η εξίσωση (1)

$$\begin{aligned} \text{γράφεται } 10x(x+1) \cdot \frac{42}{x} &= \\ &= 10x(x+1) \cdot \frac{42}{x+1} + 10x(x+1) \cdot \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$420(x+1) = 420x + x(x+1) \text{ ή}$$

$$420x + 420 = 420x + x^2 + x \text{ ή}$$

$$x^2 + x - 420 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Η διακρίνουσα είναι } \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = \\ &= 12 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) = 1681 > 0. \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 41}{2},$$

δηλαδή είναι $x = 20$ ή $x = -22$.

Επειδή $x > 0$, η μέση ταχύτητα του μαραθωνοδρόμου ήταν 20 km/h.

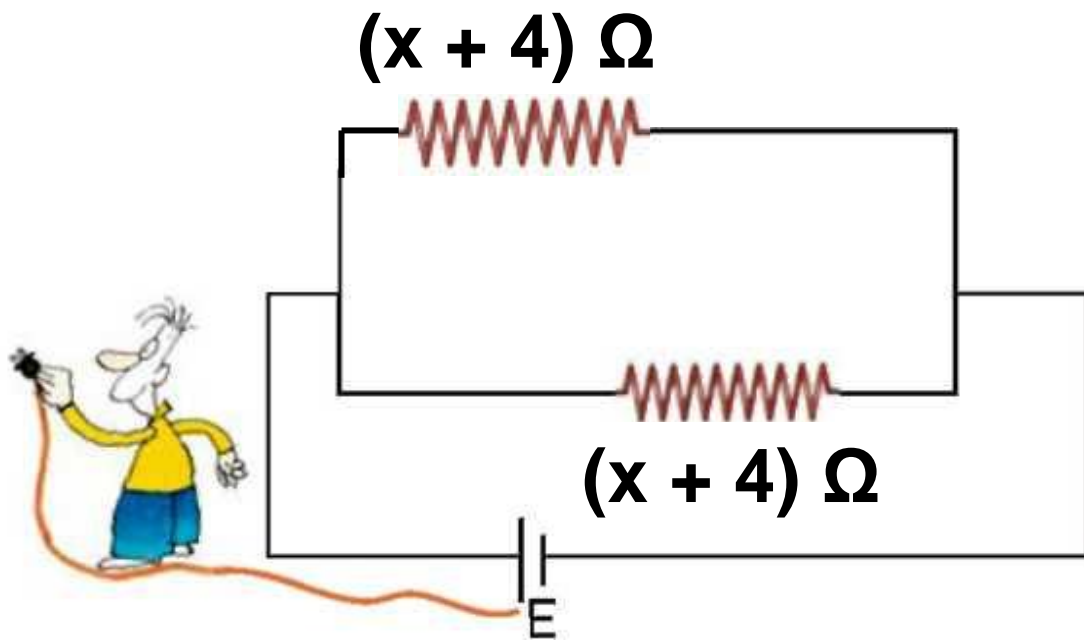
3 Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα δύο αντιστάτες που συνδέονται παράλληλα έχουν αντιστάσεις αντίστοιχα 4Ω και 9Ω μεγαλύτερες από την ολική τους αντίσταση. Να βρεθεί η ολική αντίσταση του κυκλώματος.

Σημείωση: Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι, αν δύο αντιστάτες που έχουν αντιστάσεις R_1 , R_2 συνδεθούν παράλληλα, τότε η ολική τους αντίσταση $R_{ολ}$ δίνεται

από τον τύπο
$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

Λύση

Αν η ολική αντίσταση είναι $x \Omega$, τότε οι δύο αντιστάσεις του κυκλώματος θα είναι $(x + 4) \Omega$ και $(x + 9) \Omega$.



Άρα ισχύει
$$\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{x + 9} = \frac{1}{x} \quad (1)$$

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $x(x + 4)(x + 9) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x + 4)(x + 9) \cdot \frac{1}{x + 4} + x(x + 4)(x + 9) \cdot \frac{1}{x + 9} = x(x + 4)(x + 9) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cdot \frac{1}{x + 9} = x(x + 4)(x + 9) \cdot \frac{1}{x}$$

$$x(x + 9) + x(x + 4) = (x + 4)(x + 9) \quad \text{ή}$$

$$x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 4x + 9x + 36$$
$$\text{ή } x^2 = 36 \text{ ή } x = \pm\sqrt{36}.$$

Άρα $x = 6$ ή $x = -6$.

Από τις δύο λύσεις της εξίσωσης μόνο η $x = 6$ είναι λύση του προβλήματος. Άρα η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι 6Ω .



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$

ορίζονται αν $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της

εξίσωσης $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$

γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης

$$\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2 \text{ τότε αυτή γράφεται}$$

$$5x + 3 = 2.$$



δ) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2 + 1} = x$

ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της.



2 Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε $\frac{3}{4}$. Ποια

από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση;

$$\boxed{\alpha)} \frac{x}{2-x} = \frac{3}{4} \quad \boxed{\beta)} \frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\gamma)} \frac{x}{x-2} = \frac{3}{4} \quad \boxed{\delta)} \frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$$

3 Η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$ έχει

ως λύση τον αριθμό

α) $x = 1$ β) $x = -1$ γ) $x = 0$ δ) $x = 2$

4 Ένας μαθητής για να λύσει την

εξίσωση $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, έκανε

απαλοιφή παρονομαστών και

λύνοντας την εξίσωση $2x - 1 = 1$

που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό $x = 1$. Η απάντησή του είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$

γ) $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$

δ) $\frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}$

$$\varepsilon) \frac{2x + 1}{x - 3} = 2 - \frac{7}{3 - x} \quad \sigma\tau) 1 - \frac{5}{y - 2} = \frac{6 - y}{2 - y}$$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1 \quad \beta) \frac{5}{y} + \frac{4}{y - 1} = 2$$

$$\gamma) \frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega + 2} = \frac{6}{\omega^2} \quad \delta) \frac{4}{(\alpha - 2)^2} - \frac{3}{\alpha - 2}$$

$$\varepsilon) \frac{6}{x(x + 3)} = \frac{x + 2}{x} + \frac{x + 1}{x + 3}$$

$$\sigma\tau) \frac{y - 1}{y} - \frac{2}{y + 1} = \frac{y}{y(y + 1)}$$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x + 5}{x^2 - 25} = \frac{3}{x + 5}$$

$$\beta) \frac{y + 1}{y^2 - y - 2} - \frac{1}{y - 2} = 0$$

$$\gamma) \frac{\omega^2 + 5}{\omega^2 - \omega} - \frac{\omega + 5}{\omega - 1} = \frac{1}{\omega}$$

$$\delta) \frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2 - y} = 0$$

$$\beta) \frac{2\omega^2}{\omega^2 + 2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega + 2}$$

$$\gamma) \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$$

$$\delta) 1 + \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha + 4}{\alpha^2 - 3\alpha + 2}$$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$$

$$\beta) \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} - \frac{2}{x - 3} = \frac{x - 6}{x^2 - 9}$$

6 Να λύσετε τους τύπους:

$$\alpha) \rho = \frac{m}{v} \text{ ως προς } v$$

$$\beta) \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \text{ ως προς } R$$

$$\gamma) R = \rho \frac{\ell}{S} \text{ ως προς } S$$

$$\delta) \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \text{ ως προς } T_1$$

$$\epsilon) \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ως προς } R$$

$$\sigma\tau) \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \text{ ως προς } \alpha$$

$$\zeta) \frac{1}{u_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \text{ ως προς } u_\alpha^2$$

η) $S = \frac{\alpha}{1 - \lambda}$ ως προς λ

7 α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα $\frac{17}{4}$.

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ για να βρούμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$.

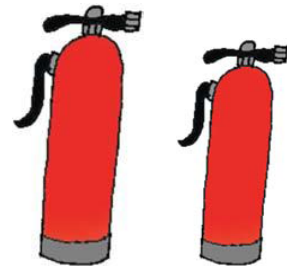
γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

8 Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 €. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που

έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;



9 Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτιρίου και έδωσε 240 €. Πριν από λίγα χρόνια, που η τιμή κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.



10 Αναμειγνύουμε 12 gr ενός διαλύματος A με 15 gr ενός διαλύματος B και σχηματίζουμε 25

cm^3 ενός διαλύματος Γ. Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι $0,2 \text{ gr/cm}^3$ μικρότερη.

11 Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας.

12 Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να



φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν από την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως, λόγω ολισθηρότητας του δρόμου, μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km/h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση.



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η χρυσή τομή

Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δυο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

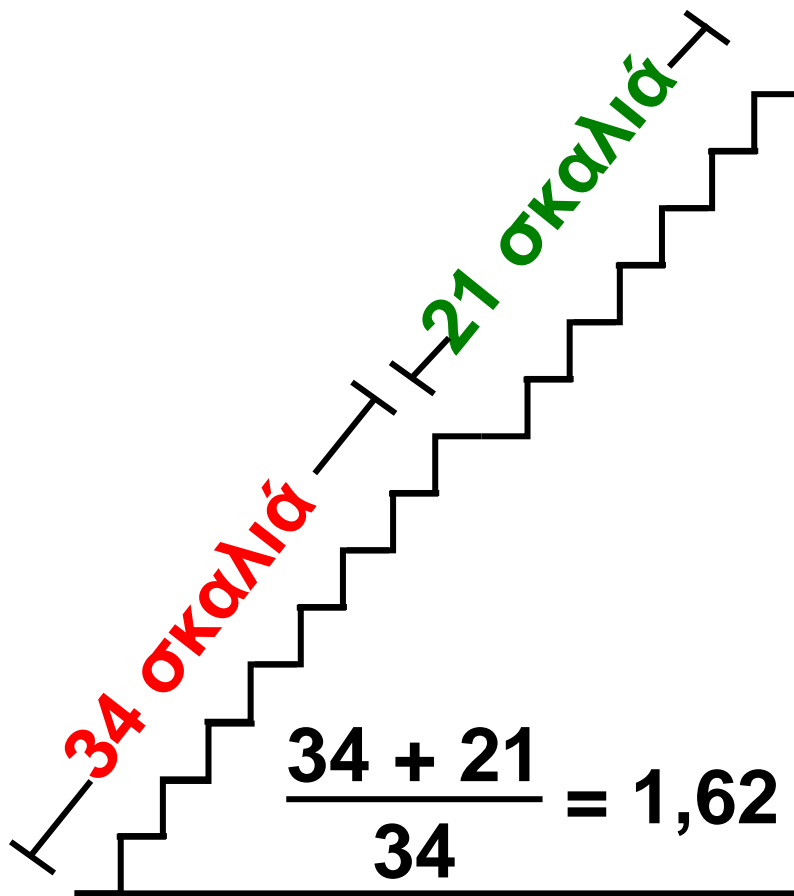
α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών $\frac{34 + 21}{34}$ και $\frac{34}{21}$.

Τι παρατηρείτε;

Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο; Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = \lambda$ σε δύο άνισα μέρη AT και TB , ώστε ο λόγος ολόκληρου

προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».



β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής

εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ (1).

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ .

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\varphi = \frac{\lambda}{x}$ είναι ίσος με $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618...$

Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται λόγος της χρυσής τομής και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.

Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ , λέγεται «χρυσό ορθογώνιο» και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varphi$$



Περιεχόμενα 3ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Α΄ • ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.10 – Πράξεις ρητών παραστάσεων	7
Α. Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων	7
Β. Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων	19
Γενικές ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου..	34
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση 1ου Κεφαλαίου	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- 2.1 – Η εξίσωση $ax + \beta = 0$50**
- 2.2 – Εξισώσεις δευτέρου βαθμού 61**
- A. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων 66**
- B. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου...80**
- 2.3 – Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού.....100**
- 2.4 – Κλασματικές εξισώσεις.....114**

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.