Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.5 – 1.9

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

<u>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</u>

Δημήτριος Αργυράκης, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***
Παναγιώτης Βουργάνας, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***
Κωνσταντίνος Μεντής, ***Μαθημ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***
Σταματούλα Τσικοπούλου, ***Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***
Μιχαήλ Χρυσοβέργης, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

<u>ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ</u>

Εμμανουήλ Μανατάκης, ***Επίκ. Καθ. Πολυτεχν. Σχολής Παν/μίου Πατρών***
Μιχαήλ Σαλίχος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***
Νικόλαος Παπαευστρατίου, ***Μαθ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

<u>ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ</u>

Νικόλαος Μαρουλάκης, ***Σκιτσογράφος - Εικονογράφος***

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>
Ευγενία Βελάγκου, *Φιλόλογος*

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>
Δημήτριος Κοντογιάννης,
Σύμβουλος του Παιδαγ. Ινστιτούτου

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>
Παναγιώτης Γράββαλος, *Ζωγράφος*

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>
Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

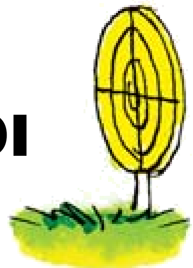
ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.5 – 1.9

1.5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

✓ **Θυμάμαι ποια ισότητα λέγεται ταυτότητα.**

✓ **Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές ταυτότητες.**

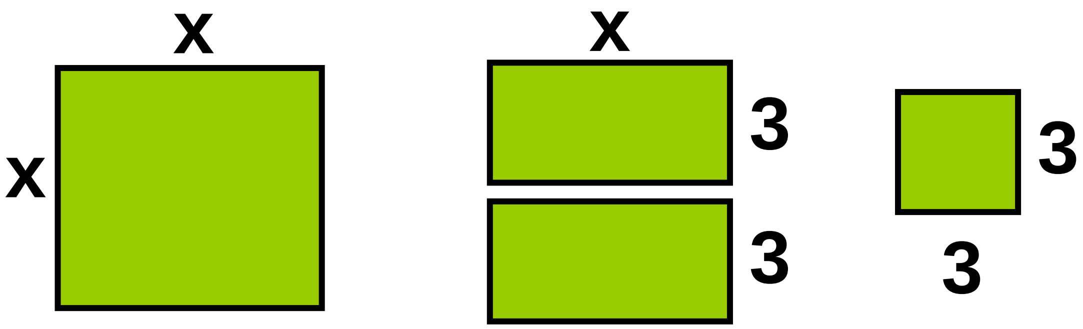


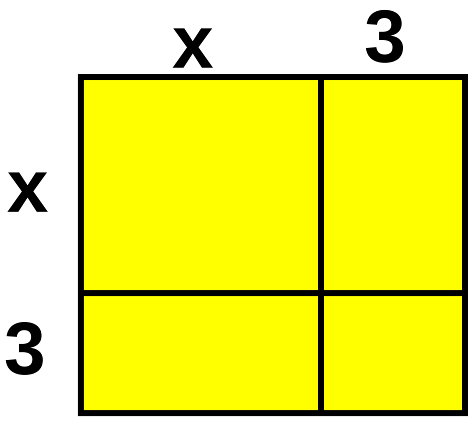
✓ **Μαθαίνω να αποδεικνύω μια απλή ταυτότητα.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Ποιες από τις ισότητες $3x = 12$, $x + y = 7$, $4α = 3α + α$, $x(x + 2) = x^2 + 2x$, αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους;

2. α) Να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων.





β) Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις εκφράζει το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου;

i) $x^2 + 9$ ii) $(x + 3)^2$

iii) $x^2 + 6x$ iv) $6x + 9$

γ) Να συγκρίνετε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων με το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου.

Υπάρχουν ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και αληθεύουν για ορισμένες τιμές των μεταβλητών τους. Για παράδειγμα, η ισότητα $3x = 12$, αληθεύει για $x = 4$ και δεν αληθεύει για καμιά άλλη τιμή του x. Ομοίως, η ισότητα $x + y = 7$, αληθεύει για $x = 1$ και $y = 6$, ή για $x = 3$ και $y = 4$, ενώ δεν αληθεύει για $x = 4$ και $y = 5$.

Υπάρχουν όμως και ισότητες, που αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους όπως για παράδειγμα οι ισότητες: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $4\alpha = 3\alpha + \alpha$, $x(x + 2) = x^2 + 2x$. Οι ισότητες αυτές λέγονται **ταυτότητες**.

Γενικά

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Ταυτότητες υπάρχουν πολλές, ορισμένες από αυτές τις συναντάμε πολύ συχνά και γι' αυτό αξίζει να τις θυμόμαστε. **Αξιοσημείωτες ταυτότητες** είναι:

α) Τετράγωνο αθροίσματος

Αν την παράσταση $(α + β)^2$ τη γράψουμε $(α + β)(α + β)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, έχουμε:

$$(α + β)^2 = (α + β)(α + β) =$$
$$= α^2 + αβ + βα + β^2 =$$
$$= α^2 + 2αβ + β^2$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα

$$\boxed{(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2}$$

Το δεύτερο μέρος της προηγούμενης ισότητας λέγεται ανάπτυγμα του $(α + β)^2$.

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y + 4)^2$ προκύπτει, αν στην προηγούμενη ταυτότητα αντικαταστήσουμε το α με το y και το β με το 4, οπότε έχουμε:

$(y + 4)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 =$
$= y^2 + 8y + 16.$

Η προηγούμενη ταυτότητα, όπως και όλες οι επόμενες, χρησιμοποιούνται και όταν τα α, β είναι οποιεσδήποτε αλγεβρικές παραστάσεις, π.χ.

$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 =$

1 2 3 4 5

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

1 2 3 4 5

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

β) Τετράγωνο διαφοράς

Αν την παράσταση $(\alpha - \beta)^2$ τη γράψουμε $(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, τότε μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Πράγματι έχουμε:

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) =$

$= \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y - 4)^2$ προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε το α με το y και το β με το 4, οπότε έχουμε:

$(y - 4)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 =$

$= y^2 - 8y + 16$

Ομοίως, για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του $(3x - 4y)^2$ έχουμε:

$(\underset{1}{3x} - \underset{2}{4y})^2 =$

$= \underset{3}{(3x)^2} - 2 \cdot \underset{4}{(3x) \cdot (4y)} + \underset{5}{(4y)^2} =$

$$= 9x^2 - 24xy + 16y^2 \quad (\overset{1}{\alpha} - \overset{2}{\beta})^2 =$$

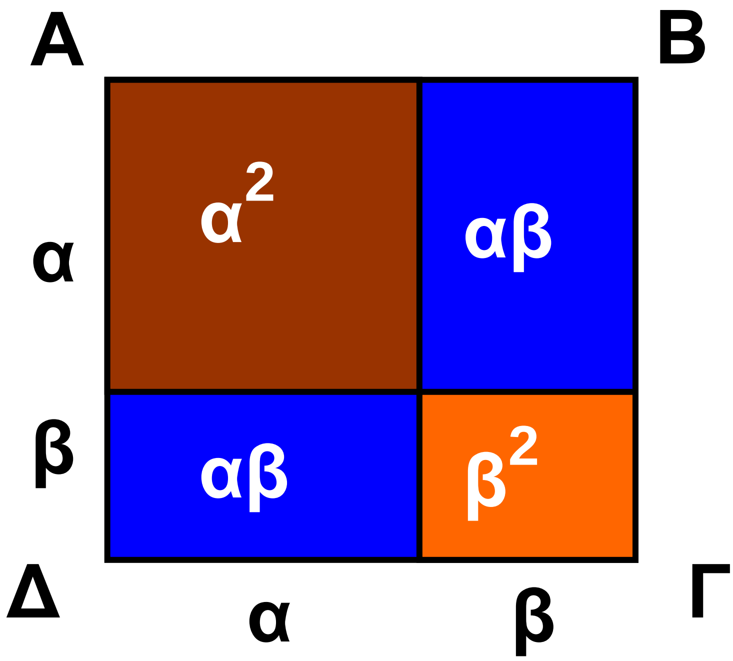
$$= \overset{3}{\alpha^2} - \overset{4}{2\alpha\beta} + \overset{5}{\beta^2}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ για θετικούς αριθμούς α και β μπορεί να ερμηνευθεί και γεωμετρικά. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α + β, οπότε το εμβαδόν του είναι: $E = (\alpha + \beta)^2$ (1)
Το εμβαδόν όμως του τετραγώνου ΑΒΓΔ προκύπτει ακόμη κι αν προσθέσουμε τα εμβαδά των σχημάτων που το αποτελούν.
Δηλαδή $E = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2$

ή Ε = $α^2$ + 2αβ + $β^2$ (2) Από τις ισότητες (1) και (2) διαπιστώνουμε ότι

$$(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2.$$



γ) Κύβος αθροίσματος - διαφοράς

Αν την παράσταση $(α + β)^3$ τη γράψουμε $(α + β)(α + β)^2$ και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό του α + β με το ανάπτυγμα του $(α + β)^2$, έχουμε: $(α + β)^3 = (α + β)(α + β)^2 =$

$= (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
$= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 =$
$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα

$$\boxed{(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2, + 3\alpha\beta^2 + \beta^3}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3}$$

Σύμφωνα με τις προηγούμενες ταυτότητες έχουμε:

- $(x + 2)^3 =$
$= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 =$
$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
- $(2x - 5)^3 =$
$= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2x) \cdot 5^2 - 5^3 =$
$= 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125.$

δ) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

Αν βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου $(α + β)(α - β)$ έχουμε:

$(α + β)(α - β) = α^2 - αβ + ,β - β^2 =$
$= α^2 - β^2$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα

$$\boxed{(α + β)(α - β) = α^2 - β^2}$$

Η προηγούμενη ταυτότητα χρησιμοποιείται για να βρίσκουμε γρήγορα το γινόμενο αθροίσματος δύο παραστάσεων επί τη διαφορά τους. Για παράδειγμα, έχουμε:

- **$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$**
- **$(3α + 2β)(3α - 2β) = (3α)^2 - (2β)^2 = 9α^2 - 4β^2$**

ε) Διαφορά κύβων - Άθροισμα κύβων

Η παράσταση $(α - β)(α^2 + αβ + β^2)$ γράφεται:

$$(α - β)(α^2 + αβ + β^2) =$$
$$= α^3 + \cancel{α^2β} + \cancel{αβ^2} - \cancel{βα^2} - \cancel{αβ^2} - β^3 =$$
$$= α^3 - β^3$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα

$$\boxed{(α - β)(α^2 + αβ + β^2) = α^3 - β^3}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(α + β)(α^2 - αβ + β^2) = α^3 + β^3}$$

Οι προηγούμενες ταυτότητες χρησιμοποιούνται για να βρίσκουμε γρήγορα γινόμενα παραστάσεων που έχουν τις αντίστοιχες μορφές. Για παράδειγμα έχουμε:

• $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = (x - 2)(x^2 + 2x +$
$+ 2^2) = x^3 - 2^3 = x^3 - 8$
• $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = (x + 3)(x^2 - 3x +$
$+ 3^2) = x^3 + 3^3 = x^3 + 27$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **α) Να αποδειχθεί η ταυτότητα**
$(\alpha + \beta + \gamma)^2 =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha.$

β) Να βρεθεί το ανάπτυγμα του
$(3x + 2y + 4)^2$.

Λύση

α) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) =$
$= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\alpha + \beta^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha +$
$+ \gamma\beta + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha.$

β) Σύμφωνα με την προηγούμενη ταυτότητα, το ανάπτυγμα του $(3x + 2y + 4)^2$ είναι: $(3x + 2y + 4)^2 =$
$= (3x)^2 + (2y)^2 + 4^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y +$
$+ 2 \cdot 2y \cdot 4 + 2 \cdot 3x \cdot 4 =$
$= 9x^2 + 4y^2 + 16 + 12xy + 16y + 24x.$

α	β	γ	
α^2	αβ	αγ	α
αβ	β^2	βγ	β
αγ	βγ	γ^2	γ

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

2 α) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ και $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$.

β) Αν $x + \dfrac{2}{x} = 3$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων

$$x^2 + \frac{4}{x^2} \quad \text{και} \quad x^3 + \frac{8}{x^3}$$

Λύση

α) Κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος κάθε ταυτότητας και έχουμε:

$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta =$
$= \alpha^2 + \beta^2$

$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta +$
$3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$.

β) Η παράσταση $x^2 + \dfrac{4}{x^2}$ γράφεται $x^2 + \left(\dfrac{2}{x}\right)^2$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ έχουμε:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{2}{x} =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5$$

β) Η παράσταση $x^3 + \dfrac{8}{x^3}$ γράφεται $x^3 + \left(\dfrac{2}{x}\right)^3$ και σύμφωνα με την ταυτότητα

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

έχουμε:

$$x^3 + \frac{8}{x^3} = x^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^3 =$$

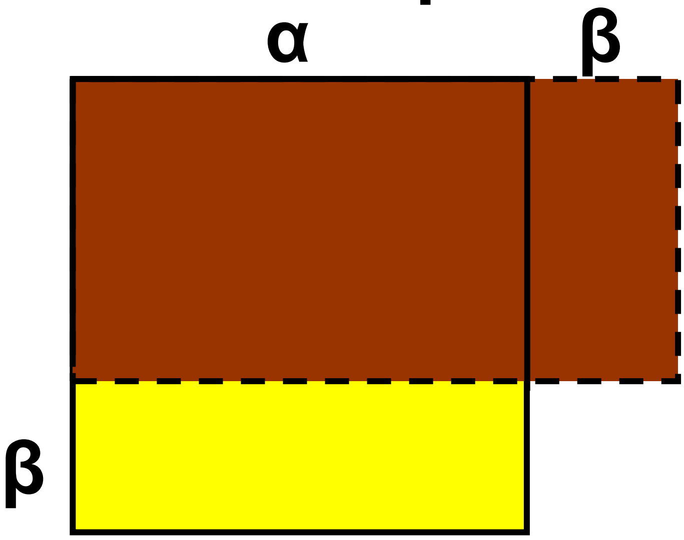
$$= \left(x + \frac{2}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{2}{x} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right) =$$

$$= 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 27 – 18 = 9$$

3 Σε ένα οικόπεδο που έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς α, αν μειωθεί η μία διάσταση του κατά β και ταυτόχρονα η άλλη διάστασή του αυξηθεί κατά β, πόσο θα μεταβληθεί το εμβαδόν του;

Λύση

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $α^2$. Αν αλλάξουν οι πλευρές του, τότε το οικόπεδο θα γίνει ορθογώνιο με διαστάσεις α - β και α + β, οπότε θα έχει εμβαδόν $(α - β)(α + β) = α^2 - β^2$. Δηλαδή, το εμβαδόν από το $α^2$ θα γίνει $α^2 - β^2$, που σημαίνει ότι θα μειωθεί κατά $β^2$.



4 **Να μετατραπεί το κλάσμα $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ που έχει άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.**

Λύση

Για να μετατραπεί ο παρονομαστής σε ρητό αριθμό πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $3+\sqrt{5}$, γιατί $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) =$

$= 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$.

Επομένως

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

5 **α) Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(\nu-1)(\nu+1)+1=\nu^2$.**

β) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2007 \cdot 2009 + 1$ είναι τετράγωνο

ενός ακεραίου αριθμού, τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

α) $(\nu - 1)(\nu + 1) + 1 = (\nu^2 - 1^2) + 1 =$
$= \nu^2 - 1 + 1 = \nu^2.$

β) Αν $\nu = 2008$, τότε $\nu - 1 = 2007$ και $\nu + 1 = 2009$. Σύμφωνα με την προηγούμενη ταυτότητα έχουμε:
$2007 \cdot 2009 + 1 = (\nu - 1)(\nu + 1) + 1 =$
$= \nu^2 = 20082.$

Άρα, ο αριθμός $2007 \cdot 2009 + 1$ είναι το τετράγωνο του ακεραίου 2008.

► Ορισμένοι αριθμητικοί υπολογισμοί γίνονται πιο σύντομα με τη βοήθεια των ταυτοτήτων π.χ.

$99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) =$
$= 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

$103^2 = (100 + 3)^2 =$
$= 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10609$

6 **Να γίνουν οι πράξεις:**

α) $(2x - 3)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1)$

β) $(x - 2y)^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Λύση

α) $(2x - 3)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1) =$

$= [(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2] - 2[(3x)^2 - 1^2] =$

$= (4x^2 - 12x + 9) - 2(9x^2 - 1) =$

$= 4x^2 - 12x + 9 - 18x^2 + 2 =$

$= -14x^2 - 12x + 11$

β) $(x - 2y)^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2) =$

$= [x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 -$

$- (2y)^3] - (x^3 - y^3) =$

$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 - x^3 + y^3 =$

$= -6x^2y + 12xy^2 - 7y^3$

7 **Να αποδειχθεί ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$**

(Ταυτότητα Lagrange).

Λύση

Το 1ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) =$

$= \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$

Το 2ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$(\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 =$

$= (\alpha x)^2 + 2(\alpha x)(\beta y) + (\beta y)^2 + (\alpha y)^2 -$

$- 2(\alpha y)(\beta x) + (\beta x)^2 =$

$= \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 -$

$- 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2 =$

$= \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$

Άρα $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) =$

$= (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα για να αποδείξουμε μία ταυτότητα Α = Β, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

• Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε στο άλλο (παραδείγματα 1, 2, 5) ή
• – Κάνουμε τις πράξεις στο 1ο μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μία ισότητα Α = Γ.
– Κάνουμε τις πράξεις στο 2ο μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μια ισότητα Β = Γ.
Αφού Α = Γ και Β = Γ συμπεραίνουμε ότι Α = Β (παράδειγμα 7).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;

α) $0x = 0$

β) $x + y = 0$

γ) $\alpha^2\alpha = \alpha^3$

δ) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

ε) $\alpha\beta = 0$

2 **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

i) Το ανάπτυγμα του (x + α)2 είναι:

α) $x^2 + \alpha^2$

β) $x^2 - 2x\alpha + \alpha^2$

γ) $x^2 + x\alpha + \alpha^2$

δ) $x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$

ii) Το ανάπτυγμα του $(2\alpha + 1)^2$ είναι:

α) $2\alpha^2 + 4\alpha + 1$

β) $4\alpha^2 + 1$

γ) $4\alpha^2 + 4\alpha + 1$

δ) $4\alpha^2 + 2\alpha + 1$

iii) Το ανάπτυγμα του $(y - 2)^2$ είναι:

α) $y^2 - 2y + 4$

β) $y^2 - 4$

γ) $y^2 - 4y + 4$

δ) $y^2 + 4y + 4$

3 **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.**

α) $(x - y)^2 = x^2 - 2x(-y) + (-y)^2$ ☐

β) $(-α + β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$ ☐

γ) $(5ω + 4)^2 = 25ω^2 + 16$ ☐

δ) $(3x - y)^2 = 3x^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2$ ☐

4 **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

i) Το ανάπτυγμα του $(x + 1)^3$ είναι:

α) $x^3 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1^3$

β) $x^3 + 1^3$

γ) $x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$

δ) $x^3 + x^2 \cdot 1 + x \cdot 1^2 + 1^3$ ☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(β - 2)^3$ είναι:

α) $β^3 - 3 \cdot β \cdot 2 + 2^3$

β) $β^3 - 2^3$

γ) $β^3 - β^2 \cdot 2 + β \cdot 2^2 - 2^3$

δ) $β^3 - 3 \cdot β^2 \cdot 2 + 3 \cdot β \cdot 2^2 - 2^3$ ☐

5 **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.**

α) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$ ☐

β) $(2x + 3)^3 = 2x^3 + 3 \cdot 2x^2 \cdot 3 + + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3$ ☐

γ) $(3x - 1)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 1 + + 3(3x) \cdot 1^2 + 1^3$ ☐

δ) $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ ☐

6 **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

i) Το ανάπτυγμα του $(y - 3)(y + 3)$ είναι:

α) $y^2 - 3$

β) $9 - y^2$

γ) $y^2 - 9$

δ) $3 - y^2$

☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(y + x)(x - y)$ είναι:

α) $y^2 - x^2$

β) $x^2 - y^2$

γ) $(x - y)^2$

δ) $x^2 + y^2$

iii) Το ανάπτυγμα του $(\omega - 2\alpha)(\omega + 2\alpha)$ είναι:

α) $\omega^2 - 2\alpha^2$

β) $\omega^2 + 4\alpha^2$

γ) $4\alpha^2 - \omega^2$

δ) $\omega^2 - 4\alpha^2$

iv) Το ανάπτυγμα του $(5 - x)(5^2 + 5x + x^2)$ είναι:

α) $5^3 + x^3$

β) $x^3 - 5^3$

γ) $5^3 - x^3$

δ) $25 - x^3$

v) Το ανάπτυγμα του $(x + 2\alpha)(x^2 – 2\alpha x + 4\alpha^2)$ είναι:

α) $x^3 + 2\alpha^3$

β) $x^3 - (2\alpha)^3$

γ) $x^3 -2\alpha^3$

δ) $x^3 + 8\alpha^3$ ☐

7 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $(x + y)(y - x)$	1. $x^2 - 2xy + y^2$
β. $(x + y)^2$	2. $x^3 - y^3$
γ. $(y - x)^2$	3. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
δ. $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	4. $x^2 - 2xy + y^2$
ε. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	5. $x^2 + 2xy + y^2$
στ. $(x - y)^3$	6. $x^2 - y^2$
	7. $x^3 + y^3$
	8. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

α	β	γ	δ	ε	στ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 2)^2$ β) $(y + 5)^2$

γ) $(2\omega + 1)^2$ δ) $(\kappa + 2\lambda)^2$

ε) $(3y + 2\beta)^2$ στ) $(x^2 + 1)^2$

ζ) $(y^2 + y)^2$ η) $(2x^2 + 3x)^2$

θ) $(x + \sqrt{2})^2$ ι) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

ια) $\left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega + \dfrac{4}{\omega}\right)^2$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 3)^2$ β) $(y - 5)^2$

γ) $(3\omega - 1)^2$ δ) $(2\kappa - \lambda)^2$

ε) $(3y - 2\beta)^2$ στ) $(x^2 - 2)^2$

ζ) $(y^2 - y)^2$ η) $(2x^2 - 5x)^2$

θ) $(x - \sqrt{3})^2$ ι) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

ια) $\left(\alpha - \dfrac{3}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega - \dfrac{2}{\omega}\right)^2$

3 **Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:**

α) $(\sqrt{3} + 1)^2$　　β) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$

γ) $(\sqrt{2} - 3)^2$　　δ) $(1 - \sqrt{7})^2$

4 **Να συμπληρώσετε τις ισότητες:**

α) $(x^{\cdots}\ \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + 9$

β) $(\ldots\ldots\ {}^{\cdots}4)^2 = y^2 - \ldots\ldots^{\cdots}\ \ldots\ldots$

γ) $(\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2 = 16x^2\ {}^{\cdots}\ 8x\alpha\ {}^{\cdots}\ \ldots\ldots$

δ) $(\ldots\ldots\ {}^{\cdots}\ 2\omega)^2 = \ldots\ldots - 4x^2\omega\ {}^{\cdots}\ \ldots\ldots$

5 **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

α) $(x + 1)^3$　　β) $(y + 4)^3$

γ) $(2\alpha + 1)^3$　　δ) $(3\alpha + 2\beta)^3$

ε) $(x^2 + 3)^3$　　στ) $(y^2 + y)^3$

ζ) $(x - 2)^3$　　η) $(y - 5)^3$

θ) $(3\alpha - 1)^3$　　ι) $(2x - 3y)^3$

ια) $(y^2 - 2)^3$　　ιβ) $(\omega^2 - 2\omega)^3$

6 **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

α) $(x - 1)(x + 1)$ **β)** $(y - 2)(y + 2)$
γ) $(3 - ω)(3 + ω)$ **δ)** $(x + 4)(4 - x)$
ε) $(x - y)(-x - y)$ **στ)** $(-x + y)(-x - y)$
ζ) $(2x + 7y)(2x - 7y)$ **η)** $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
θ) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

7 **Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο** $P(x) = (x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x - 1)(x + 1)$ **είναι σταθερό.**

8 **α) Να αποδείξετε ότι** $(α - β)(α + β)(α^2 + β^2)(α^4 + β^4) = α^8 - β^8$.
β) Να υπολογίσετε το γινόμενο: $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001$.

9 **Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.**

α) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - 1}$ β) $\dfrac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

γ) $\dfrac{5}{3 + \sqrt{2}}$ δ) $\dfrac{12}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

10 **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

α) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

γ) $(2\omega + 1)(4\omega^2 - 2\omega + 1)$

δ) $(1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)$

11 **Να κάνετε τις πράξεις:**

α) $(x - 4)^2 + (2x + 5)^2$

β) $(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

γ) $(x + y)^2 - (x - 2y)(x + 2y) +$
$+ (2x\ y)^2$

δ) $(3x - 4)^2 + (3x + 4)^2 -$
$- 2(3x - 4)(3x + 4)$

ε) $(2\alpha + 1)^3 + (2\alpha - 1)^3$

στ) $(\alpha + 2)^3 - (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$
ζ $(\alpha^2 + \alpha)^3 - (\alpha^2 - \alpha)^3$
η) $(4\alpha - 1)^3 - \alpha(8\alpha + 1)(8\alpha - 1)$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$
β) $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) -$
$- (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$
γ) $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) =$
$= x^4 - 1$
δ) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$
ε) $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$
στ) $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 =$
$= (2x^2 + 2x + 1)^2$

13 Αν $x = 3 + \sqrt{5}$ και $y = 3 - \sqrt{5}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) xy β) $x^2 - y^2$
γ) $x^2 + y^2$ δ) $x^3 + y^3$

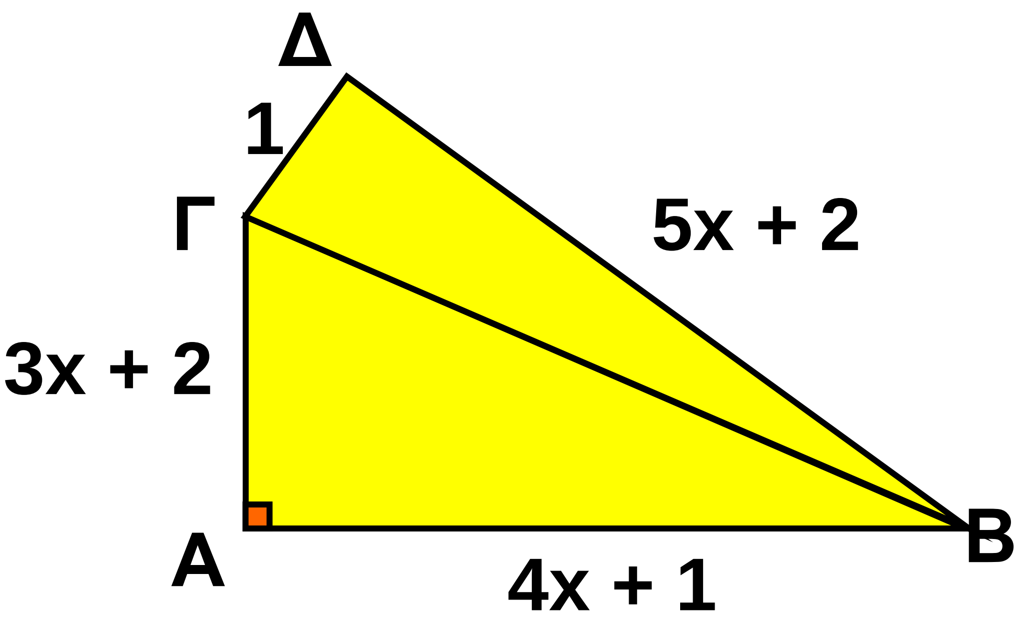
14 α) Να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = 20$$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό

$$x = \left(2005 + \frac{1}{401}\right)^2 - \left(2005 - \frac{1}{401}\right)^2$$

15 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



16 • Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το μηδέν.

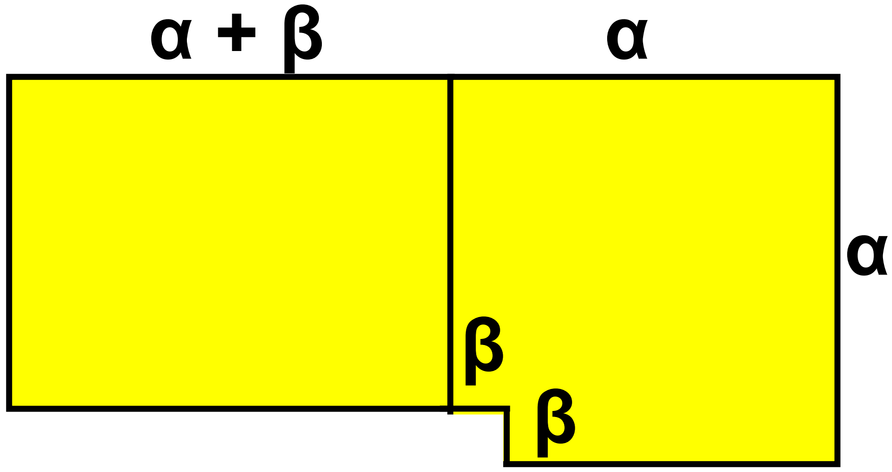
- Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματος τους.
- Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.
- Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματος το τετράγωνο της διαφοράς.
- Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των δύο αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.
- Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός 4 ανεξάρτητα από τους αριθμούς που επιλέξατε. Μπορείτε να το εξηγήσετε;

17 α) Να αποδείξετε ότι

$$\beta\gamma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2}$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει υποτείνουσα 10 cm, και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2 cm.

18 **Ένας πατέρας μοίρασε ένα οικόπεδο στα δύο παιδιά του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο οικόπεδα είχαν το ίδιο εμβαδόν ή κάποιο από τα παιδιά αδικήθηκε; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.**



Το τρίγωνο του Πασκάλ και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του α + β

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 □ □ □ □ 1

1 □ □ □ □ □ 1

$(\alpha + \beta)^0 = 1$

$(\alpha + \beta)^1 = 1\alpha + 1\beta$

$(\alpha + \beta)^2 = 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2$

$(\alpha + \beta)^3 = 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$

$(\alpha + \beta)^4 = 1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 +$

$+ 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$

$(\alpha + \beta)^5 = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$

$(\alpha + \beta)^6 = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Παρατηρήστε τα αναπτύγματα των δυνάμεων του αθροίσματος α + β.

1. Οι αντίστοιχοι συντελεστές σε κάθε ανάπτυγμα σχηματίζουν μια γραμμή σ' ένα αριθμητικό τρίγωνο, που είναι γνωστό ως τρίγωνο του Πασκάλ. Το τρίγωνο αυτό πήρε όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) και οι αριθμοί του κρύβουν

πολλές ιδιότητες. Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1.
Μπορείτε να ανακαλύψετε με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς;

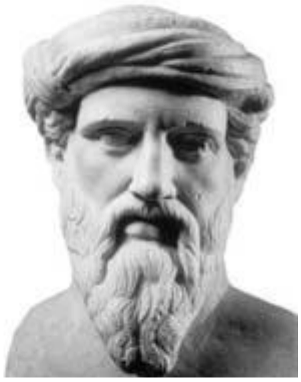
2. Συνεχίστε την κατασκευή του τριγώνου και βρείτε τα αναπτύγματα $(α + β)^5$ και $(α + β)^6$, αφού πρώτα ανακαλύψετε με ποιον τρόπο γράφονται οι δυνάμεις του α και του β σε κάθε ανάπτυγμα.

3. Να βρείτε και το ανάπτυγμα του $(α - β)^6$, αν γνωρίζετε ότι και τα αναπτύγματα των δυνάμεων της διαφοράς α - β προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μόνο που θέτουμε τα πρόσημα εναλλάξ, αρχίζοντας από +.
π.χ. $(α - β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$,
$(α - β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$

4. **Μπορείτε να βρείτε ποιες άλλες ιδιότητες κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου Πασκάλ;**

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πυθαγόρειες τριάδες



Πυθαγόρας

Αν οι αριθμοί α, β, γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε όπως γνωρίζουμε, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (1)$$

Πόσα όμως ορθογώνια τρίγωνα μπορούμε να βρούμε που τα μήκη των πλευρών τους εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς;
Μια τριάδα θετικών ακεραίων αριθμών α, β, γ, για την οποία

ισχύει η σχέση (1), λέμε ότι αποτελεί **Πυθαγόρεια τριάδα**. Την απλούστερη Πυθαγόρεια τριάδα σχηματίζουν οι αριθμοί 5, 4, 3 αφού $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Υπάρχουν, άραγε, τρόποι να σχηματίζουμε Πυθαγόρειες τριάδες;

Ο **Πυθαγόρας** (6ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

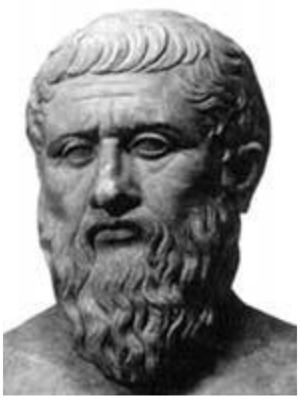
$$\frac{\mu^2 + 1}{2}, \frac{\mu^2 - 1}{2}, \mu,$$ όπου μ περιττός (μ = 3, 5, 7, …)

σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πυθαγόρα.

Ο **Πλάτωνας** (5ος - 4ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής $\frac{\mu^2}{4} + 1, \frac{\mu^2}{4} - 1, \mu,$



Πλάτωνας

όπου μ άρτιος
(μ = 4, 6, 8, ...)
σχηματίζουν μια
Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;
β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πλάτωνα.

Ο **Διόφαντος** (3ος αιώνας μ.Χ.) στηριζόμενος σε μία ταυτότητα την οποία γνώριζε και ο **Ευκλείδης**, έδωσε μια γενικότερη λύση στο πρόβλημα κατασκευής Πυθαγορείων τριάδων από οποιουσδήποτε αριθμούς (άρτιους ή περιττούς). Ανακάλυψε ότι οι αριθμοί της μορφής $λ^2 + μ^2$, $λ^2 - μ^2$, $2λμ$, όπου λ, μ θετικοί άνισοι ακέραιοι αριθμοί, σχηματίζουν Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

Ευκλείδης

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Διόφαντου.

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Η έννοια της απόδειξης

- Διερεύνηση του ρόλου της απόδειξης στην καθημερινή ζωή (δικαστήριο, εμπορικές συναλλαγές κ.τ.λ.)
- Η απόδειξη στα Μαθηματικά και στις άλλες επιστήμες (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο κ.τ.λ.).

1.6. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

✓ **Μαθαίνω να μετατρέπω μια αλγεβρική παράσταση σε γινόμενο παραγόντων**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

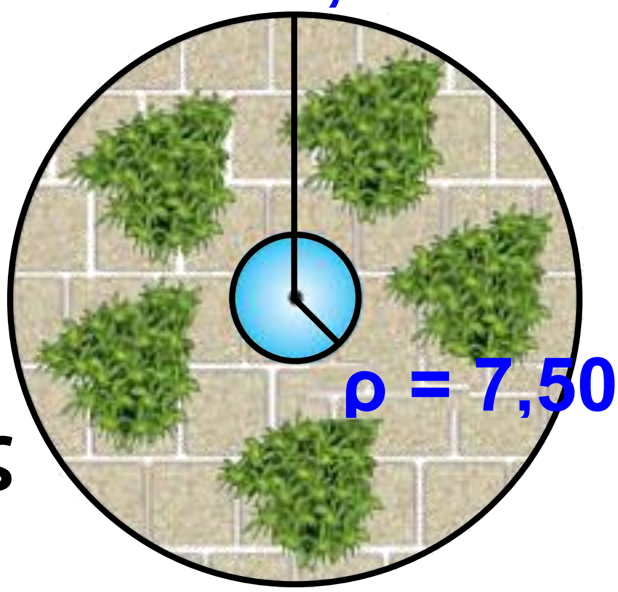
1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) 7,32 • 25 + 7,32 • 75

β) $347 \cdot \frac{7}{6} - 347 \cdot \frac{1}{6}$

2. Σε μια κυκλική πλατεία ακτίνας R = 32,50 m κατασκευάστηκε ένα κυκλικό συντριβάνι ακτίνας ρ = 7,50 m.

R = 32,50 m



Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πλατείας που απέμεινε μετά την κατασκευή του συντριβανιού.

Πολλές φορές, για την επίλυση ενός προβλήματος, μιας εξίσωσης, μιας ανίσωσης ή για την απλοποίηση ενός κλάσματος, είναι χρήσιμο να μετατραπεί μία παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

Για παράδειγμα, η παράσταση $\pi R^2 - \pi\rho^2$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται $\pi(R^2 - \rho^2)$ και σύμφωνα με την

ταυτότητα $(R + ρ)(R - ρ) = R^2 - ρ^2$, παραγοντοποιείται ως εξής:

$πR^2 - πρ^2 = π(R^2 - ρ^2) =$
$= π(R + ρ)(R - ρ)$

Κανένας από τους παράγοντες π , (R + ρ) , (R - ρ) δεν μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο απλούστερων παραγόντων, γι' αυτό λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

Στο εξής, όταν λέμε ότι παραγοντο-ποιούμε μία παράσταση, θα εννοούμε ότι την αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
Στη συνέχεια, θα δούμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης.

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

παραγοντοποιούμε

$$\boxed{3\alpha + 3\beta - 3\gamma} = \boxed{3(\alpha + \beta - \gamma)}$$

αναπτύσσουμε

Για παράδειγμα, σε όλους τους όρους της παράστασης 3α + 3β - 3γ υπάρχει κοινός παράγοντας το 3, οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$3\alpha + 3\beta - 3\gamma = 3(\alpha + \beta - \gamma).$$

Ομοίως η παράσταση $2α^2 - 2αβ + 2α$, γράφεται $2α \cdot α - 2α \cdot β + 2α \cdot 1$, οπότε σε όλους τους όρους της υπάρχει κοινός παράγοντας το 2α.

Άρα, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:
$2α^2 - 2αβ + 2α = 2α(α - β + 1)$.
Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι «βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2α».

Κάθε όρος μέσα στην παρένθεση είναι το πηλίκο της διαίρεσης των αντίστοιχων όρων της παράστασης με τον κοινό παράγοντα:

$$(2α^2) : (2α) = \frac{2α^2}{2α} = α$$

$$(2αβ) : (2α) = \frac{2αβ}{2α} = β$$

$$(2α) : (2α) = \frac{2α}{2α} = 1$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2$

β) $α(ω - x) + 3β(x - ω)$

γ) $3(2x - 1) + x(4x - 2)$

Λύση

α) Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το 6xy,οπότε έχουμε:

$12x^2y- 30xy^2 + 6x^2y^2 =$
$= 6xy(2x - 5y + xy)$

β) Η παράσταση έχει δύο όρους, τους α(ω - x) και 3,(x - ω). Για να δημιουργήσουμε και στους δύο όρους κοινό παράγοντα τον ω - x, το δεύτερο όρο της τον γράφουμε -3β(ω - x), οπότε έχουμε:

$\alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega) =$
$= \alpha(\omega - x) - 3\beta(\omega - x) =$
$= (\omega - x)(\alpha - 3\beta)$

γ) Αν από το δεύτερο όρο της παράστασης βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2, τότε δημιουργούμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$, οπότε έχουμε:

$3(2x - 1) + x(4x - 2) =$
$= 3(2x - 1) + 2x(2x - 1) =$
$= (2x - 1)(3 + 2x)$

β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Στην παράσταση $\alpha x + \alpha y + 2x + 2y$, δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της. Αν όμως βγάλουμε κοινό παράγοντα, από τους δύο πρώτους όρους το α και από τους δύο τελευταίους το 2, τότε

σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα τον x + y. Έτσι, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\alpha x + \alpha y + 2x + 2y =$$

$$= \alpha(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(\alpha + 2)$$

Την προηγούμενη παράσταση μπορούμε να τη χωρίσουμε και σε διαφορετικές ομάδες. Το αποτέλεσμα όμως της παραγοντοποίησης είναι και πάλι το ίδιο. Πράγματι, έχουμε:

$$\alpha x + \alpha y + 2x + 2y =$$

$$= x(\alpha + 2) + \gamma(\alpha + 2) = (\alpha + 2)(x + \gamma)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20$

β) $αβ - 3α - 3β + 9$

γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2$

Λύση

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 =$

$= 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) =$

$= (x - 4)(3x^2 + 5)$

β) $αβ - 3α - 3β + 9 =$

$= α(β - 3) - 3(β - 3) = (β - 3)(α - 3)$

γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2 =$

$= 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 =$

$= 3x(x + y) + 2y(x + y) =$

$= (x + y)(3x + 2y)$.

Μερικές παραστάσεις παραγο-ντοποιούνται κατά ομάδες, αν διασπάσουμε κατάλληλα έναν ή περισσότερους όρους
π.χ. $5xy = 3xy + 2xy$

γ) Διαφορά τετραγώνων

Αν εναλλάξουμε τα μέλη της ταυτότητας $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$, τότε γράφεται και ως εξής:

$$\boxed{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα αυτή, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων,
π.χ. $\alpha^2 - 9 = \alpha^2 - 3^2 = (\alpha + 3)(\alpha - 3)$.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $4\beta^2 - 25$ β) $(3x - 1)^2 - 81$ γ) $\alpha^2 - 7$.

Λύση

α) $4\beta^2 - 25 = (2\beta)^2 - 5^2 =$
$= (2\beta + 5)(2\beta - 5)$

β) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 =$
$= (3x - 1 + 9)(3x - 1 - 9) =$
$= (3x + 8)(3x - 10)$

γ) $\alpha^2 - 7 = \alpha^2 - (\sqrt{7})^2 = (\alpha - \sqrt{7})(\alpha + \sqrt{7})$

Για να σχηματίσουμε διαφορά τετραγώνων εκφράζουμε κάθε όρο ως τετράγωνο μιας παράστασης.

δ) Διαφορά - άθροισμα κύβων

Οι ταυτότητες $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ και $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$ γράφονται και ως εξής:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά ή άθροισμα κύβων, π.χ.

$x^3 - 64 = x^3 - 4^3 =$
$= (x - 4)(x^2 + x \cdot 4 + 4^2) =$
$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

$y^3 + 27 = y^3 + 3^3 =$
$= (y + 3)(y^2 - y \cdot 3 + 3^2) =$
$= (y + 3)(y^2 - 3y + 9)$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $x^3 - 27$ β) $x^3 + 64$ γ) $8\alpha^3 - \beta^3$

Λύση

α) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 =$
$= (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) =$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $x^3 + 64 = x^3 + 4^3 =$
$= (x + 4)(x^2 - x \cdot 4 + 4^2) =$
$= (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

γ) $8α^3 - β^3 = (2α)^3 - β^3 =$
$= (2α - β)[(2α)^2 + 2α \cdot β + β^2] =$
$= (2α - β)(4α^2 + 2αβ + β^2)$

Για να σχηματίσουμε διαφορά ή άθροισμα κύβων εκφράζουμε κάθε όρο ως κύβο μιας παράστασης.

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Οι ταυτότητες $(α + β)^2 =$
$= α^2 + 2αβ + β^2$ και $(α - β)^2 =$
$= α^2 - 2αβ + β^2$ γράφονται και ως εξής:

$$\boxed{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2}$$

$$\boxed{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2}$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο), π.χ.

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 =$
$= (x + 2)^2$

$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 =$
$= (y - 3)^2$

Οι παραστάσεις $(x + 2)^2$ και $(y - 3)^2$ είναι γινόμενα παραγόντων, αφού
$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ **και**
$(y - 3)^2 = (y - 3)(y - 3)$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $4α^2 + 12α + 9$ β) $α^2 - 10αβ + 25β^2$

γ) $-4y^2 + 4y - 1$

Λύση

α) $4α^2 + 12α + 9 =$

$= (2α)^2 + 2 \cdot 2α \cdot 3 + 3^2 = (2α + 3)^2$

β) $α^2 - 10αβ + 25β^2 =$

$= α^2 - 2 \cdot α \cdot 5β + (5β)^2 =$

$= (α - 5β)^2$

γ) $-4y^2 + 4y - 1 = -(4y^2 - 4y + 1) =$

$= -[(2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + 1^2] = -(2y - 1)^2$

Γράφουμε κάθε παράσταση ως ανάπτυγμα τετραγώνου της μορφής

$α^2 + 2αβ + β^2$ ή $α^2 - 2αβ + β^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2 + (α + β)x + αβ$

Το ανάπτυγμα του γινομένου $(x + α)(x + β)$ είναι το τριώνυμο $x^2 + (α + β)x + αβ$, αφού
$(x + α)(x + β) = x^2 + αx + βx + αβ =$
$= x^2 + (α + β)x + αβ$.
Επομένως, ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + (α + β)x + αβ$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\boxed{x^2 + (α + β)x + αβ = (x + α)(x + β)}$$

Για παράδειγμα, για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 + 8x + 12$ αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 (σταθερός όρος) και άθροισμα 8 (συντελεστής

του x). Υπάρχουν πολλά ζευγάρια αριθμών που έχουν γινόμενο 12 (π.χ. $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$ κ.τ.λ.). Όμως, μόνο το ζευγάρι 2 και 6 έχει άθροισμα 8. Άρα έχουμε:

$$x^2 + 8x + 12 = x^2 + (6 + 2)x + 6 \cdot 2 =$$
$$= (x + 6)(x + 2)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα: α) $x^2 - 8x + 12$
β) $x^2 + 5x - 6$ γ) $-3y^2 + 12y - 9$

Λύση

α) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 8x+12$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 και άθροισμα -8. Οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι αρνητικοί, αφού έχουν γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό. Με δοκιμές

βρίσκουμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι το -2 και το -6.
Άρα έχουμε $x^2 - 8x + 12 =$
$= (x - 2)(x - 6)$

$$\underbrace{x^2 \overbrace{- 8x}^{(-2)+(-6)} + 12}_{\text{}} = (x - 2)(x - 6)$$

$(-2) + (-6)$

$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$

$(-2) \cdot (-6)$

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 + 5x - 6$, αναζητούμε δύο ετερόσημους αριθμούς, που έχουν γινόμενο -6 και άθροισμα 5. Οι αριθμοί αυτοί είναι το 6 και το -1, οπότε έχουμε
$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$.

γ) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $-3y^2 + 12y - 9$, βγάζουμε κοινό παράγοντα το -3, ώστε ο συντελεστής του y^2 να γίνει 1, οπότε έχουμε

$-3y2 + 12y - 9 = -3(y2 - 4y + 3)$

Για την παραγοντοποίηση του τριωνύμου $y^2 - 4y + 3$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 3 και άθροισμα -4. Οι αριθμοί αυτοί είναι το -3 και το -1, οπότε έχουμε

$-3y^2 + 12y - 9 = -3(y^2 - 4y + 3) =$
$= -3(y - 3)(y - 1).$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $3x^2 - 18x$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 = 18x$.

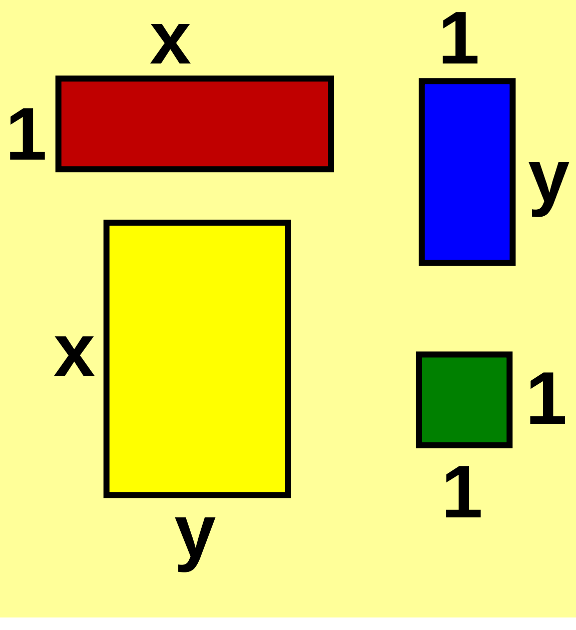
Λύση

α) Η παράσταση $3x^2 - 18x$ παραγοντοποιείται ως εξής:
$3x^2 - 18x = 3x(x - 6)$.

β) Η εξίσωση $3x^2 = 18x$ γράφεται $3x^2 - 18x = 0$ και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $3x(x - 6) = 0$. Για να είναι το γινόμενο $3x(x - 6)$ ίσο με το μηδέν, πρέπει $3x = 0$ ή $x - 6 = 0$, δηλαδή $x = 0$ ή $x = 6$.

2 Αν τοποθετήσουμε κατάλληλα τα τέσσερα σχήματα, σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο.

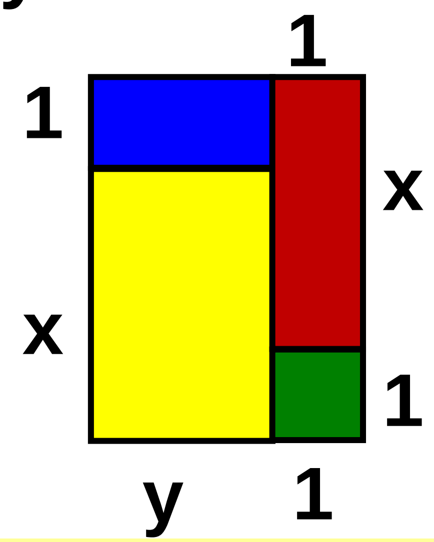
Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.



Λύση

α) Το ορθογώνιο που θα σχηματιστεί θα έχει εμβαδόν Ε, ίσο

με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων σχημάτων,
δηλαδή,
$E = x \cdot 1 + y \cdot 1 + xy + 1 \cdot 1 =$
$= x + y + xy + 1.$
Όμως, $x + y + xy + 1 =$
$= (x + xy) + (y + 1) = x$
$= x(1 + y) + (1 + y) = (1 + y)(x + 1).$
Άρα, οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $1 + y$ και $1 + x$.



3 Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης:

α) $786 \cdot 45 + 786 \cdot 55$
β) $20052 - 19952$
γ) $565 \cdot 499 + 565 \cdot 66 - 4352$.

Λύση

α) $786 \cdot 45 + 786 \cdot 55 =$
$= 786(45 + 55) = 786 \cdot 100 = 78600$

β) $2005^2 - 1995^2 =$
$(2005 - 1995)(2005 + 1995) =$
$= 10 \cdot 4000 = 40000$

γ) $565 \cdot 499 + 565 \cdot 66 - 435^2 =$
$= 565(499 + 66) - 435^2 =$
$= 565^2 - 435^2 =$
$= (565 - 435)(565 + 435) =$
$= 130 \cdot 1000 = 130000$

4 **Να αναλυθούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:**

α) $3x^2y - 12y^3$
β) $5x^2y + 10x^2 + 5xy + 10x$
γ) $x^4 - 16y^4$
δ) $16α^3β - 54β$
ε) $x^2 - 4x + 4 - y^2$
στ) $3x^3 + 12x^2 - 15x$

Λύση

α) $3x^2y - 12y^3 = 3y(x^2 - 4y^2) =$
$= 3y\,[x^2 - (2y)^2] = 3y(x - 2y)(x + 2y)$

β) $5x^2y + 10x^2 + 5xy + 10x =$
$= 5x(xy + 2x + y + 2) =$
$= 5x[y(x + 1) + 2(x + 1)] =$
$= 5x(x + 1)(y + 2)$

γ) $x^4 - 16y^4 = (x^2)^2 - (4y^2)^2 =$
$= (x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2) =$
$= (x^2 + 4y^2)\,[x^2 - (2y)^2] =$
$= (x^2 + 4y^2)(x - 2y)(x + 2y)$

δ) $16α^3β - 54β = 2β(8α^3 - 27) =$
$2β[(2α)^3 - 3^3] =$
$= 2β(2α - 3)(4α^2 + 6α + 9)$

ε) $x^2 - 4x + 4 - y^2 =$
$= (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - y^2 =$
$= (x - 2)^2 - y^2 = (x - 2 + y)(x - 2 - y).$

στ) $3x^3 + 12x^2 - 15x = 3x(x^2 + 4x - 5)$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x - 5$ παραγοντοποιείται, εφόσον υπάρχουν αριθμοί με γινόμενο -5 και άθροισμα 4, που είναι οι 5 και -1. Άρα,

$3x^2 + 12x^2 - 15x = 3x(x^2 + 4x - 5) =$
$= 3x(x + 5)(x - 1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενο παραγόντων;

α) $2(x - y)(x + y)$
β) $2 + (x - y)(x + y)$
γ) $4(α - β)^2$
δ) $4 + (α - β)^2$
ε) $(x + 2y)x - y$
στ) $(x + 2y)(x - y)$
ζ) $(α + β)(α + 3β)$
η) $(α + β)(α + 3β) + 1$.

2 **Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.**

α) $8x + 16 = 8(\dots\dots\dots\dots\dots)$

β) $3\alpha y - y^2 = y(\dots\dots\dots\dots\dots)$

γ) $6x^2 + 12x = \dots\dots\dots\dots\dots (x + 2)$

δ) $-4x^2 + 8x = -4x(\dots\dots\dots\dots\dots)$

ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad (\dots\dots\dots\dots\dots)$

στ) $(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(\dots\dots\dots\dots)$

3 **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

Η παράσταση $3x^3 + 3x^2 + x + 1$ παραγοντοποιείται ως εξής:

α) $3x^2(x + 1)$ β) $(x + 3)(3x^2 - 1)$

γ) $(x + 1)(3x^2 + 1)$ δ) $x(3x^2 + x + 1)$.

4 **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.**

α) $x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ ☐

β) $x^2 - 9 = (x - 9)(x + 9)$ ☐

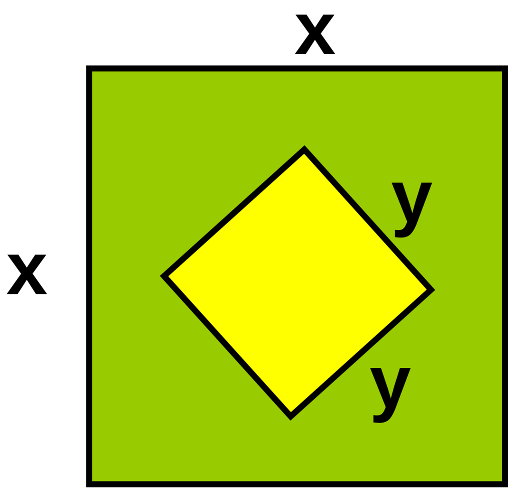
γ) $112^2 - 12^2 = 100 \cdot 124$

δ) $4y^2 - 1 = (4y - 1)(4y + 1)$

ε) $4x^2 - \alpha^2 = (2x - \alpha)(2x + \alpha)$

στ) $\alpha^2 - (\beta - 1)^2 =$
$= (\alpha + \beta - 1)(\alpha - \beta - 1)$

5 Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου μέρους είναι $(x - y)(x + y)$, αυτό είναι σωστό ή λάθος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $α^3 - 2^3 = (α - 2)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$
β) $α^3 + 3^3 = (α + 3)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$
γ) $(2x)^3 - 1 = (2x - 1)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$
δ) $1 + (5y)^3 = (1 + 5y)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 - 5x + 25)$ ☐
β) $8 + α^3 = (2 + α)(2^2 - 2α + α^2)$ ☐
γ) $(3y)^3 + 1 = (3y + 1)(3y^2 - 3y + 1)$ ☐
δ) $1 - (2β)^3 = (1 - 2β)(1 + 2β + 4β^2)$ ☐

8 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + 6x + 9 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$
β) $4α^2 - 4α + 1 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$
γ) $y^4 - 2y^2 + 1 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$
δ) $25 + 10x^3 + x^6 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

9 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Ο κύκλος εμβαδού $πα^2 + 2πα + π$, με $α > 0$, έχει ακτίνα

α) $α + 2$ β) $α^2 + 1$

γ) $α + 1$ δ) $π(α + 1)$

10 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha + \beta$	α	β	$(x + \alpha)(x + \beta)$
$x^2 + 3x + 2$					
$x^2 - 3x + 2$					
$x^2 + 5x - 6$					
$x^2 + 5x + 6$					
$x^2 - x - 2$					
$x^2 + x - 2$					

11 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες. α) $x^2 + (\alpha + 2)x + 2\alpha = (x + \ldots\ldots) \cdot (x + \ldots\ldots)$

β) $x2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + \ldots\ldots) \cdot (x + \ldots\ldots)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3α + 6β$ β) $2x - 8$

γ) $8ω^2 + 6ω$ δ) $-9x^2 - 6x$

ε) $8α^2β + 4αβ^2$ στ) $2x^2 - 2xy + 2x$

ζ) $α^2β + αβ^2 - αβ$

η) $2α^3 - 4α^2 + 6α^2β$

θ) $\sqrt{2}\,xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}\,y^2$

2 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x(α - β) + y(α - β)$

β) $α(x + y) + β(x + y)$

γ) $(3x- 1)(x- 2) - (x + 4)(x - 2)$

δ) $α^2(α - 2) - 3(2 - α)$

ε) $4x(x - 1) - x + 1$

στ) $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2$

3 i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + x$

β) $2y^2 - 5y$

γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega)$

δ) $\alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha$

ii) Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + x = 0$

β) $2y^2 = 5y$

γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0$

δ) $\alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha$

4 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$

β) $x^3 - x^2 + x - 1$

γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$

στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$

ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$

η) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2}$

θ) $\sqrt{6}\,x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,x - 2$

5 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $7α^2 + 10αβ + 3β^2$

β) $5x^2 - 8xy + 3y^2$

γ) $3x^2 - xy - 2y^2$

6 α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $α^2β + αβ^2 - α - β$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $α^2β + αβ^2 = α + β$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

7 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2α^2 - 2α + αβ - β + αx - x$

β) $2αβ - 4β + 5α - 10 + 2αγ - 4γ$

8 **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $x^2 - 9$

β) $16x^2 - 1$

γ) $α^2 - 9β^2$

δ) $α^2β^2 - 4$

ε) $36ω^2 - (ω + 5)^2$

στ) $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2$

ζ) $\dfrac{1}{x^2} - 16$

η) $x^2 - 3$

θ) $x^2 - 2y^2$

9 **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

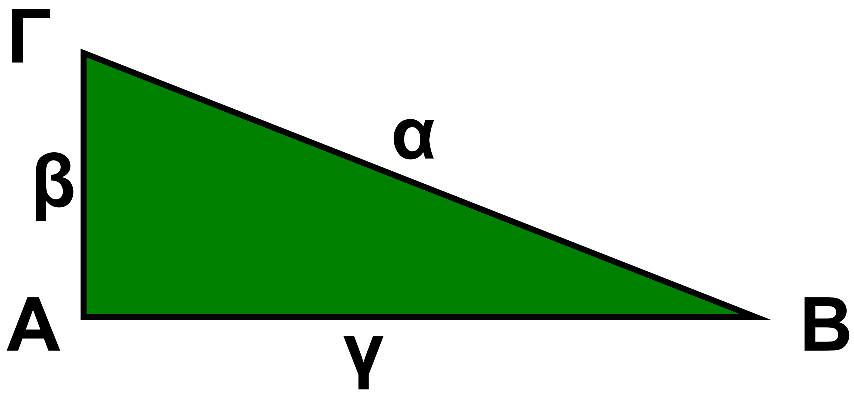
α) $2x^2 - 32$ **β)** $28 - 7y^2$

γ) $2x^3 - 2x$ **δ)** $5αx^2 - 80α$

ε) $2(x - 1)^2 – 8$

10 **Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε την πλευρά γ, όταν:**

α) $\alpha = 53$, $\beta = 28$
β) $\alpha = 0{,}37$, $\beta = 0{,}12$
γ) $\alpha = 26\lambda$, $\beta = 10\lambda$



11 **Να επιλύσετε τις εξισώσεις:**

α) $x^2 - 49 = 0$
β) $9x3 - 4x = 0$
γ) $x(x + 1)^2 = 4x$
δ) $(x + 2)^3 = x + 2$

12 **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $x^3 - 27$
β) $y^3 + 8$
γ) $\omega^3 + 64$
δ) $8x^3 - 1$
ε) $27y^3 + 1$

13 **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $3x^3 - 24$

β) $16α^4 + 2α$

γ) $\frac{4}{3} πR^3 - \frac{4}{3}πρ^3$

δ) $α^4β + αβ^4$

14 **Να συμπληρώσετε τις ισότητες:**

α) $x^3 - \dots = (x - 3)(\dots + \dots + 9)$

β) $\dots + y^3 = (2x + y)(4x^2 - \dots + \dots)$

γ) $α^3 - \dots = (α - 2β)(\dots + \dots + 4β^2)$

δ) $α^3 + \dots = (α + 5β)(\dots - \dots + 25β^2)$

15 **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $x^2 - 2x + 1$

β) $y^2 + 4y + 4$

γ) $ω^2 - 6ω + 9$

δ) $α^2 + 10α + 25$

ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2$

στ) $9x^4 + 6x^2 + 1$

ζ) $4y^2 - 12y + 9$

η) $16x^2 + 8xy + y^2$

θ) $25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2$

ι) $(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta) + 1$

ια) $\dfrac{y^2}{9} - 2y + 9$

ιβ) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$

16 **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $3x^2 + 24x + 48$

β) $-y^2 + 4y - 4$

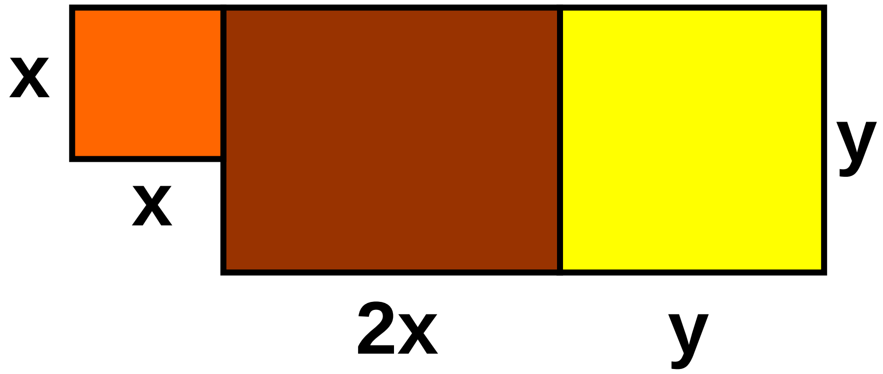
γ) $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2$

δ) $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha$

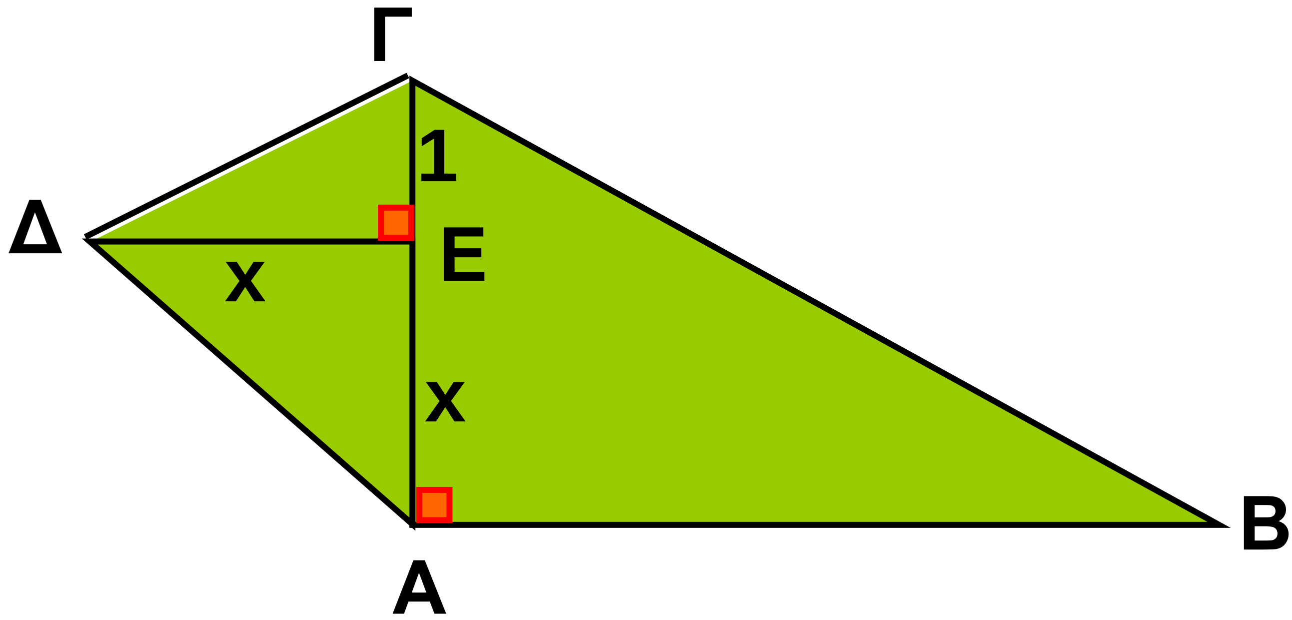
17 **Να βρείτε:**

α) Ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.

β) Την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.



18 Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου, που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



19 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 3x + 2$

β) $y^2 - 4y + 3$

γ) $\omega^2 + 5\omega + 6$

δ) $\alpha^2 + 6\alpha + 5$

ε) $x^2 - 7x + 12$

στ) $y^2 - y - 12$

ζ) $\omega^2 - 9\omega + 18$

η) $\alpha^2 + 3\alpha - 10$

20 **Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:**

α) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 2$

β) $x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta$

γ) $x^2 + (3 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2}$

21 **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $2\omega^2 + 10\omega + 8$

β) $3\alpha^2 - 12\alpha - 15$

γ) $\alpha x^2 - 7\alpha x + 6\alpha$

22 **Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.**

α) $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821$

β) $801^2 + 199 \cdot 801$

γ) $998^2 - 4$

δ) $999 \cdot 1001 + 1$

ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1$

στ) $97^2 + 6 \cdot 97 + 9$

23 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$

β) $x^4 - 1 + x^3 - x$

γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$

δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$

ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$

στ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2$

ζ) $1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$

η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

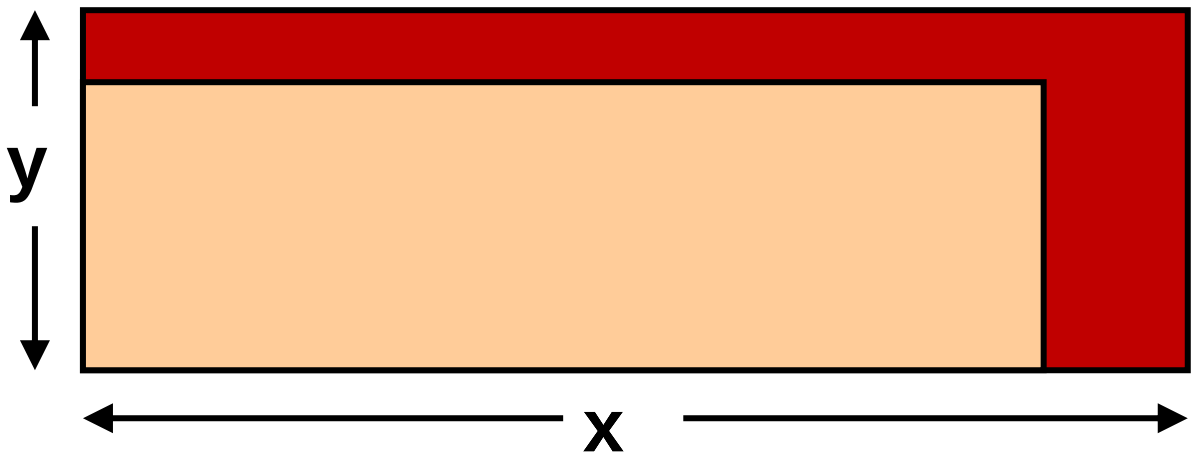
θ) $2(x - 1)(x^2 - 4) - 5(x - 1)(x - 2)^2$

ι) $(y^2 - 4)^2 - (y + 2)^2$

ια) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$

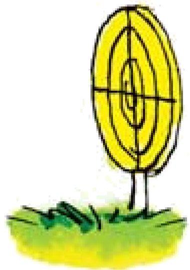
ιβ) $(x^2 + 9)(\alpha^2 + 4) - (\alpha x + 6)^2$

24 **Ενός ορθογωνίου οικοπέδου οι διαστάσεις x, y μειώθηκαν, επειδή έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος των διπλανών δρόμων. Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που απέμεινε είναι xy - x - 2y + 2, να βρείτε ποια θα μπορούσε να είναι η μείωση κάθε διάστασής του.**



1.7. Διαίρεση πολυωνύμων

✓ **Μαθαίνω να βρίσκω το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Δ(χ) με το πολυώνυμο δ(χ).**



✓ **Μαθαίνω να γράφω την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του Δ(x) με το δ(x).**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. **Αν τοποθετήσουμε σε μια αίθουσα 325 καθίσματα σε σειρές και κάθε σειρά περιέχει 19 καθίσματα, πόσες σειρές θα σχηματίσουμε και πόσα καθίσματα θα περισσέψουν;**
Να γράψετε την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

2. Να βρείτε το πολυώνυμο Δ(x) το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $δ(x) = x^2 - χ$, δίνει πηλίκο $π(x) = 2x^2 - 3χ - 1$ και υπόλοιπο $υ(x) = 7χ - 4$.

Ξέρουμε ότι, αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς Δ (διαιρετέος) και δ (διαιρέτης) με δ ≠ 0 και κάνουμε τη διαίρεση Δ : δ, τότε βρίσκουμε δύο μοναδικούς φυσικούς αριθμούς π (πηλίκο) και υ (υπόλοιπο), για τους οποίους ισχύει:

$$Δ = δπ + υ \quad με \quad υ < δ$$

Αν υ = 0, είναι Δ = δ • π και τότε λέμε ότι έχουμε τέλεια διαίρεση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμα ότι ο δ διαιρεί το Δ ή ότι ο δ είναι παράγοντας του Δ.

Για παράδειγμα, αν Δ = 325 και δ = 19, τότε με τη διαίρεση 325 : 19, βρίσκουμε τους αριθμούς π = 17 και υ = 2, για τους οποίους ισχύει
$325 = 19 \cdot 17 + 2$ με $2 < 19$

$$
\begin{array}{r|l}
325 & 19 \\ \cline{2-2}
-19 & 17 \\ \cline{1-1}
135 & \\
-133 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Ομοίως, αν έχουμε δύο πολυώνυμα **Δ(x)** (διαιρετέος) και **δ(x)** (διαιρέτης) με δ(x) ≠ 0 και κάνουμε τη διαίρεση **Δ(x) : δ(x)**, τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων **π(x)** (πηλίκο) και **υ(x)** (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει:

$$\boxed{Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x)}$$

(Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)

όπου το υ(x) ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, περιγράφεται η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου $Δ(x) = 2x^2 - 5x^3 + 2x^4 - 4 + 8x$ με το πολυώνυμο $δ(x) = x^2 - x$.

Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του x.

$$2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 \;\;\begin{array}{|l} x^2 - x \\ \hline \\ \end{array}$$

Διαιρούμε τον πρώτο όρο 2x4 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x2 του διαιρέτη $\left(\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2\right)$

Το αποτέλεσμα 2x2 είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $2x^2$, που είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη $x^2 - x$ και το γινόμενο $2x^2(x^2 - x) = 2x^4 - 2x^3$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Για να γίνουν ευκολότερα οι πράξεις, αλλάζουμε τα πρόσημα και αντί για αφαίρεση κάνουμε πρόσθεση και έτσι βρίσκουμε το πρώτο μερικό υπόλοιπο

$u_1 = -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ \cline{2-2} -2x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^2 \\ \cline{1-1} -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & \end{array}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε τον πρώτο όρο $-3x^3$ του υπολοίπου $υ_1$ με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη $\left(-\dfrac{3x^3}{x^2} = -3x\right)$. Το αποτέλεσμα -3x είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ \cline{2-2} -2x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & 2x^2 - 3x \\ \cline{1-1} -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το -3x, που είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη $x^2 - x$ και το γινόμενο $-3x(x^2 - x) = -3x^3 + 3x^2$ το αφαιρούμε από το υπόλοιπο υ1 και βρίσκουμε το δεύτερο μερικό υπόλοιπο $υ_2 = -x^2 + 8x - 4$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -\,5x^3 & +\,2x^2 & +\,8x & -\,4 & x^2 - x \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +\,2x^3 & & & & 2x^2 - 3x \\
\cline{1-5}
 & -3x^3 & +\,2x^2 & +\,8x & -\,4 & \\
 & 3x^3 & -\,3x^2 & & & \\
\cline{1-5}
 & & -x^2 & +\,8x & -\,4 &
\end{array}
$$

Συνεχίζουμε τη διαίρεση με τον ίδιο τρόπο μέχρι να καταλήξουμε σε υπόλοιπο που να είναι ίσο με μηδέν (**τέλεια διαίρεση**) ή να έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη $x^2 - x$ (**ατελής διαίρεση**), οπότε η διαίρεση δεν μπορεί να συνεχιστεί.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ \cline{2-2}
-2x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad & 2x^2 - 3x \\ \cline{1-1}
-3x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & \\
3x^3 - 3x^2 \qquad\qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 8x - 4 & \\
x^2 - x \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
7x - 4 &
\end{array}
$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 =$$

$$= (x^2 - x) \cdot (2x^2 - 3x - 1) + (7x - 4)$$

(Διαιρετέος) = (διαιρέτης) • (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των βαθμών διαιρέτη και πηλίκου είναι ίσο με το βαθμό του διαιρετέου.

Ομοίως η διαίρεση $(8x^4 + 8x^3 + 17x - 5) : (2x^2 + 3x - 1)$, γίνεται ως εξής:

Από το διαιρετέο λείπει ο όρος 2ου βαθμού, οπότε, όταν τον γράφουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του, συνήθως τον συμπληρώνουμε με το μηδενικό μονώνυμο ή αφήνουμε τη θέση του κενή για να γίνει ευκολότερα η αναγωγή ομοίων όρων.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & +\beta x^3 & & +17x & -5 & 2x^2+3x-1 \\ \cline{6-6}
-8x^4 & -12x^3 & +4x^2 & & & 4x^2-2x+5 \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +4x^2 & +17x & -5 & \\
 & +4x^3 & +6x^2 & -2x & & \\ \cline{1-5}
 & & 10x^2 & +15x & -5 & \\
 & & -10x^2 & -15x & +5 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Στην τελευταία διαίρεση, όπου το υπόλοιπο είναι μηδέν, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$8x^4 + 8x^3 + 17x - 5 =$
$= (2x^2 + 3x - 1) \cdot (4x^2 - 2x + 5)$

(Διαιρετέος) =
= (διαιρέτης) • (πηλίκο)

Τα πολυώνυμα $δ = 2x^2 + 3x - 1$ και $π = 4x^2 - 2x + 5$ λέγονται παράγοντες ή διαιρέτες του πολυωνύμου $Δ = 8x^4 + 8x^3 + 17x - 5$.

Γενικά

Ένα πολυώνυμο **δ** είναι διαιρέτης ή παράγοντας ενός πολυωνύμου **Δ**, αν η διαίρεση **Δ : δ** είναι τέλεια, δηλαδή αν υπάρχει πολυώνυμο **π**, τέτοιο ώστε να ισχύει **Δ = δ · π**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να γίνει η διαίρεση

$(4x^4 + 3x^2 - 1) : (2x - 1)$.

β) Να αναλυθεί το πολυώνυμο $4x^4 + 3x^2 - 1$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & +3x^2 & & -1 & 2x-1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +2x^3 & & & & 2x^3+x^2+ \\
 & & & & & +2x+1 \\ \cline{1-5}
 & 2x^3 & +3x^2 & & -1 & \\
 & -2x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & 4x^2 & & -1 & \\
 & & -4x^2 & +2x & & \\ \cline{1-5}
 & & & 2x & -1 & \\
 & & & -2x & +1 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

β) Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης, έχουμε:

$4x^4 + 3x^2 - 1 =$

$= (2x-1)(2x^3 + x^2 + 2x + 1).$

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$2x^3 + x^2 + 2x + 1 =$

$= x^2(2x + 1) + (2x + 1) =$

$= (2x + 1)(x^2 + 1)$.

Επομένως, το πολυώνυμο $4x^4 + 3x^2 - 1$ αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$4x^4 + 3x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)(x^2 + 1)$.

2 Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $δ = 3x + 2α$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου

$Δ = 3x^3 - 4αx^2 - α^2x + 2α^3$.

Λύση

Το πολυώνυμο δ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου Δ, αν το υπόλοιπο της διαίρεσης Δ : δ είναι μηδέν.

Κάνουμε τη διαίρεση Δ : δ

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3 & 3x + 2\alpha \\
\cline{2-2}
-3x^3 - 2\alpha x^2 \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
- 6\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3 & x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \\
6\alpha x^2 + 4\alpha^2 x \qquad & \\
\hline
+ 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 & \\
- 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3 =$

$= (3x + 2\alpha)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)$, **που σημαίνει ότι το πολυώνυμο** $3x + 2\alpha$ **είναι διαιρέτης του πολυωνύμου** $3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το 4x + 7 είναι πολυώνυμο:

α) 1ου βαθμού β) 2ου βαθμού
γ) 3ου βαθμού δ) σταθερό.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το x^2 - 4x + 9 δεν μπορεί να είναι:

α) 5 β) 3x - 2
γ) x^2 + 3 δ) 4x.

iii) Αν ένα πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το $2x^2$ + x + 5 δίνει πηλίκο x^4 + x - 2, τότε ο βαθμός του P(x) είναι:

α) 4
β) 6
γ) 8
δ) οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	
7		2
	6	3

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Το πηλίκο της διαίρεσης του $(2x + 1)(x + 3)$ με το $2x + 1$ είναι το $x + 3$. ☐

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x + 6$ είναι το $x^2 + 2$. ☐

γ) Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο 6ου βαθμού με ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού. ☐

δ) Το $x - 4$ είναι παράγοντας του $x^2 - 16$. ☐

ε) Το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 + 1) : (x + 1)$ είναι το $x^2 - x + 1$. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

α) $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$

β) $(6x^3 - x^2 - 10x + 5) : (3x + 1)$

γ) $(6x^4 - x^2 + 2x - 7) : (x - 1)$

δ) $(4x^3 + 5x - 8) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 - x + 2)$

στ) $(9x^4 - x^2 + 2x - 1) : (3x^2 - x + 1)$

ζ) $(8x^4 - 6x^2 - 9) : (2x^2 - 3)$

η) $(3x^5 - 2x^3 - 4) : (3x^2 - 1)$

2 **Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να είναι οι διαιρέσεις σωστές.**

α)

$$
\begin{array}{r|l}
6x^2 + \dots \quad + \dots & \dots + 2 \\ \cline{2-2}
-\ 6x^2 - \ \dots \qquad & 2x + \dots \\ \hline
18x + \dots & \\
-\ 18x + \dots & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

β)

$$
\begin{array}{r|l}
\dots + \dots \ + 2x + 20 & x + \dots \\ \cline{2-2}
\dots - \ 6x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + \dots - \dots \\ \hline
4x^2 + \dots + 20 & \\
\dots \ + \dots \qquad & \\ \cline{1-1}
-\ 10x + \dots & \\
\dots \ + \dots & \\ \cline{1-1}
\dots &
\end{array}
$$

3 **Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με το $x^2 - x + 1$ δίνει πηλίκο $2x + 3$ και υπόλοιπο $3x + 2$;**

4 **Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) είναι διαιρέτης του πολυώνυμου P(x), όταν:**
α) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 9x - 18$
και $Q(x) = 2x - 3$
β) $P(x) = 2x^4 - x^2 + 5x - 3$
και $Q(x) = x2 + x - 1$.

5 **α) Να κάνετε τη διαίρεση**
$(x^4 -2x^3 - 8x^2 + 18x - 9) : (x^2 - 9)$
β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο
$x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$.

6 **α) Να αποδείξετε ότι ο $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου**
$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

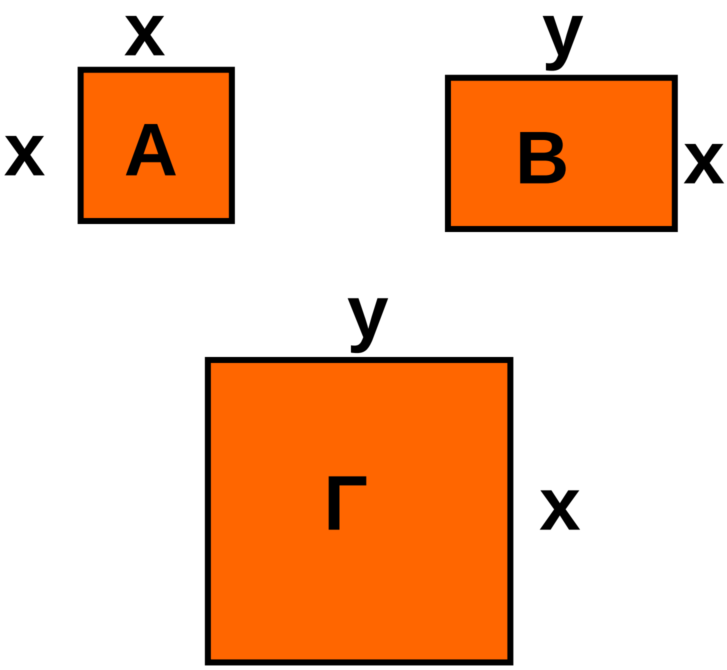
7 α) Ένας μαθητής ήθελε να παραγοντοποιήσει την παράσταση $α^3 + β^3$ και θυμήθηκε ότι αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων, από τους οποίους ο ένας είναι ο $α + β$. Επειδή είχε ξεχάσει τον άλλο παράγοντα, πώς θα μπορούσε να τον βρει;

8 Δίνεται το πολυώνυμο
P(x) = (x3 + 2)(x2 - 5) + 4x2 - 6x + 7.
Να βρείτε το πηλίκο και
το υπόλοιπο της διαίρεσης
α) P(x) : (x3 + 2)
β) P(x) : (x2 - 5)

9 Να κάνετε τη διαίρεση
(6x3 + α) : (x - 1) και να βρείτε την τιμή του α, για την οποία η διαίρεση είναι τέλεια.

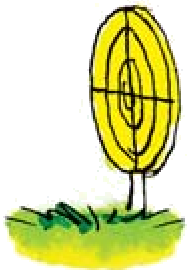
10 **Αν ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2x^3 - x^2 - 4x + 3$ είναι ο $(x - 1)^2$, να βρείτε τον άλλο παράγοντα.**

11 **Για την πλακόστρωση του δαπέδου ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου, χρησιμοποιήσαμε 45 πλακάκια τύπου Α, 56 πλακάκια τύπου Β και 16 πλακάκια τύπου Γ. Αν το πλάτος του δωματίου είναι $5x + 4y$, ποιο είναι το μήκος του;**



1.8. Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

✓ **Μαθαίνω να βρίσκω:**
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 24, 300 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.

2. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των μονωνύμων
$12x^3y^2$, $24x^2x^3ω$, $300x^4y$

και των πολυωνύμων
$3(x - y)(x + y)$, $18(x - y)^2$, $9(x - y)$.

Σε προηγούμενη τάξη μάθαμε να βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. θετικών ακεραίων αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 12, 24 και 300, αν αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, γράφονται:

12 = 22 · 3   24 = 23 · 3
300 = 22 · 3 · 52
Άρα,
Ε.Κ.Π.(12 , 24 , 300) = 23 · 3 · 52 = 600   (Γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων
με το μεγαλύτερο εκθέτη).

Μ.Κ.Δ.(12, 24, 300) = 22 · 3 = 12 (Γινόμενο κοινών παραγόντων με το

μικρότερο εκθέτη).
Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστά-σεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Δηλαδή:

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Στο εξής θα περιοριστούμε σε ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις με θετικούς ακέραιους συντελεστές. Στην περίπτωση αυτή, ως αριθμητικό παράγοντα του Ε.Κ.Π., θα θεωρούμε το Ε.Κ.Π. των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων και ως αριθμητικό παράγοντα του Μ.Κ.Δ. θα θεωρούμε το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων.

Για παράδειγμα,

- τα μονώνυμα $12x^3y^2$, $24x^2y^3ω$, $300x^4y$ έχουν

Ε.Κ.Π. = $600x^4y^3ω$ και

Μ.Κ.Δ. = $12x^2y$ ενώ

- τα πολυώνυμα $3(x - y)(x + y)$, $18(x - y)^2$, $9(x - y)$ έχουν
Ε.Κ.Π. = $18(x - y)^2 (x + y)$ και
Μ.Κ.Δ. = $3(x - y)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ. των μονωνύμων $6x^3y\omega$, $9x^2y\omega^2$, $3xy^4$.

Λύση

Οι συντελεστές 6, 9, 3 έχουν
Ε.Κ.Π. = 18 και Μ.Κ.Δ. = 3, άρα τα μονώνυμα έχουν
Ε.Κ.Π. = $18x^3y^4\omega^2$ και Μ.Κ.Δ. = $3xy$.

2 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων:

$A = 12x^3 - 12x^2$,

$B = 18x^2 - 36x + 18$ και $\Gamma = 9x^2 - 9x$.

Λύση

• **Αναλύουμε τα πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

• **Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων.**

• **Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων.**

$A = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) =$

$= 12(x - 1)(x + 1)$

$B = 18x^2 - 36x + 18 =$

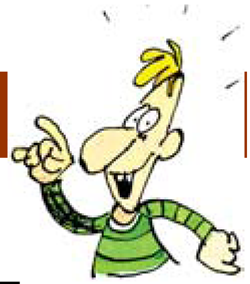
$= 18(x^2 - 2x + 1) = 18(x - 1)2$

$Γ = 9x^2 - 9x = 9x(x - 1)$

Οι αριθμητικοί παράγοντες 12, 18, 9 έχουν Ε.Κ.Π. = 36 και Μ.Κ.Δ. = 3.

Τα πολυώνυμα Α, Β, Γ έχουν Ε.Κ.Π. = $36x(x - 1)^2(x + 1)$ και Μ.Κ.Δ. = $3(x- 1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Ε.Κ.Π. τους από τη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^4(x + 2)^2$, $x(x + 2)^3$	1. $6x^2(x + 2)^2$
β. $x^3(x + 2)$, $x(x + 2)^3$	2. $x^3(x + 2)^3$
γ. $6x^2(x + 2)$, $2x(x + 2)^2$	3. $6x^2(x + 2)$
	4. $x^4(x + 2)^3$

α	β	γ

2 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, γράφοντας σε κάθε κενό το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων Α, Β.**

B \ A	$4x^3$	$2x(x - 1)$	$9(x - 1)$
$6x^2$			
$x^2(x - 1)$			
$8x^5$			

3 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Μ.Κ.Δ. τους από τη στήλη Β.**

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $6x^3(x + 1)^2$, $3x(x + 1)^3$	1. $6x^2(x + 1)^2$
β. $2x^2(x + 1)^3$, $3x^4(x + 1)^2$	2. $3x(x + 1)^2$
γ. $3x^2(x + 1)$, $6x^3(x + 1)^2$	3. $3x^2(x + 1)$
	4. $x^2(x + 1)^2$

α	β	γ

4 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων Α, Β.**

B \ A	$3x^2$	$x^4(x - 2)$	$6(x - 2)^3$
$6x(x- 2)^2$			
$2x^3(x-2)$			
$3x^3(x-2)^3$			

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 **Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:**

α) $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$

β) $15\alpha xy^3$, $10\alpha x^2\omega^2$, $5y\omega^2$

γ) $2x^2(x + y)^2$,
$3xy^3(x + y)^2$,
$8x^2y(x - y)(x + y)$

2 **Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:**

α) $6(x^2 - y^2)$, $4(x - y)^2$, $12(x - y)^3$

β) $α^2 - 3α + 2$, $α^2 - 4$, $α^3 - 4α$

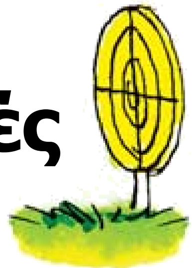
γ) $α^3 - α^2$, $(α^2 - α)(α^2 - 1)$,

$α^3 - 2α^2 + α$

1.9. Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

✓ **Γνωρίζω ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται ρητή και πότε ορίζεται.**

✓ **Μαθαίνω να απλοποιώ ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.**



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $\dfrac{x^3+4}{x-1}$ για $x = 0$;

Μπορείτε να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 1$;

2. Ποιο από τα παρακάτω κλάσματα απλοποιείται;

$$\frac{6\cdot 2+7}{3\cdot 2},\quad \frac{6\cdot 2\cdot 7}{3+2},\quad \frac{6\cdot 2\cdot 7}{3\cdot 2}$$

3. Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις απλοποιείται;

$$\frac{6x + y}{3x}, \quad \frac{6xy}{3 + x}, \quad \frac{6xy}{3x}$$

Μια αλγεβρική παράσταση $\left(\text{π.χ.} \frac{x^3 + 4}{x - 1}, \ \frac{xy\omega}{x + y}, \ \frac{2}{x^2 + 4}\right)$ **που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση.**

Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

Για παράδειγμα, η παράσταση

$\frac{x^3 + 4}{x - 1}$ **ορίζεται, αν $x \neq 1$.**

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.
Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.
Έτσι, η παράσταση $\frac{6x + y}{3x}$ δεν απλοποιείται, ενώ η παράσταση $\frac{6xy}{3x}$ απλοποιείται, γιατί οι όροι της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα το 3x. Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους με τον κοινό παράγοντα, έχουμε

$$\frac{6xy}{3x} = \frac{6xy : 3x}{3x : 3x} = \frac{2y}{1} = 2y$$

Η προηγούμενη απλοποίηση γίνεται συντομότερα, αν διαγράψουμε τον κοινό παράγοντα, οπότε έχουμε $\frac{6xy}{3x} = \frac{\cancel{3x} \cdot 2y}{\cancel{3x}} = 2y$

Αν όμως σε μια ρητή παράσταση ο αριθμητής ή ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο, τότε για να την απλοποιήσουμε εργαζόμαστε ως εξής:

- **Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της** και
- **διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.**

Για παράδειγμα, η παράσταση $\frac{5x - 10}{x^2 - 4}$ **απλοποιείται ως εξής:**

$$\frac{5x - 10}{x^2 - 4} = \frac{5(x - 2)}{x^2 - 2^2} = \frac{5(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \frac{5}{x + 2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Για ποιες τιμές των μεταβλητών τους ορίζονται οι παραστάσεις;

α) $\dfrac{x^2 + 7x + 2}{x}$ β) $\dfrac{x^2 + 6}{x + 2}$

γ) $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$

Λύση

α) Η παράσταση $\dfrac{x^2 + 7x + 2}{x}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή για $x \neq 0$.

β) Ομοίως η παράσταση $\dfrac{x^2 + 6}{x + 2}$ ορίζεται, αν $x + 2 \neq 0$, δηλαδή για $x \neq -2$.

γ) Η παράσταση $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ ορίζεται,

αν οι μεταβλητές x, y παίρνουν τιμές, τέτοιες ώστε $x - y \neq 0$, δηλαδή για $x \neq y$.

2 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{12x^3y\omega^2}{8xy^3}$ β) $\dfrac{3x^2 - 3}{6x^2 - 6x}$

γ) $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^3 - y^3}$

Λύση

α) Στην παράσταση $\dfrac{12x^3y\omega^2}{8xy^3}$ και οι δύο οροι της είναι γινόμενα, οπότε

έχουμε $\dfrac{12x^3y\omega^2}{8xy^3} = \dfrac{3x^2\omega^2}{2y^2}$

β) Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της παράστασης και έχουμε

$$\frac{3x^2 - 3}{6x^2 - 6x} = \frac{3(x^2 - 1)}{6x(x - 1)} =$$

$$= \frac{3\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{6x\cancel{(x - 1)}} = \frac{x + 1}{2x}$$

γ) Ομοίως έχουμε $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^3 - y^3} =$

$$= \frac{(x - y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x - y)}(x^2 + xy + y^2)} =$$

$$= \frac{x - y}{x^2 + xy + y^2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές

της μεταβλητής της από τη στήλη Β, για τις οποίες ορίζεται.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\dfrac{1}{x}$	1. $x \neq 1$
β. $\dfrac{x - 1}{x + 1}$	2. $x \neq 0$ και $x \neq 1$
γ. $\dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$	3. $x \neq -1$
δ. $\dfrac{2(x - 1)}{x - 1}$	4. $x \neq 1$ και $x \neq -1$
ε. $\dfrac{3}{x^2 + 1}$	5. οποιοσδήποτε Αριθμός
	6. $x \neq 0$

α	β	γ	δ	ε

2 **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.**

α) $\dfrac{\cancel{x^2} + 1}{\cancel{x}} = x + 1$ ☐

β) $\dfrac{\cancel{x}(x + 1)}{\cancel{x}} = x + 1$ ☐

γ) $\dfrac{(x + 2)\cancel{(x + 1)}}{4\cancel{(x + 1)}} = \dfrac{x + 2}{4}$ ☐

δ) $\dfrac{x + 2\cancel{(x + 1)}}{4\cancel{(x + 1)}} = \dfrac{x + 2}{4}$ ☐

ε) $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$ ☐

στ) $\dfrac{(x - y)^2}{\cancel{x - y}} = x + y$ ☐

3 **Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:**

α) $\dfrac{7x}{x(..........)} = \dfrac{7}{x - 2}$

β) $\dfrac{(α + β)(..........)}{(α - β)(..........)} = 1$

γ) $\dfrac{x(x + 1)}{..........} = x$

δ) $\dfrac{x(x + 1)}{..........} = x + 1$

ε) $\dfrac{..........}{2(α + β)^2} = \dfrac{1}{α + β}$

στ) $\dfrac{3(x + 2)}{..........} = \dfrac{3}{x + 2}$

4 Ένας μαθητής για να βρει τις τιμές της μεταβλητής x, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\frac{x}{x(x-4)}$ έγραψε $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-4)} = \frac{1}{x-4}$ και απάντησε ότι η παράσταση ορίζεται όταν $x \neq 4$. Είναι σωστή η απάντησή του;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{1}{x-4}$ β) $\frac{y+3}{2y-5}$

γ) $\frac{\omega-2}{(\omega+1)^2}$ δ) $\frac{6x+1}{x(x-3)}$

2 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{4x}{6x}$ β) $\frac{3y^2}{12y}$ γ) $\frac{2x\omega^2}{8x^2\omega}$

δ) $\frac{5\alpha^2\beta\gamma^3}{10\alpha\beta^2\gamma}$ ε) $\frac{x + 4}{4 + x}$ στ) $\frac{y - 1}{1 - y}$

ζ) $\frac{\omega - 2}{(2 - \omega)^2}$ η) $\frac{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)}$

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{6x}{2x^2 + 4x}$ β) $\frac{3y - 9}{y^2 - 3y}$ γ) $\frac{x^2 + x\omega}{\omega^2 + x\omega}$

δ) $\frac{5\alpha^2 - 20}{(\alpha - 2)^2}$ ε) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

στ) $\dfrac{y^2 - 1}{y^2 + 2y + 1}$

ζ) $\dfrac{6x^2 + 3x\omega}{4x^2 - \omega^2}$

η) $\dfrac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha^3 - \beta^3}$

4 **Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 4}$

β) $\dfrac{y^2 - 5y + 4}{y^2 - 6y + 8}$

γ) $\dfrac{\omega^3 - 2\omega^2 + \omega}{\omega^3 - \omega}$

5 **Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $\dfrac{x(x - 1) + 4(x - 1)}{x^2 + 2x - 3}$

β) $\dfrac{y(y - 3) + y^2 - 9}{4y^2 - 9}$

γ) $\dfrac{(2\omega + 1)^2 - (\omega + 2)^2}{\omega^4 - 1}$

δ) $\dfrac{(\alpha + 1)(\alpha - 2)^2 - 4(\alpha + 1)}{\alpha^3 + \alpha^2}$

6 Ένας λαμπαδηδρόμος κατά τα τελευταία μέτρα της διαδρομής του διήνυσε την απόσταση ΑΒ με σταθερή ταχύτητα 5 m/sec. Φτάνοντας στο σημείο Β ένας άλλος λαμπαδηδρόμος ξεκινώντας από το σημείο Β διήνυσε την απόσταση ΒΓ με σταθερή επιτάχυνση 4 m/sec^2. Αν ο χρόνος που κινήθηκε κάθε αθλητής ήταν t sec να αποδείξετε ότι η μέση ταχύτητα με την οποία διανύθηκε

η απόσταση ΑΓ ήταν $t + \frac{5}{2}$ **m/sec**

Περιεχόμενα 2ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Α΄ • ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.5 – Αξιοσημείωτες ταυτότητες................................7

1.6 – Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων ..48

1.7 – Διαίρεση πολυωνύμων.........88

1.8 – Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων.108

1.9 – Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις........................118