Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 1ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.1 – 3.2

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Παναγιώτης Βλάμος, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης
Παναγιώτης Δρούτσας, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης
Γεώργιος Πρέσβης, ***Μαθημ/κός***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης
Κων/νος Ρεκούμης, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Βασίλειος Γιαλαμάς, ***Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.***
Χαράλαμπος Τουμάσης, ***Σχολ. Σύμβουλος Μαθημ/κών***
Πολυξένη Ρόδου, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Θεοδόσης Βρανάς, ***Σκιτσογράφος*** **-** ***Εικονογράφος***

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευγενία Βελάγκου, ***Φιλόλογος***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Γεώργιος Πολύζος, ***Πάρεδρος ε.θ.***
του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Γεώργιος Μήλιος, ***Ζωγράφος-Χαράκτης***

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 1ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.1 – 3.2

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»
Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.
Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ</u>
<u>ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

Πρόλογος

Το βιβλίο «**Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου**» περιλαμβάνει την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Αποτελείται από δύο μέρη τα οποία θα μελετηθούν παράλληλα και αρκετές φορές συμπληρωματικά.

Στο πρώτο μέρος, η Άλγεβρα ξεκινά με εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού, ενώ στο δεύτερο μέρος η Γεωμετρία ξεκινά με τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων τα οποία οδηγούν στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στη Γεωμετρία το Πυθαγόρειο θεώρημα θα μελετηθεί μόνο για ρητούς αριθμούς και κατόπιν θα αποτελέσει τη βάση για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας. Γνωρίζοντας τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να μελετήσουμε την Τριγωνομετρία, η οποία καταλαμβάνει τις περισσότερες παραγράφους του δεύτερου κεφαλαίου του δευτέρου μέρους, το οποίο ολοκληρώνεται με τα διανύσματα.

Στη συνέχεια η πορεία των δύο μερών του βιβλίου γίνεται σχεδόν ανεξάρτητη. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την παρουσίαση βασικών συναρτήσεων και την περιγραφική Στατιστική, ενώ το δεύτερο με τη μέτρηση κύκλου και τη μελέτη και μέτρηση γεωμετρικών στερεών.

Οι συγγραφείς

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Εξισώσεις

Ανισώσεις

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή τον μεγάλου έλληνα μαθηματικού Διόφαντου, που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση). Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα «Αριθμητικά» (6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται «Διοφαντικές εξισώσεις».

Όταν πέθανε, οι μαθητές του –κατά παραγγελίαν του– αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το **Επίγραμμα του Διόφαντου.**

ΔΙΑΒΑΤΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ
Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ΣΕ ΕΣΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΣΟΦΟΣ,
Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.
ΑΚΟΥΣΕ
- Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.

- ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ.
- ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.
- ΤΟΝ ΠΕΜΠΤ0 ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ.
- ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.
- ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».

Σύμφωνα μ' αυτό το επίγραμμα, πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος; Αν x παριστάνει την ηλικία του Διόφαντου, όταν πέθανε, τότε το παραπάνω πρόβλημα παριστάνεται από την εξίσωση:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις (καθώς και ανισώσεις).

Θα αναζητήσουμε επίσης τρόπους να εφαρμόζουμε τη μέθοδο αυτή, για να λύνουμε προβλήματα της καθημερινής ζωής.

1.1. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

Μεταβλητή

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η ομιλία σε κινητό τηλέφωνο κοστίζει 0,005 € το δευτερόλεπτο. Πόσο κοστίζει ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων, ένα άλλο διάρκειας 15 δευτερολέπτων και ένα άλλο διάρκειας 27 δευτερολέπτων;

Λύση

Εύκολα βέβαια βρίσκουμε ότι:

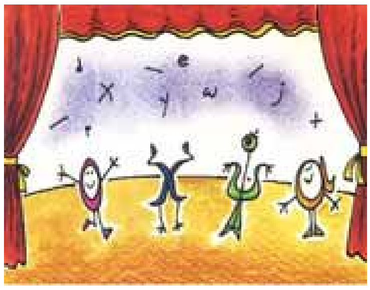
- **Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων κοστίζει 10 · 0,005 = 0,05 €.**
- **Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 15 δευτερολέπτων κοστίζει 15 · 0,005 = 0,075 €.**
- **Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 27 δευτερολέπτων κοστίζει 27 · 0,005 = 0,135 €.**

Μπορούμε λοιπόν να σκεφτούμε ότι το κόστος ενός τηλεφωνήματος θα είναι: (διάρκεια τηλεφωνήματος) · 0,005 €. Για ευκολία, συμβολίζουμε με το γράμμα x τη διάρκεια του τηλεφωνήματος (σε δευτερόλεπτα), οπότε καταλήγουμε ότι το κόστος για κάθε τηλεφώνημα διάρκειας x δευτερολέπτων είναι: x · 0,005 €.

Το γράμμα x, που στην προκειμένη περίπτωση παριστάνει ένα οποιοδήποτε θετικό αριθμό, λέγεται μεταβλητή.

Γενικά: Μεταβλητή είναι ένα γράμμα (π.χ. x, y, t, …) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.

Αλγεβρικές παραστάσεις - Αναγωγή ομοίων όρων



• Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, όπως γνωρίζουμε, **αριθμητική παράσταση.** Για παράδειγμα, η παράσταση $2 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) + 5$ είναι μια αριθμητική παράσταση. Ομοίως, η παράσταση $\dfrac{5 \cdot 8 + 4 \cdot 3}{2(-7) + 6 \cdot 9}$ είναι μία αριθμητική παράσταση.

• Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση.**
Για παράδειγμα, η παράσταση
$2 \cdot x - 4 \cdot x + 5$ είναι μια αλγεβρική παράσταση. Οι προσθετέοι λέγονται **όροι** αυτής.

Ομοίως, η παράσταση $\dfrac{2 \cdot x - 4}{3 \cdot x^2 + 5}$

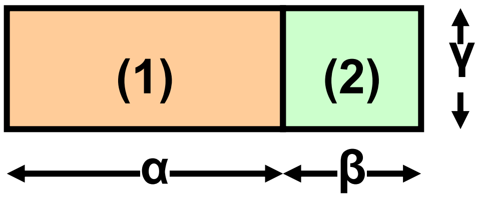
είναι μία αλγεβρική παράσταση. **Πώς κάνουμε όμως τις πράξεις σε μια αλγεβρική παράσταση;** Στο σημείο αυτό μπορεί να μας βοηθήσει λίγο η Γεωμετρία! Ας θυμηθούμε, λοιπόν, τα εμβαδά των ορθογωνίων:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δύο ορθογώνια (1) και (2) είναι «τοποθετημένα» έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα μεγάλο ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου.

Λύση

Για να βρούμε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου, υπάρχουν δύο τρόποι:



➤ 1ος τρόπος:

Το μεγάλο ορθογώνιο έχει βάση α + β και ύψος γ, άρα το εμβαδόν του είναι:

$(\alpha + \beta) \cdot \gamma$

➤ **2ος τρόπος:**

Το εμβαδόν του (1) είναι: α • γ. Το εμβαδόν του (2) είναι: β • γ. Άρα το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι:

$\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

Φυσικά, και οι δύο τρόποι θα πρέ-πει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$, που είναι η γνωστή επιμεριστική ιδιότητα, η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

$\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$

Στη μορφή αυτή, η επιμεριστική ιδιότητα μπορεί να μας βοηθήσει να κάνουμε εύκολα πράξεις στις αλγεβρικές παραστάσεις:

Παράδειγμα:

$7 \cdot \alpha + 8 \cdot \alpha = (7 + 8) \cdot \alpha = 15 \cdot \alpha$

$x + 4 \cdot x - 2 \cdot x = (1 + 4 - 2) \cdot x = 3 \cdot x$ $5 \cdot t - 6 \cdot t - 8 \cdot t =$
$= (5 - 6 - 8) \cdot t = -9 \cdot t$

Η διαδικασία αυτή με την οποία γράψαμε σε απλούστερη μορφή τις παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις, ονομάζεται «αναγωγή ομοίων όρων».

Παρατήρηση:

Όταν γράφουμε αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δε βάζουμε το σύμβολο (•) του πολλαπλασιασμού μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών. Γράφουμε δηλαδή 3xy αντί για 3 • x • y. Επίσης, γράφουμε 2(4xy – 1) + 3(2 – 5x) αντί για 2 • (4 • x • y – 1) + 3 • (2 – 5 • x).

Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιείται βέβαια, για τον πολλαπλασιασμό αριθμών: 3 • 5 ή 3•(-5).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις παραστάσεις:
(α) $2x + 5x$, (β) $3α + 4α – 12α$, (γ) $ω + 3ω + 5ω + 7ω$.

Λύση: Έχουμε ότι:
(α) $2x + 5x = (2 + 5)x = 7x$
(β) $3α + 4α – 12α = (3 + 4 – 12)α = –5α$
(γ) $ω + 3ω + 5ω + 7ω = (1 + 3 + 5 + 7)ω = 16ω$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: (α) $4y + 3x – 2y + x$,
(β) $y + 2ω – 3y + 2 + ω + 5$.

Λύση: Έχουμε ότι:
(α) $4y + 3x – 2y + x = 4y – 2y + 3x + x = (4 – 2)y + (3 + 1)x =$
$= 2y + 4x$
(β) $y + 2ω – 3y + 2 + ω + 5 = y – 3y + 2ω + ω + 2 + 5 =$
$= (1 – 3)y + (2 + 1)ω + (2 + 5) = –2y + 3ω + 7$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

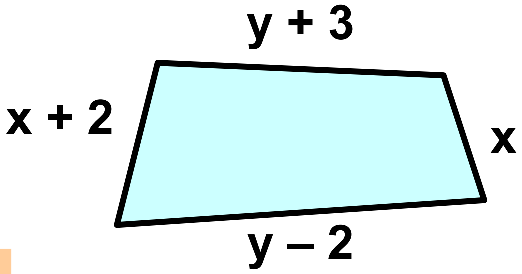
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$Α = 2(x + 3) – 4(x – 1) – 8$, όταν $x = –0,45$.

Λύση: Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση Α:
$Α = 2(x + 3) – 4(x – 1) – 8 = 2x + 6 – 4x + 4 – 8 =$
$= 2x – 4x + 6 + 4 – 8 = –2x + 2$ Επομένως, όταν
$x = –0,45$, είναι: $Α = –2\cdot(–0,45) + 2 = 0,9 + 2 = 2,9$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να υπολογίσετε την περίμετρο του παρακάτω τετραπλεύρου, όταν $x + y = 10$.

Λύση:



Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι ίση με:

$$\Pi = x + (y + 3) + (x + 2) + (y - 2) = x + y + 3 + x + 2 + y - 2 =$$
$$= x + x + y + y + 3 + 2 - 2 = 2x + 2y + 3 = 2(x + y) + 3$$

Επειδή $x + y = 10$,
είναι $\Pi = 2 \cdot 10 + 3 = 20 + 3 = 23$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με το ίσο του στοιχείο της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β
α)	$2x + 5x - 3x$	i) $-4x$
β)	$x - 3x + 4x$	ii) $-5x$
γ)	$-x + 3x - 6x$	iii) $4x$
δ)	$-2x + 4x - 7x$	iv) $2x$

2. Για κάθε αλγεβρική παράσταση της 1ης στήλης του παρακάτω πίνακα, δίνονται τρεις απαντήσεις Α, Β και Γ, από τις οποίες μία μόνο είναι σωστή. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ
α) $2x - 4x + 6x =$	$12x$	$-2x$	$4x$
β) $3y - 3y + 4y =$	$4y$	$10y$	$-5y$
γ) $-5α + 3α - α =$	$3α$	$-3α$	$9α$
δ) $3α - 4β + 4β - 5α =$	$8α + 8β$	$2α$	$-2α$

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $(3x + 5) + (x - 6)$	i) $-4x + 11$
β) $(-3x + 5) - (x - 6)$	ii) $-4x + 1$
γ) $(-3x + 5) - (x + 6)$	iii) $-4x - 1$
δ) $-(3x + 5) - (x - 6)$	iv) $4x - 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12.
β) Το άθροισμα δύο αριθμών πολλαπλασιασμένο επί 9.
γ) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, που το μήκος του είναι 2 m μεγαλύτερο από το πλάτος του.

2 Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
α) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 5 κιλά πατάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός κιλού.
β) Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή συν 19% ΦΠΑ.

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $20x – 4x + x$
β) $–7α – 8α – α$
γ) $14y + 12y + y$
δ) $14ω – 12ω – ω + 3ω$
ε) $–6x + 3 + 4x – 2$
στ) $β – 2β + 3β – 4β$

4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $2x – 4y + 3x + 3y$
β) $6ω – 2ω + 4α + 3ω + α$
γ) $x + 2y – 3x – 4y$
δ) $–8x + ω + 3ω + 2x – x$

5 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α, Β και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:
α) $Α = 3(x + 2y) – 2(2x + y)$, όταν $x = 1$, $y = –2$.
β) $Β = 5(2α – 3β) + 3(4β – α)$, όταν $α = –3$, $β = 5$.

6 Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) Α = 2(α – 3β) + 3(α + 2β),
όταν α = 0,02 και β = 2005.

β) Β = 3(x + 2y) + 2(3x + y) + y, όταν $x + y = \frac{1}{9}$.

7 Οι διαιτολόγοι, για να εξετάσουν αν ένα άτομο είναι αδύνατο ή παχύ, χρησιμοποιούν τον αριθμό $\frac{B}{υ^2}$ (δείκτης σωματικού βάρους ή body mass index, δηλαδή BMI), όπου Β το βάρος του ατόμου και υ το ύψος του σε μέτρα. Ανάλογα με το αποτέλεσμα αυτό, το άτομο κατατάσσεται σε κατηγορία σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	ΑΝΔΡΕΣ
Κανονικό βάρος	18,5 – 23,5	19,5 – 24,9
1ος βαθμός παχυσαρκίας	23,6 – 28,6	25 – 29,9
2ος βαθμός παχυσαρκίας	28,7 – 40	30 – 40
3ος βαθμός παχυσαρκίας	πάνω από 40	πάνω από 40

Να χαρακτηρίσετε:

α) Το Γιώργο, με βάρος 87 κιλά και ύψος 1,75 μέτρα.

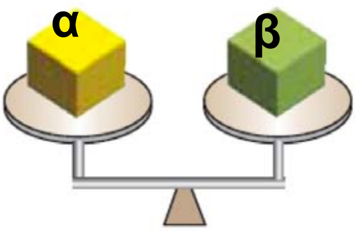
β) Την Αλέκα, με βάρος 64 κιλά και ύψος 1,42 μέτρα.

γ) Τον εαυτό σας.

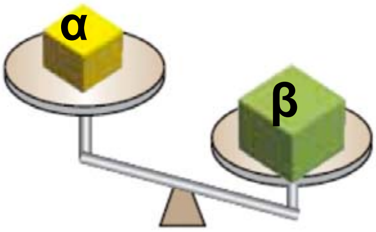
1.2. Εξισώσεις α΄ βαθμού

Χρήσιμες ιδιότητες πράξεων

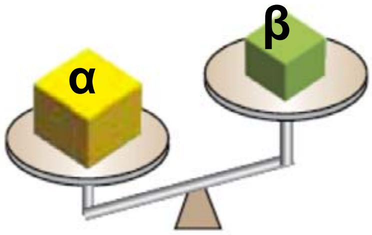
Μια σχέση ισότητας ή ανισότητας είναι στην ουσία μια ζυγαριά, η οποία είτε ισορροπεί, είτε γέρνει από τη μία πλευρά, είτε γέρνει από την άλλη.



$\alpha = \beta$



$\alpha < \beta$



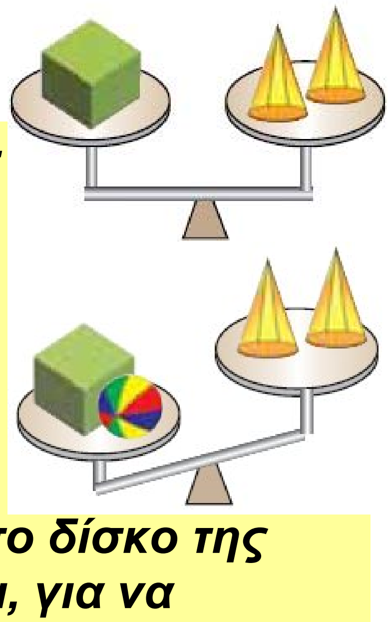
$\alpha > \beta$

Αν α και β παριστάνουν τα βάρη των αντικειμένων του σχήματος, τότε θα ισχύει μία μόνο από τις σχέσεις:

$$\alpha = \beta,\ \alpha < \beta,\ \alpha > \beta$$

Για να χειριστούμε σωστά μια ισότητα, είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη μας μερικούς βασικούς κανόνες.

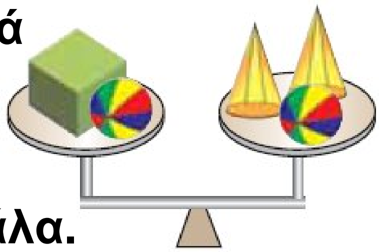
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



Ο Γιώργος έχει μια ζυγαριά που ισορροπεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Πρόκειται δηλαδή για έναν κύβο που έχει βάρος ίσο με το βάρος δύο κώνων. Προσθέτει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκεται ο κύβος, μια μπάλα, οπότε η ζυγαριά γέρνει προς αυτή την πλευρά. Πόσες μπάλες πρέπει να τοποθετήσει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκονται οι δύο κώνοι, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;

Λύση

Για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει βέβαια να τοποθετήσει και στην άλλη πλευρά το ίδιο βάρος, δηλαδή μία μπάλα.



Δηλαδή: ένας κύβος και μία μπάλα ισορροπούν με 2 κώνους και μία μπάλα. Το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως γενικότερο κανόνα για τις ισότητες.

Άρα:

> **Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.**
> **Δηλαδή: Αν α = β τότε α + γ = β + γ.**

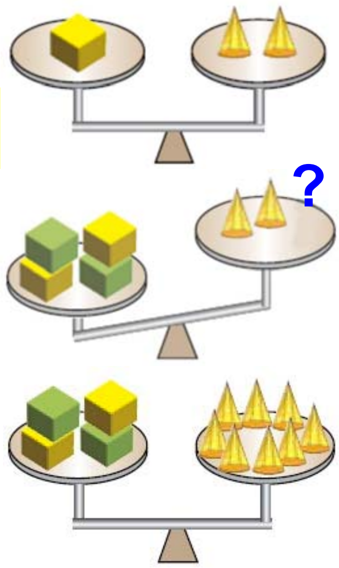
Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την αφαίρεση.

Άρα:

> **Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.**
> **Δηλαδή: Αν α = β τότε α – γ = β – γ.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ο Γιώργος ξέρει ότι ένας κύβος ισορροπεί με δύο κώνους. Αν βάλει 4 κύβους στη μία πλευρά, πόσους κώνους πρέπει να βάλει στην άλλη πλευρά, ώστε να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;



Λύση

Αφού τετραπλασίασε το βάρος στη μία πλευρά, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει να τοποθετήσει τετραπλάσιο βάρος και στην άλλη πλευρά, δηλαδή πρέπει να τοποθετήσει 8 κώνους.

Γενικά:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$.

Ομοίως:

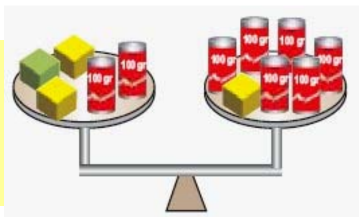
Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$.

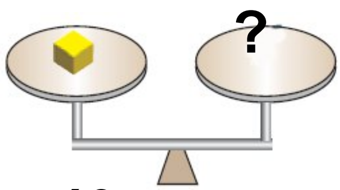
Η έννοια της εξίσωσης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Η διπλανή ζυγαριά ισορροπεί! Μπορείτε να βρείτε πόσο ζυγίζει ένας κύβος; Τα βαρίδια ζυγίζουν 100 γραμμάρια το καθένα.

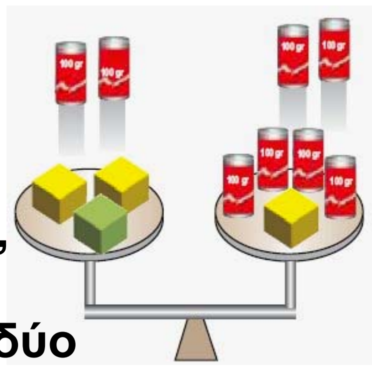


Λύση



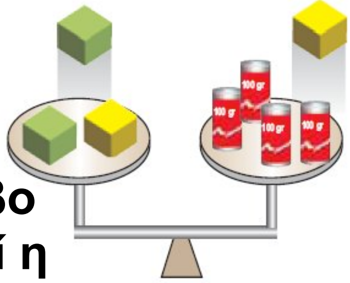
Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, θα πρέπει να προσπαθήσουμε να απομονώσουμε στον ένα δίσκο της ζυγαριάς έναν κύβο, φροντίζοντας όμως η ζυγαριά να ισορροπεί.

➤ 1ο βήμα:



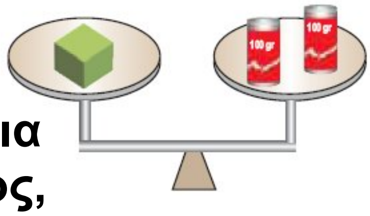
Καταρχάς, παρατηρούμε ότι στον ένα δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν δύο βαρίδια των 100 γραμμαρίων το καθένα, και στον άλλο δίσκο υπάρχουν έξι. Επομένως, μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο βαρίδια από κάθε δίσκο χωρίς να "χαλάσουμε" την ισορροπία της ζυγαριάς.

➤ 2ο βήμα:

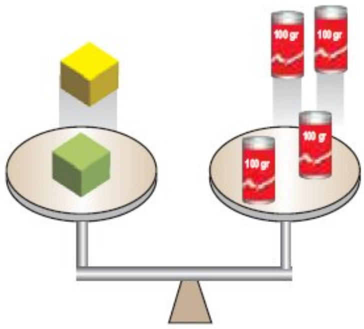


Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι μπορούμε με τον ίδιο τρόπο ν’ αφαιρέσουμε έναν κύβο από κάθε δίσκο χωρίς πάλι να διαταραχθεί η ισορροπία της ζυγαριάς.

➤ 3ο βήμα:



Τώρα έχουν μείνει δύο κύβοι στον ένα δίσκο και τέσσερα βαρίδια στον άλλο. Για να βρούμε πόσο βάρος έχει ο ένας κύβος, μπορούμε να σηκώσουμε έναν κύβο από τον ένα δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος ενός δίσκου) και δύο βαρίδια από τον άλλο δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος του άλλου δίσκου). Διαιρέσαμε, και των δύο δίσκων δια 2, οπότε η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί.



Άρα, ένας κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια

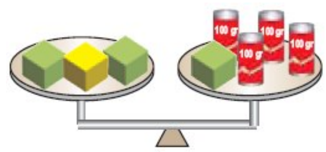
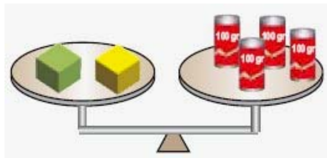
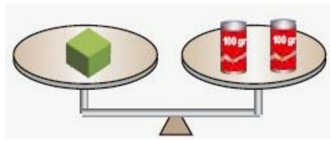
Ας δούμε τώρα μια «μαθηματική» λύση του παραπάνω προβλήματος:

Ας πούμε ότι κάθε κύβος ζυγίζει x κιλά. Τότε, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς βρίσκονταν στην αρχή $3x + 200$ γραμμάρια και στο δεξιό δίσκο $x + 600$ γραμμάρια. Αφού η ζυγαριά ισορροπεί, θα είναι: $3x + 200 = x + 600$.

Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση**.

Η παράσταση $3x + 200$ λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $x + 600$ λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

Για να βρούμε τώρα τον άγνωστο αριθμό x, λύνουμε την εξίσωση.

Εξίσωση **$3x + 200 = x + 600$**	**Περιγραφή λύσης**	
$3x + 200 - 200 =$ **$= x + 600 - 200$**	**Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης**	
$3x = x + 400$	**Κάνουμε τις πράξεις**	
$3x - x =$ **$= x + 400 - x$**	**Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης**	
$(3 - 1)x = 400$ **άρα $2x = 400$**	**Αναγωγή ομοίων όρων**	
$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$	**Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης**	
$x = 200$	**Απλοποιούμε τα κλάσματα**	

Άρα, ο κάθε κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

Επαλήθευση:

Πράγματι, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν $3 \cdot 200 + 200 = 600 + 200 = 800$ γραμμάρια και στο δεύτερο δίσκο υπάρχουν $200 + 600 = 800$ γραμμάρια. Δηλαδή, η ζυγαριά ισορροπεί.

Στην παραπάνω λύση της εξίσωσης $3x + 200 = x + 600$ «απομονώσαμε» το x στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, προσθέτοντας ή αφαιρώντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει πιο γρήγορα με τη βοήθεια του εξής πρακτικού κανόνα:

> Σε μία εξίσωση μπορούμε να «**μεταφέρουμε**» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, **αλλάζοντας το πρόσημό τους.**

Δηλαδή:

$$3x + 200 = x + 600$$
$$3x - x = 600 - 200$$

⇧

Μεταφέρουμε το +x στο πρώτο μέλος, οπότε γίνεται –x. Επίσης, μεταφέρουμε το +200 στο δεύτερο μέλος, οπότε γίνεται –200

$$2x = 400$$

⇧

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$$

⇧

Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου και απλοποιούμε τα κλάσματα

Άρα $x = 200$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λυθεί η εξίσωση: $2(x - 1) + 3(2 - x) = 4(x + 2)$.

Λύση: Έχουμε διαδοχικά:

$$2x - 2 + 6 - 3x = 4x + 8$$

⇧

Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$2x - 3x - 4x = 8 + 2 - 6$$

⇧

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$-5x = 4$$

⇧

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{4}{-5}$$

⇧

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Άρα $x = -\frac{4}{5}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$

Λύση: Σε αυτή την εξίσωση έχουμε και παρονομαστές. Μπορούμε, όμως, να πάρουμε μια εξίσωση χωρίς παρονομαστές, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2 και 3. Συνήθως χρησιμοποιούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, το οποίο εδώ είναι το 6. **Η διαδικασία αυτή λέγεται απαλοιφή παρονομαστών.**

$$6\left(\frac{y+1}{2} + y\right) = 6\left(\frac{2y+3}{3} + 2\right)$$

⇧

Απαλοιφή παρανομαστών: πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 6

$$6\,\frac{y+1}{2} + 6y = 6\,\frac{2y+3}{3} + 6 \cdot 2$$

⇧

Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$3(y + 1) + 6y = 2(2y + 3) + 12$$

⇧

Απλοποιούμε τα κλάσματα

$$3y + 3 + 6y = 4y + 6 + 12$$

⇧

Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα

$$3y + 6y - 4y = 6 + 12 - 3$$

⇧

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$5y = 15$$

⇧

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$$\frac{5y}{5} = \frac{15}{5}$$

⇧

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Άρα $y = 3$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να λυθεί η εξίσωση: $2(3 - x) + 4(x - 1) = 2x + 5$

Λύση: Έχουμε διαδοχικά:

$$6 - 2x + 4x - 4 = 2x + 5$$

$$-2x + 4x - 2x = 5 - 6 + 4$$

$$0x = 3$$

Στην περίπτωση αυτή, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς χ διαιρώντας με το συντελεστή του αγνώστου, γιατί, όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.

Παρατηρούμε, όμως, ότι για κάθε τιμή του χ, το πρώτο μέλος της εξίσωσης ισούται πάντα με 0, οπότε δε μπορεί να είναι ίσο με 3. Επομένως, η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **αδύνατη.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3}{5} - \frac{2x + 1}{10} = \frac{5 - 2x}{10}$

Λύση: Έχουμε διαδοχικά:

$$10\frac{3}{5} - 10\frac{2x+1}{10} = 10\frac{5-2x}{10}$$

$$\Updownarrow$$

Απαλοιφή παρανομαστών: πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 10

$$2 \cdot 3 - (2x + 1) = 5 - 2x$$

$$\Updownarrow$$

Απλοποιούμε τα κλάσματα

$$6 - 2x - 1 = 5 - 2x$$

$$\Updownarrow$$

Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$-2x + 2x = 5 - 6 + 1$$

$$\Updownarrow$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$0x = 0$$

$$\Updownarrow$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

Στην περίπτωση αυτή επίσης, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς x διαιρώντας με το συντελεστή του αγνώστου, γιατί όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.

Παρατηρούμε όμως, ότι η εξίσωση $0x = 0$ επαληθεύεται για όλες τις τιμές του χ.
Για παράδειγμα: $0 \cdot 2 = 0$, $0 \cdot 3 = 0$, $0 \cdot (-7) = 0$ κ.τ.λ.
Δηλαδή, κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.
Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα**.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στις παρακάτω ισότητες να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει:

α) 5 + …… = 35
β) 5 • …… = 35
γ) 127 – …… = 103
δ) 32 – …… = 35
ε) 14 + ……. = 5
στ) 2 • …… + 3 = 17

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

		Σ	Λ
α)	Η εξίσωση $2x = 6$ έχει λύση τον αριθμό 3.		
β)	Η εξίσωση $5x + x = x$ είναι ταυτότητα.		
γ)	Οι εξισώσεις $x + 1 = 5$ και $-x + 5 = 1$ έχουν λύση τον ίδιο αριθμό.		
δ)	Η εξίσωση $3x = 0$ είναι ταυτότητα.		
ε)	Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ είναι αδύνατη.		

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $-2x = 4$	i) -8
β) $3x = -9$	ii) 3
γ) $\frac{1}{2}x = -4$	iii) -2
δ) $2x = 3 + x$	iv) -3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι η λύση της εξίσωσης:

α) $-2x + 3 = 21$ $\quad x = -7$

β) $3x + 5 = 7{,}5$ $\quad x = 0{,}5$

γ) $-3x + 4 = 7x - 6$ $\quad x = 1$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x + 21 = 4 + x - 5$

β) $-9 + 7y + y = 1 - 2y$

γ) $3t - 3(t + 1) = t + 2(t + 1) + 1$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4(2x + 1) - 6(x - 1) = 3(x + 2)$

β) $3(y + 1) + 2(y - 4) = 2y - (y - 6)$

γ) $6(ω + 2) + 3 = 3 - 2(ω - 4)$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{2x + 3}{2} = \dfrac{3x - 5}{4}$

β) $\dfrac{7x - 6}{3} = \dfrac{5x + 2}{4}$

γ) $\dfrac{2(x - 1) - 2}{2} = \dfrac{1 - 3x}{4}$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x + 4}{5} - \dfrac{x - 4}{3} = \dfrac{1 - 3x}{15} - 2$

β) $\dfrac{y - 1}{3} - \dfrac{2y + 7}{6} = y + \dfrac{1 - 3y}{2}$

γ) $\dfrac{1}{4}(ω + 4) - 7 = (1 - ω)\dfrac{1}{7} + \dfrac{ω - 23}{4}$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x - \left(\dfrac{2x}{3} - 5\right) = 6 - \left(\dfrac{x}{3} - 2\right)$

β) $5 - \left(\dfrac{t+1}{2} + \dfrac{1+2t}{3}\right) = 12 - \left(t - \dfrac{t+5}{6}\right)$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{\dfrac{1+x}{2}}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$ β) $\dfrac{2t - \dfrac{1}{3}}{2+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1 - \dfrac{t}{2}}{2 - \dfrac{1}{2}}$

8 Για ποια τιμή του x είναι Α = Β;

α) αν $A = 5x - 3$, $B = 12 - 2x$

β) αν $A = 2(x - 1) + \dfrac{3}{2}$ $B = 6 + \dfrac{x}{3}$

9 Δίνεται η εξίσωση:

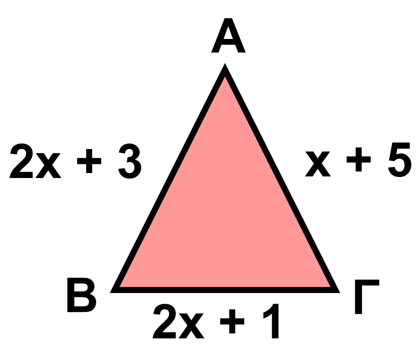
$\mu(x + 6) - 2 = (2\mu - 1)x + 2$

α) Αν $\mu = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x = 8$.

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 7$, να αποδείξετε ότι $\mu = 3$.

γ) Αν $\mu = 1$, να λύσετε την εξίσωση.

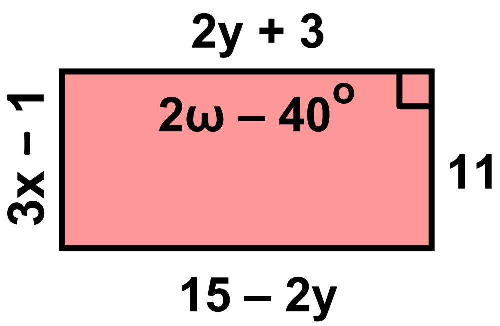
10 Δίνεται το παρακάτω τρίγωνο.



α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Ποιο είναι σ’ αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;

β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Ποιο είναι σ’ αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;
γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.

11 Δίνεται το ορθογώνιο του παρακάτω σχήματος. Να βρείτε τους αριθμούς x, y και ω (το ω παριστάνει μοίρες).



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά στα παρακάτω αριθμητικά σταυρόλεξα;

2	•		+	5	=	11
•		•		•		•
	•		+		=	22
+		+		+		+
	•	2	+	4	=	
=		=		=		=
13	•	17	+	39	=	

	·		+	-2	=	-11
·		·		·		·
-3	·		+		=	-7
+		+		+		+
	·	-3	+	-9	=	
=		=		=		=
-14	·	-6	+	-1	=	

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες.

Κατά την αρχαιότητα η έλλειψη κατάλληλου συμβολισμού είχε εμποδίσει τις λύσεις προβλημάτων με αποτέλεσμα αυτές να θεωρούνται πολύπλοκες και δύσκολες.

- ***Στον περίφημο αιγυπτιακό πάπυρο του Ρηντ (περίπου 1700 π.Χ. - Βρετανικό Μουσείο) περιγράφονται προβλήματα με ιερογλυφικά (διαβάζονται από δεξιά προς τα αριστερά).***

- ***Στην Αναγέννηση (15ος - 16ος αιώνας) οι συμβολισμοί απλοποιήθηκαν κατά κάποιον τρόπο:***

– Ο Γάλλος Nicolas Chuquet (1445 - 1500) έγραφε: «12^o p 5^1 ισούται με 20o», δηλαδή 12xo + 5x1 = 20xo ή πιο απλά 12 + 5x = 20.

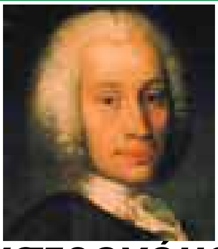
– Επίσης, ο Γάλλος Francois Viete (1540 - 1603) έγραφε: «12αq 5α aeq. 23».

– Ο Ιταλός Niccolo Fontana ή Tartaglia (1499 - 1557) έγραφε επίσης: «12 N p 5 R ισούται 20 N».

- ***Ο Γάλλος Rene Descartes (ή Καρτέσιος 1596 - 1650) στις αρχές του 17ου αιώνα έγραφε «12 + 5z B20». Την εποχή αυτή τα μαθηματικά καθώς και άλλα προβλήματα διατυπώνονται σχεδόν αποκλειστικά με μαθηματικά σύμβολα, γεγονός που συνετέλεσε στην αλματώδη πρόοδο της επιστήμης.***

1.3. Επίλυση τύπων

$x + ψ = ω \Rightarrow x = ω - ψ$
Αν όχι εγώ πάω για μπάλα



Ο Anders Celsius, γεννήθηκε το 1701 στην Ουψάλα της Σουηδίας. Οι παππούδες του ήταν και οι δύο καθηγητές: ο Magnus Celsius, μαθηματικός και ο Anders Spole, αστρονόμος. Ο πατέρας του Nils Celsius ήταν επίσης καθηγητής της Αστρονομίας. Ο Κέλσιος θεωρήθηκε ταλαντούχος στα Μαθηματικά και σε νεαρή ηλικία (29 ετών το 1730) διορίστηκε καθηγητής Αστρονομίας. Συμμετείχε το 1736 στη διάσημη αποστολή αστρονόμων στο Tornea στο βορειότερο μέρος της Σουηδίας ("Η αποστολή του Lapland"). Ο στόχος της αποστολής ήταν να επιβεβαιωθεί η πεποίθηση του Newton, ότι η μορφή της Γης είναι ελλειψοειδής που γίνεται επίπεδη στους πόλους, πράγμα που επιτεύχθηκε με αποτέλεσμα να γίνει ο Κέλσιος διάσημος. Για τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις του, κατασκεύασε τη γνωστή κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας, με 100 για το σημείο τήξης του νερού και 0 για το σημείο βρασμού του. Μετά το θάνατο του, που προήλθε από φυματίωση το 1744 (σε ηλικία μόλις 43 ετών), η κλίμακα αντιστράφηκε στη σημερινή της μορφή. Δηλαδή 0 για το σημείο τήξης του νερού και 100 για το σημείο βρασμού του.

Σε πολλές επιστήμες χρησιμοποιούμε ισότητες που συνδέουν μεταξύ τους μεγέθη. Για παράδειγμα:
Στη Φυσική ο όγκος V με τη μάζα η και την πυκνότητα ρ συνδέονται με τον τύπο m = ρ • V.
Στη Γεωμετρία ο όγκος V ενός παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο V = α • β • γ, όπου α, β, γ είναι οι τρεις διαστάσεις του.
Στις τραπεζικές συναλλαγές ο τόκος ενός δανείου δίνεται από τον τύπο $T = \dfrac{K \cdot E \cdot t}{100}$ **όπου Κ το κεφάλαιο, t ο χρόνος διάρκειας του δανείου και Ε το επιτόκιο της τράπεζας. Όταν έχουμε έναν τύπο στον οποίο γνωρίζουμε τις τιμές που παίρνουν όλες οι μεταβλητές του εκτός από μία, τότε μπορούμε να υπολογίσομε την τιμή της άγνωστης μεταβλητής. Αυτό γίνεται, αν επιλύσουμε τον τύπο ως προς την άγνωστη μεταβλητή.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στις Αγγλοσαξονικές χώρες (κυρίως στις ΗΠΑ) για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Φαρενάιτ Στον υπόλοιπο κόσμο όμως – όπως και στη χώρα μας – χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Κελσίου (^oC). Η σχέση που συνδέει τους ^oF και τους ^oC, είναι: **F = 1,8C + 32**

α) Ένας Αμερικανός που θέλει να ταξιδέψει στην Ελλά-δα πληροφορείται ότι, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία 20 ^oC. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε ^oF;
β) Ένας Έλληνας που θέλει να ταξιδέψει στη Νέα Υόρκη πληροφορείται ότι, εκεί έχει θερμοκρασία 41^oF. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε ^oC;

Λύση

α) Όταν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία σε ^{o}C, είναι εύκολο να βρούμε την αντίστοιχη θερμοκρασία σε ^{o}F, γιατί ο τύπος **F = 1,80 + 32** "λειτουργεί αμέσως" (είναι λυμένος, όπως λέμε, ως προς P).

– Για C = 20 είναι:

$F = 1{,}8 \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$

Άρα, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία 68 ^{o}F.

β) Όταν θέλουμε να μετατρέψουμε ^{o}F σε ^{o}C, τα πράγματα με τον τύπο $F = 1{,}8C + 32$ είναι λίγο πιο δύσκολα:

– Για $F = 41$ είναι $41 = 1{,}8C + 32$ και στη συνέχεια πρέπει να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς C:

$$41 - 32 = 1{,}8C$$
$$9 = 1{,}8C$$
$$\frac{9}{1{,}8} = \frac{1{,}8C}{1{,}8}$$
$$5 = C$$

Άρα, στη Νέα Υόρκη έχει θερμοκρασία 5 ^{o}C.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Να μετατρέψετε σε βαθμούς Κελσίου τις θερμοκρασίες τριών ακόμα Αμερικανικών πόλεων:

Βοστώνη: 23 ^{o}F *Βαλτιμόρη: 32 ^{o}F* *Λος Άντζελες: 59 ^{o}F*

Λύση

Θα πρέπει, βέβαια, να λύσουμε τρεις εξισώσεις όπως η παραπάνω! **Αντί να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία τρεις φορές, λύνουμε πρώτα τον τύπο $F = 1{,}8C + 32$ ως προς C:**

$$F - 32 = 1{,}8C \quad \text{ή} \quad \frac{F-32}{1{,}8} = \frac{1{,}8C}{1{,}8}$$

Άρα $C = \dfrac{F - 32}{1,8}$

Ο τύπος $C = \dfrac{F - 32}{1,8}$ είναι ίδιος (ισοδύναμος) με τον τύπο $F = 1,8C + 32$, μόνο που «είναι λυμένος» ως προς C.

Επομένως:

– για F = 23 είναι $C = \dfrac{23 - 32}{1,8} = \dfrac{-9}{1,8} = -5$

– για F = 32 είναι $C = \dfrac{32 - 32}{1,8} = \dfrac{0}{1,8} = 0$

– για F = 59 είναι $C = \dfrac{59 - 32}{1,8} = \dfrac{27}{1,8} = 15$

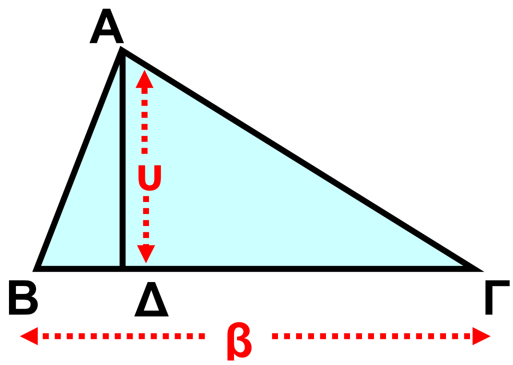
Διαπιστώσαμε ότι, αν έχουμε μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές, μπορούμε (χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που μάθαμε στις εξισώσεις) να λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς μία μεταβλητή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση β και ύψος υ, γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο $E = \dfrac{1}{2}\beta\upsilon$. *Να λύσετε τον τύπο αυτόν ως προς β και ως προς υ. Στη συνέχεια να βρείτε:*

α) Το ύψος ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 12 cm^2 και βάση 4 cm.

β) Τη βάση ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 35 cm^2 και ύψος 7 cm.



Λύση: Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών: $2E = 2\frac{1}{2}\beta\upsilon$.

Άρα: $2E = \beta\upsilon$.

Για να λύσουμε ως προς β, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το υ, οπότε: $\beta = \frac{2E}{\upsilon}$.

Για να λύσουμε ως προς υ, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το β, οπότε: $\upsilon = \frac{2E}{\beta}$.

α) Από τον τύπο $\upsilon = \frac{2E}{\beta}$ για $E = 12$ και $\beta = 4$ έχουμε:

$$\upsilon = \frac{2E}{\beta} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6 \text{ (cm)}.$$

β) Από τον τύπο $\beta = \frac{2E}{\upsilon}$ για $E = 35$ και $\upsilon = 7$ έχουμε:

$$\beta = \frac{2E}{\upsilon} = \frac{2 \cdot 35}{7} = \frac{70}{7} = 10 \text{(cm)}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Η σχέση $3\alpha = \beta\gamma$, αν λυθεί ως προς α, γίνεται:

Α	Β	Γ	Δ
$\alpha = \beta\gamma - 3$	$\alpha = 3\beta\gamma$	$\alpha = \frac{\beta\gamma}{3}$	4x

2.	Η σχέση **α = β + γδ**, αν λυθεί ως προς β, γίνεται:		
Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
$\beta = \gamma\delta - \alpha$	$\beta = \alpha - \gamma\delta$	$\beta = \dfrac{\alpha}{\gamma\delta}$	$\beta = \dfrac{\gamma\delta}{\alpha}$

3.	Η σχέση **α = β + γδ**, αν λυθεί ως προς γ, γίνεται:		
Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
$\gamma = \alpha - \beta - \delta$	$\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta} - \delta$	$\gamma = \dfrac{\alpha - \beta}{\delta}$	$\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\delta}$

4.	Η σχέση $\alpha = \beta\left(1 + \dfrac{\gamma}{\delta}\right)$, αν λυθεί ως προς γ, γίνεται:		
Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
$\gamma = \dfrac{(\alpha - \beta)\delta}{\beta}$	$\gamma = (\alpha - \beta)\delta$	$\gamma = \dfrac{\alpha\delta}{\beta}$	$\gamma = (\alpha - \beta - 1)\delta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να επιλύσετε τους παρακάτω τύπους των Μαθηματικών και της Φυσικής ως προς τη μεταβλητή που ζητείται:

1 Μήκος κύκλου: $L = 2\pi\rho$, ως προς ρ.

2 Περίμετρος ορθογωνίου: $P = 2x + 2y$, ως προς y.

3 Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου: $E = 2\pi\rho\upsilon$, ως προς ρ.

4 Εξίσωση ευθείας: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, ως προς γ, με $\beta \neq 0$

5 Εμβαδόν παραλληλεπιπέδου: $E = 2(xy + y\omega + \omega x)$ ως προς ω.

6 Ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: $υ = \frac{S}{t}$ ως προς t.

7 Εμβαδόν τραπεζίου: $Ε = \left(\frac{β + Β}{2}\right)υ$ ως προς β.

8 $S = \frac{α}{1 - λ}$, ως προς λ.

9 $P = P_0 + εh$, ως προς h.

10 $Q = mcθ$, ως προς c

11 $F = k_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, ως προς q_1.

12 $S = υ_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, ως προς $υ_0$.

13 Για ένα ιδεώδες αέριο σε κανονική πίεση, ο όγκος του σε θερμοκρασία θ ^oC δίνεται από τον τύπο:

$$V = V_0\left(1 + \frac{θ}{273{,}15}\right)$$

όπου V_0 ο όγκος στους 0^oC

α) Να λύσετε τον τύπο αυτό ως προς θ.

β) Στους 0 ^oC ένα ιδεώδες αέριο έχει όγκο $V_0 = 25\ cm^3$. Σε ποια θερμοκρασία έχει όγκο 30 cm^3;

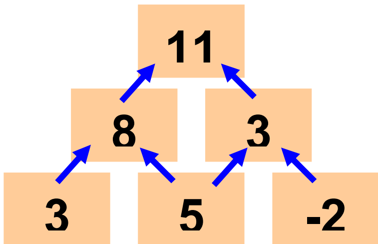
14 Εμπειρικές μελέτες για τη χιονόπτωση στη Βρετανία κατέληξαν στο εξής συμπέρασμα: ο αριθμός D των ημερών ενός έτους στη διάρκεια των οποίων πέφτει χιόνι, δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο: $D = 0{,}155 \cdot h + 11$, όπου h είναι το υψόμετρο ενός τόπου σε μέτρα.

α) Σύμφωνα με αυτότον τύπο, πόσες ημέρες έναν τόπο που είναι παραθαλάσσιος (h = 0);

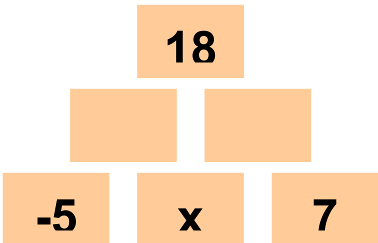
β) Σε ποιο υψόμετρο χιονίζει 6 μήνες το χρόνο (180 ημέρες) και σε ποιο υψόμετρο χιονίζει κάθε ημέρα;

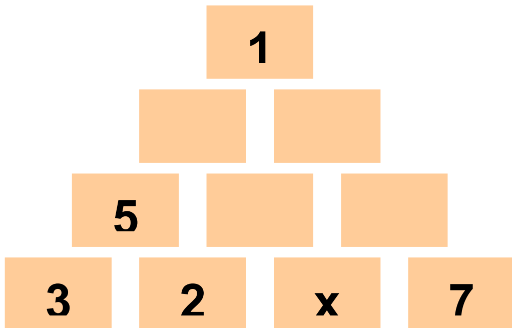
ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

Στην παρακάτω πυραμίδα κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται ακριβώς από κάτω του, όπως φαίνεται στο παράδειγμα.

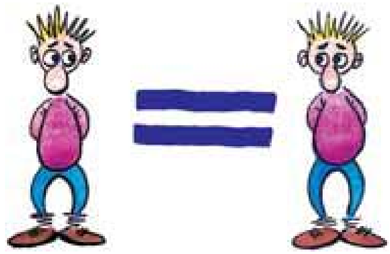


Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό x στις παρακάτω πυραμίδες;





1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων



Με πρακτική αριθμητική

Από τις 22 εύστοχες βολές οι 8 ήταν του 1 πόντου. Επομένως, οι υπόλοιπες 14 ήταν των 2 ή των 3 πόντων. Αν και οι 14 αυτές βολές ήταν των 2 πόντων, τότε ο Γκάλης θα είχε πετύχει εκείνο το βράδυ
$8 \cdot 1 + 14 \cdot 2 = 8 + 28 = 36$ πόντους αντί για 40 που πέτυχε στην πραγματικότητα. Αφού πέτυχε
$40 – 36 = 4$ επιπλέον πόντους, η διαφορά αυτή οφείλεται στα τρίποντα. Δηλαδή, πέτυχε 4 τρίποντα και
$14 – 4 = 10$ δίποντα

Στην καθημερινή ζωή παρουσιάζονται πολλές φορές προβλήματα με αριθμούς, που η επίλυσή τους είναι πολύ συχνά επίπονη και πολύπλοκη. Στην παράγραφο αυτή, θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε μεταβλητές και εξισώσεις, για να απλοποιούμε τη λύση τέτοιων προβλημάτων.
Έχουμε μάθει σε προηγούμενες τάξεις να λύνουμε μερικά από τα προβλήματα αυτά με τη βοήθεια της πρακτικής Αριθμητικής.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στον αστερισμό της Δόξας!

Στις 14 Ιουνίου 1987 η εθνική μας ομάδα μπάσκετ κατέκτησε το Πανευρωπαϊκό Πρωτάθλημα νικώντας στο

στάδιο Ειρήνης και Φιλίας, στον τελικό, την πανίσχυρη ομάδα της τότε Σοβιετικής Ένωσης με 103-101. Πρωταγωνιστής και σούπερ - σταρ τής βραδιάς ήταν ο Νίκος Γκάλης που πέτυχε 40 πόντους. Ο Γκάλης είχε σε εκείνο τον αγώνα 22 εύστοχες βολές, από τις οποίες οι 8 ήταν βολές του 1 πόντου και οι υπόλοιπες 14 ήταν βολές των 2 ή των 3 πόντων.
Πόσα τρίποντα πέτυχε εκείνο το βράδυ ο Γκάλης;

Λύση

Έχουμε τα εξής δεδομένα για τον Γκάλη:

- **Πέτυχε συνολικά 40 πόντους.**
- **Είχε 22 εύστοχες βολές από τις οποίες:**

– 8 του 1 πόντου,
– άγνωστος αριθμός βολών των 2 πόντων,
– άγνωστος αριθμός βολών των 3 πόντων.
Το πρόβλημα ζητά να προσδιορίσουμε τον αριθμό των βολών των 3 πόντων που πέτυχε ο Γκάλης.

Έστω ότι είχε x επιτυχίες των 3 πόντων και 14 – x επιτυχίες των 2 πόντων. Αφού πέτυχε συνολικά 40 πόντους, έχουμε την εξίσωση:

$$8 \cdot 1 + (14 - x) \cdot 2 + x \cdot 3 = 40$$
$$8 + 28 - 2x + 3x = 40$$
$$-2x + 3x = 40 - 8 - 28$$
$$x = 4$$

Άρα, ο Γκάλης εκείνο το βράδυ πέτυχε 4 τρίποντα (και φυσικά 14 – 4 = 10 δίποντα).
Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα:
8 · 1 + 10 · 2 + 4 · 3 = 40.
Από την παραπάνω δραστηριότητα συμπεραίνουμε ότι, η λύση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων περιλαμβάνει τα επόμενα γενικά βήματα:

➤ **Διαβάζουμε** καλά το πρόβλημα και **διακρίνουμε** τα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα.**

➤ **Χρησιμοποιούμε** ένα γράμμα (**συνήθως το χ**) για να εκφράσουμε τον **άγνωστο αριθμό** που πρέπει να προσδιορίσουμε.

➤ Εκφράζουμε **όλα τα άλλα μεγέθη** του προβλήματος **με τη βοήθεια του x.**

➤ **Γράφουμε την εξίσωση** του προβλήματος **χρησιμοποιώντας τα δεδομένα** της εκφώνησης.

➤ **Λύνουμε** την εξίσωση.

➤ **Ελέγχουμε** αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον αριθμό που το διπλάσιο του, αν το ελαττώσσουμε κατά 8, δίνει τον αριθμό αυξημένο κατά 9.

Λύση:

Ονομάζουμε τον άγνωστο αριθμό x. Το διπλάσιο είναι 2x. Αν το ελαττώσουμε κατά 8, είναι 2x – 8. Ο αριθμός αυξημένος κατά 9 είναι x + 9.
Συνδέουμε τα παραπάνω σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και προκύπτει η εξίσωση:

$2x - 8 = x + 9$ ή $2x - x = 9 + 8$ ή $x = 17$

δηλαδή, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 17.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες;

Λύση:

Έστω, ότι και οι δύο μαζί γεμίζουν την δεξαμενή σε x λεπτά. Αφού η πρώτη γεμίζει σε 10 λεπτά, σε ένα λεπτό θα γεμίζει το $\frac{1}{10}$ και σε x λεπτά τα $\frac{x}{10}$ της δεξαμενής.

Ομοίως, η δεύτερη βρύση σε x λεπτά θα γεμίσει τα $\frac{x}{15}$ της δεξαμενής. Αφού και οι δύο μαζί θα γεμίσουν τη δεξαμενή, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1$$

$$30\frac{x}{10} + 30\frac{x}{15} = 30 \cdot 1$$

$$3x + 2x = 30$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Επομένως, και οι δύο βρύσες γεμίζουν την δεξαμενή σε 6 λεπτά.

Με πρακτική Αριθμητική:

Η πρώτη βρύση σε ένα λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{10}$ της δεξαμενής και η δεύτερη το $\frac{1}{15}$.

Επομένως, και οι δύο μαζί γεμίζουν σε 1 λεπτό το

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

της δεξαμενής. Αφού σε 1 λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{6}$ της δεξαμενής, θα χρειαστούν 6 λεπτά για να την γεμίσουν ολόκληρη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Η ανιψιά μου η Μαρίζα

Η ανιψιά μου η Μαρίζα έγραψε 16 και 18 σε Δύο Διαγωνίσματα Μαθηματικών.
α) Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 18 και στα τρία διαγωνίσματα;
β) Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19;

Λύση:

Έστω x ο βαθμός που θα πάρει η Μαρίζα στο τρίτο διαγώνισμα. Ο μέσος όρος των τριών διαγωνισμάτων προκύπτει, αν διαιρέσουμε το άθροισμά τους δια 3, δηλαδή:

$$\frac{16 + 18 + x}{3}$$

α) Για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει:

$$\frac{16 + 18 + x}{3} = 18$$

$$3 \cdot \frac{16 + 18 + x}{3} = 3 \cdot 18$$

$$34 + x = 54$$

$$x = 54 - 34$$

$$x = 20$$

Άρα, για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει να γράψει 20 στο τρίτο διαγώνισμα. Ο αριθμός αυτός επαληθεύει το πρόβλημα, γιατί $\frac{16 + 18 + 20}{3} = 18$

β) Για να βγάλει μέσο όρο 19, πρέπει $\frac{16 + 18 + x}{3} = 19$

άρα 34 + x = 57 ή x = 23

Φυσικά, επειδή δεν είναι δυνατόν να γράψει βαθμό 23 λέμε ότι, παρόλο που η εξίσωση λύθηκε, η λύση της

<u>απορρίπτεται</u>. Δηλαδή, είναι αδύνατον η Μαρίζα να βγάλει μέσο όρο 19.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Τρια αδέλφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη και ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη.
Να βρεθεί το αρχικό χρηματικό ποσό και το μερίδιο του καθενός.

Λύση:

Έστω x το αρχικό ποσό.

- **Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{5}x + 12$**

- **Ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{4}x + 8$**

- **Ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{3}x + 6$**

Το άθροισμα των τριών αυτών ποσών είναι το αρχικό ποσό x που μοιράστηκαν. Έτσι, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{5}x + 12 + \frac{1}{4}x + 8 + \frac{1}{3}x + 6 = x$$

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 26 = x$$

$$60\frac{x}{5} + 60\frac{x}{4} + 60\frac{x}{3} + 60 \cdot 26 = 60x$$

$$12x + 15x + 20x + 1560 = 60x$$
$$12x + 15x + 20x - 60x = -1560$$
$$-13x = -1560$$
$$x = \frac{-1560}{-13}$$
$$x = 120$$

Άρα, το αρχικό ποσό ήταν 120 €.

Ο μικρότερος πήρε $\frac{1}{5} \cdot 120 + 12 = 24 + 12 = 36$ €,

ο μεσαίος πήρε $\frac{1}{4} \cdot 120 + 8 = 30 + 8 = 38$ € και

ο μεγαλύτερος πήρε $\frac{1}{3} \cdot 120 + 6 = 40 + 6 = 46$ €.

Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα, αφού 36 + 38 + 46 = 120.

Με πρακτική Αριθμητική:

Το $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ του συνολικού ποσού είναι τα $\frac{12}{60} + \frac{15}{60} + \frac{20}{60} = \frac{47}{60}$ του ποσού αυτού. Άρα το υπόλοιπο $\frac{13}{60}$ του ποσού είναι το άθροισμα 12 + 8 + 6 = 26 €. Αφού τα $\frac{13}{60}$ του ποσού είναι 26, το $\frac{1}{60}$ του ποσού αυτού θα είναι 26 : 13 = 2 € και τα $\frac{60}{60}$ θα είναι $60 \cdot 2 = 120$ €.

Επομένως, το ζητούμενο ποσό είναι 120 €.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4 είναι ίσο με το 32. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

Α	$2x - 4 = 32$	Β	$2x + 32 = 4$
Γ	$4x - 2 = 32$	Δ	$2x + 4 = 32$

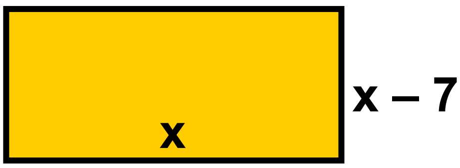
2. Ο Κώστας έχει 38 € και ο Γιάννης 14 €. Αγόρασαν από ένα σουβλάκι ο καθένας, οπότε τα χρήματα που έχει τώρα ο Κώστας είναι τριπλάσια από τα χρήματα που έχει ο Γιάννης. Πόσο κοστίζει κάθε σουβλάκι; Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

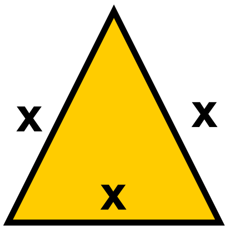
Α	$38 + x = 3x + 14$	Β	$38 - x = 3(14 - x)$
Γ	$14 - x = 3(38 - x)$	Δ	$38 = 3 \cdot 14 + x$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αν η μία είναι διπλάσια της άλλης.

2 Στα παρακάτω σχήματα το ορθογώνιο και το τρίγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.





3 Ένας πατέρας είναι 44 ετών και ο γιος του είναι 8 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου;

4 Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

5 Το ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου περιέχει διπλάσια ποσότητα βενζίνης από το ρεζερβουάρ ενός άλλου αυτοκινήτου. Αν το πρώτο αυτοκίνητο καταναλώσει 34 λίτρα και το δεύτερο 7 λίτρα, θα μείνει ίδια ποσότητα βενζίνης στα δύο αυτοκίνητα. Πόσα λίτρα βενζίνης περιέχει κάθε αυτοκίνητο;

6 Δώδεκα μικρά λεωφορεία των 8 και 14 ατόμων μεταφέρουν συνολικά 126 επιβάτες. Πόσα λεωφορεία είναι των 8 και πόσα των 14 ατόμων;

7 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι 8 m και 12 m. Για να διπλασιάσουμε το εμβαδόν του, αυξάνουμε τη μεγαλύτερη διάσταση κατά 4 m. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε τη μικρότερη διάσταση;

8 Ο Πέτρος και ο Σάκης αμείβονται για την εργασία τους με την ώρα. Ο Πέτρος κερδίζει 2 € την ώρα περισσότερα από τον Σάκη. Όταν ο Πέτρος εργάζεται 7 ώρες και ο Σάκης 5 ώρες, ο Σάκης κερδίζει 26 € λιγότερα από τον Πέτρο. Να βρεθεί το ωρομίσθιο του καθενός.

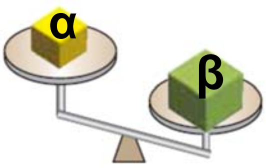
9 Όλα μου τα στιλό εκτός από 3 είναι μπλε, όλα μου τα στιλό εκτός από 4 είναι κόκκινα, όλα μου τα στιλό εκτός από 5 είναι μαύρα. Πόσα στιλό έχω;

10 Το τρίαθλο είναι ένα αγώνισμα που περιλαμβάνει έναν αγώνα κολύμβησης, έναν αγώνα ποδηλασίας και έναν αγώνα δρόμου. Η συνολική απόσταση που διανύει

ένας αθλητής και στα τρία αγωνίσματα είναι 51,5 Km. Ο αγώνας δρόμου γίνεται σε μία απόσταση

που είναι κατά 8,5 Km μεγαλύτερη από την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας κολύμβησης. Ο αγώνας της ποδηλασίας γίνεται σε τετραπλάσια απόσταση απ' αυτήν του αγώνα δρόμου.
α) Υποθέτοντας ότι το ευθύγραμμο τμήμα x παριστάνει την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας δρόμου, να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε το σχήμα με τις πληροφορίες της εκφώνησης.
β) Ποια απόσταση διανύει ένας αθλητής σε κάθε αγώνισμα;

1.5. Ανισώσεις α΄ βαθμού



α < β

Ανισώσεις

Όπως γνωρίζουμε, η σχέση που συνδέει τα βάρη μιας ζυγαριάς που δεν ισορροπεί, είναι μία **σχέση ανισότητας**. Για παράδειγμα, για τα βάρη α και β του παραπάνω σχήματος έχουμε την ανισότητα: **α < β** ή ισοδύναμα, την ανισότητα **β > α**.

Μερικές φορές, επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο «≤» ή το σύμβολο «≥». Γράφουμε: **α ≤ β**, όταν είναι α = β ή α < β και διαβάζουμε: «**το α είναι μικρότερο ή ίσο του β**».

Παρατήρηση:

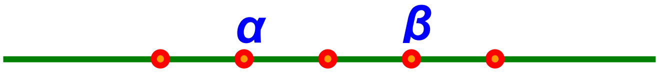
Αν ένας αριθμός α είναι μικρότερος από τον αριθμό β, τότε ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών. Η ίδια ανίσωση βέβαια μπορεί να γραφεί και β > α, γιατί ο β βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον α.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται οι αριθμοί α και β του παρακάτω σχήματος. Να συμπλη-ρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.

α) α…….β ***β) α + 2……..β + 2***

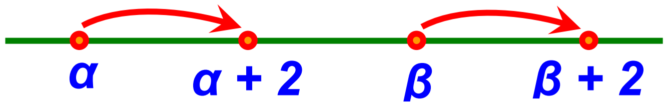
γ) α + 12…..β + 12 ***δ) α – 7……..β – 7***



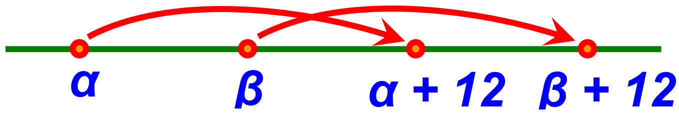
Λύση

α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών, οπότε α < β.

β) Ο α + 2 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β + 2, οπότε α + 2 < β + 2.



γ) Ο α + 12 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β + 12, οπότε α + 12 < β + 12



δ) Ο α – 7 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β – 7, οπότε α – 7 < β – 7.

Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση, ισχύει:

Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης **προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά.
Δηλαδή:
Αν **α < β** τότε **α + γ < β + γ** και **α – γ < β – γ.**
Αν **α > β** τότε **α + γ > β + γ** και **α – γ > β – γ.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

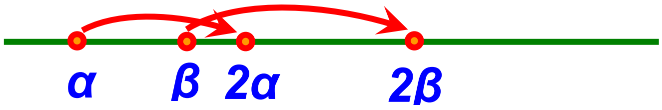
Δίνονται οι αριθμοί α και β του παρακάτω σχήματος. Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.

α) α.....β   β) 2α.....2β   γ) 5α.....5β

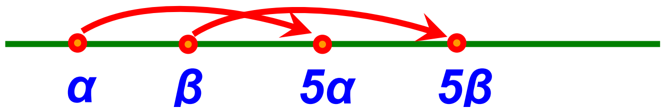
Λύση

α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β, οπότε α < β.

β) Ο 2α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον 2β, οπότε 2α < 2β.



γ) Ο 5α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον 5β, οπότε 5α < 5β.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

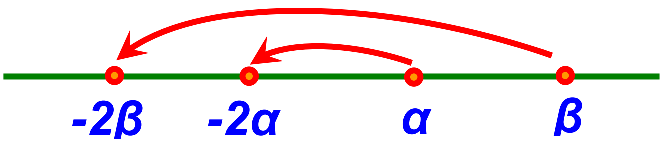
Δίνονται οι αριθμοί α και β του παρακάτω σχήματος. Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<<», «<>», «<=» στη θέση των κενών.

α) α........β β) -2α.....-2β γ) -5α.....-5β

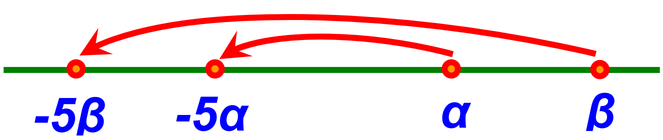
Λύση

α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β, οπότε α < β.

β) Ο -2α βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον -2β, οπότε -2α > -2β.



γ) Ο -5α βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον -5β, οπότε -5α > -5β.



Γενικά, ισχύει για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση:

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την **ίδια φορά**. Δηλαδή:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την **αντίστροφη φορά**. Δηλαδή:

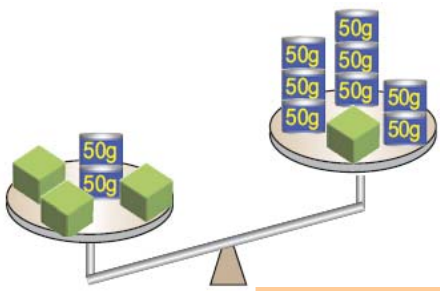
Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Επίλυση ανισώσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η ζυγαριά δεν ισορροπεί! Αν ονομάσουμε x το βάρος κάθε πράσινου κύβου (τα μπλε βαρίδια ζυγίζουν 50 γραμμάρια το καθένα):
α) Με τη βοήθεια του x να εκφράσετε με μια σχέση ανισότητας το γεγονός ότι η ζυγαριά δεν ισορροπεί.
β) Τι μπορούμε να πούμε για το βάρος x κάθε πράσινου κύβου;



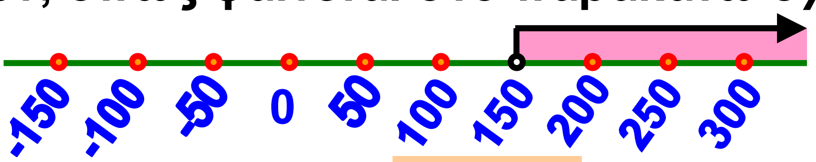
Λύση

α) Στον 1ο δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν 3 πράσινοι κύβοι και δύο βαρίδια των 50 γραμμαρίων, δηλαδή συνολικό βάρος $3x + 2 \cdot 50 = 3x + 100$ γραμμάρια. Στον 2ο δίσκο υπάρχει 1 πράσινος κύβος και 8 βαρίδια των 50 γραμμαρίων δηλαδή, συνολικό βάρος $x + 8 \cdot 50 =$ $= x + 400$ γραμμάρια. Ο 1ος δίσκος είναι πιο βαρύς, οπότε ισχύει: $3x + 100 > x + 400$.

β) Η ανίσωση αυτή μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για το βάρος x, αν τη λύσουμε με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων.

ΑΝΙΣΩΣΗ $3x + 100 > x + 400$	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΛΥΣΗΣ
$3x - x > 400 - 100$	Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
$2x > 300$	Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων
$\frac{2x}{2} > \frac{300}{2}$	Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου
$x > 150$	Απλοποιούμε τα κλάσματα

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, από την ανίσωση που βρήκαμε ($x > 150$) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πόσο ακριβώς ζυγίζει κάθε πράσινος κύβος, συμπεραίνουμε όμως ότι το βάρος του είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερο από 150 γραμμάρια. Μπορεί να είναι 150,1 γραμμάρια, μπορεί να είναι 200 γραμμάρια ή μπορεί να είναι 1.000 κιλά! Δηλαδή, όταν λύνουμε μία ανίσωση, συνήθως δε βρίσκουμε μία μόνο λύση, αλλά άπειρες! Γι' αυτό παριστάνουμε αυτές τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το λευκό κυκλάκι πάνω ακριβώς από το 150 δείχνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.

Μια ανίσωση που περιέχει μία μεταβλητή και η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής, λέγεται ανίσωση με έναν άγνωστο.

Ο τρόπος που ακολουθούμε για να λύσουμε μια ανίσωση, είναι παρόμοιος με τον τρόπο που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων. Δηλαδή:

- **Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.**
- **Κάνουμε αναγωγές ομοίων ορων.**
- **Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. Αν ο συντελεστής είναι θετικός η ανισότητα δεν αλλάζει φορά, ενώ αν είναι αρνητικός πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λύσετε την ανίσωση $2(x-1)-3(x+1) \leq 4(x+2)+12$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2x-2-3x-3 \leq 4x+8+12$$

$$\Uparrow$$

Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$2x-3x-4x \leq 8+12+2+3$$

$$\Uparrow$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$-5x \leq 25$$

$$\Uparrow$$

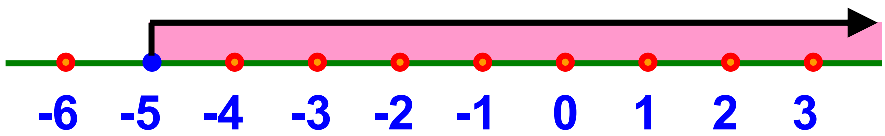
Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{25}{-5}$$

Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. Προσοχή όμως. Διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό γι' αυτό αλλάξαμε φορά στην ανίσωση.

$$x \geq -5$$

Στη συνέχεια, παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η μπλε τελεία ακριβώς πάνω στο -5 σημαίνει ότι και ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{5-x}{4} + \frac{x+2}{8} \geq x$

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$8\frac{5-x}{4} + 8\frac{x+2}{8} \geq 8x$$

$$2(5-x) + x + 2 \geq 8x$$

$$10 - 2x + x + 2 \geq 8x$$

$$-2x + x - 8x \geq -10 - 2$$

$$-9x \geq -12$$

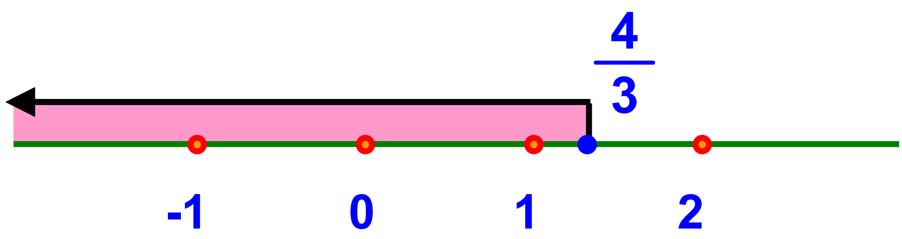
$$\frac{-9x}{-9} \leq \frac{-12}{-9}$$

⇧

Διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό, γι' αυτό αλλάξαμε φορά στην ανίσωση

$$x \geq \frac{4}{3}$$

Στη συνέχεια παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών:



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

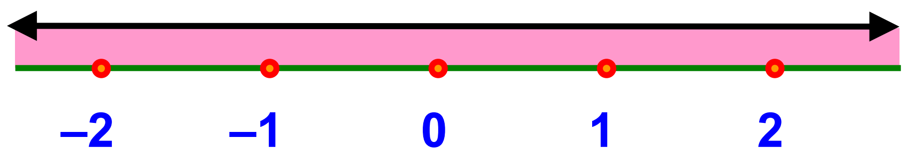
Να λύσετε την ανίσωση
$2(x – 1) – 3(x + 2) < 4(x + 1) – 5(x – 2)$.
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2x - 2 - 3x - 6 < 4x + 4 - 5x + 10$$
$$2x - 3x - 4x + 5x < 4 + 10 + 2 + 6$$
$$0x < 22$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του αριθμού x. Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών θα είναι όλη η ευθεία.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να λύσετε την ανίσωση $x + 2 + 2(x - 3) > 3x + 4$
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$x + 2 + 2x - 6 > 3x + 4$$
$$x + 2x - 3x > 4 - 2 + 6$$
$$0x > 8$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή **δεν αληθεύει** για **καμιά** τιμή του αριθμού x. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ανίσωση είναι **αδύνατη**.
Στην παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών δε θα σημειώσουμε τίποτα, γιατί κανένας αριθμός δεν είναι λύση αυτής της ανίσωσης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

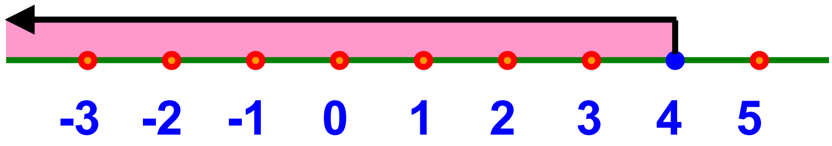
Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
$3x - 5 \leq x + 3$ και $4 < 14 + 5x$.
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση:

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

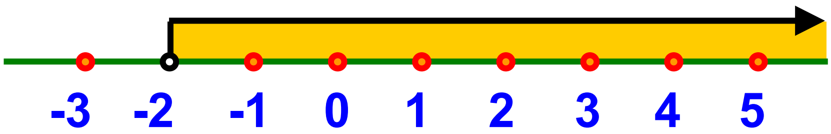
$$3x - 5 \leq x + 3$$
$$3x - x \leq 3 + 5$$
$$2x \leq 8$$
$$\frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2}$$
$$x \leq 4$$

Η παράσταση των λύσεων της πρώτης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:

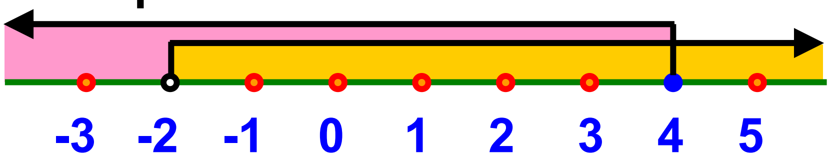


$$4 < 14 + 5x$$
$$4 - 14 < 5x$$
$$-10 < 5x$$
$$\frac{-10}{5} < \frac{5x}{5}$$
$$-2 < x$$

Η παράσταση των λύσεων της δεύτερης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:



Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.



Όπως βλέπουμε από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα στο -2 και στο 4. Άρα, είναι οι αριθμοί χ για τους οποίους ισχύει: $-2 < x \leq 4$.

Παρατήρηση: *Η σχέση **$-2 < x \leq 4$** είναι μια **διπλή ανίσωση**, γιατί ισχύουν συγχρόνως **και η $x > -2$ και η $x \leq 4$.***

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+1}{3} \leq 2 \leq \dfrac{3-x}{2}$

Λύση:

Η ανίσωση $\dfrac{x+1}{3} \leq 2 \leq \dfrac{3-x}{2}$ χωρίζεται σε δύο ανισώσεις, οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα ή όπως λέμε, να συναληθεύουν:

$$\frac{x+1}{3} \le 2 \quad \text{και} \quad 2 \le \frac{3-x}{2}$$

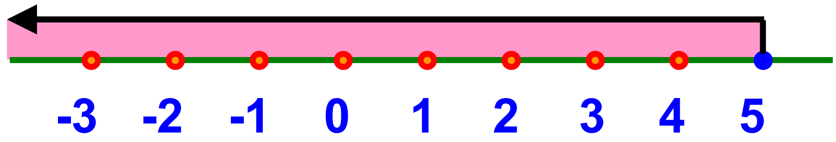
Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x+1}{3} \le 2$$

$$3 \cdot \frac{x+1}{3} \le 3 \cdot 2$$

$$x + 1 \le 6$$
$$x \le 6 - 1$$
$$x \le 5$$

Η παράσταση των λύσεων της πρώτης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:

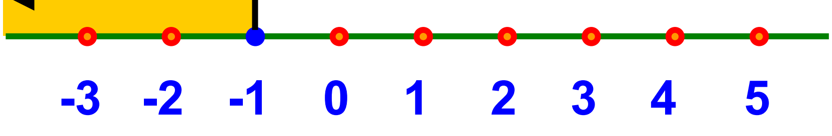


$$2 \le \frac{3-x}{2}$$

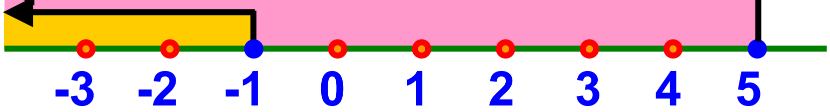
$$2 \cdot 2 \le 2 \cdot \frac{3-x}{2}$$

$$4 \le 3 - x$$
$$x \le 3 - 4$$
$$x \le -1$$

Η παράσταση των λύσεων της δεύτερης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:



Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.



Όπως βλέπουμε από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται από το -1 και αριστερά. Άρα, είναι οι αριθμοί χ για τους οποίους ισχύει: $x \leq -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) Αν $x < 3$, τότε $x + 3$......................
β) Αν $x < -3$, τότε $\frac{x}{2}$ ....
γ) Αν $x > 5$, τότε $x - 3$......................
δ) Αν $x \leq 6$, τότε $\frac{x}{-3}$ ....
ε) Αν $x \geq -2$, τότε $2x$ ....
στ) Αν $x < 4$, τότε $\frac{3x}{2}$......................
ζ) Αν $x < 7$, τότε $-3x$......................
η) Αν $x \leq -\frac{1}{2}$, τότε $-4x$......................

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

		Σ	Λ
α)	Αν α < β τότε α – 16 < β – 16.		
β)	Αν α < β τότε -α < -β.		
γ)	Αν α < 0 τότε 2α < α.		
δ)	Αν α > 1 τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$.		
ε)	Αν α < 5 τότε α < 8.		
στ)	Η ανίσωση 3x – 5 > 7 έχει λύση τον αριθμό x = 4.		
ζ)	Η ανίσωση x + 500 > x + 499 αληθεύει για κάθε αριθμό x.		
η)	Η ανίσωση x + 500 > x + 501 αληθεύει για κάθε αριθμό x.		
θ)	Η ανίσωση 2x – 3 < 3x – 2 έχει λύσεις τους αριθμούς x < 1.		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $8x + 4 \leq 16 + 5x$

β) $x + 3 > -2$

γ) $-(1 - x) > 2x - 1$

δ) $-7x + 3 \leq 4 - x$

2 Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $3(\omega - 1) > \omega - 2$

β) $2x + 2 - (x - 2) \geq 4 - x$

γ) $3y - 1 - (y + 2) < 2(y + 2) + 1$

δ) $4(t + 5) < t - 4$

3 Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $\frac{3x-4}{4} - \frac{2-x}{3} > 1$

β) $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) > \frac{x}{2}$

γ) $x + 3 + \frac{x+2}{2} - \frac{x+1}{3} > 0$

δ) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3}\right) - \frac{x+7}{6} > 2$

ε) $\omega - \frac{\omega-2}{2} < \frac{\omega-1}{2} - \frac{\omega-3}{4}$

στ) $t + \frac{t+1}{4} > \frac{2t-1}{7} + \frac{27t}{28}$

4 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $x - 4 < 1$ και $2 - x < 3$

β) $2(x + 1) + x > 6 - 2x$ και $7x - 8 > 3(x + 3) + 7$

γ) $3x - 1 > 2(1 - x) + 7$ και $3(1 - x) \geq 6$

δ) $3y - 15 > \frac{2}{5}(y+2)$ και $\frac{2}{3}y - \frac{5}{21} < y - 5$

ε) $2x - 1 < 7$ και $3(x - 1) > -6$ και $x \geq 3(x - 2)$

στ) $\frac{3x-1}{2} > \frac{2x+1}{3}$ και $2(3x - 1) + x > -2(x + 5) - 1$

και $3 + x < 2(x - 3)$

5 Να λύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:

α) $-7 < 2x + 1 \leq 19$ β) $-1 < 1 - 2x < 3$ γ) $3 \leq 5x + 1 \leq 8$

6 Για ποιες τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού μ, έχουμε ότι ο $A = 2(\mu - 3) - 4$ είναι αρνητικός;

7 Για ποιες τιμές του αριθμού α, η ανίσωση $2x - 3\alpha + 1 > \alpha(x - 1)$ έχει λύση τον αριθμό $x = 2$;

8 Η Άννα είχε τριπλάσια χρήματα από τη Μαρία, αλλά δαπάνησε 14 € και τώρα έχει λιγότερα από τη Μαρία. Να αποδείξετε ότι η Μαρία έχει λιγότερα από 7 €.

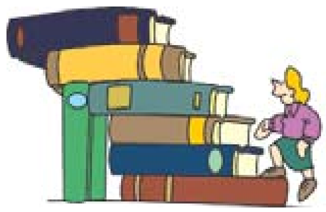
9 Ο Γιώργος έχει γράψει δύο διαγωνίσματα με βαθμούς 12 και 14. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο επόμενο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο πάνω από 14;

10 Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας «Parla-net» προτείνει στους πελάτες της δύο «πακέτα» συνδρομής:

1ο: πάγιο 7,50 € το μήνα και χρέωση 0,254 € το λεπτό.
2ο: πάγιο 15 € το μήνα και χρέωση 0,204 € το λεπτό. Από πόσο χρόνο ομιλίας και πάνω συμφέρει το 2ο πακέτο;

11 Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 80 m, περίμετρο μικρότερη από 240 m και εμβαδόν μεγαλύτερο από 3000 m^2. Πόσα μέτρα μπορεί να είναι το πλάτος του;

Επανάληψη Κεφαλαίου 1



Εξισώσεις – Ανισώσεις

✐ **Επιμεριστική ιδιότητα:**

► $(α + β) \cdot γ = α \cdot γ + β \cdot γ$

► $α \cdot γ + β \cdot γ = (α + β) \cdot γ$

✐ Αν προσθέσουμε, αφαιρέσουμε, πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα. Δηλαδή:

Αν $α = β$, τότε:

$$α + γ = β + γ$$
$$α - γ = β - γ$$
$$α \cdot γ = β \cdot γ \text{ και}$$
$$\frac{α}{γ} = \frac{β}{γ}, \text{ με } γ \neq 0$$

✐ Σε μια εξίσωση ή ανίσωση μπορούμε να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.

✐ Για να λύσουμε μία εξίσωση, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

► Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.
► Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
► Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
► Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.

✐ Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξίσωσης, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

► Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και διακρίνουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.

► Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.
► Εκφράζουμε όλα τα άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.
► Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.
►Λύνουμε την εξίσωση.
► Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

✐ **Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:**

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$.

✐ **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:**

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma > 0$.

✐ **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανίσωση με την αντίστροφη φορά. Δηλαδή:**

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma < 0$.

✐ **Για να λύσουμε μια ανίσωση, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της επίλυσης εξισώσεων,αλλά πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης, όταν διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό.**

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Πραγματικοί αριθμοί

Εισαγωγικο Σημειωμα

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού.

2.2 Άρρητοι αριθμοί. Πραγματικοί αριθμοί

2.3 Προβλήματα

Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει φυσικούς, ακέραιους και ρητούς αριθμούς. Στους τελευταίους είχαμε εξετάσει τη δεκαδική τους παράσταση, η οποία ήταν γνωστή σε απλή ή περιοδική μορφή. Υπάρχει όμως και ένα σύνολο αριθμών, οι άρρητοι, τους οποίους εξετάζουμε στο κεφάλαιο αυτό. Οι άρρητοι μαζί με τους ρητούς σχηματίζουν τους πραγματικούς αριθμούς, οι οποίοι τοποθετούνται με πλήρη τρόπο πάνω σε μια ευθεία που την ονομάζουμε ευθεία των πραγματικών αριθμών. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την εφαρμογή προσεγγίσεων των άρρητων στην επίλυση προβλημάτων.

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η Πηνελόπη έγινε αρχιτέκτων! Πήρε επιτέλους το δίπλωμα της και γεμάτη όρεξη ρίχνεται στην πρώτη της δουλειά! χτίσει ένα σπίτι με τετραγωνική βάση σε οικόπεδο. Αφού ρώτησε την Πολεοδομία, πληροφορήθηκε ότι στο συγκεκριμένο οικόπεδο μπορεί κανείς να χτίσει σπίτι εμβαδού 289 m^2. Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς της τετραγωνικής βάσης του σπιτιού;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $Ε = x^2$. Άρα πρέπει $x^2 = 289$. Δηλαδή, πρέπει να βρούμε έναν αριθμό x, του οποίου το τετράγωνο να είναι 289.

- **Μήπως είναι x = 10;**
  Τότε όμως x^2 = 102 = 100 (θέλει πιο πολύ).
- **Μήπως είναι x = 20;**
  Τότε όμως x^2 = 202 = 400 (θέλει πιο λίγο).
- **Μήπως είναι x = 15;**
  Τότε όμως x^2 = 152 = 225 (θέλει λίγο πιο πολύ).
- **Μήπως είναι x = 17;**
  Τότε x^2 = 172 = 289 (αυτό είναι!).

Το σπίτι θα έχει τετραγωνική βάση, πλευράς 17 (m).
Ο θετικός αριθμός 17, του οποίου το τετράγωνο ισούται με 289, ονομάζεται τετραγωνική ρίζα του 289 και συμβολίζεται με $\sqrt{289}$.
Δηλαδή $\sqrt{289} = 17$

Ριζικό ή σύμβολο ρίζας

$$\sqrt{\alpha}$$

υπόρριζη ποσότητα

Γενικά:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.

Για παράδειγμα:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{γιατί} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{0,64} = 0,8 \quad \text{γιατί} \quad 0,8^2 = 0,64$$

$$\sqrt{17,64} = 4,2 \quad \text{γιατί} \quad 4,2^2 = 17,64$$

Σχόλια:

- **Δεν ορίζουμε** ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός. Γα παράδειγμα η $\sqrt{25}$ **δεν έχει νόημα**, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα –25.

- Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, προκύπτει ότι:

- **Αν $\sqrt{\alpha} = x$ όπου $\alpha \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$**

- **Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.**

➤ **Σύμφωνα με τα παραπάνω:**
α) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{25} = -5$, παρόλο που $(-5)^2 = 25$, καθώς $-5 < 0$.
β) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{(-5)^2} = -5$, καθώς $-5 < 0$.
Το σωστό είναι $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τους αριθμούς: $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{121}$.

Λύση:

Αν $x = \sqrt{25}$ τότε $x^2 = 25$. Άρα πρέπει να βρούμε ένα θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με 25.
Με δοκιμές βρίσκουμε εύκολα ότι $5^2 = 25$, δηλαδή $x = 5$.
Άρα $\sqrt{25} = 5$.
Ομοίως, βρίσκουμε ότι:
$\sqrt{49} = 7$ γιατί $7^2 = 49$, $\sqrt{64} = 8$ γιατί $8^2 = 64$,
$\sqrt{121} = 11$ γιατί $11^2 = 121$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

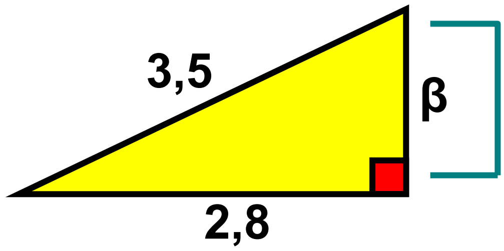
Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:
α) $\sqrt{16}$, β) $\sqrt{0,16}$, γ) $\sqrt{0,0016}$.

Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι $4^2 = 16$. Άρα $\sqrt{16} = 4$.
β) Γνωρίζουμε ότι $(0,4)^2 = 0,16$. Άρα $\sqrt{0,16} = 0,4$.
γ) Γνωρίζουμε ότι $(0,04)^2 = 0,0016$. Άρα $\sqrt{0,0016} = 0,04$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου του παρακάτω σχήματος.



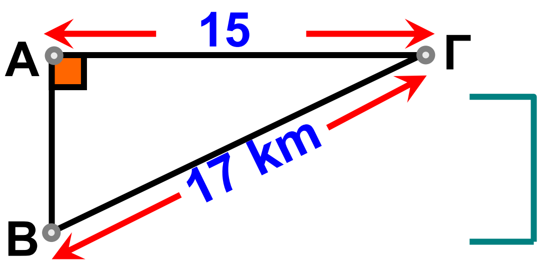
Λύση:

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\beta^2 + 2{,}8^2 = 3{,}5^2$ ή $\beta^2 + 7{,}84 = 12{,}25$ ή $\beta^2 = 12{,}25 - 7{,}84$ ή $\beta^2 = 4{,}41$ Επομένως: $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ γιατί $2{,}1^2 = 4{,}41$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;

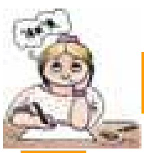


Λύση:

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ ή $ΑΒ^2 + 15^2 = 17^2$ ή $ΑΒ^2 + 225 = 289$ ή $ΑΒ^2 = 289 - 225$ ή $ΑΒ^2 = 64$ οπότε $ΑΒ = \sqrt{64}$ ή $ΑΒ = 8$

Επομένως, η πόλη Α απέχει 8 km από την πόλη Β.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **Για τους x, y ισχύει: $y = \sqrt{x}$. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

α)	Ο x είναι:	
Α	**Β**	**Γ**
θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	Οποιοσδήποτε αριθμός

β)	Ο y είναι:	
Α	**Β**	**Γ**
θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	Οποιοσδήποτε αριθμός

γ)	Ισχύει η σχέση:	
Α	**Β**	**Γ**
$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

2. Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει λύσεις:

Α: μόνο το 4 Β: μόνο το -4 Γ: το 4 και το -4

3. Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμό της στήλης Α την τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Β
9
16
4
25
36

ΣΤΗΛΗ Β
16
3
2
8
5
18
6
4

4. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

α) $\sqrt{16} = 8$ β) $\sqrt{4} = 16$ γ) $\sqrt{9} = 3$

δ) $\sqrt{0,4} = 0,2$ ε) $\sqrt{-9} = -3$ στ) η $\sqrt{0}$ δεν υπάρχει

ζ) $\sqrt{4} = -2$ η) $\sqrt{16+9} = 5$ θ) $\sqrt{25-9} = 5-3 = 2$

ι) $\sqrt{100} = 50$

5. Αν x είναι ένας θετικός αριθμός, στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $\sqrt{x} = 5$, τότε
- Α $x = 10$
- Β $x = 25$
- Γ $x = -25$
- Δ $x = 2,5$
- Ε η σχέση αυτή είναι αδύνατη

2. Αν $\sqrt{x} = 9$, τότε
- Α $x = 3$
- Β $x = 81$
- Γ $x = 4,5$
- Δ $x = \pm 81$
- Ε η σχέση αυτή είναι αδύνατη

3. Αν $\sqrt{x} = -16$, τότε
- Α $x = 4$
- Β $x = -4$
- Γ $x = 256$
- Δ $x = -8$
- Ε η σχέση αυτή είναι αδύνατη

4. Αν $\sqrt{100} = x$, τότε
- Α $x = 10$

Β $x = 50$

Γ $x = 100$

Δ $x = \pm 10$

Ε η σχέση αυτή είναι αδύνατη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

α) $\sqrt{81}$, $\sqrt{0{,}81}$, $\sqrt{8100}$

β) $\sqrt{4}$, $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{40000}$

γ) $\sqrt{121}$, $\sqrt{1{,}21}$, $\sqrt{12100}$, $\sqrt{0{,}0121}$

δ) $\sqrt{\dfrac{9}{4}}$, $\sqrt{\dfrac{144}{25}}$, $\sqrt{\dfrac{400}{49}}$, $\sqrt{\dfrac{36}{121}}$

2 Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{36} =$ β) $\sqrt{18 + 18} =$

γ) $\sqrt{18 \cdot 18} =$ δ) $\left(\sqrt{18}\right)^2 =$

3 Να τοποθετήσετε σε κάθε τετράγωνο έναν κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα.

α) $\sqrt{\dfrac{4}{\square}} = \dfrac{2}{3}$ β) $\left(\sqrt{\square}\right)^2 = 5$

γ) $\sqrt{\square + 3} = 6$ δ) $\sqrt{\square} + 2 = 11$

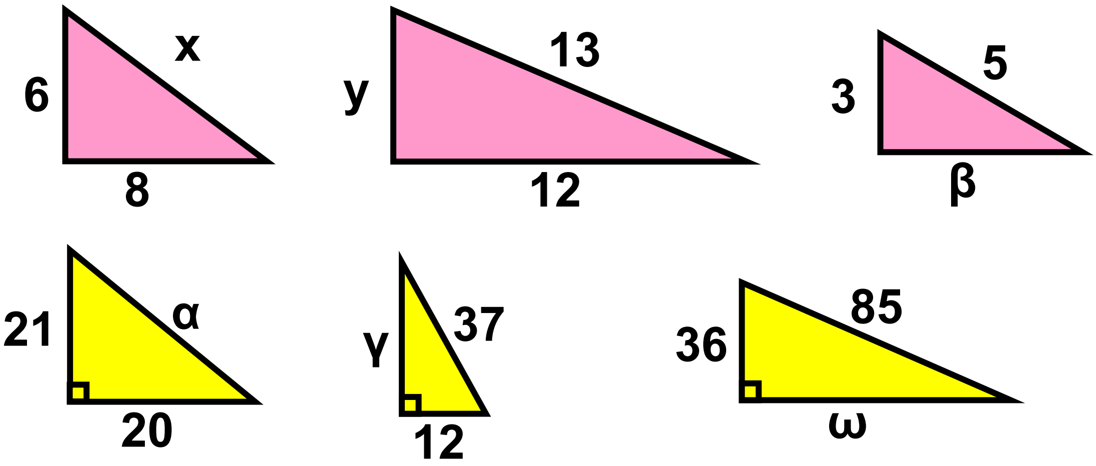
ε) $2 - \sqrt{\square} = 0$ στ) $\left(\sqrt{\square}\right)^2 + \sqrt{\square} = 6$

4 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2$ β) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = 2$

γ) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 3$

5 **Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων.**



6 **Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:**

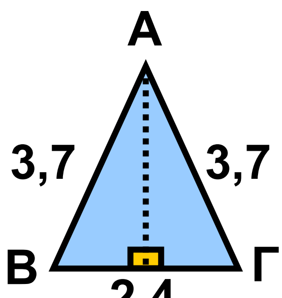
α) $x^2 = 9$

β) $x^2 = 25$

γ) $x^2 = 64$

δ) $x^2 = \dfrac{100}{81}$.

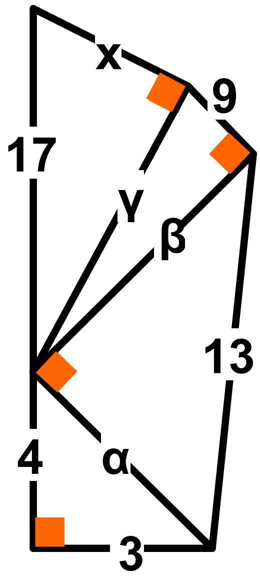
7 **Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος**



8 **Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου γηπέδου που έχει διαστάσεις 65m και 72m.**

9 **Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 8, γίνεται ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;**

10 Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε το μήκος x.



11 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, α, α^2 , στις περιπτώσεις:

α) Αν α > 1 π.χ. α = 4, α = 9, α = 16…

β) Αν 0 < α < 1 π.χ. $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{9}$, $\alpha = \frac{1}{16}$,....

12 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4				
36	49				

Τι συμπεραίνετε;

13 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16				
25	36				

Τι συμπεραίνετε;

14 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:**

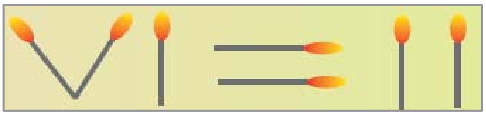
α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16				
64	36				

Τι συμπεραίνετε;

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

1 ***Ρώτησαν ένα μαθηματικό το 20ου αιώνα πόσων ετών είναι. Αυτός απάντησε ως εξής:***
«Η τετραγωνική ρίζα του έτους που γεννήθηκα είναι ακριβώς ίση με τη σημερινή μου ηλικία». Πόσων ετών ήταν, πότε γεννήθηκε και ποια χρονολογία έγινε η ερώτηση;

2 ***Μπορείτε να αλλάξετε τη θέση ενός μόνο σπίρτου ώστε να προκύψει μια πλήρης ισότητα;***

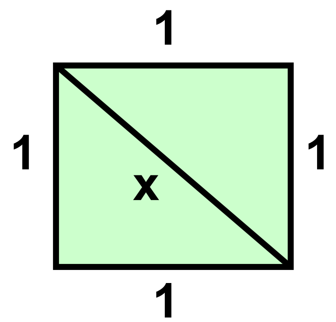


2.2. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

Άρρητοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ. περίπου) «αποκάλυψε» τον «άρρητο» $\sqrt{2}$. Σύντομα βρέθηκαν και άλλοι άρρητοι αριθμοί. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών.

Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$.



Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{μ}{ν}$, όπου μ, ν ακέραιοι με ν ≠ 0, δηλαδή δεν είναι ρητός. Γι’ αυτό λέγεται άρρητος.

Γενικά:

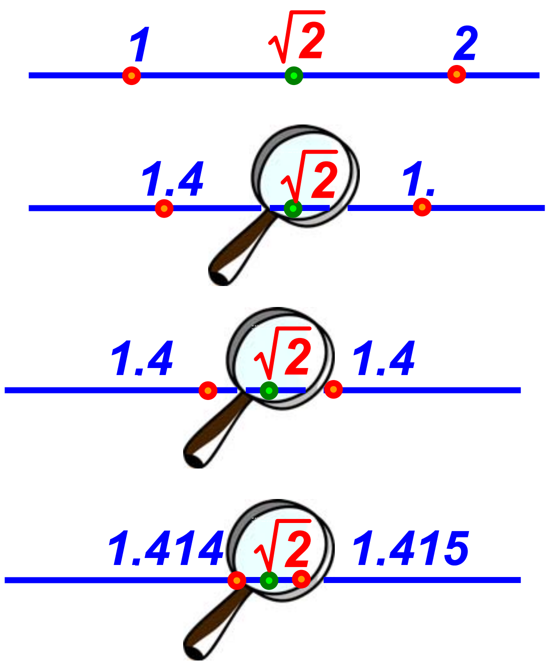
> **Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει την μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με ν ≠ 0, ονομάζεται άρρητος αριθμός.**

Αυτό σημαίνει ότι κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός.

Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$1 = 1^2 < 2 < 2^2 = 4$$
$$1{,}96 = 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$$
$$1{,}9881 = (1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2 = 2{,}0164$$
$$1{,}9994 = (1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2 = 2{,}0022$$
$$1{,}99996 = (1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2 = 2{,}00024$$
$$1{,}9999899 = (1{,}41421)^2 < 2 < (1{,}41422)^2 = 2{,}000018$$

....



Άρα: 

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

Επομένως τον αριθμό $x = \sqrt{2}$, που προσπαθούμε να βρούμε, δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρί-

βεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε να προσεγγίσουμε τον 2 ως εξής:

Άρα:

Έχουμε:
με προσέγγιση χιλιοστού: $\sqrt{2}$ = 1,414
με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού: $\sqrt{2}$ = 1,4142
με προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού: $\sqrt{2}$ = 1,41421
κ.ο.κ.
Οι αριθμοί αυτοί λέγονται ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$.

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και οι αριθμοί

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \ldots$$

είναι άρρητοι. Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π.

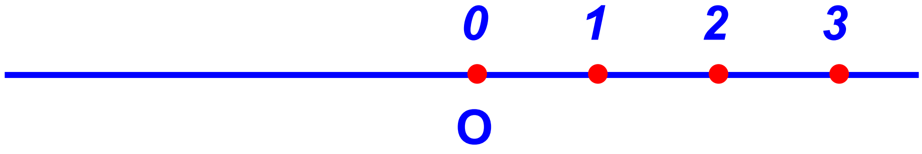
Σχόλιο:
Τις τετραγωνικές ρίζες μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τη βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης ως εξής: Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα $\boxed{2}$ και $\boxed{\sqrt{\ }}$, οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία. Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαμε ειδικούς πίνακες.

Πραγματικοί αριθμοί

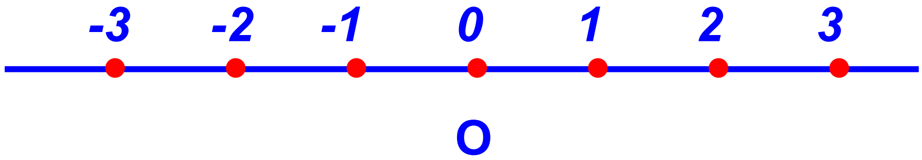
Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.

- **Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, … παριστάνονται στη παρακάτω ευθεία με σημεία.**

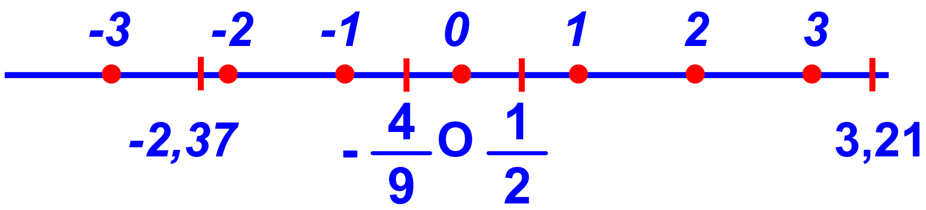
Στην αρχή Ο έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).



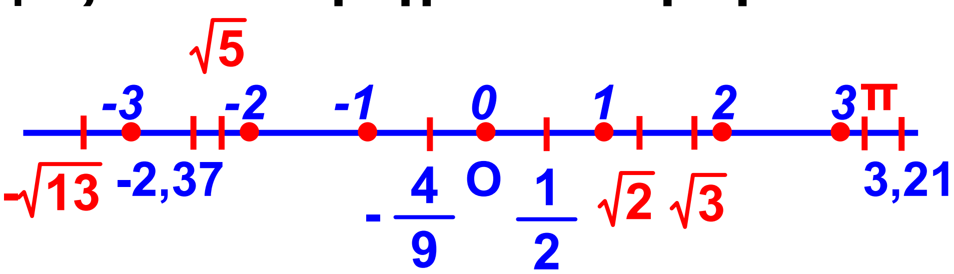
➤ Οι ακέραιοι αριθμοί: … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 … παριστάνονται πάλι με σημεία.
Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.



➤ Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{μ}{ν}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός.
Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.



➤ Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{13}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

Λύση:

α) Με διαδοχικές δοκιμές έχουμε:

Επειδή	και	είναι
$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$3 < \sqrt{13} < 4$.
Επειδή	και	είναι
$(3,6)^2 = 12,96$	$(3,7)^2 = 13,69$	$3,6 < \sqrt{13} < 3,7$.
Επειδή	και	είναι
$(3,60)^2 = 12,960$	$(3,61)^2 = 13,032$	$3,60 < \sqrt{13} < 3,61$.
Επειδή	και	είναι
$(3,605)^2 = 12,996$	$(3,606)^2 = 13,003$	$3,605 < \sqrt{13} < 3,606$

Άρα η ρητή προσέγγιση του $\sqrt{13}$ είναι 3,605.

Σχόλιο: Για την ακρίβεια λέμε ότι $\sqrt{13} = 3,605$ με έλλειψη και $\sqrt{13} = 3,606$ με υπερβολή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Χρησιμοποιήστε ένα μικροϋπολογιστή τσέπης για να βρείτε με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{50}$, γ) $\sqrt{72}$, δ) $\sqrt{1764}$, ε) $\sqrt{427}$.

Λύση:

Έχουμε ότι:

α) Πατώντας διαδοχικά τα πλήκτρα $\boxed{3}$ και $\boxed{\sqrt{\ }}$ στην οθόνη παρουσιάζεται ο αριθμός 1,7320508. Άρα, με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων ισχύει ότι: $\sqrt{3} = 1,732$.

β) Ομοίως $\sqrt{50} = 7,071$ γ) Ομοίως $\sqrt{72} = 8,485$

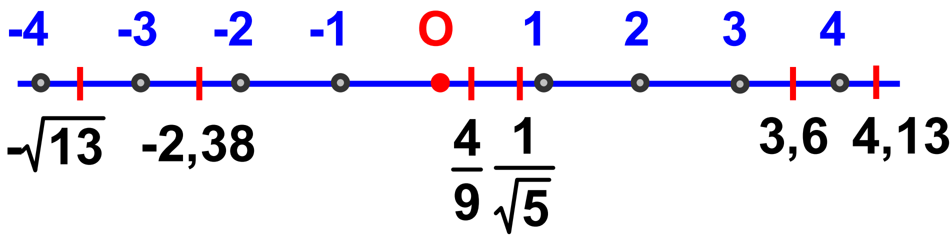
δ) Ομοίως $\sqrt{1764} = 42$ ε) Ομοίως $\sqrt{427} = 20,664$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς: -4, -2,38, $\frac{4}{9}$, $-\sqrt{13}$, 4,13, 3,6, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 1, 2.

Λύση:

α) Μπορούμε να γράψουμε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας τις ρητές προσεγγί-σεις δύο ψηφίων για τους άρρητους, οπότε έχουμε:



$$-4 < -\sqrt{13} = -3,61 < -3 < -2,38 < -2 < 0 < \frac{4}{9} = 0,4 < \frac{1}{\sqrt{5}} =$$
$$= 0,45 < 1 < 2 < 3,6 < 4 < 4,13$$

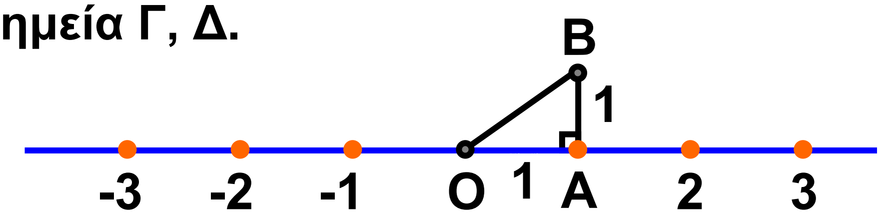
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

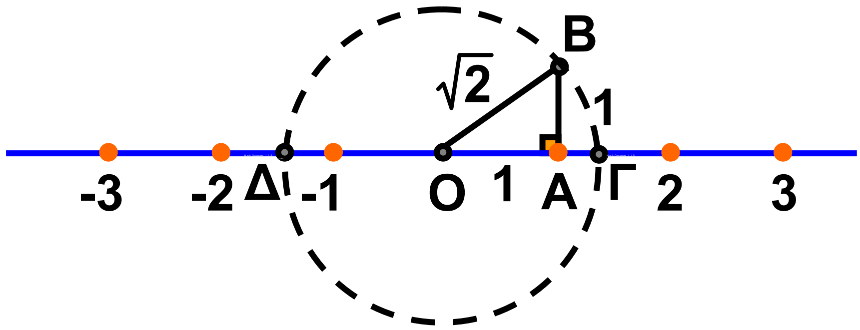
Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

Λύση:

Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ στον άξονα μήκους 1. Το τρίγωνο ΟΑΒ που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $OB^2 = OA^2 + AB^2$ = 12 + 12 = 2 ή ΟΒ = $\sqrt{2}$. Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ, Δ.





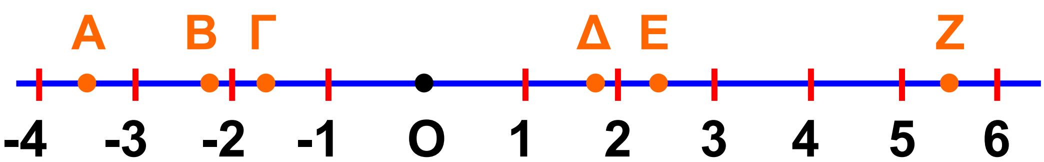
Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$, ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος $-\sqrt{2}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών, να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α)	$4 < \sqrt{4,5} < 5$		
β)	$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$		
γ)	$7 < \sqrt{15} < 8$		
δ)	$10 < \sqrt{21} < 11$		
ε)	$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$		
στ)	$2 < \sqrt{7} < 3$		

2 Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ. Στις παρακάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



α)	Ο αριθμός $\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Α	Ε	Γ	Δ
β)	Ο αριθμός $\sqrt{6}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	Ε	Ζ
γ)	Ο αριθμός $-\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Β	Δ	Α
δ)	Ο αριθμός $-\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	Β	Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α) $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^2$ β) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$ γ) $\sqrt{18}$, $\sqrt{\frac{18}{2}}$, $\sqrt{18^2}$

2 Τοποθετήστε σε μία σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

α) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{2}$ β) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 2, $\sqrt{2}$

γ) $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ δ) $\sqrt{2}$, $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

3 Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών: α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{5}$, γ) $\sqrt{7}$, δ) $\sqrt{8}$.

4 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 = 0$, β) $x^2 = 5$, γ) $x^2 = -3$, δ) $x^2 = 17$.

5 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 12 cm^2. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευράς του.

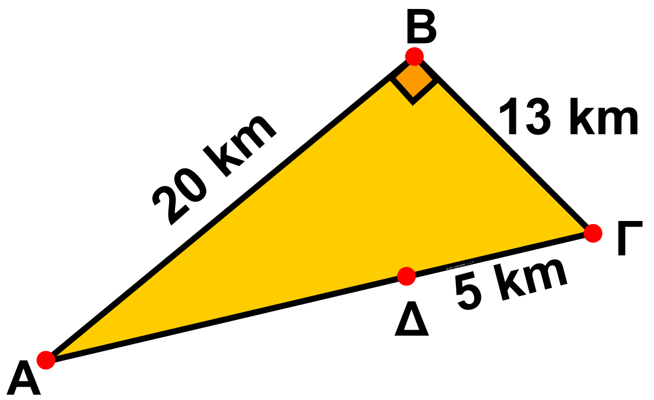
6 Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο 12 cm. Να βρείτε: α) το μήκος της πλευράς του με προσέγγιση δύο δεκαδικών, β) την ακριβή τιμή του εμβαδού του.

2.3. Προβλήματα

Όπως γνωρίζουμε, δε μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια την τιμή ενός άρρητου αριθμού. Σε διάφορα όμως προβλήματα της πραγματικής ζωής συναντάμε άρρητους αριθμούς για τους οποίους χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις δύο ή τριών δεκαδικών ψηφίων.

Πρόβλημα 1

Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις ΑΒ = 20 km, ΒΓ = 13 km και ΓΔ = 5 km. Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;



Λύση

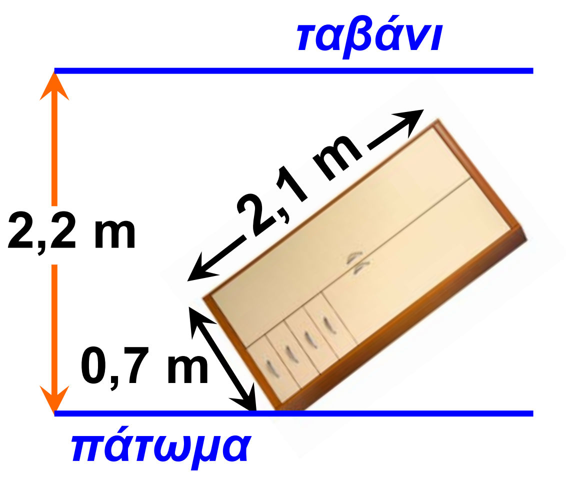
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

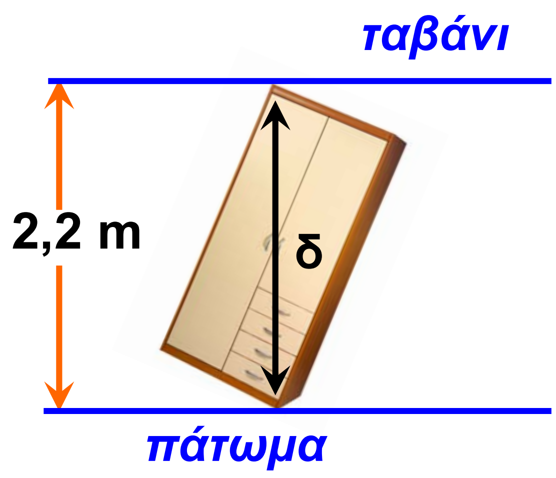
$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = 20^2 + 13^2$ ή $ΑΓ^2 = 569$ ή $ΑΓ = \sqrt{569}$ ή ΑΓ = 23,85 (km) με προσέγγιση εκατοστού.

Επομένως, ΑΔ = ΑΓ – ΔΓ = 23,85 - 5 = 18,85 (km).

Πρόβλημα 2

Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι του παρακάτω σχήματος;





Λύση

Αν η διαγώνιος δ είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το ύψος 2,2 m του δωματίου, τότε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι.

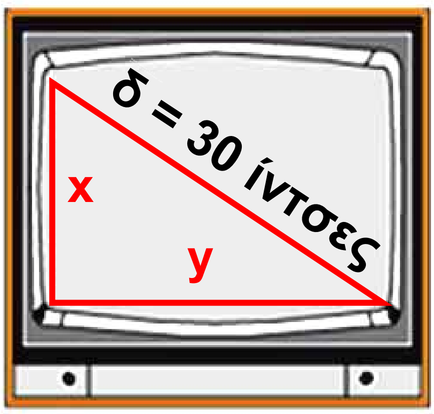
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\delta^2 = 2{,}1^2 + 0{,}7^2 =$ $= 4{,}41 + 0{,}49 = 4{,}90$.

Άρα $\delta = \sqrt{4{,}90} = 2{,}21$ (m) με προσέγγιση εκατοστού.

Επομένως, δε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι, γιατί $\delta > 2{,}2$ (m).

Πρόβλημα 3

Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x, y έχουν λόγο $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.



Λύση

Αφού x, y είναι οι διαστάσεις της οθόνης και 30 ίντσες η διαγώνιος, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$x^2 + y^2 = 30^2$.

Από τα δεδομένα έχουμε $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, **οπότε** $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2$

ή $\frac{x^2}{y^2} = \frac{7}{16}$ **ή** $x^2 = \frac{7}{16}y^2$

και αντικαθιστώντας στο Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

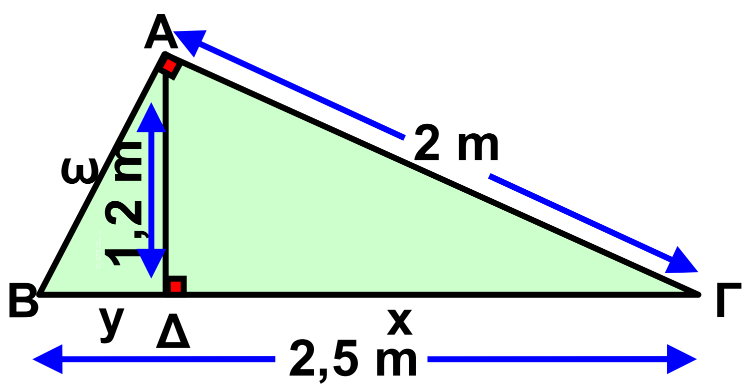
$\frac{7}{16}y^2 + y^2 = 30^2$ **ή** $\frac{23}{16}y^2 = 30^2$ **ή** $23y^2 = 14400$

ή $y^2 = \frac{14400}{23}$ **ή** $y^2 = 626{,}08$ **ή** $y = 25{,}02$ **(ίντσες)**

και $x = \frac{\sqrt{7}}{4}\ 25{,}02 = 16{,}55$ **(ίντσες)**

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x, y και ω.



Λύση

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$ ή $2^2 = 1{,}2^2 + x^2$

ή $x^2 = 2^2 - 1{,}2^2 = 4 - 1{,}44 = 2{,}56$.

Άρα $x = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$ (m).

Επίσης $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$ ή $2{,}5 = y + 1{,}6$

ή $y = 2{,}5 - 1{,}6 = 0{,}9$ (m).

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

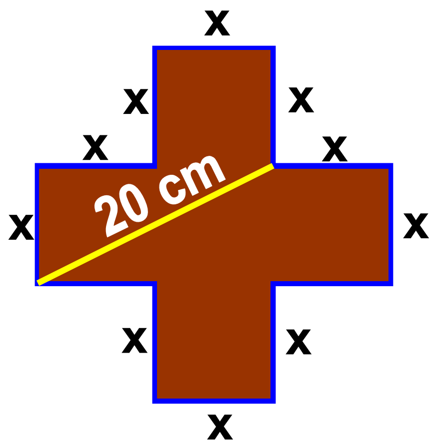
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή

$\omega^2 = 1{,}2^2 + 0{,}9^2 = 1{,}44 + 0{,}81 = 2{,}25$.

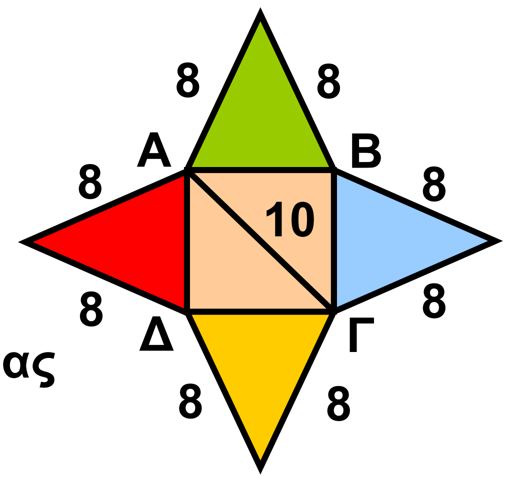
Άρα $\omega = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ (m).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

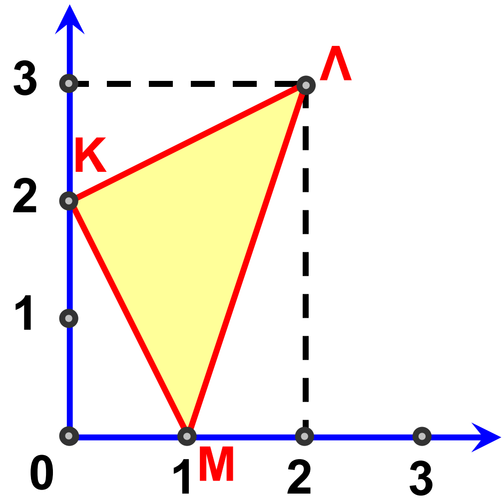
1 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σταυρού του σχήματος.



2 Το ανάπτυγμα σε χαρτόνι μιας πυραμίδας αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, που η διαγώνιός του είναι 10 cm και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα που οι ίσες πλευρές τους είναι 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.



3 Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι Κ(0,2), Λ(2,3), Μ(1,0).
Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



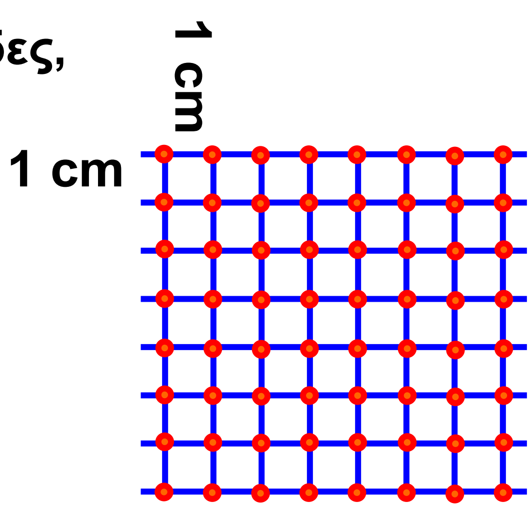
4 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12 cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

5 Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 10 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η τρίτη πλευρά του, ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. (*Υπόδειξη: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις*).

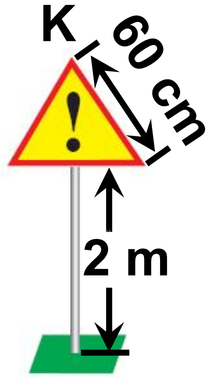
6 Οι κουκκίδες του παρακάτω σχήματος απέχουν 1 cm οριζόντια και κατακόρυφα.

α) Να ενώσετε δύο κουκκίδες, ώστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται να είναι:
i) $\sqrt{2}$ cm, ii) $\sqrt{5}$ cm, iii) $\sqrt{13}$ cm.

β) Να ενώσετε τέσσερις κουκκίδες, ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο με εμβαδόν:
i) 2 cm^2,
ii) 5 cm^2,
iii) 13 cm^2.

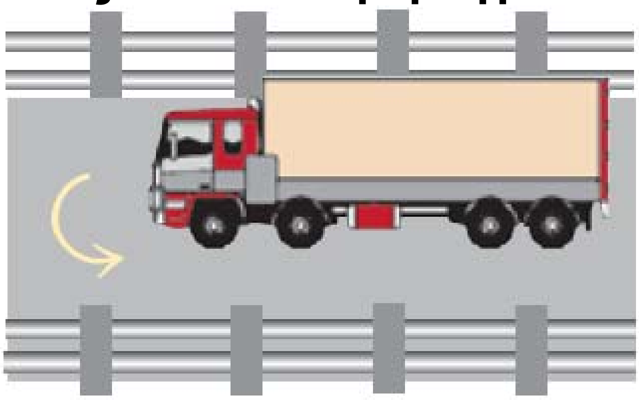


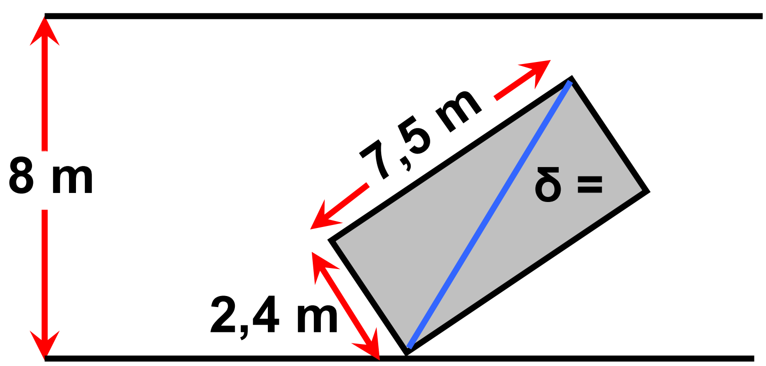
7 Το σήμα της φωτογραφίας έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 60 cm και στηρίζεται σε κολόνα ύψους 2 m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Κ της πινακίδας από το έδαφος.



8 Τα βέλη στην άσφαλτο αποτελούνται από ένα κίτρινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από ένα κίτρινο ισοσκελές τρίγωνο. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 20 cm και 2,3 m. Το τρίγωνο έχει βάση 60 cm και ίσες πλευρές 2,1 m. Πόσα περίπου τέτοια βέλη μπορούμε να βάψουμε με 1 κιλό κίτρινου χρώματος το οποίο μπορεί να καλύψει επιφάνεια 540 dm^2;

9 Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m. Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;





Επανάληψη Κεφαλαίου 2

Πραγματικοί αριθμοί

✐ Τετραγωνική ρίζα:

ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ένας θετικός αριθμός ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Ιδιότητες

Αν $\sqrt{\alpha} = x$, τότε $x^2 = \alpha$, όπου οι αριθμοί α και x είναι θετικοί ή ίσοι με μηδέν.

Επομένως: $\boxed{(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha}$

✐ Άρρητοι αριθμοί

ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί, δηλαδή δε μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, με μ, ν ακέραιους και $\nu \neq 0$.

✐ Πραγματικοί αριθμοί

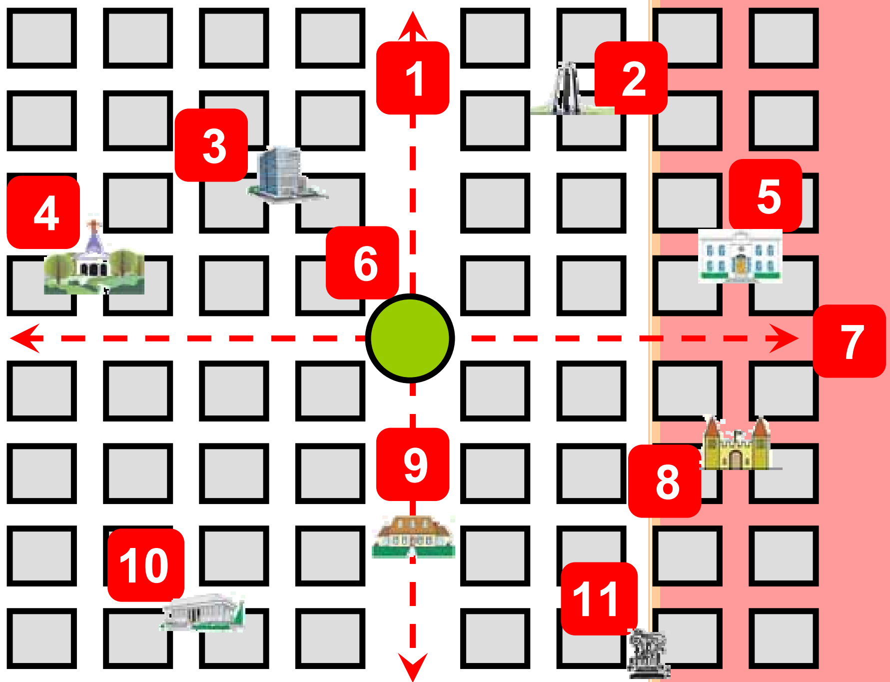
ονομάζονται όλοι οι ρητοί και όλοι οι άρρητοι αριθμοί.

1	Λεωφόρος Ευημερίας
2	Μνημείο Ηρώων
3	Εμπορικό Κέντρο
4	Εκκλησία
5	Δημαρχείο
6	Πλατεία Ομονοίας
7	Λεωφόρος Ευτυχίας
8	Μεσαιωνικό Κάστρο
9	Σχολείο
10	Μουσείο
11	Ερείπια Αρχαίου Ναού

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Συναρτήσεις

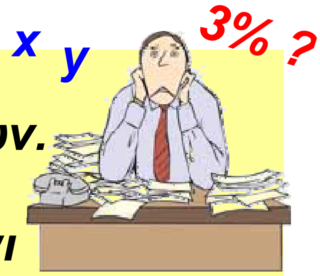


Εισαγωγικο Σημειωμα

***Η** συνάρτηση αποτελεί θεμελιώδη έννοια των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε όλες τις θετικές επιστήμες. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την έννοια της συνάρτησης και θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση συναρτήσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Θα εξετάσουμε έτσι τις συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις γραφικές παραστάσεις της ευθείας και της υπερβολής.*

3.1. Η έννοια της συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα.Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;

β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

για τον πρώτο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24€$,

για τον δεύτερο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33 €$,

β) Η αύξηση θα είναι: $\frac{3}{100} \cdot x = 0{,}03x$ **δηλαδή** $y = 0{,}03x$.

Παρατήρηση:

Η σχέση $y = 0{,}03x$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής x. Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό $x = 700$ €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$ €. Ομοίως, για $x = 1500$ βρίσκουμε αύξηση $y = 0{,}03 \cdot 1500 = 45$ €.

Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση). Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «**η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x**». Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση y = 0,03x.

Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών.
Έτσι, για τη συνάρτηση y = = 0,03x έχουμε:

Για x = 700, $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$.
Για x = 800, $y = 0{,}03 \cdot 800 = 24$.
Για x = 900, $y = 0{,}03 \cdot 900 = 27$.
Για x = 1000, $y = 0{,}03 \cdot 1000 = 30$.
Για x = 1100, $y = 0{,}03 \cdot 1100 = 33$.

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα, ο οποίος λέγεται πίνακας τιμών της συνάρτησης y = 0,03x.

x	700	800	900	1000	1100
y	21	24	27	30	33

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση y = 2x + 3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y					

Λύση:

Για x = -2: $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$.
Για x = -1: $y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$.
Για x = 0: $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
Για x = 1: $y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$.
Για x = 2: $y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

Άρα, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.
α) Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;
β) Να εκφράσετε την ποσότητα y σε κιλά του λαδιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας x των ελιών που παράγει.
γ) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;

Λύση:

α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 0,2 κιλά λάδι, από 500 κιλά ελιές θα πάρει $0{,}2 \cdot 500 = 100$ κιλά λάδι.
β) Από x κιλά ελιές θα πάρει 0,2x κιλά λάδι. Δηλαδή $y = 0{,}2x$.
γ) Από τη συνάρτηση $y = 0{,}2x$, για $y = 250$ κιλά λάδι έχουμε: $250 = 0{,}2x$ ή $x = \dfrac{250}{0{,}2} = 1250$.Άρα, θα πρέπει να παράγει 1250 κιλά ελιές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 20 € ο καθένας. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x, είναι:**

α) $y = 20x$ β) $y = x + 20$ γ) $y = \dfrac{x}{20}$ δ) $y = 0{,}2x$

2 **Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 15%. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x, είναι:**

α) $y = x + \dfrac{15}{100}$ β) $y = x + 15$ γ) $y = 1{,}15x$ δ) $y = 0{,}15x$

3 Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y είναι 100 cm^2. Η σχέση που εκφράζει το μήκος του y ως συνάρτηση του x, είναι:

α) $y = 100x$ β) $y = 100 + x$ γ) $y = \dfrac{100}{x}$ δ) $y = 100 - x$

4 Το Δίνεται τετράγωνο πλευράς x. Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν Ε του τετραγώνου ως συνάρτηση του x είναι:

α) $E = 2x$ β) $E = x^2$ γ) $E = \sqrt{2x^2}$ δ) $E = 4x$

5 Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με τον πίνακα τιμών της στήλης Β. (*Στη στήλη Β ένας πίνακας τιμών περισσεύει.*)

ΣΤΗΛΗ Α

(α) $y = 2x + 1$

(β) $y = x^2 + 1$

(γ) $y = 1 - x$

ΣΤΗΛΗ Β

i)

x	-3	-1	0	1	2
y	10	2	1	2	5

ii)

x	-3	-1	0	1	2
y	-5	-1	1	3	5

iii)

x	-3	-1	0	1	2
y	4	2	1	0	-1

iv)

x	-3	-1	0	1	2
y	4	2	1	0	2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3x - 2$

x	-3	-2	-1	0	2
y					

β) $y = \frac{x-1}{2}$

x	-1	0	2	4	5
y					

2 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = x^2 + 1$

x	-3	-1	0	2	5
y					

β) $y = x^2 + 3x - 2$

x	-3	-2	0	1	3
y					

3 Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%. Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο.

4 Ένας πωλητής παίρνει μισθό 600 € το μήνα και ποσοστό 7% επί του ποσού των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y, που κερδίζει το μήνα, ως συνάρτηση του ποσού x των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

5 Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y (σε cm).
α) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x.
β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 100 cm^2, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x.

6 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος x (σε cm). Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε και την περίμετρο Π του τετραγώνου ως συναρτήσεις του x. Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	2,5	5	0,3
Ε					
Π					

7 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης y = 3x – 5:**

x	-3	-1	0	2
y				

8 **Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 70 χιλιόμετρα την ώρα.**
α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε 2 ώρες και πόση σε 5 ημέρες;
β) Να εκφράσετε την απόσταση S (σε χιλιόμετρα) που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες).

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

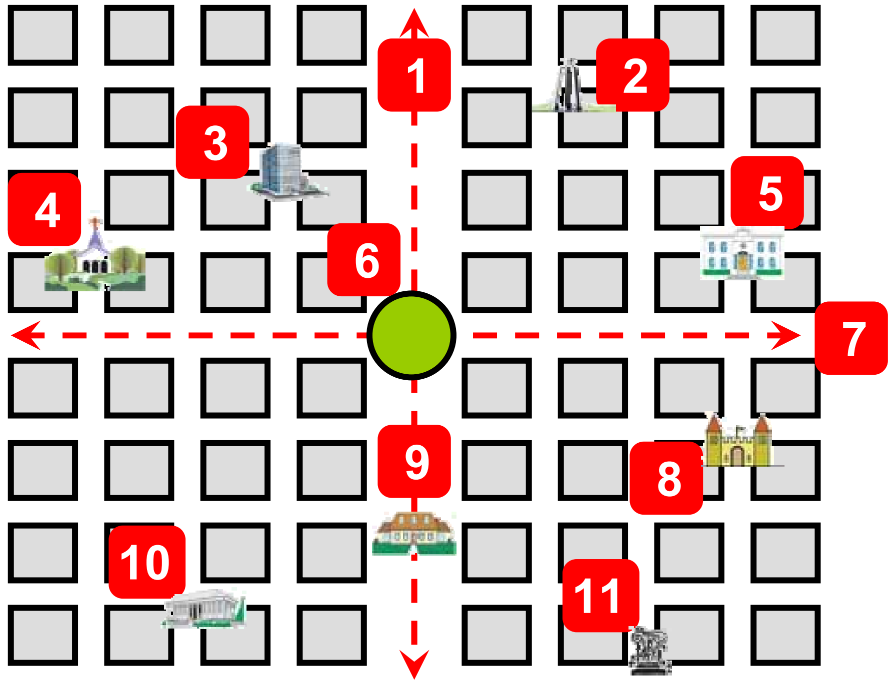
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα χάρτη μιας πόλης στον οποίο φαίνονται οι δύο κεντρικές οδικές αρτηρίες της πόλης και μερικά οικοδομικά τετράγωνα.

Έχουν, επίσης, σημειωθεί μερικά βασικά σημεία της πόλης, όπως η Ομόνοια (κεντρική πλατεία και σημείο διασταύρωσης των δύο βασικών λεωφόρων), το Δημαρχείο, το Εμπορικό Κέντρο, κ.τ.λ.

Για να επισκεφθούμε κάποιο από αυτά τα σημεία (π.χ. το Δημαρχείο), ξεκινώντας από την Ομόνοια πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα δεξιά πάνω στη Λεωφόρο Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω παράλληλα προς τη Λεωφόρο Ευημερίας.
Δηλαδή, η θέση του Δημαρχείου προσδιορίζεται επακριβώς από το ζεύγος των αριθμών (3, 1).

Ομοίως, η θέση της Εκκλησίας προσδιορίζεται από το ζεύγος των αριθμών (-3, 1). Δηλαδή για να πάμε στην εκκλησία ξεκινώντας από την Ομόνοια, πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα αριστερά στη Λεωφόρο Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω, παράλληλα προς την Λεωφόρο Ευημερίας.

Να χρησιμοποιήσετε το παρακάτω διάγραμμα (που είναι ένας πιο απλός χάρτης της ίδιας πόλης), για να προσδιορίσετε τη θέση και των άλλων βασικών σημείων της πόλης που φαίνονται στο χάρτη.



1	Λεωφόρος Ευημερίας	7	Λεωφόρος Ευτυχίας
2	Μνημείο Ηρώων	8	Μεσαιωνικό Κάστρο
3	Εμπορικό Κέντρο	9	Σχολείο
4	Εκκλησία	10	Μουσείο
5	Δημαρχείο	11	Ερείπια Αρχαίου Ναού
6	Πλατεία Ομονοίας		

Λύση

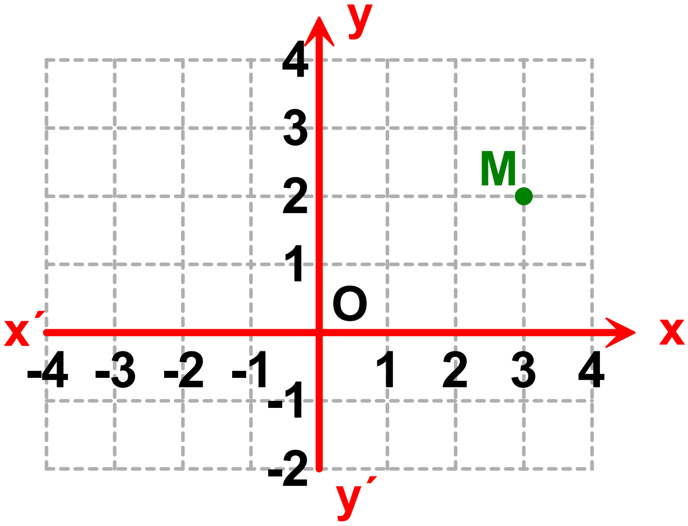
Ξεκινώντας από την Ομόνοια (Ο) έχουμε:

- **Μνημείο Ηρώων: 1 τετράγωνο δεξιά και 3 πάνω, άρα (1, 3).**
- **Εμπορικό Κέντρο: 1 τετράγωνο αριστερά και 2 πάνω, άρα (-1, 2).**
- **Μουσείο: 2 τετράγωνα αριστερά και 3 κάτω, άρα (-2, -3).**
- **Σχολείο: 0 τετράγωνα αριστερά (ή δεξιά) και 2 κάτω, άρα (0, -2).**
- **Ερείπια Αρχ. Ναού: 2 τετράγωνα δεξιά και 4 κάτω, άρα (2, -4).**
- **Μεσαιωνικό Κάστρο: 3 τετράγωνα δεξιά και 1 κάτω, άρα (3, -1).**

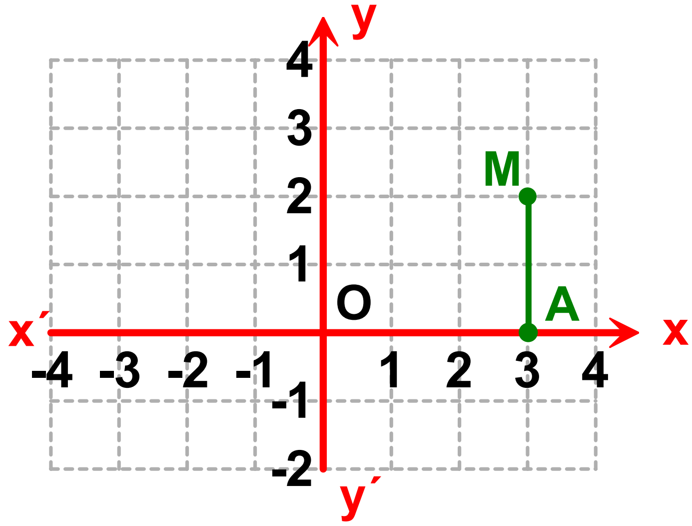
Σύστημα συντεταγμένων

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου της πόλης χρησιμοποιώντας δύο βασικούς οδικούς άξονες: τις Λεωφόρους Ευτυχίας και Ευημερίας.

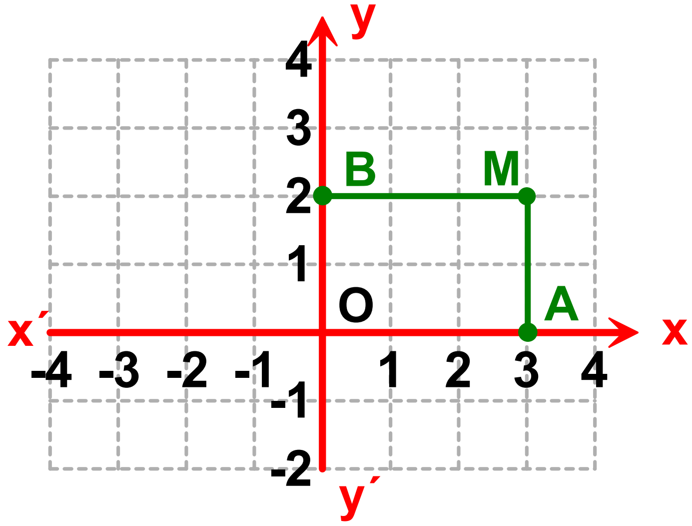
Την ιδέα αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε γενικότερα για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, ως εξής:



1. Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y, με κοινή αρχή O και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο Μ.



2. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y΄y που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α. Για το σχήμα μας το Α αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα x΄x.

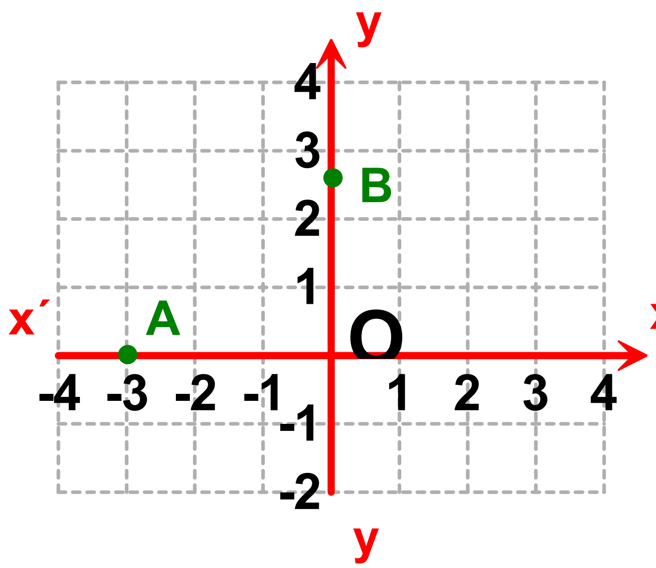


3. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x΄x που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β. Για το σχήμα μας το Β αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα y΄y.

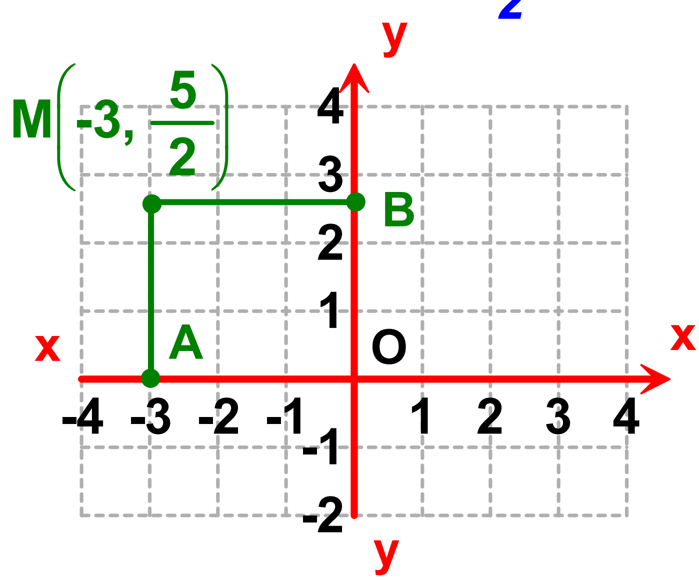
Δηλαδή, το σημείο Μ αντιστοιχεί στο ζεύγος των αριθμών (3, 2) και συμβολίζεται Μ(3, 2). Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **τετμημένη** του σημείου Μ και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη** του σημείου Μ. Η

τετμημένη και η τεταγμένη του Μ λέγονται συντεταγμένες του σημείου Μ.

Αλλά και αντιστρόφως, αν έχουμε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο και ένα ζεύγος αριθμών π.χ. το $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$, μπορούμε να βρούμε ένα μόνο σημείο Μ του επιπέδου που αντιστοιχεί στο ζεύγος αυτό ως εξής:



1. Σημειώνουμε με Α το σημείο του άξονα x΄x που αντιστοιχεί στον αριθμό -3 και με Β το σημείο του άξονα y΄y που αντιστοιχεί στον αριθμό $\frac{5}{2}$



2. ***Από τα σημεία Α και Β φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Μ, που είναι το ζητούμενο με συντεταγμένες***

$$M\left(-3, \frac{5}{2}\right)$$

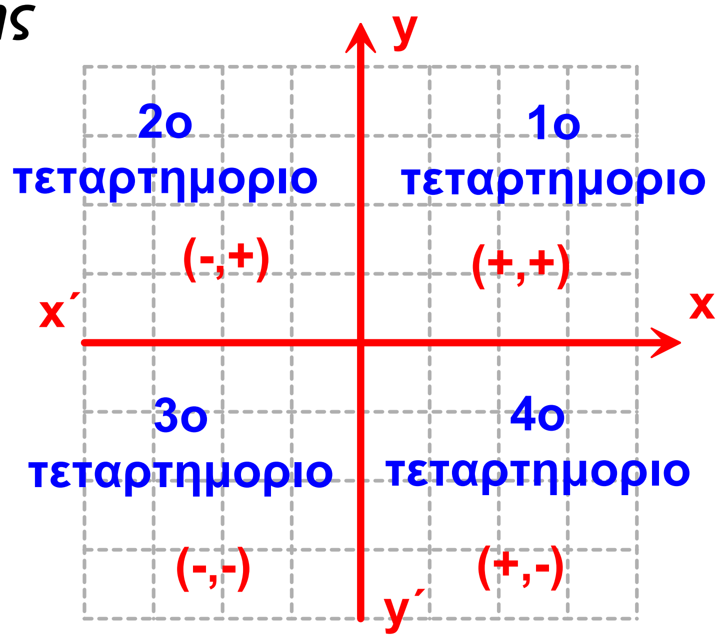
Άρα:

Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι άξονες x'x και y'y αποτελούν ένα **σύστημα ορθογωνίων αξόνων** ή απλώς **σύστημα αξόνων.**

Παρατηρήσεις:

*α) Στα παραπάνω σχήματα χρησιμοποιήσαμε κάθετους άξονες των οποίων οι μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο μήκος. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.** Όπως θα δούμε όμως παρακάτω, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες επιβάλλεται να χρησιμοποιήσουμε συστήματα αξόνων με διαφορετικού μήκους μονάδες μέτρησης στους άξονες x'x και y'y. Φυσικά, ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι ορθοκανονικό. Στα επόμενα σχήματα –εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά– λέγοντας σύστημα αξόνων θα εννοούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.*



*β) Το σύστημα των αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που λέγονται **τεταρτημόρια**. Στο παραπάνω σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.*

Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{1}{2}x^2$.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	-4	-2	0	2	4
y					

β) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα.

γ) Να ενώσετε με γραμμές τα ση-μεία αυτά. Τι γραμμή σχηματίζεται;

δ) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα (α), (β) και (γ) για την ίδια συνάρτηση $y = \frac{1}{2}x^2$ *χρησιμοποι-ώντας τον παρακάτω πίνακα τιμών. Τι παρατηρείτε;*

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

ε) Τι γραμμή θα σχηματιστεί, αν χρησιμοποιήσουμε ένα πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη τιμών;

Λύση

α) Για x = -4 είναι $y = \frac{1}{2}(-4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Για x = -2 είναι $y = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Για x = 0 είναι $y = \frac{1}{2}(0)^2 = 0$.

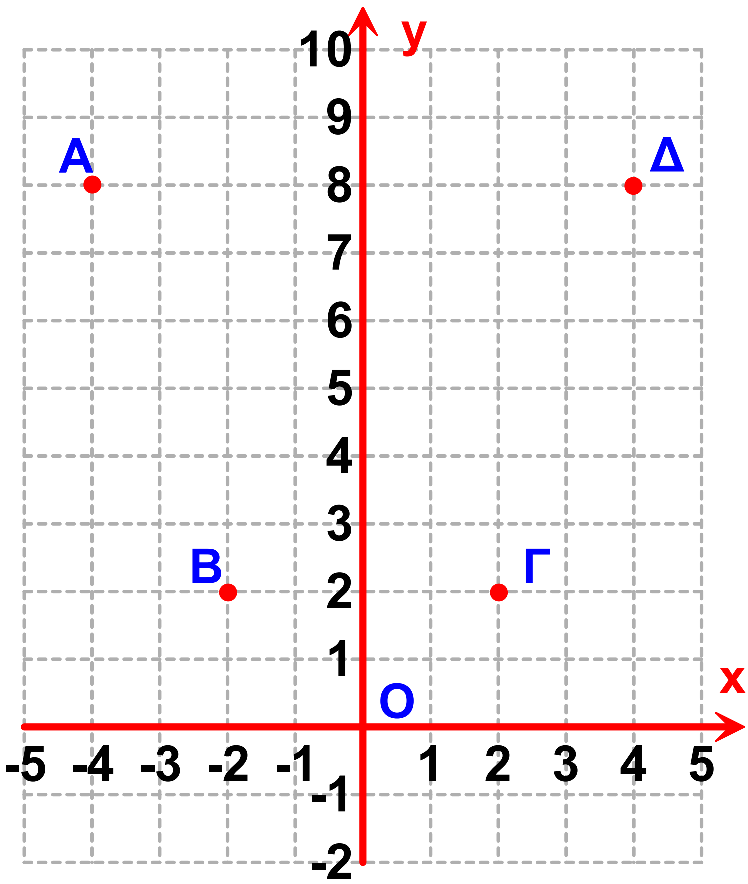
Για x = 2 είναι $y = \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Για x = 4 είναι $y = \frac{1}{2}(4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

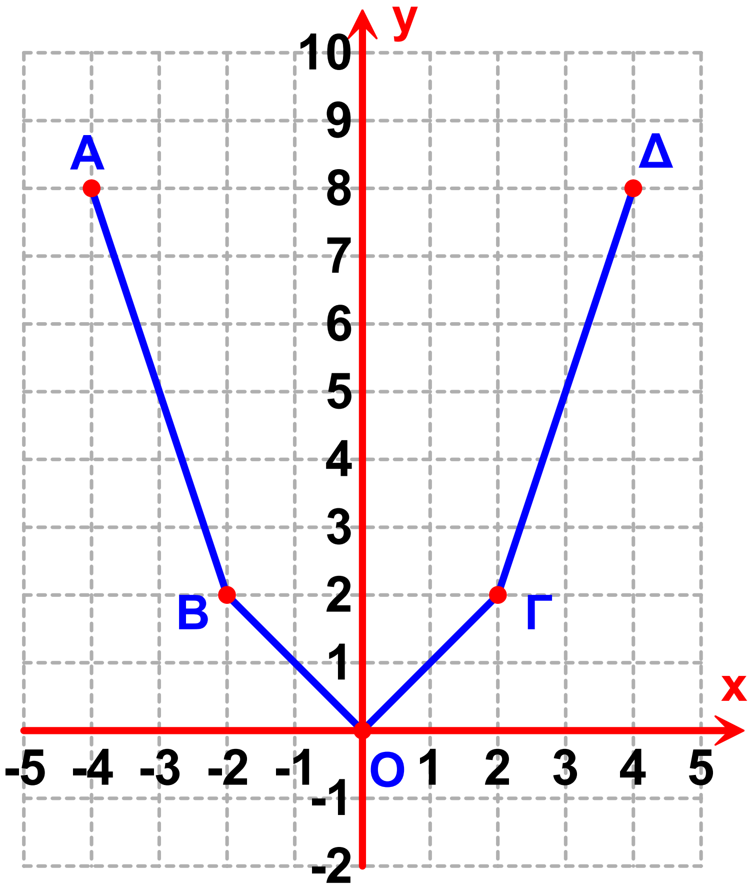
Επομένως, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

β).Τα ζεύγη (x, y) που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα είναι: (-4, 8), (-2, 2), (0, 0), (2, 2) και (4, 8) που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος



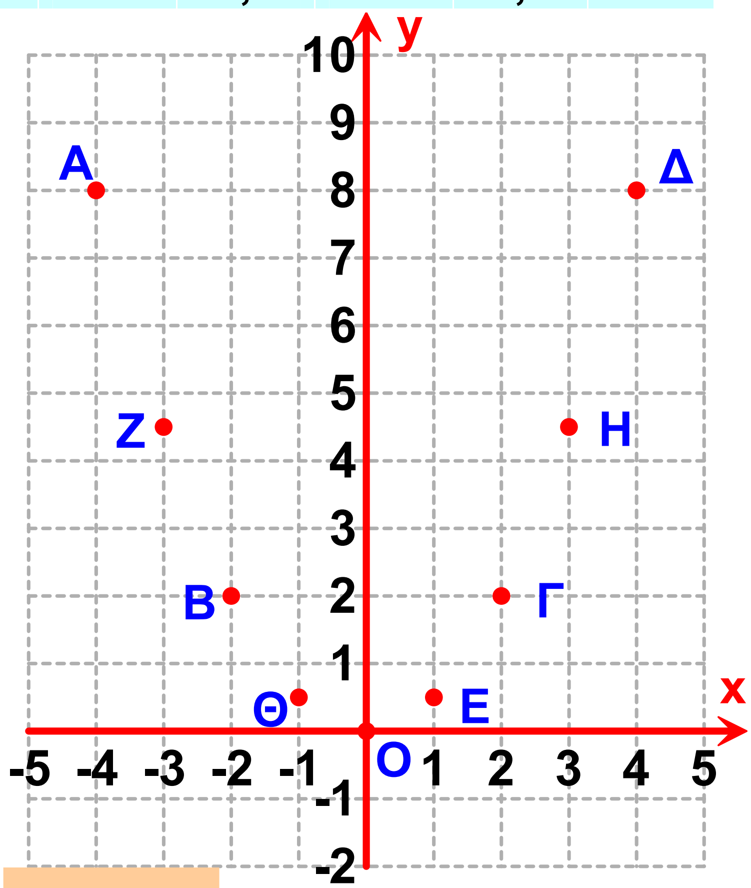
γ) Ενώνοντας με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή.

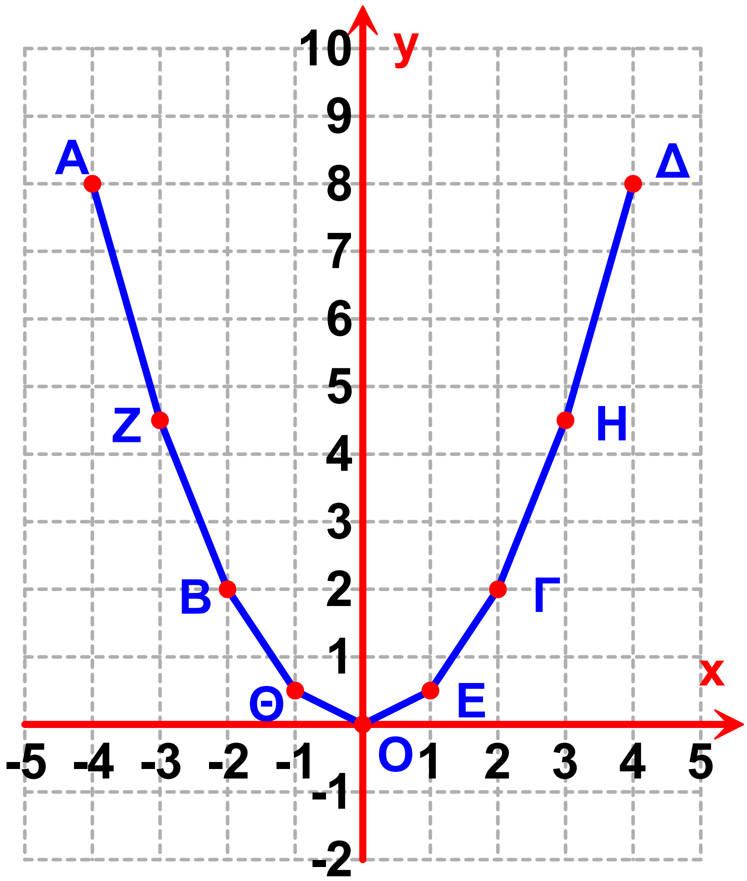


δ) Ομοίως έχουμε:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Τα σημεία τώρα είναι περισσότερα και η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται μοιάζει με καμπύλη.



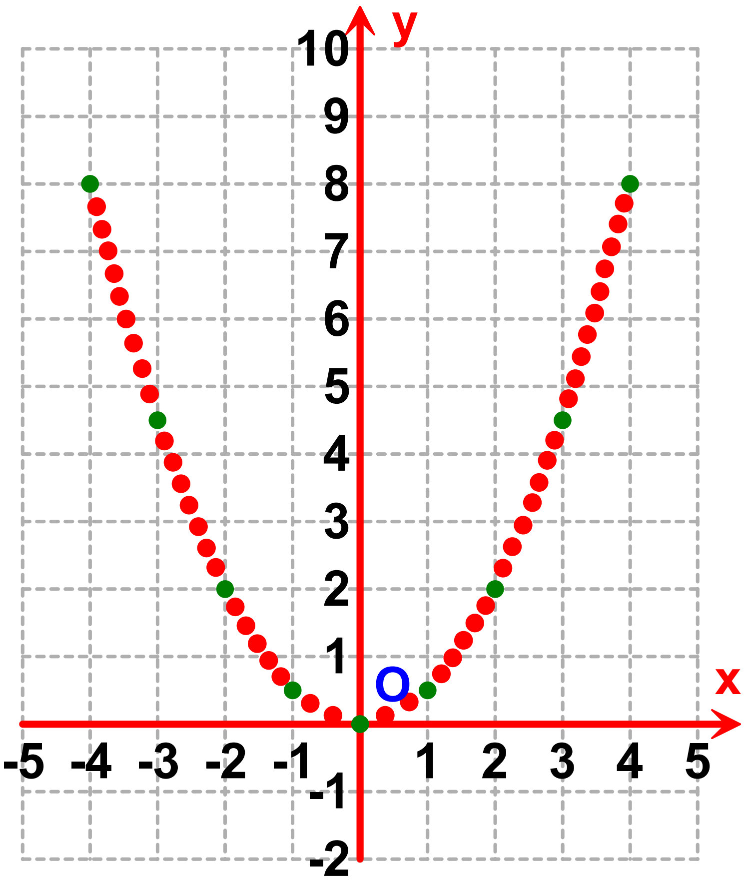


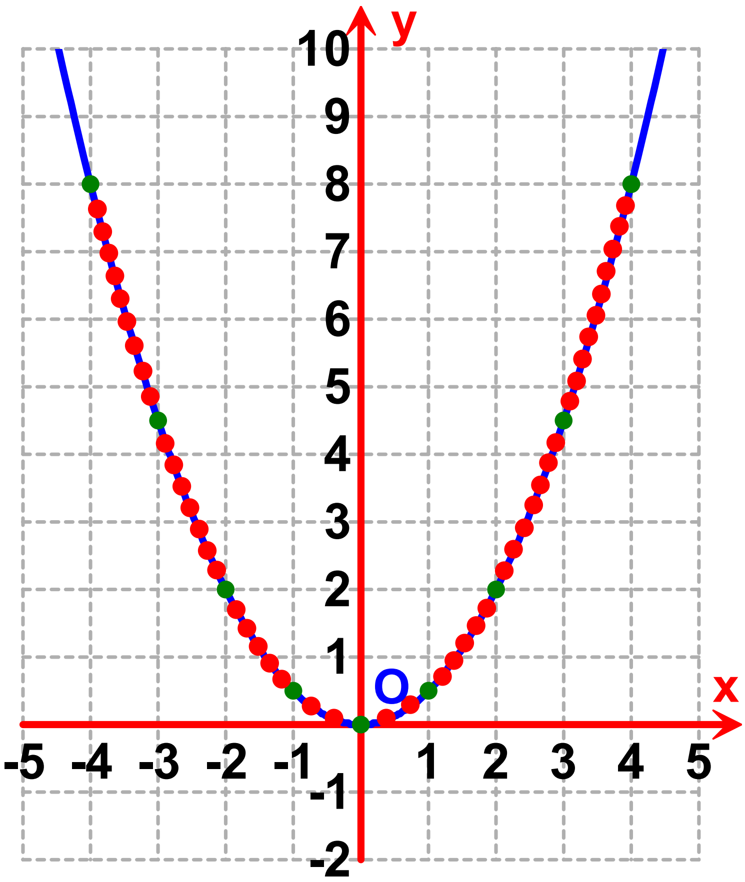
ε) Ας χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη. Για παράδειγμα:

x	-4	-3,9	-3,8	-3,7	-3,6	…	0
y	8	7,605	7,22	6,845	6,48	…	0

x	0	…	3,6	3,7	3,8	3,9	4
y	0	…	6,48	6,845	7,22	7,605	8

Όπως παρατηρούμε στα παρακάτω σχήματα, η γραμμή που θα σχηματιστεί θα είναι καμπύλη.


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
x
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
-1
-2


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
x
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
-1
-2

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

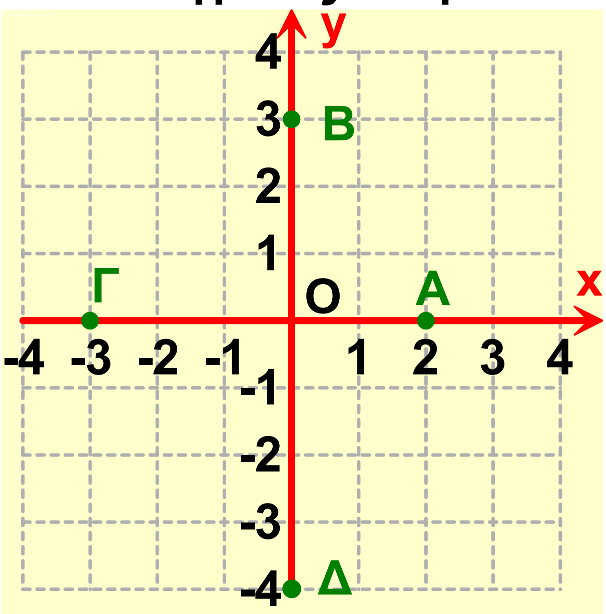
Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει μια «εποπτική» εικόνα της συνάρτησης αυτής και μας βοηθάει να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών x και y.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος. Τι συμπεραίνετε;

Λύση:

Παρατηρούμε ότι από τα σημεία Α και Γ οι κάθετες προς τον άξονα y'y αντιστοιχούν στο σημείο Ο, οπότε αυτά τα σημεία έχουν τεταγμένες 0. Άρα είναι Α(2, 0), Γ(-3, 0).



Ομοίως, από τα σημεία Β και Δ οι κάθετες προς τον άξονα x'x αντιστοιχούν στο σημείο Ο, οπότε τα σημεία

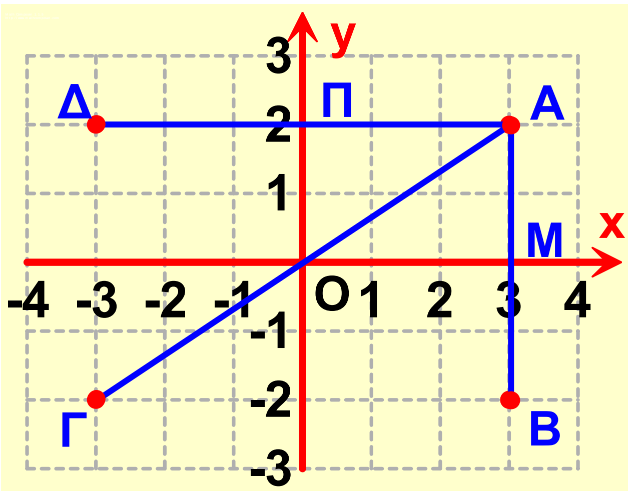
αυτά έχουν τετμημένη 0. Άρα είναι Β(0, 3) και Δ(0, -4).
Δηλαδή:

Κάθε σημείο του άξονα x'x έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα y'y έχει τετμημένη 0.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται το σημείο Α(3, 2). Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς:
α) τον άξονα x'x β) τον άξονα y'y γ) την αρχή Ο των αξόνων.
Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών;

Λύση:

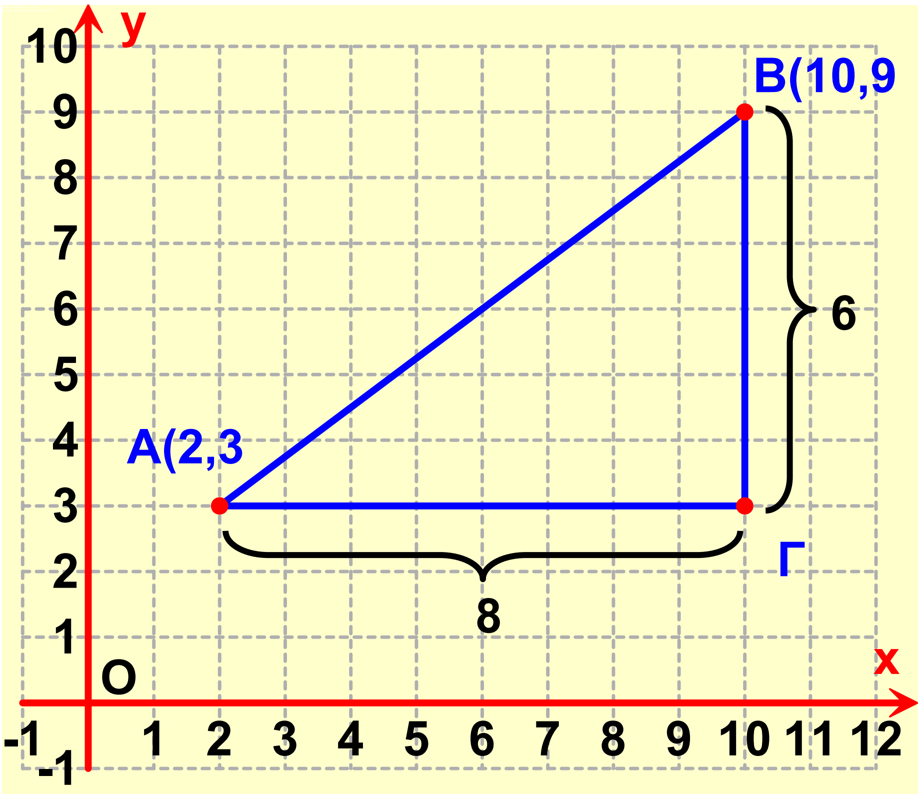


Από το Α φέρνουμε κάθετες ΑΜ και ΑΠ στους άξονες x'x και y'y.
α) Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΒ = ΜΑ. Το σημείο Β είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα x'x και έχει συντεταγμένες (3, -2).
β) Προεκτείνουμε την ΑΠ κατά τμήμα ΠΔ = ΠΑ. Το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y'y και έχει συντεταγμένες(-3, 2).
γ) Ενώνουμε το Α με την αρχή Ο των αξόνων και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΓ = ΟΑ. Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή Ο και έχει συντεταγμένες (-3, -2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνονται τα σημεία Α(2, 3) και Β(10, 9). Να υπολογίσετε την απόστασή τους ΑΒ. Τι συμπεραίνετε;

Λύση:



Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παραπάνω σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (10, 3), οπότε
ΑΓ = 10 – 2 = 8 και ΒΓ = 9 – 3 = 6.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:
$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ή $AB^2 = 8^2 + 6^2$ ή $AB^2 = 100$ ή ΑΒ = 10
Γενικότερα:

Αν δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Έχει διαπιστωθεί ότι το νερό της θάλασσας δεν έχει παντού την ίδια θερμοκρασία. Όσο πιο βαθιά κατεβαίνουμε, τόσο πιο κρύο γίνεται το νερό. Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη στο βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα:

x	0	50	100	200	400
y	28	20	17	12	9

όπου T είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) η οποία μεταβάλλεται ως συνάρτηση του βάθους x (σε μέτρα).

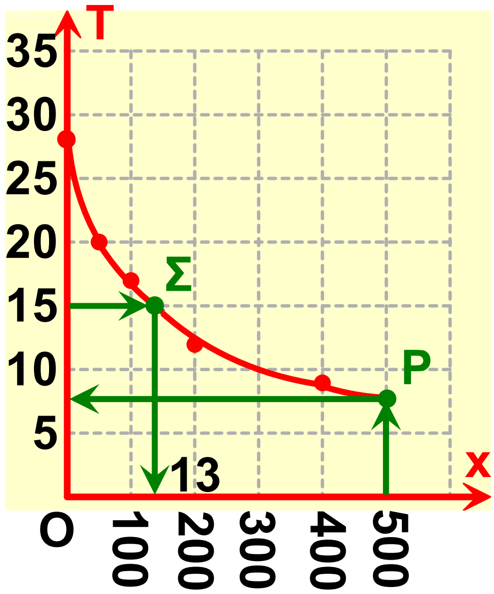
α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων.

γ) Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι 15^{o}C;

Λύση:

α) Σ’ ένα σύστημα αξόνων τοποθετούμε τα σημεία με συντεταγμένες (0, 28), (50, 20), (100, 17), (200, 12) και (400, 9). Χρησιμοποιούμε ένα μη ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στον άξονα x΄x η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε 100 μέτρα, ενώ στον άξονα y΄y η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 5^{o}C. Στη συνέχεια, ενώνουμε με μία καμπύλη τα σημεία αυτά.



β) Για να βρούμε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων, από το σημείο με τετμημένη 500 του άξονα x΄x φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y, που τέμνει την γραφική παράσταση στο σημείο Ρ. Στη συνέχεια, από το Ρ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x΄x, που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη (περίπου) 8. Άρα, η θερμοκρασία σε βάθος x = 500 m είναι (περίπου) T = 8^{o}C.
γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι 15^{o}C, φέρνουμε από το σημείο με τεταγμένη 15 του άξονα y΄y παράλληλη προς τον άξονα x΄x που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Σ. Στη συνέχεια, από το Σ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y΄y, που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη (περίπου) 130 m. Άρα, η θερμοκρασία είναι 15^{o}C σε βάθος (περίπου) x = 130 m.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

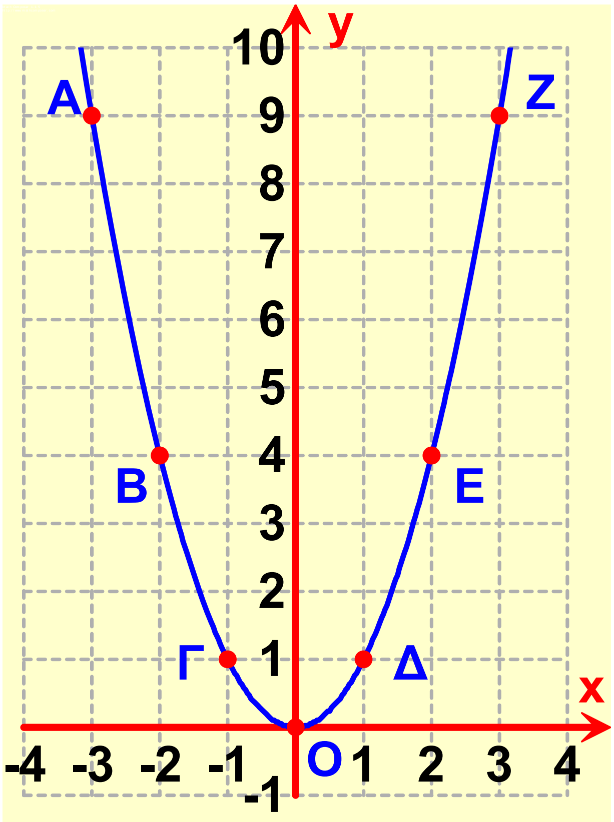
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

Λύση:

Σχηματίζουμε, καταρχάς, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

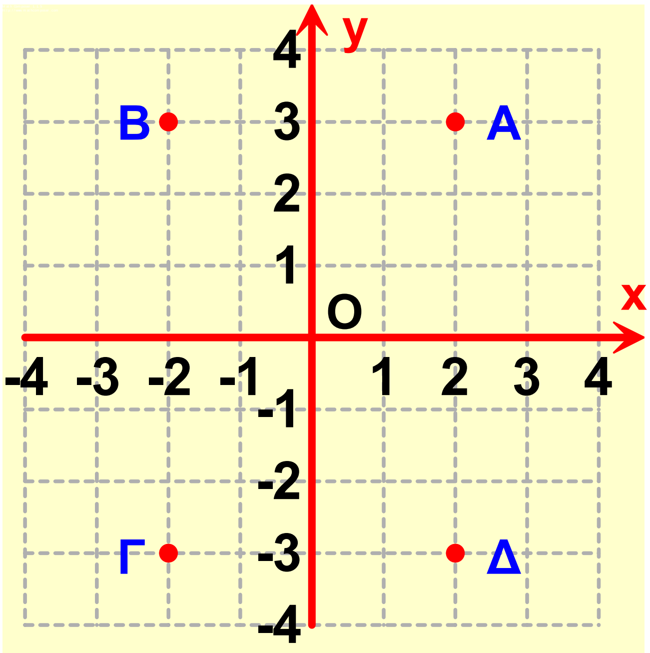
Στη συνέχεια, τοποθετούμε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) του παραπάνω πίνακα. Έτσι, βρίσκουμε τα σημεία Α(-3, 9), Β(-2, 4), Γ(-1, 1), Ο(0, 0), Δ(1, 1), Ε(2, 4) και Ζ(3, 9).
Στη συνέχεια, ενώνουμε με τη σειρά τα σημεία αυτά. Η καμπύλη που προκύπτει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σημείο τις συντεταγμένες του:

Σημείο	Συντεταγμένες
Α	(2,3)
	(3,2)
Β	(-2,3)
	(-3,2)
Γ	(-2,-3)
	(-3,-2)
Δ	(2,-3)
	(3,-2)



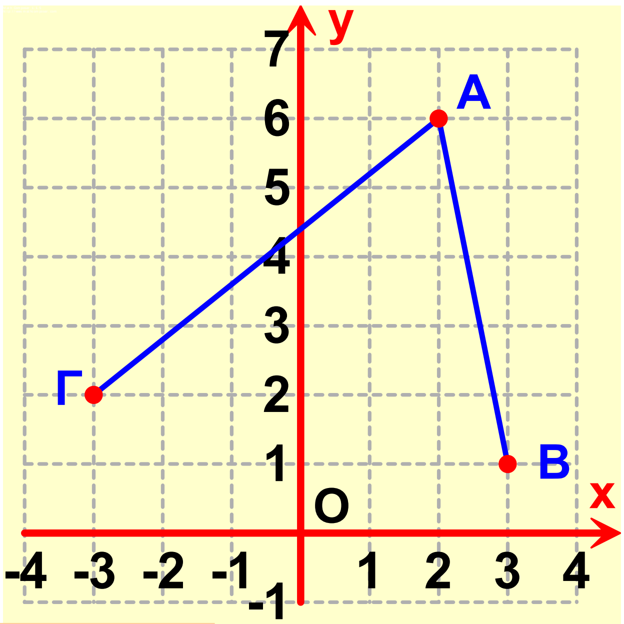
2 Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της 1ης γραμμής.

Σημείο Α	Συμμετρικό του Α ως προς τον x΄x	Συμμετρικό του Α ως προς τον y΄y	Συμμετρικό του Α ως προς το Ο
(-2, 3)	(-2, -3)	(2, 3)	(2, -3)
(3, 5)			
(-3, 5)			
(-3, -5)			
(3, -5)			

3 Στο παρακάτω σχήμα είναι:

α) ΑΒ < ΑΓ,
β) ΑΒ > ΑΓ,
γ) ΑΒ = ΑΓ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



4 Στο παρακάτω σχήμα:

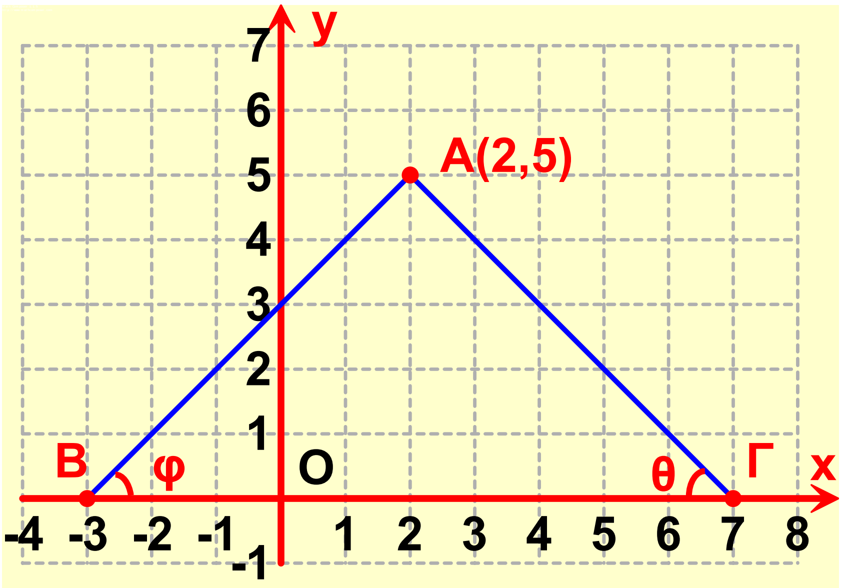
α) Α: $\hat{A} < 90^o$ Β: $\hat{A} = 90^o$ Γ: $\hat{A} > 90^o$

β) Α: εφθ=5 Β: $εφθ = \frac{7}{5}$ Γ: $εφθ = \frac{5}{7}$ Δ: εφθ = 1

γ) Α: ΑΒ < ΑΓ Β: ΑΒ = ΑΓ Γ: ΑΒ > ΑΓ

δ) Α: εφφ=3 Β: εφφ = 5 Γ: εφφ=1

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



5 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

α) για x=1, είναι y =........

Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5

β) για x=3, είναι y =........

Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5

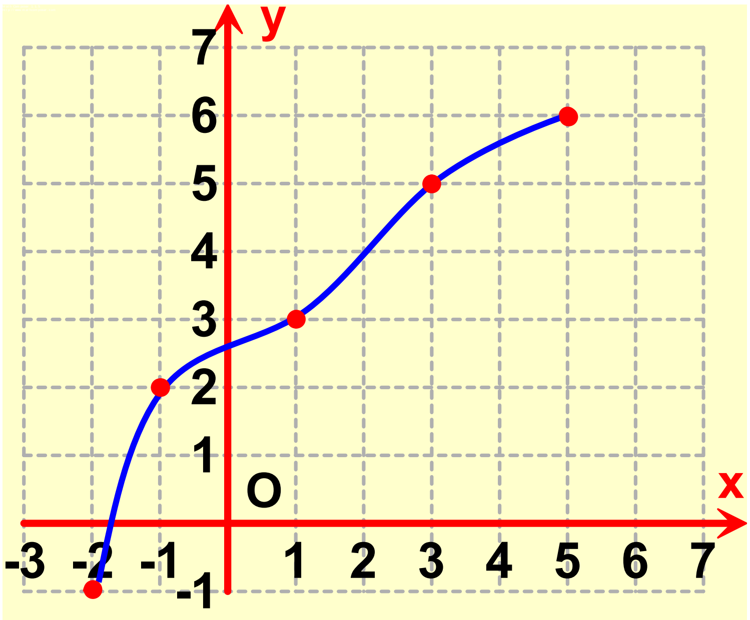
γ) για y=6, είναι x =........

Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5

δ) για y=2, είναι x =........

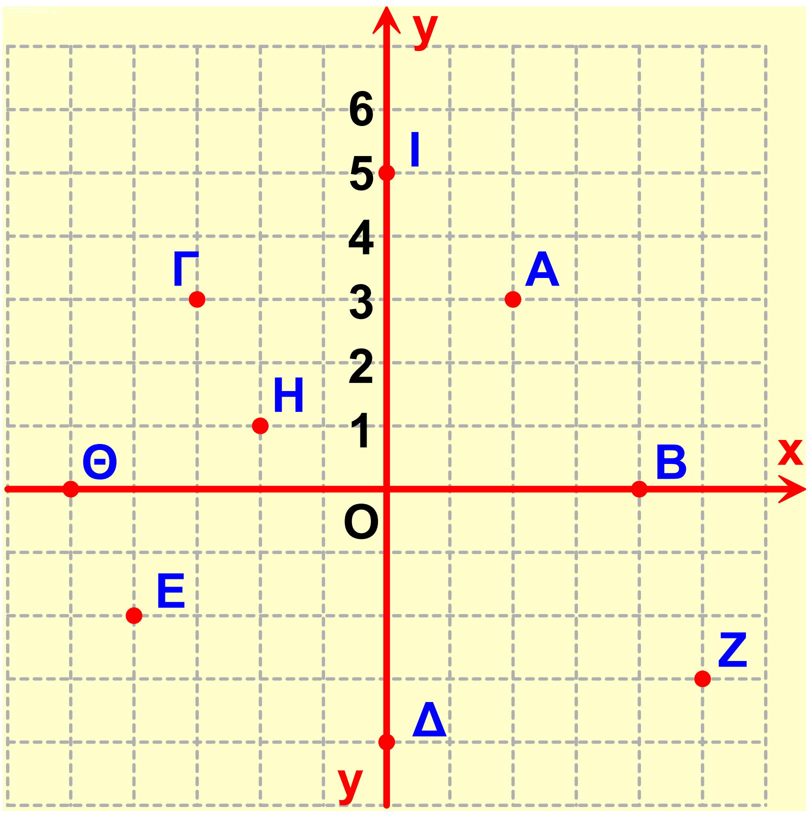
Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

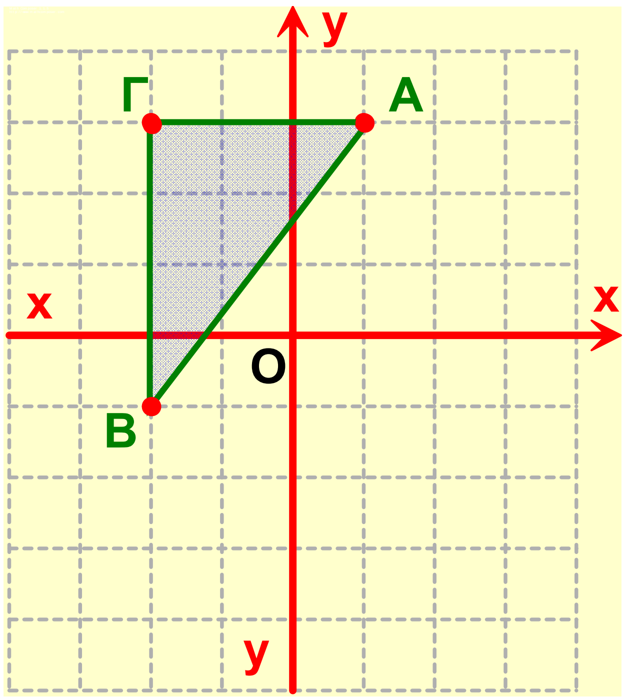
1 **Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ και Ι.**



2 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα σύστημα αξόνων και να σημειώσετε τα σημεία:
$Α(-3,\ 2)$, $Β(-0{,}25,\ 1)$, $Γ(0,\ -\frac{5}{2})$ $Δ(-\frac{9}{2},\ -\frac{1}{2})$
$Ε(-\sqrt{2},\ 0)$ $Ζ(2{,}4,\ -3{,}2)$.

3 Δίνονται τα σημεία $Α(-3,\ 4)$ και $Β(2,\ -\frac{7}{2})$. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να βρείτε τις συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων ως προς τον άξονα x'x, τον άξονα y'y και την αρχή Ο των αξόνων.

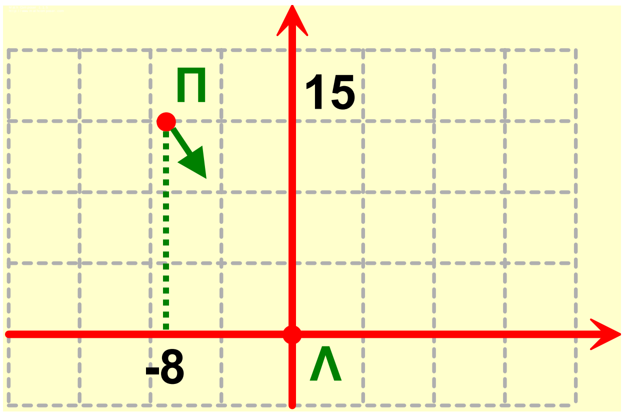
4 α) Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.
β) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
i) Το μήκος ΒΓ ισούται με:
Α: $1 + 3 = 4$ Β: $2 – 2 = 0$
Γ: $3 – 1 = 2$ Δ: $-1 – 3 = -4$
ii) Το μήκος ΑΓ ισούται με:
Α: $3 – 3 = 0$ Β: $1 + 2 = 3$
Γ: $1 – 2 = -1$ Δ: $2 – 1 = 1$
γ) Αφού παρατηρήσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, να επαληθεύσετε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με 5.



5 Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες x΄x και y΄y.
α) Α(3, 5) β) Β(-3, 2) γ) Γ(0, -4)

6 Να βρείτε τις απόστάσεις των σημείων:
α) Α(3, 5) και Β(5, 1) β) Α(-2, 1) και Β(2, -3)
γ) Α(3,-5) και Β(-2,-5) δ) Α(-5,-7) και Β(-5, 2)

7 Ένα πλοίο Π κινείται με ταχύτη-τα 8 μίλια την ώρα και κατευθύνεται προς το λιμάνι Λ. Η θέση του πλοίου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Λ και μονάδα μέτρησης το 1 μίλι, είναι
(-8, 15). Σε πόση ώρα θα φτάσει στο λιμάνι;



8 Η πίεση P (σε cm Hg) του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h από το έδαφος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Πίεση P σε cm Hg	76	68	60	52

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
β) Ποια είναι η πίεση σε ύψος 1,5 km από το έδαφος;
γ) Σε ποιο ύψος η πίεση είναι περίπου ίση με 70 cm Hg;

9 Η θερμοκρασία Τ του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Θερμοκρασία Τ σε °C	22	16	10	4

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
β) Πόση περίπου είναι η θερμοκρασία του αέρα σε ύψος 500 μέτρων;
γ) Σε ποιο ύψος η θερμοκρασία του αέρα είναι περίπου 12°C;

10 Όταν ένα σώμα (π.χ. μια μπάλα) πέφτει από ένα ψηλό σημείο (π.χ. από τον τελευταίο όροφο ενός ουρανοξύστη ύψους 100 m) δεν κινείται ομαλά (με σταθερή ταχύτητα), αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η απόσταση x που διανύει το σώμα ως συνάρτηση του χρόνου t.

t(s)	0	1	2	3	4
x(m)	0	5	20	45	80

Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Περιεχόμενα 1ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ