Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2.4 - 3.5

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Παναγιώτης Βλάμος, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης
Παναγιώτης Δρούτσας, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης
Γεώργιος Πρέσβης, ***Μαθημ/κός***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης
Κων/νος Ρεκούμης, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Βασίλειος Γιαλαμάς,
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.
Χαράλαμπος Τουμάσης, ***Σχολικός***
Σύμβουλος Μαθηματικών
Πολυξένη Ρόδου, ***Μαθηματικός,***
Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Θεοδόσης Βρανάς, ***Σκιτσογράφος -***
Εικονογράφος

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>

Ευγενία Βελάγκου, *Φιλόλογος Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>

Γεώργιος Πολύζος, *Πάρεδρος ε.θ. του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου*

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>

Γεώργιος Μήλιος, *Ζωγράφος-Χαράκτης*

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2.4 - 3.5

2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30^o, 45^o και 60^o

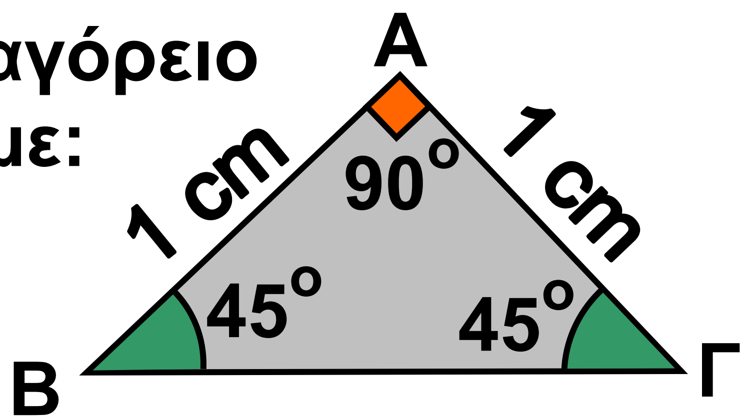
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45^o

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 1 cm. Τότε οι γωνίες της βάσης του είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^o$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ45^o, συν45^o και εφ45^o.

Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:



$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, άρα $B\Gamma = \sqrt{2}$.

Επομένως:

$$\etaμ45^o = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$συν45^o = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$εφ45^o = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

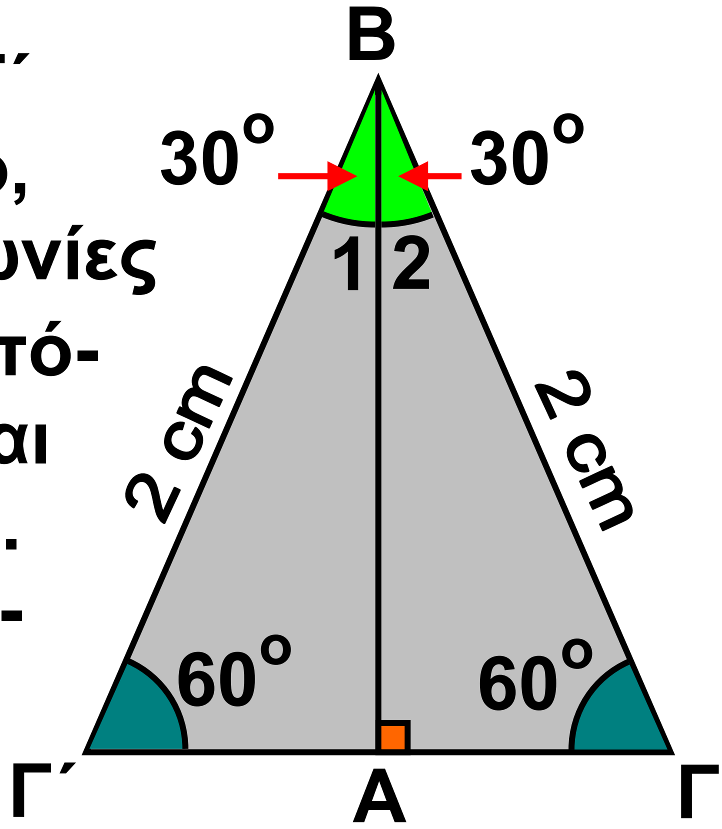
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30^o και 60^o

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΓ΄ με κοινή πλευρά την ΑΒ, οξείες γωνίες $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30^o$ και υποτείνουσες ΒΓ = ΒΓ΄ = 2 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς

αριθμούς ημ30°, συν30°, εφ30°, ημ60°, συν60° και εφ60°.

Λύση



Το τρίγωνο ΒΓΓ΄ είναι ισόπλευρο, αφού όλες οι γωνίες του είναι 60°, οπότε: ΓΓ΄ = 2 cm και ΑΓ = ΑΓ΄ = 1 cm. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\eta\mu\hat{B}_2 = \eta\mu 30^o = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}_2 = 30^o$, θα υπολογίσουμε πρώτα την πλευρά ΑΒ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, οπότε $AB = \sqrt{3}$.

Επομένως:

$$\text{συν}\hat{B}_2 = \text{συν}30^o = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ακόμα : $\text{εφ}\hat{B}_2 = \text{εφ}30^o = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επίσης, στο ίδιο σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\Gamma} = 60^o$:

$$\text{ημ}\hat{\Gamma} = \text{ημ}60^o = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{συν}\hat{\Gamma} = \text{συν}60^o = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{2}, \text{ και}$$

$$\text{εφ}\hat{\Gamma} = \text{εφ}60^o = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω έχουμε τον πίνακα:

	30^o	45^o	60^o
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα:
$ημ^2 45^o = 1 - ημ30^o$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $ημ45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε

$ημ^2 45^o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι: $ημ30^o = \frac{1}{2}$,

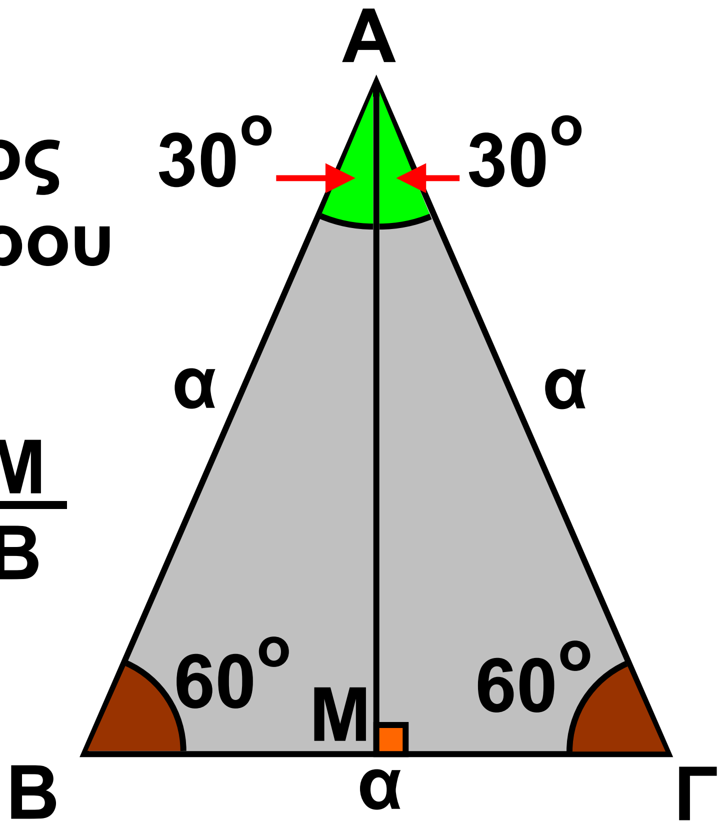
οπότε $1 - ημ30^o = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Επομένως $ημ^2 45^o = 1 - ημ30^o = \frac{1}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να αποδείξετε ότι το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, δίνονται από τους τύπους: $υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$ και $Ε = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$.

Λύση:



Φέρνουμε το ύψος ΑΜ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$$ημ\hat{Β} = ημ60^\circ = \frac{ΑΜ}{ΑΒ}$$

ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{υ}{α}$

ή $υ = α \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}α \cdot υ = \frac{1}{2}α \cdot α \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: Α = ημ30^o + συν60^o + 2συν30^o - 2εφ45^o + 2ημ45^o.

Λύση:

Έχουμε: Α = ημ30^o + συν60^o + 2συν30^o - 2εφ45^o + 2ημ45^o =

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε κάθε αριθμό της στήλης Α του πίνακα της επόμενης σελίδας να αντιστοιχίσετε τον ίσο του αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β.

2. Αν ημθ = συνθ, όπου θ οξεία γωνία, τότε:

Α: $\theta = 30^o$

Β: $\theta = 45^o$

Γ: $\theta = 60^o$

Δ: $\theta = 90^o$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $\sigma\upsilon\nu 60^o$	i) $\frac{1}{2}$
β) $\eta\mu 45^o$	ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
γ) $\eta\mu 30^o$	iii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
δ) $\eta\mu 60^o$	iv) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
ε) $\sigma\upsilon\nu 45^o$	v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
στ) $\sigma\upsilon\nu 30^o$	

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

☐ α) $\eta\mu 60^o = 2\eta\mu 30^o$

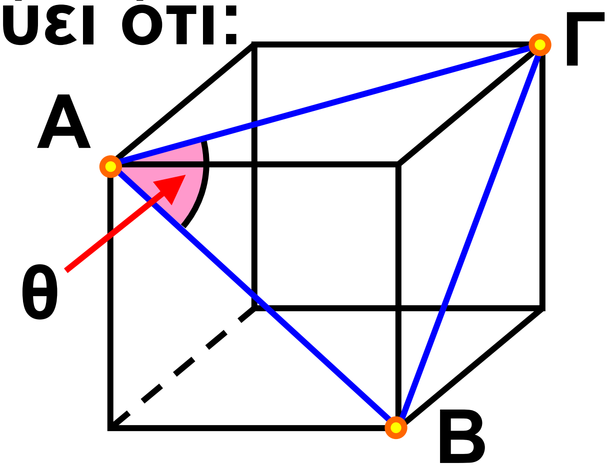
☐ β) $2\sigma\upsilon\nu 60^o = 1$

☐ γ) $\eta\mu 45^o + \sigma\upsilon\nu 45^o = 2\eta\mu 45^o$

☐ δ) $\sigma\upsilon\nu 30^o = \eta\mu 60^o$

☐ ε) $\sigma\upsilon\nu 60^o = \eta\mu 30^o$

4. Στον παρακάτω κύβο και για τη γωνία $\theta = B\widehat{A}\Gamma$, ισχύει ότι:



Α: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{2}$

Β: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Γ: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Δ: $\sigma\upsilon\nu\theta = 1$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τις πλευρές α και β ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\widehat{A} = 90^{o}$, $\widehat{B} = 30^{o}$, $\gamma = 5$ cm.

β) $\widehat{A} = 90^{o}$, $\widehat{B} = 45^{o}$, $\gamma = 7$ cm.

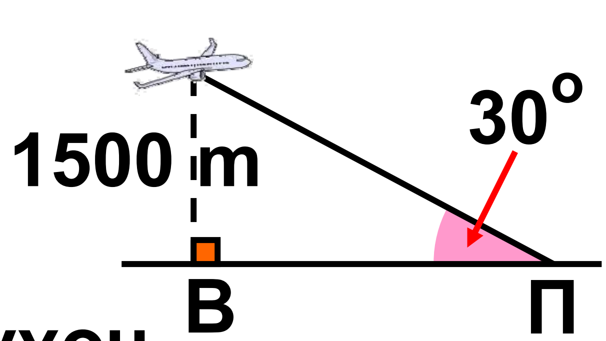
2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = 5 cm, ΑΓ = 13 cm.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
β) Να υπολογίσετε το ημ$\hat{A}$ και το συν$\hat{A}$.

3 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:
α) $ημ^2 30^o + ημ^2 45^o + ημ^2 60^o = \frac{3}{2}$.
β) $2ημ^2 30^o + 2συν^2 60^o - 2ημ^2 45^o = 0$.

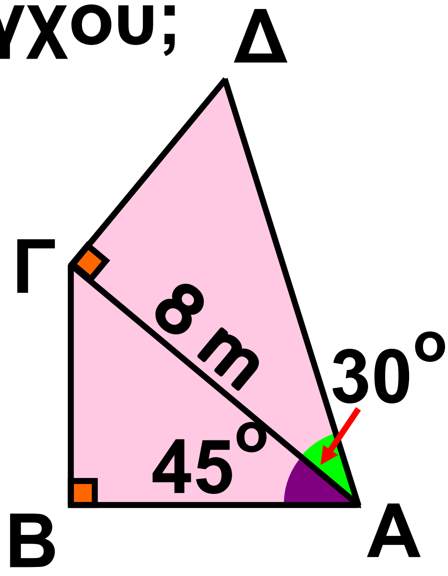
4 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = 2ημ^2 ω - συνω$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $ω = 30^o$ β) $ω = 45^o$ γ) $ω = 60^o$

5 Ένα αεροπλάνο Α πετά σε ύψος 1500m και φαίνεται από τον πύργο ελέγχου του αεροδρομίου με γωνία 30^o.

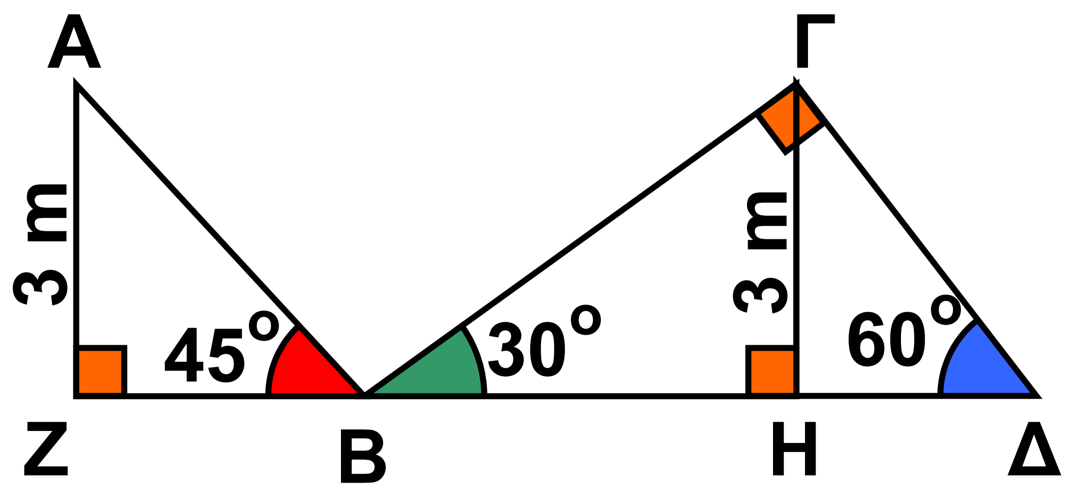


Ποια είναι η οριζόντια απόσταση ΠΒ από τον πύργο ελέγχου;

6 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΑΒ και ΑΔ.



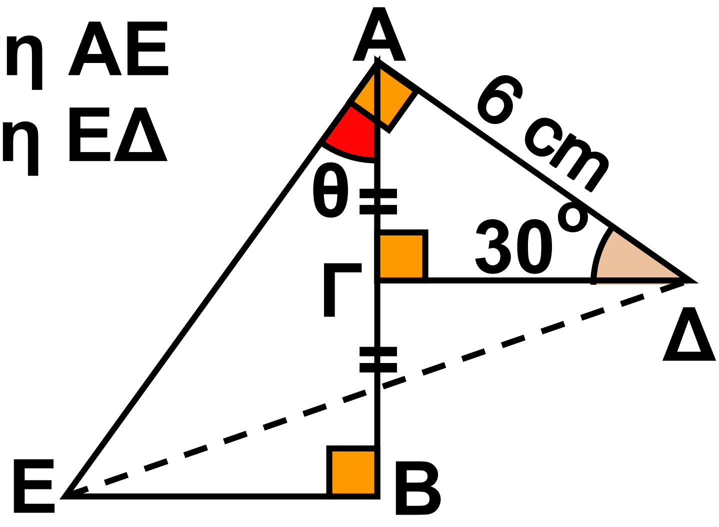
7 Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα.



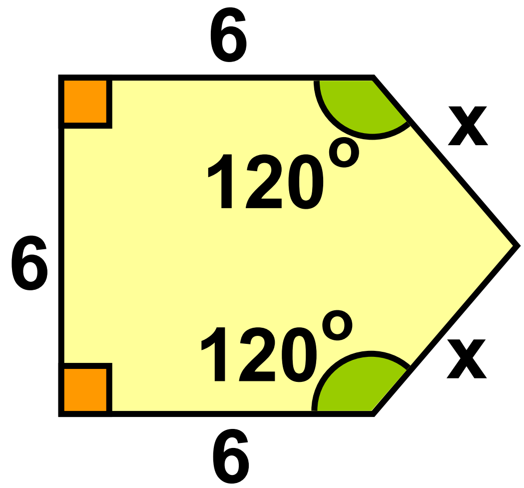
8 Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Γ είναι μέσο του ΑΒ. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία θ

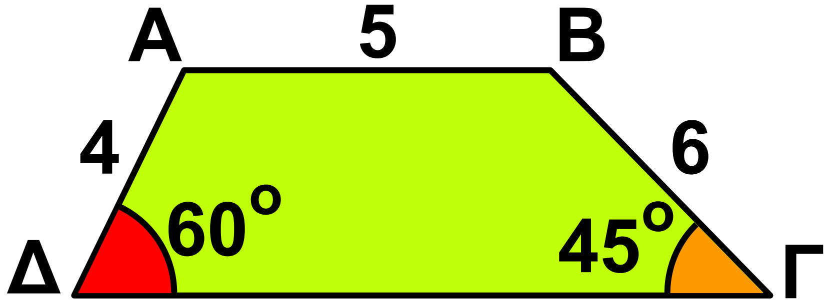
β) την απόσταση ΑΕ
γ) την απόσταση ΕΔ



9 Να υπολογίσετε την περίμετρο του διπλανού σχήματος.



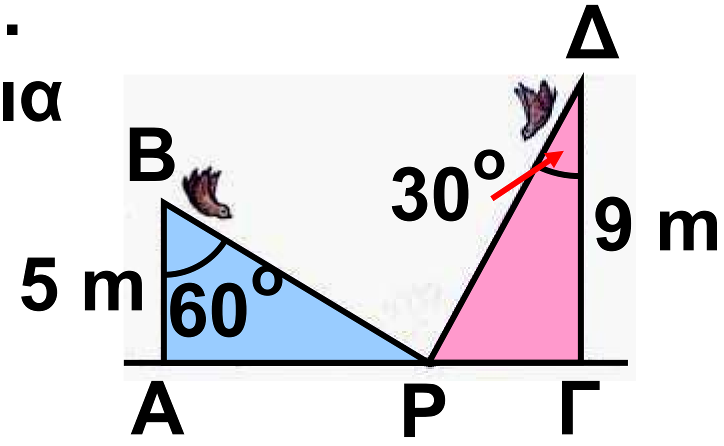
10 Στο παρακάτω τραπέζιο ΑΒΓΔ να υπολογίσετε το μήκος της μεγάλης βάσης ΓΔ.



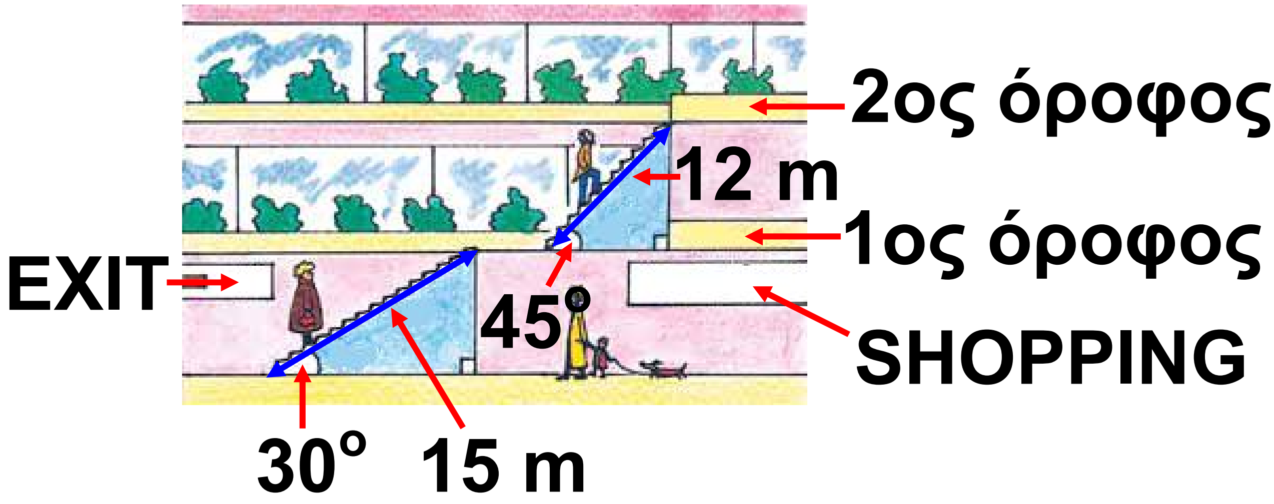
11 *Σε μια ρώγα από σταφύλι…*

Δύο σπουργίτια βρίσκονται στην κορυφή δύο στύλων ύψους 5 m και 9 m αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Ξεκινούν την ίδια στιγμή και με την ίδια ταχύτητα με στόχο μια ρώγα από σταφύλι που βλέπουν υπό γωνίες 60^o και 30^o στο έδαφος στο σημείο Ρ. Ποιο από τα δύο σπουργίτια θα φτάσει πρώτο τη ρώγα;

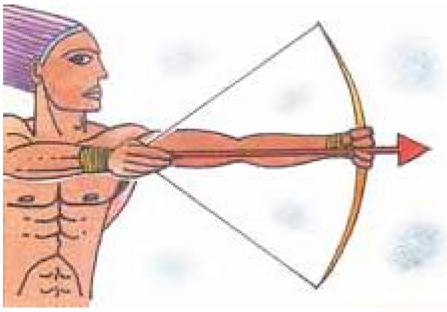


12 **Για ν' ανέβουμε στον 2ο όροφο ενός εμπορικού κέντρου χρησιμοποιούμε τις κυλιόμενες σκάλες, όπως βλέπουμε στο σχήμα της επόμενης σελίδας.**



Να υπολογίσετε το ύψος του 2ου ορόφου από το έδαφος.

2.5. Η έννοια του διανύσματος



Χαρακτηριστικά στοιχεία ενός διανύσματος

Όταν μετράμε ένα μέγεθος, όπως π.χ. το χρόνο που χρειαζόμαστε για να διαβάσουμε αυτή την παράγραφο, γράφουμε τη μέτρηση ως έναν αριθμό που ακολουθείται συνήθως από μία μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, χρειαζόμαστε 30 δευτερόλεπτα για να διαβάσουμε την παράγραφο αυτή. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο t για το χρόνο, γράφουμε: $t = 30$ (s).
Μερικά μεγέθη προσδιορίζονται πλήρως, αν δοθεί μόνο το μέτρο τους. Για παράδειγμα: ο χρόνος, που εκφράζεται σε ώρες, λεπτά, δευτερόλεπτα κ.τ.λ., η θερμοκρασία που εκφράζεται σε βαθμούς

Κελσίου, Φαρενάιτ κ.τ.λ., η μάζα που εκφράζεται σε χιλιόγραμμα, γραμμάρια κ.τ.λ.
Τέτοια μεγέθη λέγονται βαθμωτά ή μονόμετρα μεγέθη. Όμως, δεν είναι όλα τα μεγέθη μονόμετρα. Υπάρχουν και άλλα, που εκτός από μέτρο έχουν και κατεύθυνση. Ένα παράδειγμα τέτοιου μεγέθους είναι το παρακάτω:

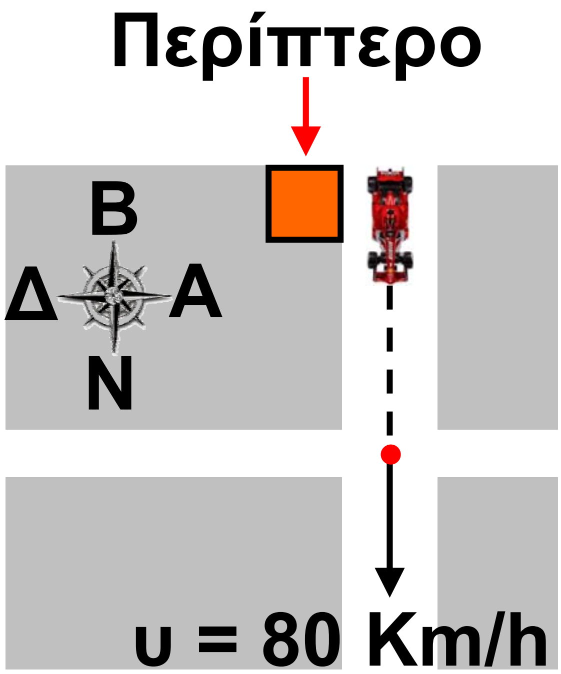
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Αντώνης συζητά με το Βαγγέλη για ένα αυτοκίνητο που πέρασε από μπροστά του την ώρα που βρισκόταν σε ένα σταυροδρόμι, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.
Αντώνης: Άσε, Βασίλη, πέρασε από μπροστά μου ένα αυτοκίνητο σαν σίφουνας! Πρέπει να έτρεχε

τουλάχιστον με 100 χιλιόμετρα την ώρα.
***Βαγγέλης:** Καλά, προς τα πού πήγαινε τόσο γρήγορα; Μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου;*

Λύση

Για να προσδιορίσουμε πλήρως την κίνηση του αυτοκινήτου, πρέπει να γνωρίζουμε:



α) Από ποιο σημείο ξεκίνησε το αυτοκίνητο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι ξεκίνησε από το περίπτερο.

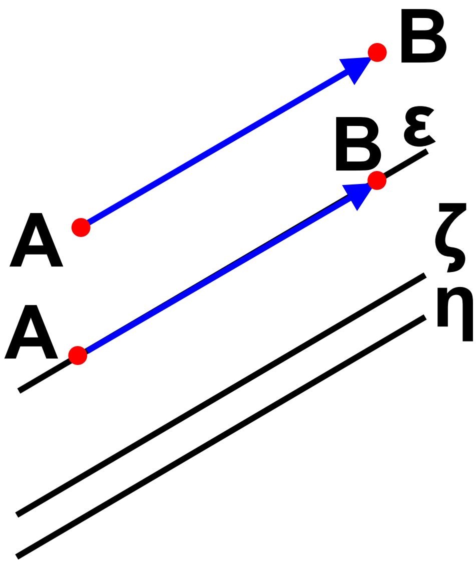
β) Προς ποια κατεύθυνση ή αλλιώς με ποια φορά κινείται; Στο σχήμα φαίνεται ότι κινείται νότια.

γ) Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται. Εδώ, το μέτρο της ταχύτητας είναι 80 km/h.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι δεν αρκεί να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο της ταχύτητας (80 km/h) αλλά για να καταλάβουμε προς τα πού κινείται το αυτοκίνητο, χρειάζεται η αρχική του θέση και η κατεύθυνσή του.

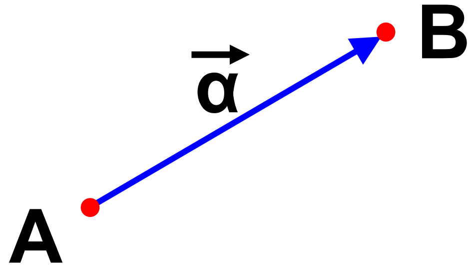
Μεγέθη, όπως η ταχύτητα, που έχουν μέτρο και κατεύθυνση, ονομάζονται διανυσματικά μεγέθη.

Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με **διανύσματα** που συμβολίζονται με βέλη έχοντας ένα σημείο Α που είναι η **αρχή** και λέγεται σημείο εφαρμογής του διανύσματος και ένα σημείο Β που είναι το **πέρας** (τέλος) του διανύσματος. Το διάνυσμα, τότε, συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.

Ένα διάνυσμα έχει τα εξής στοιχεία:



α) **Διεύθυνση**, την ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.



β) **Φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β ($\overrightarrow{AB}$) ή αρχή το Β και πέρας το Α ($\overrightarrow{BA}$).

γ) **Μέτρο**, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας αριθμός θετικός ή μηδέν.

Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την κατεύθυνση ενός διανύσματος.

Παρατήρηση:

Συχνά για ευκολία συμβολίζουμε τα διανύσματα με μικρά γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$,…

Τα διανύσματα παίζουν βασικό ρόλο στη Φυσική. Εκτός από τη μετατόπιση και την ταχύτητα άλλα διανυσματικά μεγέθη είναι η επιτάχυνση, η δύναμη, το βαρυτικό, το ηλεκτρικό, το μαγνητικό πεδίο κ.ά.

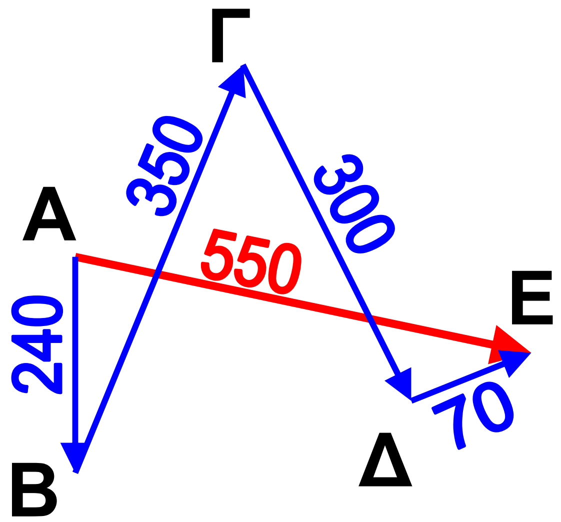
Μέτρο διανύσματος

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του μέτρου του διανύσματος, αρκεί να καταλάβουμε τη διαφορά μεταξύ απόστασης και μετατόπισης. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ένα πλοίο του Πολεμικού Ναυτικού συμμετέχει σε μια άσκηση. Απόπλέει αρχικά από τη Σαλαμίνα (Α)

και σταματάει δια-δοχικά σε τέσσερα προκαθορισμένα σημεία ανεφοδια-σμού (Β), (Γ), (Δ) και (Ε). Διανύο-ντας τις αποστά-σεις που φαίνονται στον πίνακα,



Διαδρομή	Απόσταση
(Α) → (Β)	240 ναυτικά μίλια
(Β) → (Γ)	350 ναυτικά μίλια
(Γ) → (Δ)	300 ναυτικά μίλια
(Δ) → (Ε)	70 ναυτικά μίλια

ποια είναι η συνολική απόσταση που διένυσε το πλοίο και ποια είναι η απόσταση της αρχικής και της τελικής του θέσης;

Λύση

Η συνολική απόσταση που διένυσε το πλοίο είναι:

$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{B\Gamma}| + |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| + |\overrightarrow{\Delta E}| =$
= 240 + 350 + 300 + 70 = 960 ναυτικά μίλια.

Η απόσταση της αρχικής και τελικής του θέσης είναι: $|\overrightarrow{AE}|$ = 550 ναυτικά μίλια.

Η απόσταση είναι **βαθμωτό (αριθμητικό) μέγεθος.** Λέμε, π.χ. ότι το πλοίο διένυσε απόσταση 960 ναυτικών μιλίων, αλλά δεν ξέρουμε πού πήγε.

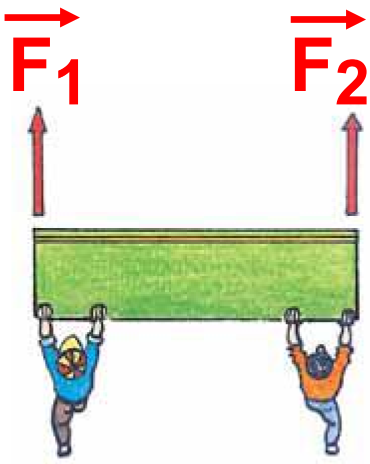
Ποια είναι όμως η μετατόπιση του πλοίου;

Η μετατόπιση είναι **διανυσματικό** μέγεθος. Λέμε, π.χ. ότι το πλοίο ξεκίνησε από τη Σαλαμίνα και μετατοπίστηκε 240 ναυτικά μίλια προς Νότο, οπότε ξέρουμε ακριβώς από πού ξεκίνησε και πού κατέληξε. Η τελική μετατόπιση του πλοίου εκφράζεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$,

καθώς μας ενδιαφέρει η αρχική και η τελική θέση του πλοίου.
Ας προσέξουμε ιδιαίτερα ότι το μέτρο της μετατόπισης $\overrightarrow{AE}$ είναι $|\overrightarrow{AE}|$ = 550 ναυτικά μίλια και δεν έχει καμία σχέση με τη συνολική απόσταση που διένυσε από τη Σαλαμίνα έως το τελευταίο σημείο ανεφοδιασμού (960 ναυτικά μίλια).

Ίσα και αντίθετα διανύσματα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3



Σε μια μετακόμιση ο Μιχάλης και ο Γρηγόρης προσπαθούν να μετακινήσουν ένα θρανίο σπρώχνοντάς το από τα δύο άκρα του, όπως φαίνεται στο σχήμα, σε μια παράλληλη θέση. Τι νομίζετε ότι ισχύει για τις δυνάμεις που εφαρμόζει ο Μιχά-

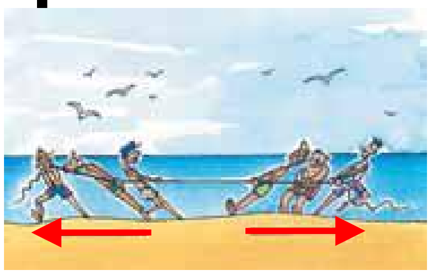
λης και ο Γρηγόρης στα άκρα του θρανίου;

Λύση

Όπως καταλαβαίνουμε τα διανύσματα $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ θα είναι ίσα.

Δύο διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα.

Ας θυμηθούμε ένα παιχνίδι που παίζεται συχνά στις παραλίες ή στις κατασκηνώσεις. Δύο ομάδες παιδιών αρχίζουν να τραβάνε ένα σχοινί προς αντίθετη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ακριβώς στη μέση του σχοινιού υπάρχει μια γραμμή. Αν μία ομάδα καταφέρει να τραβήξει τον πρώτο παίκτη της άλλης ομάδας μετά τη γραμμή, τότε η ομάδα κερδίζει.

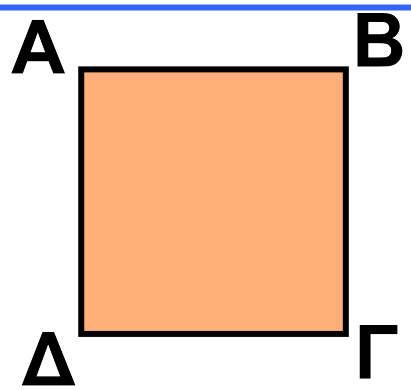


Βλέπουμε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται από τις δύο ομάδες, όταν παραμένουν ακίνητες, άλλη-λοεξουδετερώνονται ή όπως λέμε, είναι αντίθετες.

Δύο διανύσματα είναι αντίθετα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται το διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ. Ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{A\Delta}$,



α) έχουν ίσα μέτρα;
β) είναι ίσα;
γ) είναι αντίθετα;

Λύση:

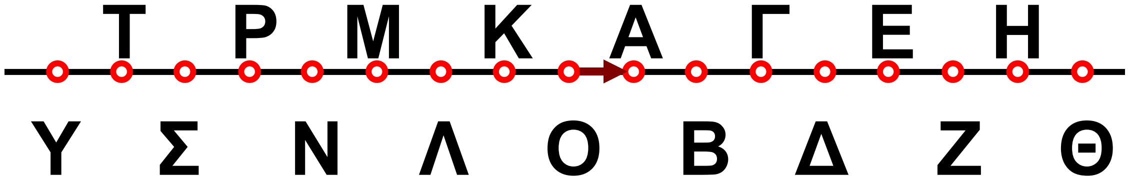
α) Γνωρίζουμε ότι οι πλευρές ενός τετραγώνου έχουν το ίδιο μήκος.

Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ έχουν ίσα μέτρα. Δηλαδή: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| = |\overrightarrow{\Delta A}| = |\overrightarrow{A\Delta}|$.

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι ίσα, γιατί έχουν ίδια διεύθυνση και φορά και ίσα μέτρα. Ομοίως, τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι ίσα. Δηλαδή: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$.

γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γιατί έχουν ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά. Ομοίως τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Delta A}$ είναι αντίθετα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2



Στο παραπάνω σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων είναι

ίσες με 1 cm. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΟΒ}$, $\overrightarrow{ΟΓ}$, $\overrightarrow{ΓΛ}$, $\overrightarrow{ΘΖ}$, $\overrightarrow{ΔΑ}$, $\overrightarrow{ΡΔ}$, $\overrightarrow{ΤΛ}$, $\overrightarrow{ΚΘ}$, $\overrightarrow{ΝΑ}$, $\overrightarrow{ΑΖ}$ και $\overrightarrow{ΓΛ}$. Ποια από τα διανύσματα αυτά είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;

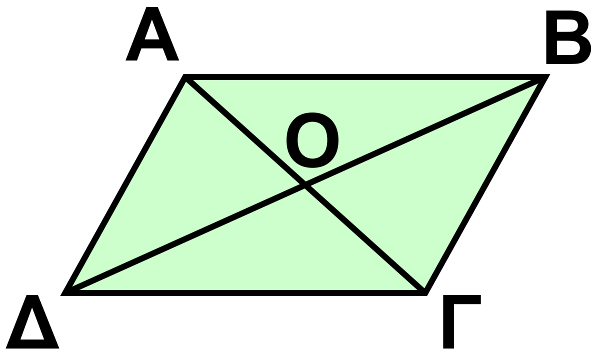
Λύση:

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΒ είναι 2 cm. Δηλαδή: $|\overrightarrow{ΟΒ}|$ = 2. Ομοίως βρίσκουμε: $|\overrightarrow{ΟΓ}|$ = 3, $|\overrightarrow{ΓΛ}|$ = 5, $|\overrightarrow{ΘΖ}|$ = 2, $|\overrightarrow{ΔΑ}|$ = 3, $|\overrightarrow{ΡΔ}|$ = 9, $|\overrightarrow{ΤΛ}|$ = 5, $|\overrightarrow{ΚΘ}|$ = 9, $|\overrightarrow{ΝΑ}|$ = 5, $|\overrightarrow{ΒΗ}|$ = 5 και $|\overrightarrow{ΡΚ}|$ = 4.

Ίσα διανύσματα είναι τα: $\overrightarrow{ΤΛ}$ = $\overrightarrow{ΝΑ}$= $\overrightarrow{ΒΗ}$ και $\overrightarrow{ΡΔ}$ = $\overrightarrow{ΚΘ}$.

Αντίθετα είναι τα: $\overrightarrow{ΓΛ}$ και $\overrightarrow{ΤΛ}$, $\overrightarrow{ΓΛ}$ και $\overrightarrow{ΝΑ}$, $\overrightarrow{ΓΛ}$ και $\overrightarrow{ΒΗ}$, $\overrightarrow{ΔΑ}$ και $\overrightarrow{ΟΓ}$, $\overrightarrow{ΟΒ}$ και $\overrightarrow{ΘΖ}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

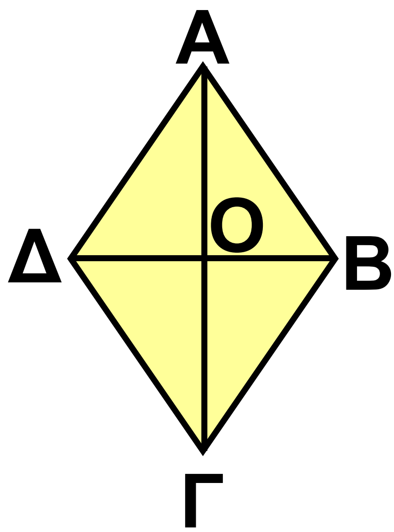


1. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ β) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

γ) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Delta}$ δ) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Gamma}$

ε) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$



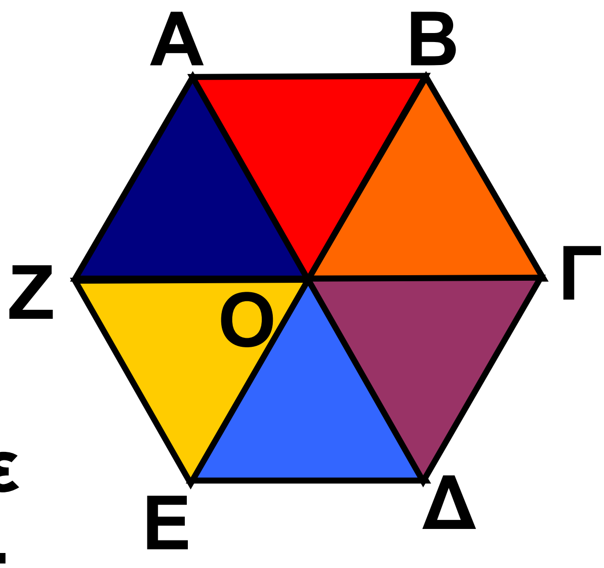
2 Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

α) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$

β) $|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{AB}|$ γ) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$

δ) $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{BA}$ ε) $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB}$

3 Στο διπλανό εξάγωνο όλα τα τρίγωνα διαφορετικού χρώματος είναι ισόπλευρα. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:



α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{\ldots\Gamma} = \overrightarrow{\ldots O}$

β) $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{\ldots\Delta} = \overrightarrow{\ldots E}$

γ) $|\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{E\ldots}| = |\overrightarrow{E\ldots}| = |\overrightarrow{E\ldots}|$

4 Ποια από τα παρακάτω μεγέθη χρειάζονται ένα διάνυσμα για να παρασταθούν;

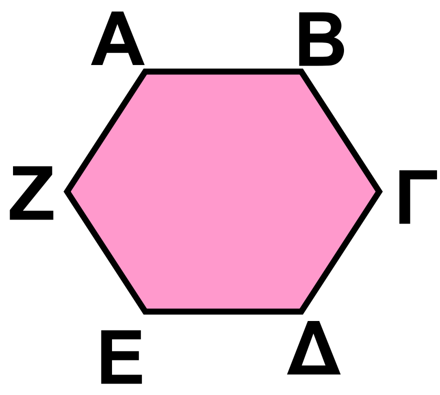
α) βάρος β) ύψος γ) μάζα

δ) ταχύτητα

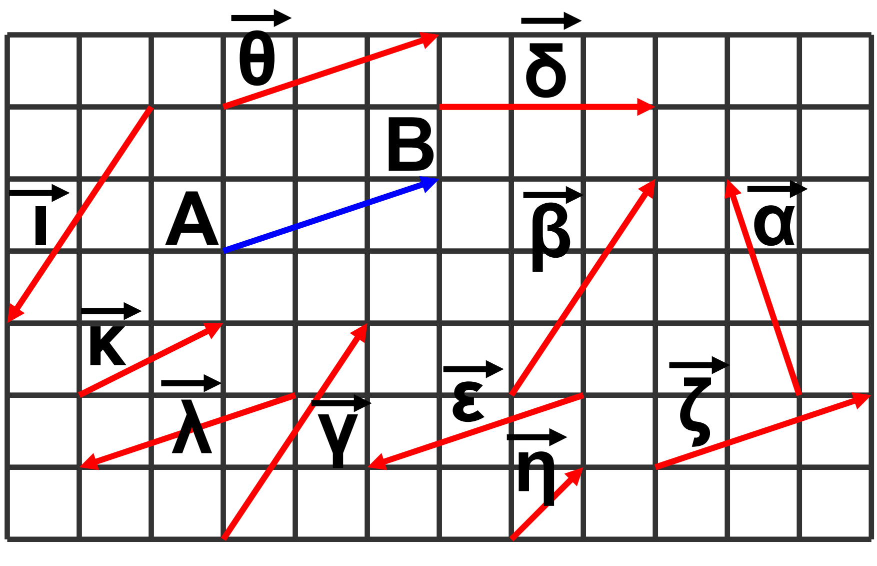
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

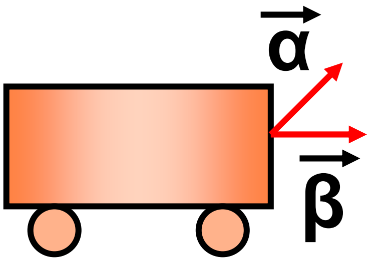
1 Στο εξάγωνο του διπλανού σχήματος όλες οι πλευρές είναι ίσες. Από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{E\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{AZ}$ ποια είναι ίσα και ποια αντίθετα;



2 Ποια από τα διανύσματα του σχήματος είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$; Ποια είναι αντίθετα με το $\overrightarrow{AB}$;



3 Τα διανύσματα α και β του διπλανού σχήματος έχουν ίσα μέτρα. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα αυτά είναι ίσα.

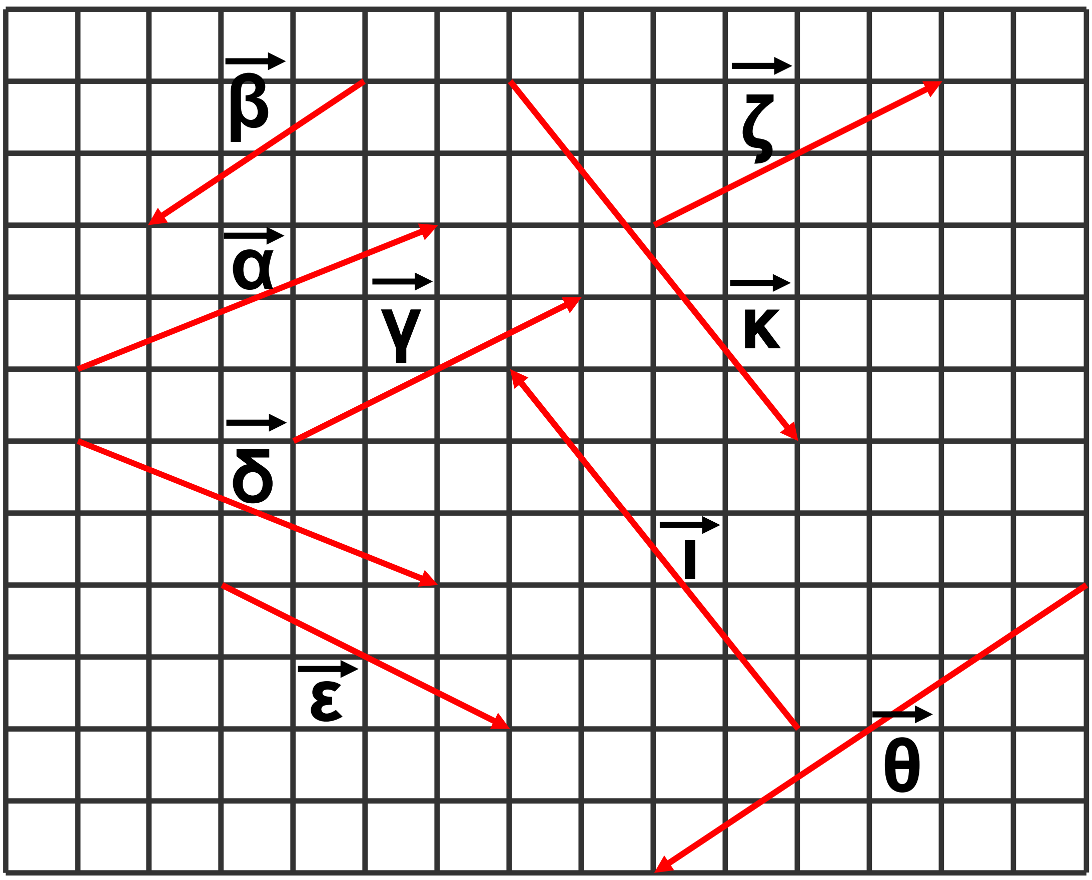


4 Ποια από τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος:

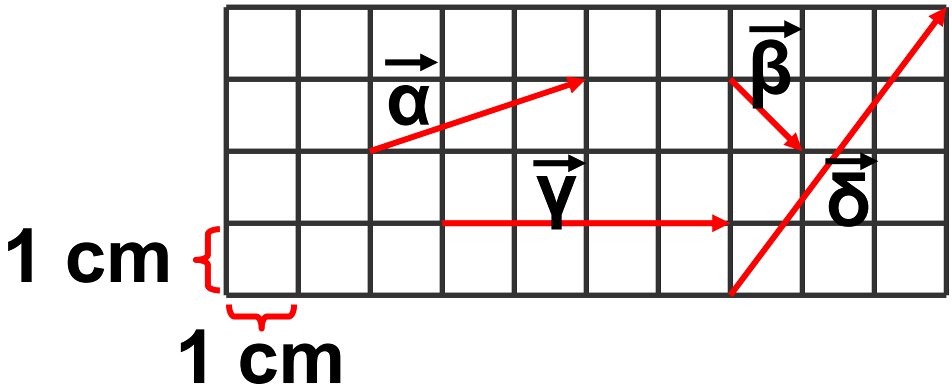
α) έχουν ίσα μέτρα;

β) είναι ίσα;

γ) είναι αντίθετα;



5 Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ του σχήματος.

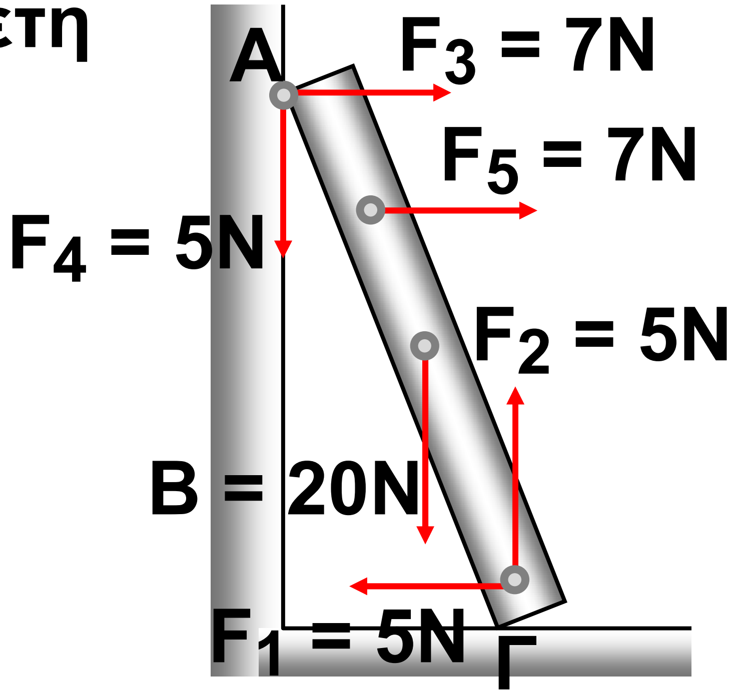


6 Σ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Γ, ένα διάνυσμα $\overrightarrow{ΓΔ}$ αντίθετο του $\overrightarrow{ΑΒ}$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Δ, το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΑ}$. Να αποδείξετε ότι το $\overrightarrow{ΔΑ}$ είναι αντίθετο του $\overrightarrow{ΒΓ}$.

7 Στη δοκό ΑΓ, του σχήματος της επόμενης σελίδας, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{B}$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$. Να βρείτε ποιες από αυτές:

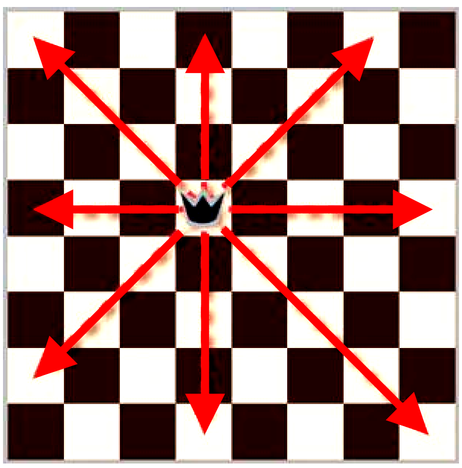
α) έχουν ίδια διεύθυνση

β) έχουν αντίθετη φορά
γ) είναι αντί-θετες
δ) είναι ίσες
ε) έχουν ίσα μέτρα



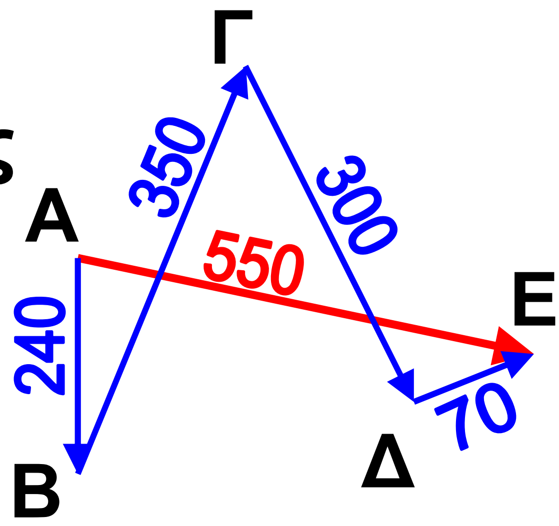
ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο σκάκι η βασίλισσα μπορεί να κινηθεί οριζόντια, κάθετα και διαγώνια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορείτε να τοποθετήσετε άλλες 4 βασίλισσες, έτσι ώστε, μαζί μ' αυτήν που έχει ήδη τοποθετηθεί, να καλύπτουν και τα 64 τετράγωνα του σκακιού;



2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

Άθροισμα διανυσμάτων

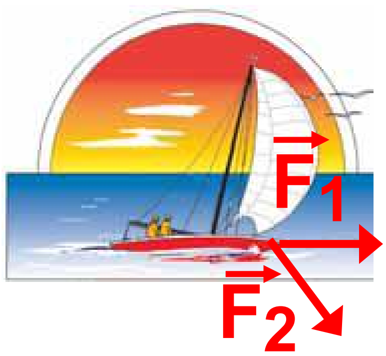


Στη δραστηριότητα 2 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε ότι η τελική μετατόπιση ήταν το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΕ}$. Οι διαδοχικές μετατοπίσεις ήταν τα διανύσματα: $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$, τα οποία λέγονται διαδοχικά διανύσματα, γιατί το τέλος του καθενός είναι η αρχή του επομένου. Είναι φανερό ότι το άθροισμα των διαδοχικών μετατοπίσεων ισούται με την τελική μετατόπιση, δηλαδή: $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΑΕ}$. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται το άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων. Τι

γίνεται, όμως, όταν τα διανύσματα δεν είναι διαδοχικά; Ας δούμε ένα διαφορετικό παράδειγμα.

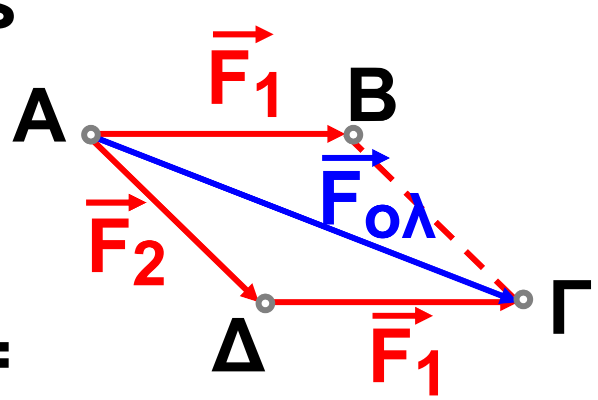
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Σέργιος είναι καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού, που έχει αναμμένη τη μηχανή του και κρατάει σταθερή πορεία. Χωρίς να ελέγξει την κατεύθυνση του ανέμου που φυσάει, σηκώνει το ένα πανί. Το ιστιοπλοϊκό αρχίζει να αλλάζει πορεία, καθώς ο άνεμος φυσά προς άλλη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $\vec{F_1}$ είναι η δύναμη που ασκεί στο σκάφος η μηχανή και $\vec{F_2}$ η δύναμη που ασκεί στο σκάφος ο άνεμος, προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το ιστιοπλοϊκό;



Λύση

Έχουμε λοιπόν δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ (μηχανή) και $\vec{F}_2$ (άνεμος) που ασκούνται στο ιστιοπλοϊκό ταυτόχρονα και θέλουμε να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη, όπως λέμε στη Φυσική, δηλαδή το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα $\vec{F}_1$, έτσι ώστε να γίνει διαδοχικό με το $\vec{F}_2$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τότε:

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{AB} + \vec{A\Delta} =$

$= \vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} = \vec{F}_{ολ}$.

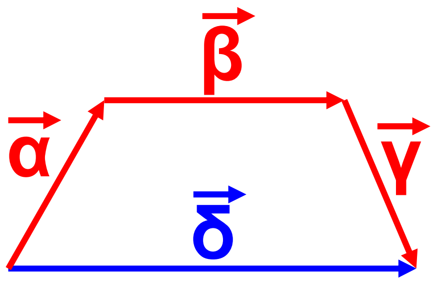
Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ λέγονται **συνιστώσες** της $\vec{F}_{ολ}$.

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το $\vec{F}_{ολ}$ είναι να δούμε ότι αποτελεί

τη διαγώνιο $\overrightarrow{ΑΓ}$ του παραλληλο-
γράμμου ΑΒΓΔ.
Επομένως, έχουμε δύο μεθόδους, για να βρίσκουμε το άθροισμα διανυσμάτων.

Α. Η μέθοδος του πολυγώνου

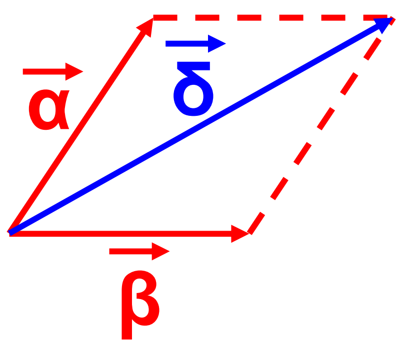
Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν όλα διαδοχικά.
Το άθροισμα των $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$, θα είναι το διάνυσμα $\vec{δ}$, που θα έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.



Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου

Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$, έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμ-

μο που έχει πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Η διαγώνιος $\vec{\delta}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



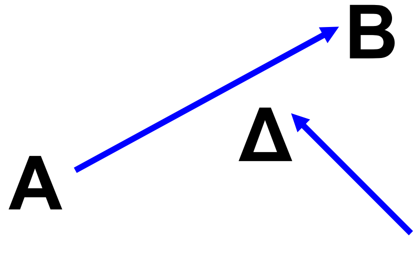
Διαφορά διανυσμάτων

Η διαφορά δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και ορίζεται ως άθροισμα του $\overrightarrow{AB}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

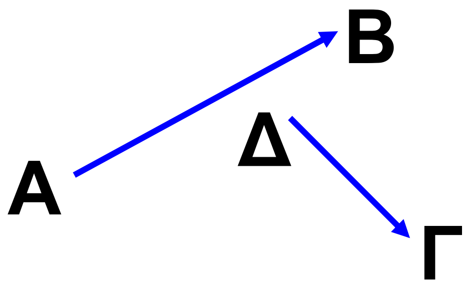
Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$



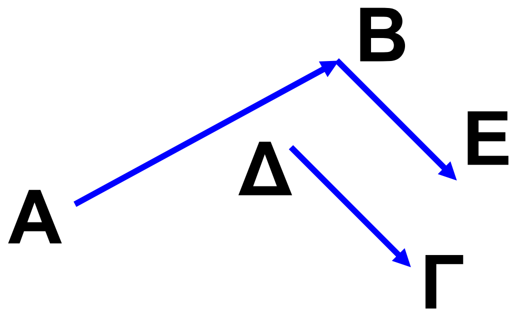
προσθέτουμε στο $\overrightarrow{AB}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$



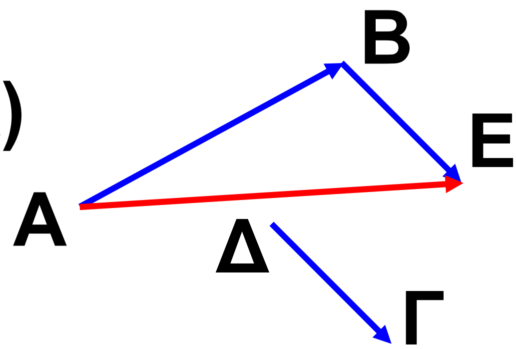
Για να γίνει αυτό, σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BE}$ ίσο με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$



Το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ από το $\overrightarrow{AB}$

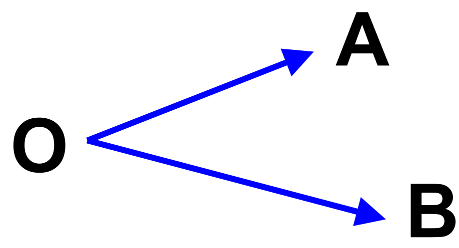
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta})$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \color{red}{\overrightarrow{AE}}$$



Διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα με κοινή αρχή,

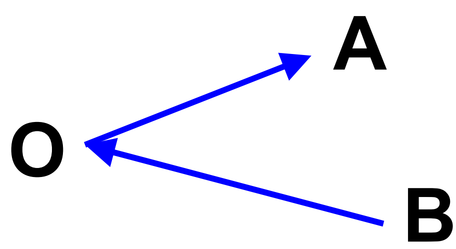
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$



προσθέτουμε στο $\overrightarrow{OA}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{\Delta B}$, δηλαδή το $\overrightarrow{BO}$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{BO}$ και $\overrightarrow{OA}$ είναι διαδοχικά.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} =$

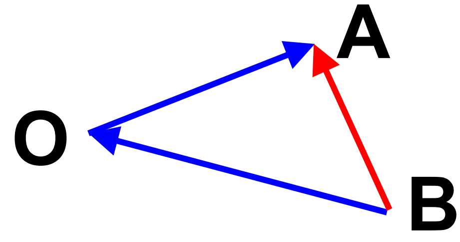
$= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$



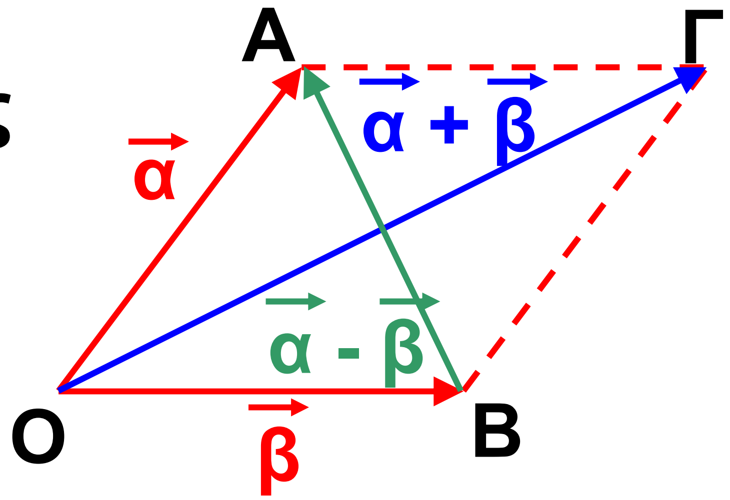
Το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{OB}$ από το $\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$

$= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$



Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η διαφορά $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ με κοινή αρχή O, είναι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, με αρχή το πέρας του δευτέρου και πέρας το πέρας του πρώτου. Επομένως για τις διαγωνίους $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{BA}$ του διπλανού παραλληλογράμμου ισχύει: $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



Το μηδενικό διάνυσμα

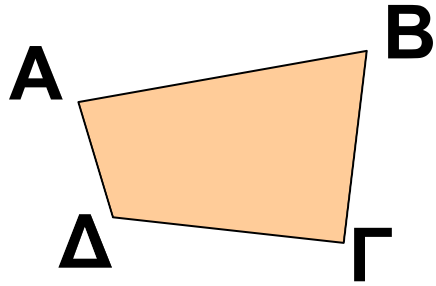
Το άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το διάνυσμα αυτό λέγεται μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Επομένως, το μηδενικό διάνυσμα είναι ένα σημείο,

οπότε δεν έχει ούτε διεύθυνση ούτε φορά. Το μέτρο του είναι ίσο με 0. Δηλαδή: $|\vec{0}| = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
$\vec{AB} - \vec{\Gamma B} = \vec{A\Delta} - \vec{\Gamma\Delta}$.

Λύση:



Έχουμε: $\vec{AB} - \vec{\Gamma B} =$
$= \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$.
Επίσης: $\vec{A\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} =$
$= \vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma}$.
Επομένως: $\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{\Gamma\Delta}$.

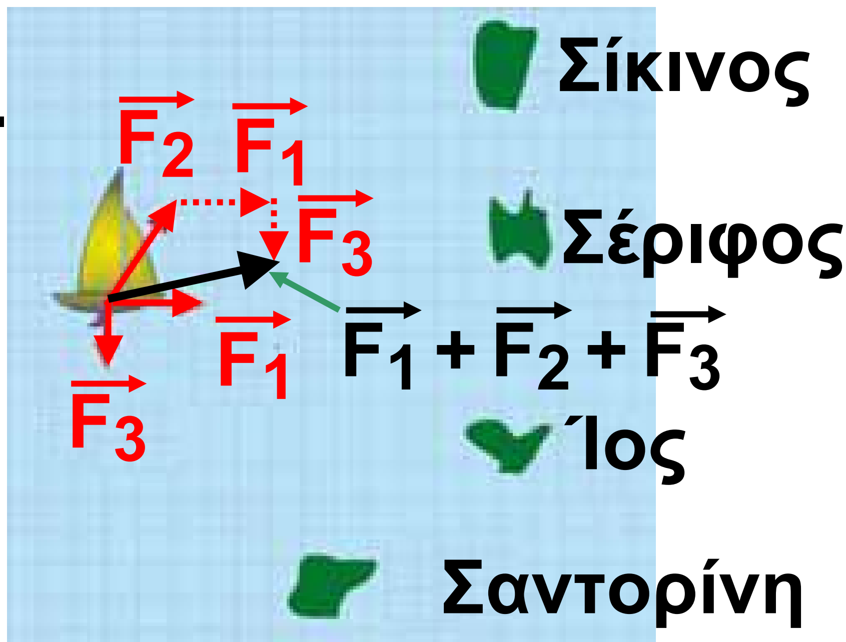
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Τρεις δυνάμεις ασκούνται στο ιστιοπλοϊκό του σχήματος της επόμενης σελίδας: η F_1 από τη μηχανή του,

η F_2 από τα πανιά του (αέρας) και το ρεύμα της θάλασσας F_3. Σε ποιο νησί κατευθύνεται το ιστιοπλοϊκό;

Λύση:

Το ιστιοπλοϊκό κινείται κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης των τριών αυτών δυνάμεων,



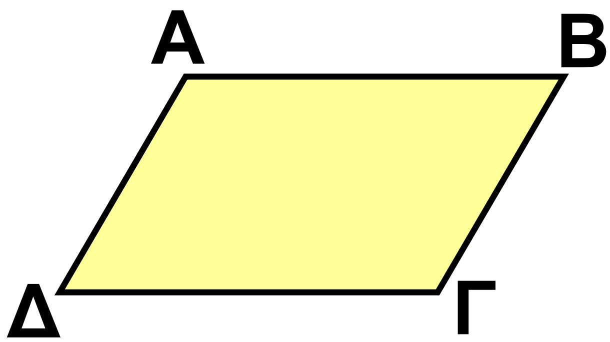
δηλαδή του αθροίσματος $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$.

Αν σχηματίσουμε το άθροισμα αυτών των δυνάμεων, η συνιστα-

μένη τους δείχνει ότι το ιστιοπλοϊκό κατευθύνεται προς τη Σέριφο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει:
$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0.$



Λύση:

Έχουμε:

$$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0} \quad ή$$
$$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \quad ή$$
$$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta M} = \vec{0} \quad ή$$
$$\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ ισούται με το μηδενικό διάνυσμα, οπότε η αρχή και το πέρας ταυτίζονται. Επομένως, το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

α) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$ τότε:

Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
Β. Το Α είναι το μέσο του ΒΓ.
Γ. Το Β ταυτίζεται με το Γ.

β) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$ τότε:

Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
Β. Το Β είναι το μέσο του ΑΓ.
Γ. Το Α ταυτίζεται με το Γ.

γ) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε:

Α. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
Β. ΑΔ = ΒΓ
Γ. Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

δ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{B\Gamma} =$

Α. $\overrightarrow{A\Delta}$ Β. $\overrightarrow{AB}$ Γ. $\overrightarrow{A\Gamma}$

ε) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} =$

Α. $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Β. $\overrightarrow{A\Delta}$ Γ. $\vec{0}$

2. Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{A\Delta}$

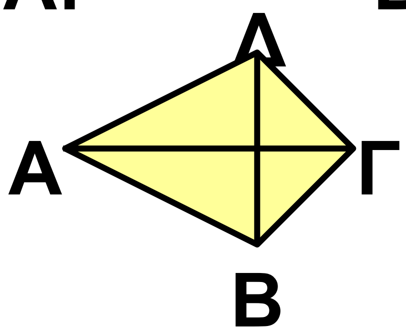
β) $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\Delta\ldots}$

γ) $\overrightarrow{\Gamma\ldots} - \overrightarrow{\Gamma\ldots} = \overrightarrow{AB}$

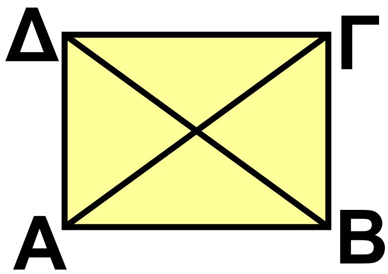
δ) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\ldots}$

3. Η ισότητα $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$ είναι σωστή σ' ένα μόνο από τα παρακάτω σχήματα. Μπορείτε να βρείτε σε ποιο;

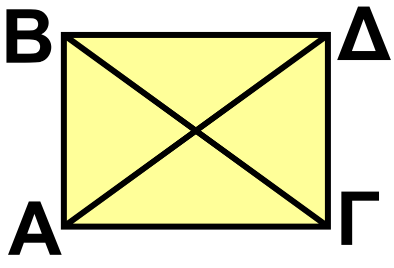
Α:



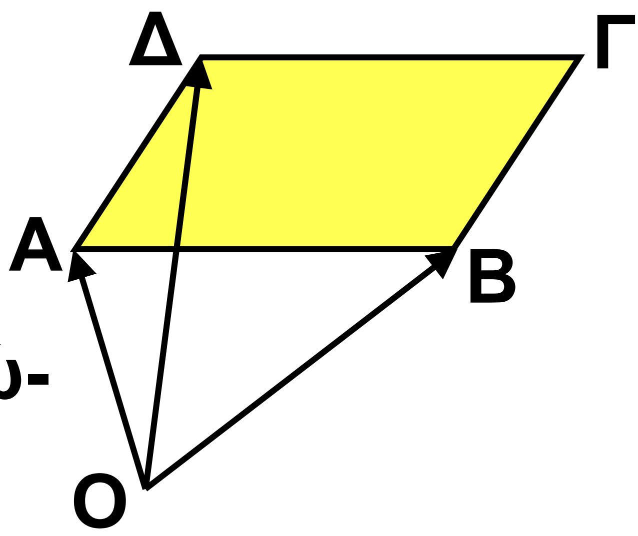
Β:



Γ:



4. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις.

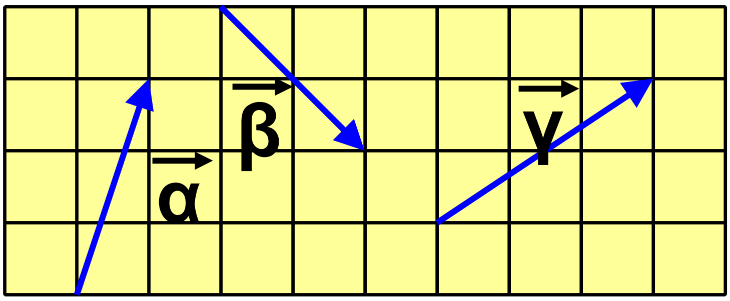


		Α	Β	Γ	Δ
α)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} =$	$\overrightarrow{B\Gamma}$	$\overrightarrow{B\Delta}$	$\overrightarrow{\Delta B}$	$\overrightarrow{A\Gamma}$
β)	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma} =$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{A\Gamma}$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{OB}$
γ)	$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} =$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{B\Delta}$
δ)	$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{A\Delta} =$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{B\Delta}$

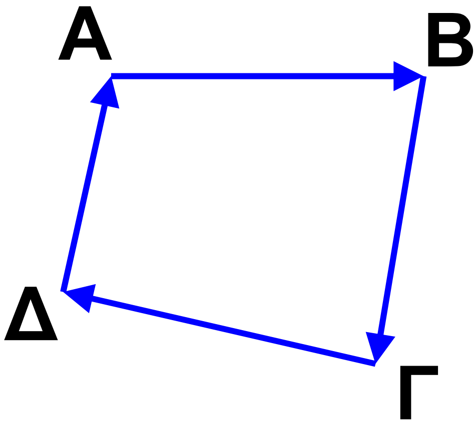
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο σχήμα της επόμενης σελίδας να σχεδιάσετε τα αθροίσματα:

α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ β) $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ γ) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$



2 Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:



α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A}$

γ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{A\Delta}$

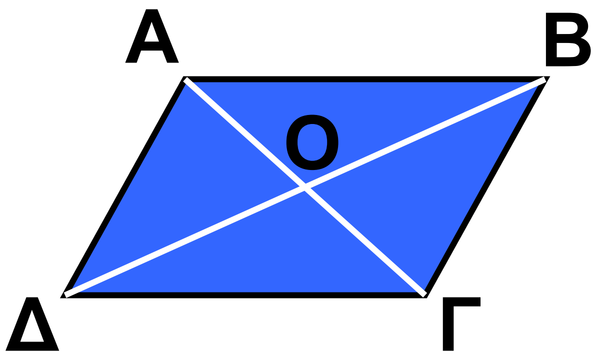
3 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ σημείο της ΒΓ. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{AM}$

β) $\overrightarrow{\Gamma M} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

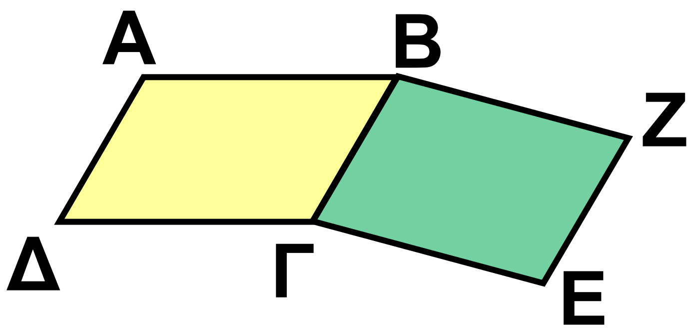
γ) $\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta M} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA}$

4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να συγκρίνετε τις διαφορές:



α) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BA}$
β) $\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BO}$
γ) $\overrightarrow{\Delta O} - \overrightarrow{\Delta A}$
δ) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta O}$

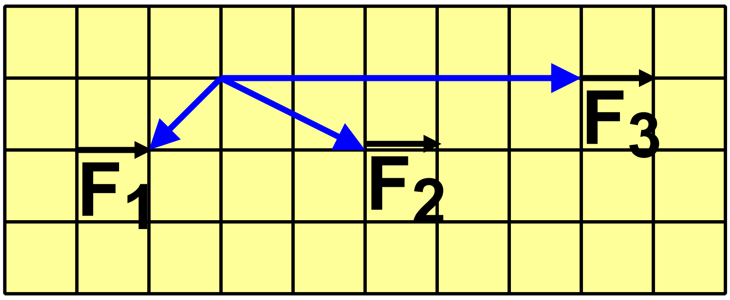
5 Στο παρακάτω σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΒΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμα.



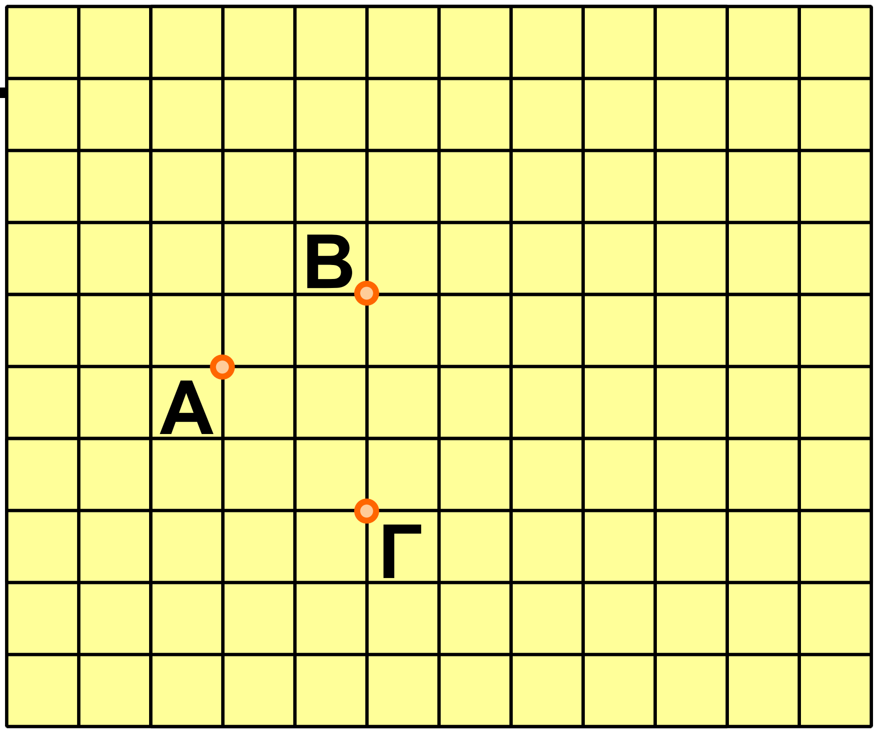
Να βρεθούν τα αθροίσματα:

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$ β) $\overrightarrow{E\Gamma} + \overrightarrow{\Delta A}$
γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$ δ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ZE} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

6 Σε ένα σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ και $\overrightarrow{F_3}$, όπως βλέπουμε στο σχήμα της επόμενης σελίδας. Να σχεδιάσετε τη συνισταμένη τους.



7 Στο διπλανό σχήμα να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$, $\vec{AE}$, $\vec{AZ}$ και $\vec{A\Theta}$, έτσι ώστε να ισχύει:



$\vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma}$, $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{\Gamma A}$,

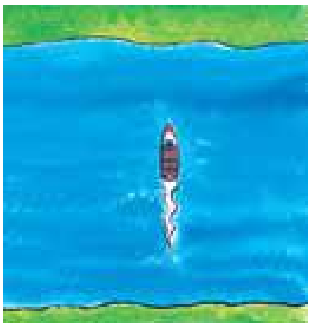
$\vec{AZ} = \vec{AB} + \vec{AB}$ και

$\vec{A\Theta} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Gamma} + \vec{\Gamma A}$.

8 Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$), να αποδείξετε ότι:

$\vec{\Gamma B} - \vec{\Gamma A} = \vec{AM} - \vec{M\Gamma}$.

9 Μία βάρκα διασχίζει κάθετα ένα ποτάμι. Αν η βάρκα κινείται μόνο από τη μηχανή της, θα έχει ταχύτητα με μέτρο 2 m/s. Η βάρκα παρασύρεται, όμως, από το ρεύμα του ποταμού που έχει ταχύτητα 0,6 m/s.

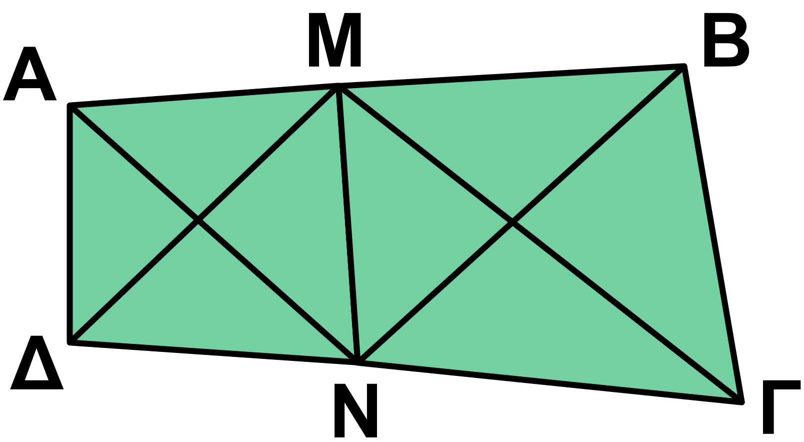


α) Να σχεδιάσετε τις δύο ταχύτητες.

β) Να σχεδιάσετε την διεύθυνση που θα πάρει τελικά η βάρκα.

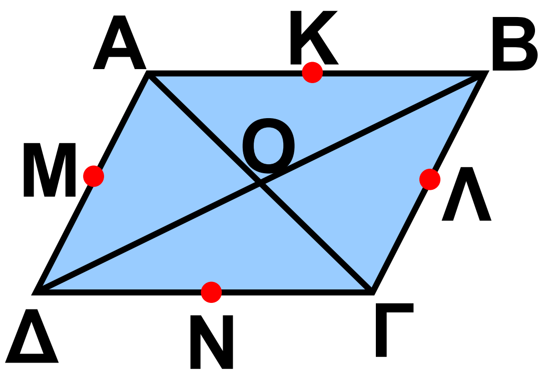
10 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN}$.



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, είναι τα μέσα των πλευρών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Μπορείτε να συμπληρώσετε το παρακάτω διανυσματοσταυρόλεξο;

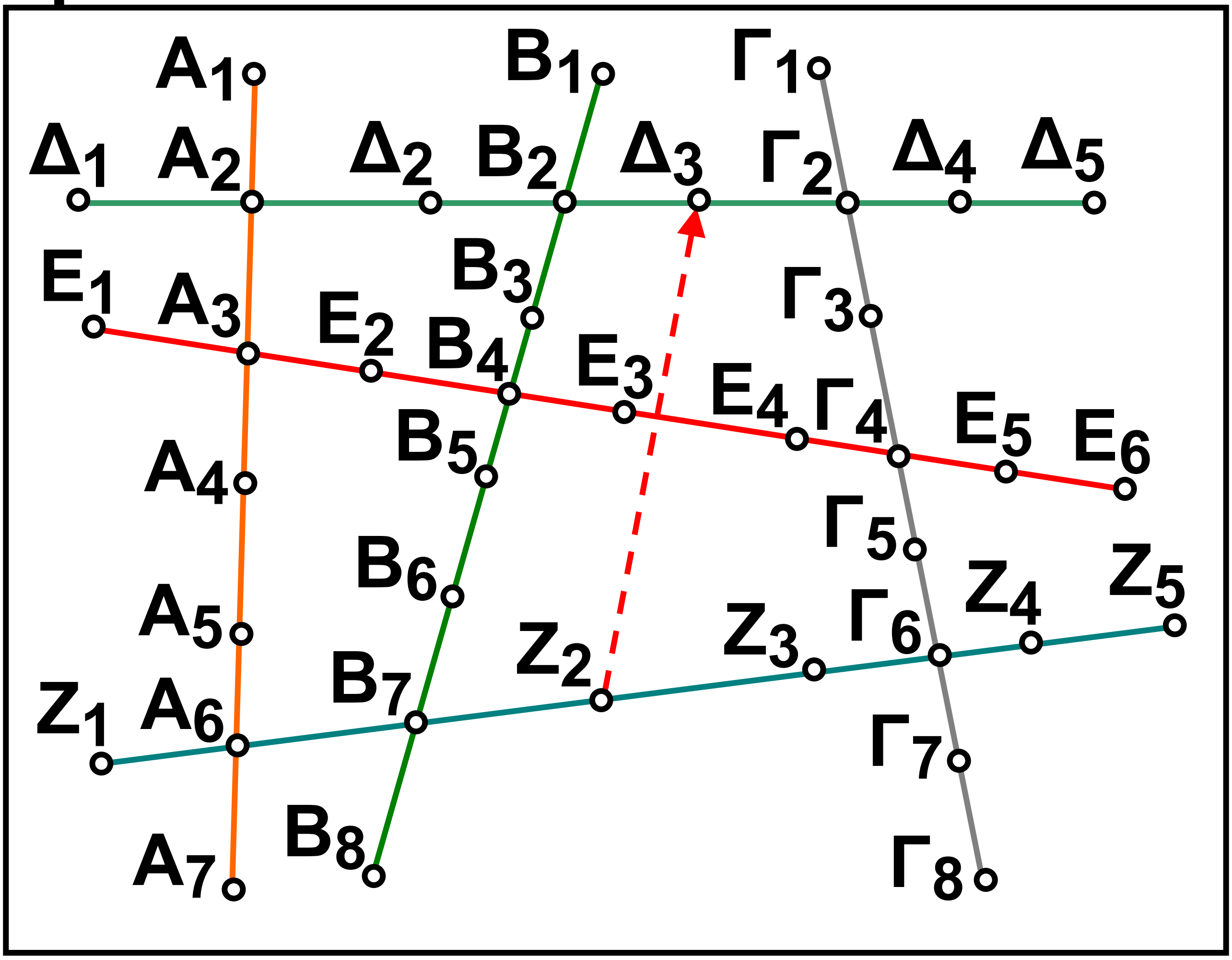


$\overrightarrow{AO}$	+		=	$\overrightarrow{AB}$
+		+		
$\overrightarrow{ON}$	+		=	
=		=		=
	+	$\overrightarrow{O\Lambda}$	=	

Τα διανύσματα στο χάος της κυκλοφορίας

Σε μια πόλη υπάρχουν έξι γραμμές μετρό. Ο χάρτης των στάσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για να μεταβούμε από ένα σημείο της πόλης σε ένα άλλο, για παράδειγμα

από το σημείο Z_2 στο σημείο Δ_3, μπορούμε να κινηθούμε με διάφορους τρόπους, οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν με διανύσματα:



$$\overrightarrow{Z_2\Delta_3} = \overrightarrow{Z_2\Gamma_6} + \overrightarrow{\Gamma_6\Gamma_2} + \overrightarrow{\Gamma_2\Delta_3} \quad \text{ή}$$

$$\overrightarrow{Z_2\Delta_3} = \overrightarrow{Z_2B_7} + \overrightarrow{B_7B_2} + \overrightarrow{B_2\Delta_3} \quad \text{ή}$$

$$\overrightarrow{Z_2\Delta_3} = \overrightarrow{Z_2A_6} + \overrightarrow{A_6A_3} + \overrightarrow{A_3B_4} +$$
$$+ \overrightarrow{B_4B_2} + \overrightarrow{B_2\Delta_3}$$

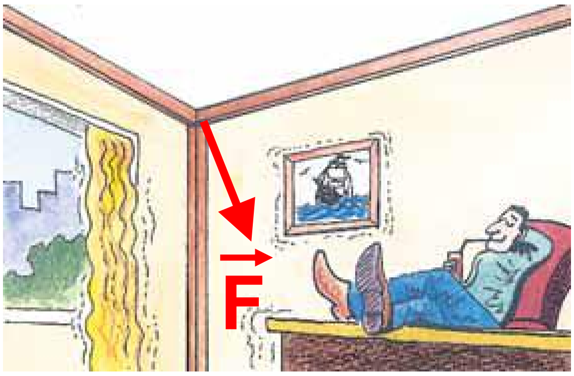
α) Μπορείτε να βρείτε άλλους τρόπους (έστω και πιο μακρινούς) για να κάνουμε τη διαδρομή $\overrightarrow{Z_2\Delta_3}$ και να τους γράψετε σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων;

β) Με ποιους τρόπους μπορεί κανείς να μεταβεί από το σημείο A_4 στο σημείο Γ_3; Να γράψετε τις διαδρομές αυτές σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων.

γ) Να κάνετε τις διαδρομές $\overrightarrow{E_3A_7}$, $\overrightarrow{\Delta_4Z_1}$ και $\overrightarrow{\Gamma_8A_1}$ με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους!

2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

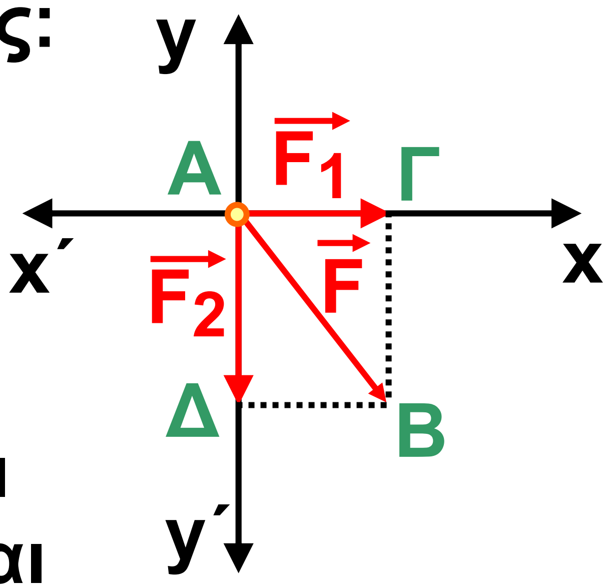
Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες



Όταν γίνεται σεισμός, ασκούνται δυνάμεις στα διάφορα μέρη των κτιρίων.

Ο μηχανικός που κατασκευάζει τα κτίρια, για να εξασφαλίσει την αντοχή τους χρησιμοποιεί τις γνώσεις των επιστημών της «Στατικής» και της «Αντοχής Υλικών». Υπολογίζει, λοιπόν, τις δυνάμεις που ασκούνται στα κάθετα και οριζόντια μέρη των κτιρίων (κολόνες και δοκάρια), για να μην πέσουν τα κτίρια. Κατά τη διάρκεια του σεισμού εφαρμόζεται μια πλάγια δύναμη στις κολόνες και

τα δοκάρια του κτιρίου, όπως φαίνεται στο σκίτσο.
Ο μηχανικός ενδιαφέρεται να γνωρίζει χωριστά τις δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, που ασκούνται αντίστοιχα στο δοκάρι και την κολόνα. Είναι αναγκαία, λοιπόν, η ανάλυση ενός διανύσματος $\vec{F}$ σε δύο κάθετα διανύσματα.
Η ανάλυση του διανύσματος $\vec{F}$ στις δύο κάθετες **συνιστώσες** του $\vec{F_1}$, και $\vec{F_2}$, γίνεται ως εξής:
Στην αρχή Α του διανύσματος $\vec{AB} = \vec{F}$, σχηματίζουμε δύο κάθετες ευθείες x´x και y´y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

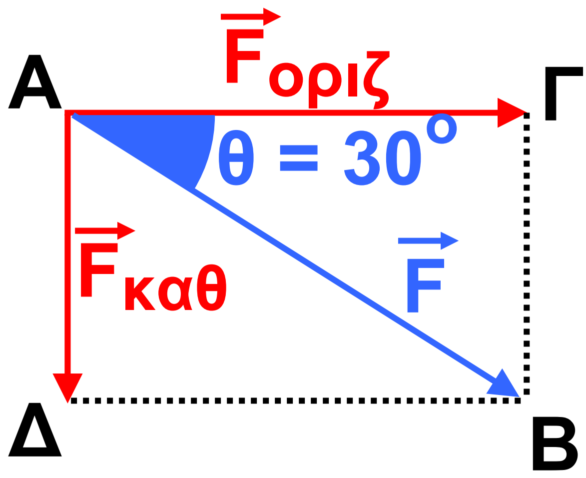


Από το πέρας Β φέρνουμε δύο κάθετες: τη ΒΓ στη

x΄x και τη ΒΔ στη y΄y. Τότε το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο, επομένως:
$\vec{AB} = \vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta}$ και επιπλέον
$\vec{A\Gamma} = \vec{F}_1$ και $\vec{A\Delta} = \vec{F}_2$.

Μέτρα Συνιστωσών

Αν γνωρίζουμε ότι το μέτρο της δύναμης που προέρχεται από το σεισμό είναι $|\vec{F}| = 6000$ N και σχηματίζει με το οριζόντιο δοκάρι γωνία $\theta = 30^o$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των κάθετων συνιστωσών της $\vec{F}$.



Αναλύουμε το διάνυσμα $\vec{AB}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες: $\vec{A\Gamma} = \vec{F}_{οριζ}$ και $\vec{A\Delta} = \vec{F}_{καθ}$.

Γνωρίζουμε ότι: $|\overrightarrow{AB}| = 6000$ N και $\theta = 30^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\text{συν}\theta = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{|\overrightarrow{A\Gamma}|}{|\overrightarrow{AB}|} \text{ και}$$

$$\text{ημ}\theta = \frac{\Gamma B}{AB} = \frac{|\overrightarrow{\Gamma B}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Όμως $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$, οπότε $|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{\Gamma B}|$.
Επομένως:

$$|\overrightarrow{F}_{οριζ}| = |\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{συν}\theta =$$

$$= 6000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3000\sqrt{3} \text{ (N)}.$$

$$|\overrightarrow{F}_{καθ}| = |\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{ημ}\theta =$$

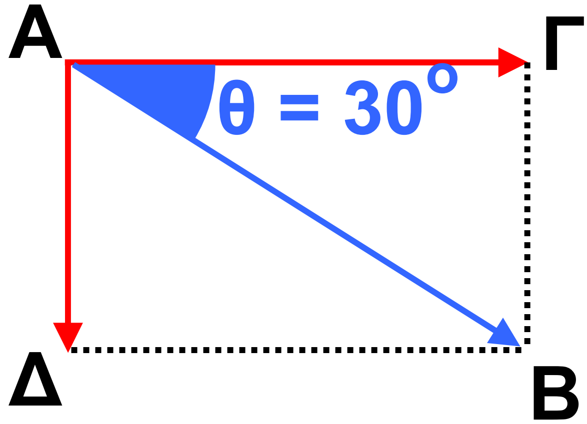
$$= 6000 \cdot \frac{1}{2} = 3000 \text{ (N)}.$$

Γενικότερα, για τα μέτρα των δύο κάθετων συνιστωσών $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ μιας δύναμης $\overrightarrow{F}$ ισχύει ότι:

$|\vec{F_1}| = |\vec{F}| \cdot συνθ$ και $|\vec{F_2}| = |\vec{F}| \cdot συνθ$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν $|\vec{ΑΓ}| = 6$, να υπολογίσετε τα μέτρα $|\vec{ΑΒ}|$ και $|\vec{ΑΔ}|$.



Λύση: Έχουμε:

$$συν30^\circ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{|\vec{ΑΒ}|}{|\vec{ΑΓ}|} \text{ και}$$

$$ημ30^\circ = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{|\vec{ΑΔ}|}{|\vec{ΑΓ}|}, \text{ άρα}$$

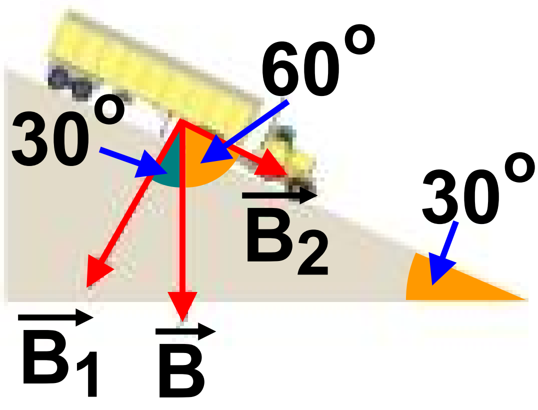
$$|\vec{ΑΒ}| = |\vec{ΑΓ}| \cdot συν30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

και

$$|\vec{ΑΔ}| = |\vec{ΑΓ}| \cdot ημ30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα φορτηγό βάρους 40000 N, είναι σταθμευμένο σε μία κατηφόρα με γωνία κλίσης 30°, όταν ξαφνικά λύνεται το χειρόφρενο! Το διάνυσμα $\vec{B}$ του βάρους του αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η $\vec{B}_1$ εξουδετερώνεται από το έδαφος, ενώ η $\vec{B}_2$ κινείτο φορτηγό στην κατηφόρα. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$.



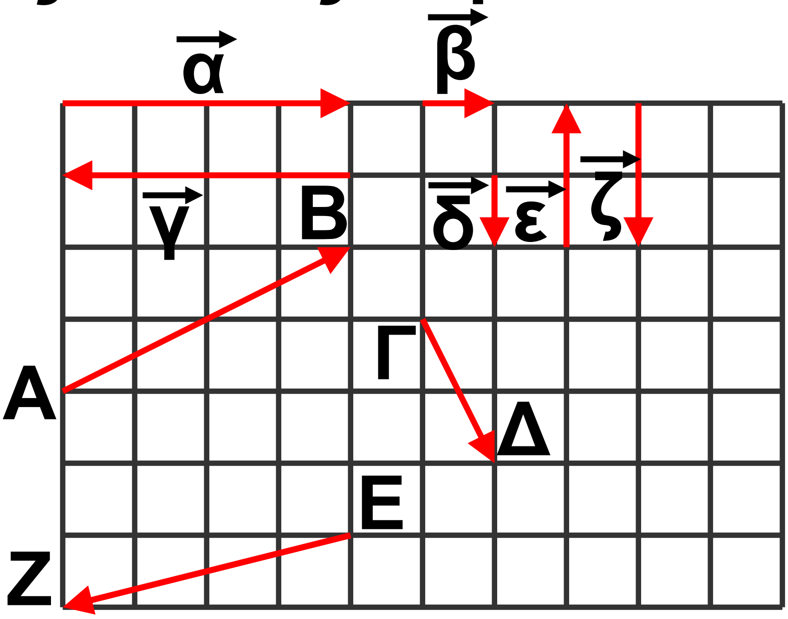
Λύση: Έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = \frac{|\vec{B}_2|}{|\vec{B}|}$$, οπότε:

$$|\vec{B}_2| = |\vec{B}| \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = 40000 \cdot \frac{1}{2} =$$
20000 N.

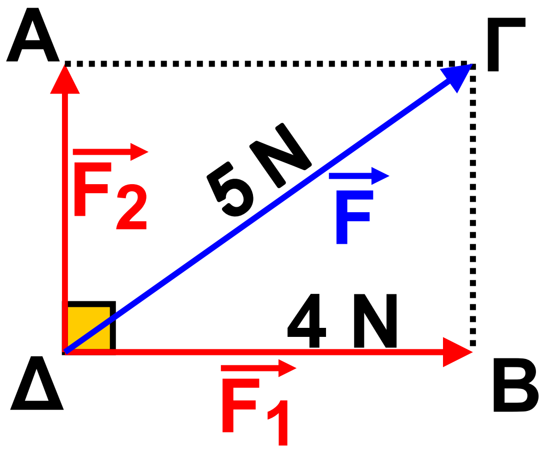
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **Στο παρακάτω σχήμα αναλύσαμε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{EZ}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες αλλά τα διανύσματα μπερδεύτηκαν! Μπορείτε να βρείτε ποιες είναι οι σωστές από τις παρακάτω σχέσεις;**



		A	B	Γ	Δ
α)	$\vec{AB}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\gamma}$
β)	$\vec{\Gamma\Delta}$ =	$\vec{\beta}+\vec{\gamma}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\beta}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\delta}$
γ)	$\vec{EZ}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\delta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\delta}$	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$

2. Μια δύναμη F, μέτρου $|\vec{F}| = 5\ N$ αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$.



Αν $|\vec{F_1}| = 4\ N$ τότε

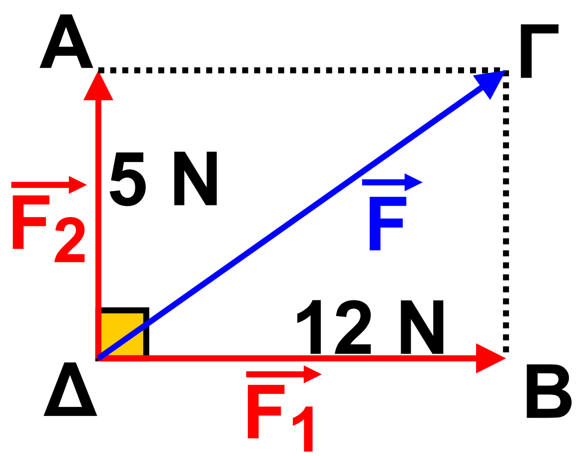
$|\vec{F_2}| =$......

Α: 1 N Β: 2 N

Γ: 3 N Δ: 4 N

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Μια δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ με μέτρα 5 N και 12 N αντίστοιχα.



Τότε $|\vec{F}| =$......

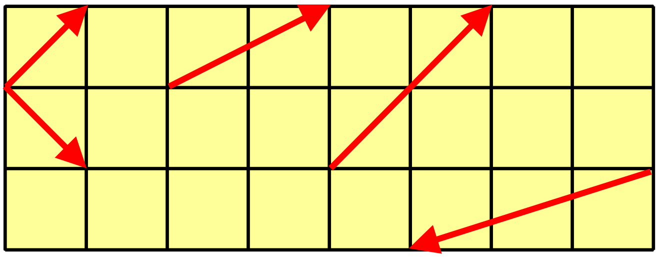
Α: 15 N Β: 13 N

Γ: 17 N Δ: 18 N

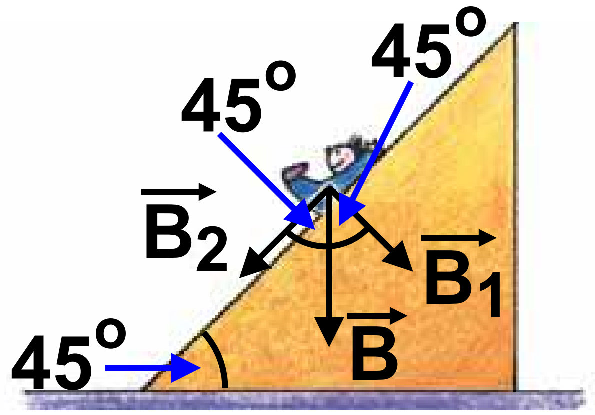
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

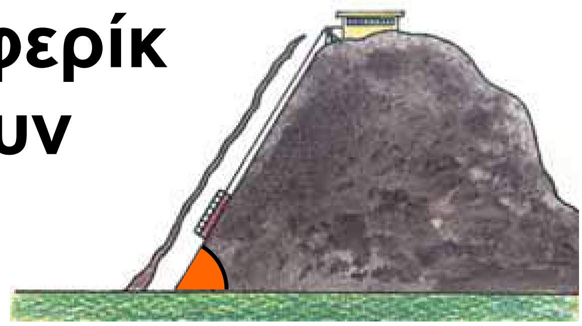
1 Να αναλύσετε τα διπλανά διανύσματα σε άθροισμα δύο κάθετων συνιστωσών.



2 Ο Κωστάκης κάνει τσουλήθρα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το βάρος του Κωστάκη είναι 270 N, να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$ που τον κάνει να κινείται.

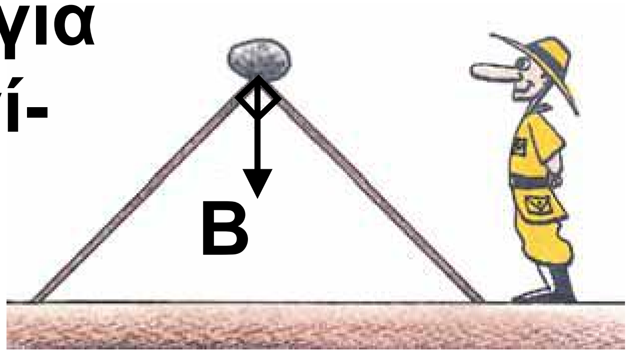


3 Σε υπόγειο τελεφερίκ οι ράγες σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο γωνία 60°. Το βάρος του βαγονιού των



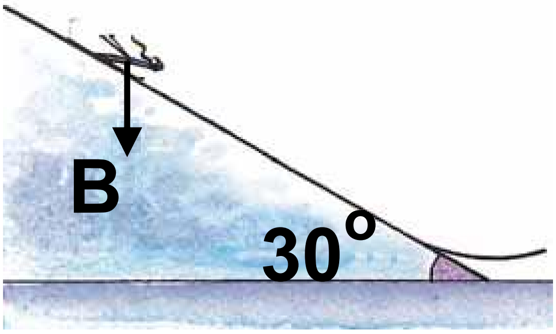
επιβατών (μαζί με τους επιβάτες) είναι 30000 N και σύρεται πάνω στις ράγες από την κορυφή με ένα συρματόσχοινο. Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκείται από το συρματόσχοινο στο βαγόνι, ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω;

4 Ένας κυνηγός για να φτιάξει μια παγίδα, χρησιμοποιεί δύο σανίδες ίσου μήκους και τις τοποθετεί στο έδαφος, ώστε να σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.



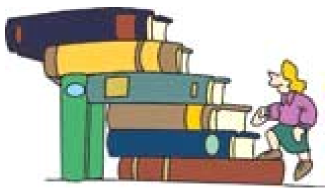
Στην κορυφή του τριγώνου τοποθετεί πέτρα βάρους 200 N.
Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται κάθε σανίδα από το βάρος της πέτρας;

5 Ένας σκιέρ γιγαντιαίου άλματος κατεβαίνει την εξέδρα που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία 30^{o}. Αν το βάρος του έχει μέτρο 800 N, ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που τον μετακινεί κατά μήκος της εξέδρας;



Επανάληψη Κεφαλαίου 2

Επανάληψη στην Τριγωνομετρία



Αν ω είναι μια οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, τότε:

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύουν:

- $0 < ημω < 1$
- $0 < συνω < 1$
- $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$

Όταν μια οξεία γωνία μεγαλώνει, τότε αυξάνεται το ημίτονό της και η

εφαπτομένη της, αλλά ελαττώνεται το συνημίτονό της.

Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα ή ίσα συνημίτονα ή ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30^{o} - 45^{o} - 60^{o}

	30^{o}	45^{o}	60^{o}
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Επανάληψη στα Διανύσματα

Διανυσματικά λέγονται τα μεγέθη που έχουν μέτρο και κατεύθυνση.

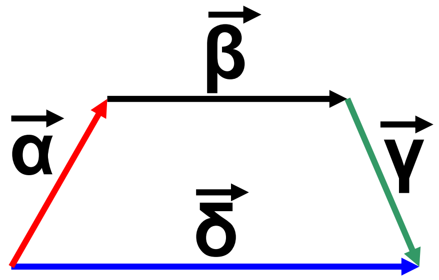
Τα στοιχεία ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο.

Δύο διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα, ενώ δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

Άθροισμα διανυσμάτων.

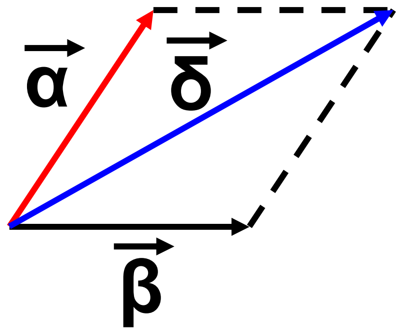
Α. Η μέθοδος του πολυγώνου:

Όταν τα διανύσματα γίνουν διαδοχικά.



Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου:

Όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, έχουν κοινή αρχή.



Διαφορά διανυσμάτων.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

Διαφορά διανυσμάτων με κοινή αρχή.

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το μέτρο του είναι ίσο με 0.

Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες με μέτρα:

$|\vec{F_1}| = |\vec{F}|$ συνθ

$|\vec{F_2}| = |\vec{F}|$ ημθ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μέτρηση Κύκλου

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

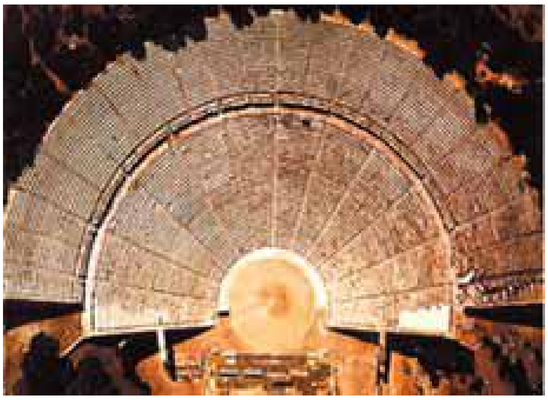
***Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου,** το οποίο ήταν ένα από τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας, οδήγησε στην **προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του αριθμού π**, του πιο διάσημου από όλους τους αριθμούς.*

*Ο αριθμός **π** προκύπτει φυσιολογικά από τη μέτρηση του κύκλου, η οποία είναι το κύριο αντικείμενο αυτού τον κεφαλαίου.*

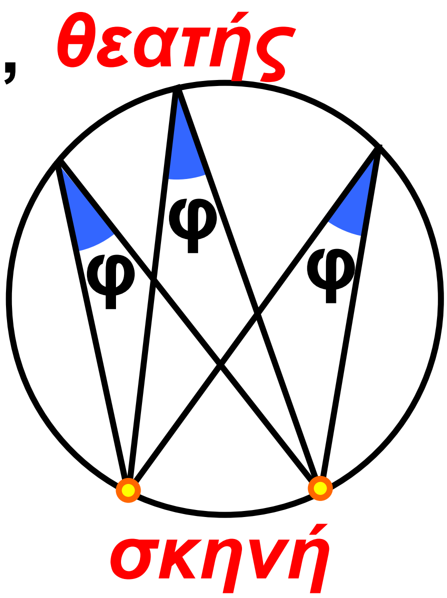
Θα εξετάσουμε, επιπλέον, τα κανονικά πολύγωνα: πολύγωνα με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Είναι πολύ γνωστά σχήματα σ' εμάς, αλλά τώρα θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά τα στοιχεία τους και την κατασκευή τους.

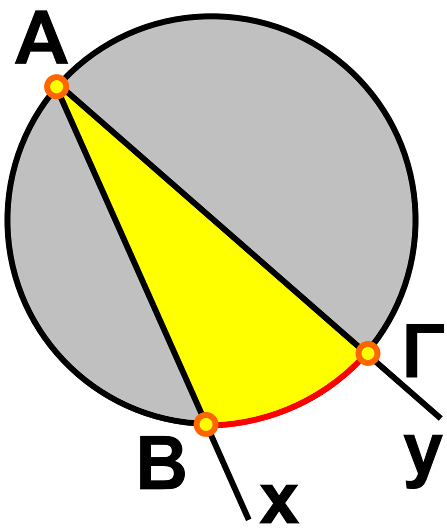
3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες

Έχετε αναρωτηθεί ποτέ γιατί τα θέατρα, όπως η Επίδαυρος, έχουν «κυκλικό» σχήμα;



Γιατί από κάθε κάθισμα, που βρίσκεται πάνω στον κύκλο, ο θεατής «βλέπει τη σκηνή με την ίδια γωνία φ». Οι γωνίες που βλέπουμε στο διπλανό σχήμα έχουν την κορυφή τους (θεατής) πάνω στον κύκλο και οι δύο πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο.





Μια γωνία **$x\hat{A}y$** που η κορυφή της **Α** ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ) και οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο (Ο, ρ).

Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της.

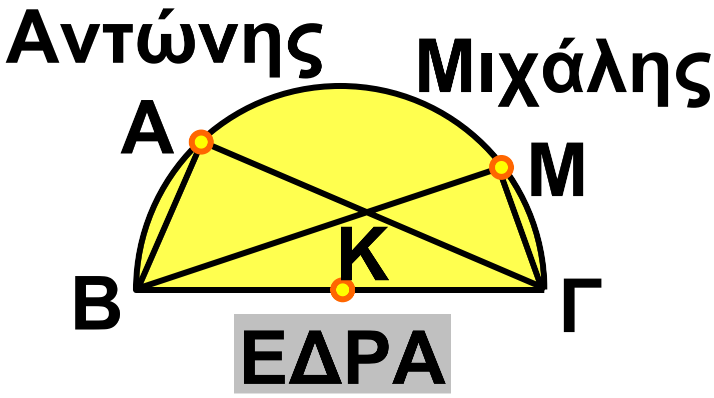
Επίσης, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $Β\hat{Α}Γ$ **βαίνει στο τόξο** $\overset{\frown}{ΒΓ}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο Πανεπιστήμιο γίνεται μάθημα στο Αμφιθέατρο. Δύο φοιτητές, ο Αντώνης και ο Μιχάλης, κάθονται σε μία σειρά θέσεων που σχηματίζει με την έδρα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας.

Στο διάλειμμα ο Αντώνης μέτρησε την απόστασή του από τα δύο άκρα Β, Γ της έδρας και βρήκε ότι ΑΒ = = 3 m, ΑΓ = 4 m, ενώ έχουμε ότι ΒΓ = 5m. Ο Μιχάλης, αντίστοιχα, βρήκε ότι ΒΜ = 4,47m και ΜΓ = = 2,24 m.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.



β) Τι γωνίες είναι οι $\hat{A}$ και $\hat{M}$;

γ) Τι γωνίες νομίζετε ότι θα είναι η $\hat{A}$ και $\hat{M}$, αν οι μαθητές καθίσουν σε άλλες θέσεις της ίδιας σειράς θέσεων;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

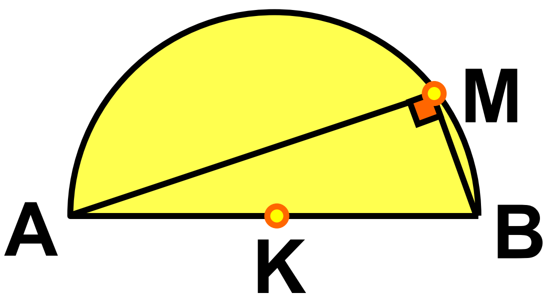
$$AB^2 + A\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = B\Gamma^2$$

$BM^2 + M\Gamma^2 = (4{,}47)^2 + (2{,}24)^2 = 25 =$
$= B\Gamma^2$

Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα και στα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

β) Αφού ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, τα τρίγωνα θα είναι ορθογώνια, οπότε θα ισχύει $\hat{A} = 90^\circ$ **και** $\hat{M} = 90^\circ$.

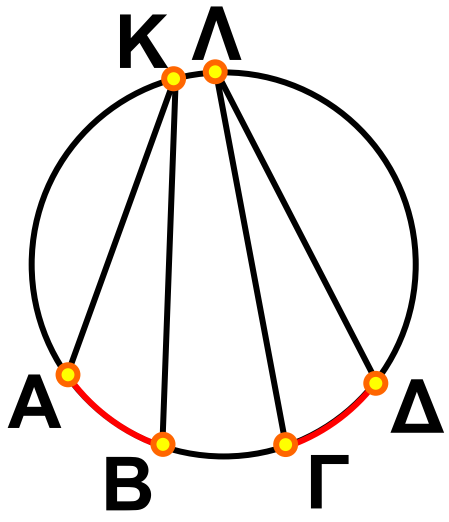
γ) Οι γωνίες $\hat{A}$ **και** $\hat{M}$ **θα είναι και πάλι ορθές, οποιαδήποτε θέση και αν πάρουν οι μαθητές στην ίδια σειρά θέσεων.**



Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Επομένως, κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που είναι η ευθεία γωνία. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε εγγεγραμμένη και την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της.

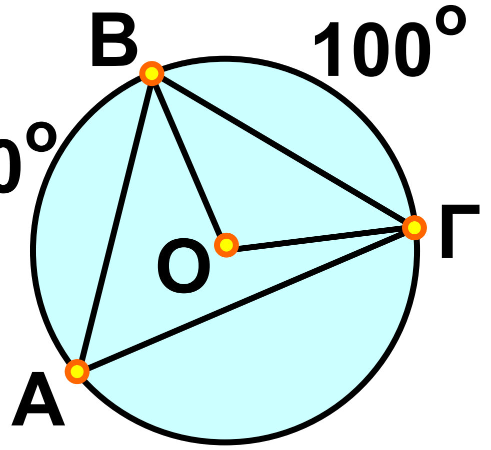


Συγκεκριμένα:

- **Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.**
- **Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.**
- **Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{AB} = 120^o$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100^o$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση: Αφού $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100^o$, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι και αυτή ίση με 100^o.

Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ με την επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι:

$B\hat{A}\Gamma = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2} = 50^o$. Ομοίως προκύπτει ότι: $B\hat{\Gamma}A = 60^o$.

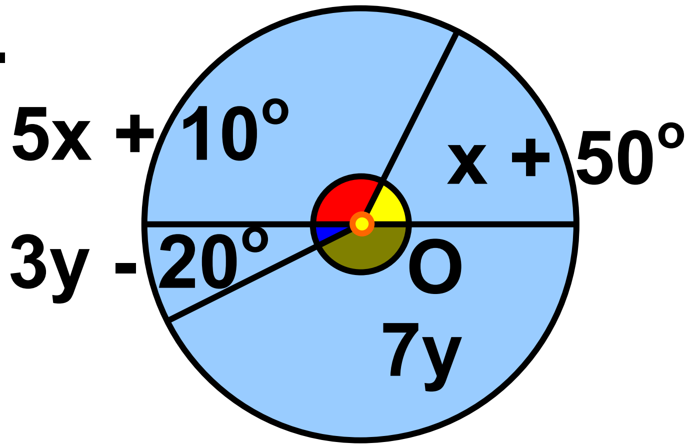
Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°, θα ισχύει ότι:

$A\widehat{B}\Gamma = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$.

Λύση: **Τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε:**



$5x + 10^\circ + x + 50^\circ = 180^\circ$ ή $6x = 120^\circ$, επομένως $x = 20^\circ$.

Ομοίως τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{BA}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε:

$3y - 20^\circ + 7y = 180^\circ$, επομένως

$10y = 200^\circ$ ή $y = 20^\circ$.

Έχουμε ότι: $\overset{\frown}{AB} = 3y - 20^\circ =$
$= 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$,

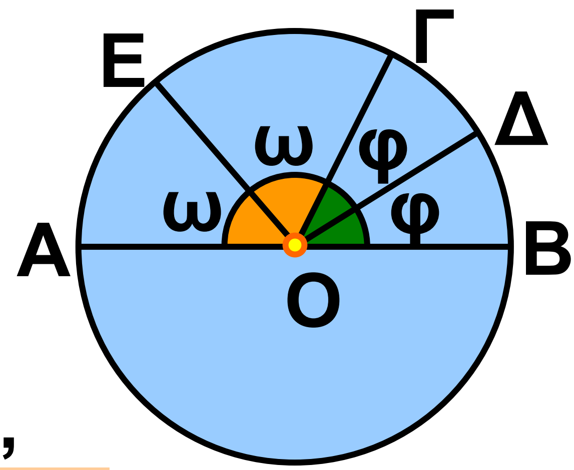
$\overset{\frown}{B\Gamma} = 5 \cdot 20^\circ + 10^\circ = 110^\circ$,

$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$,

$\overset{\frown}{\Delta A} = 7 \cdot 20^\circ = 140^\circ$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$, $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$.



Λύση: Αφού οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, θεωρούμε ότι $B\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ και $A\hat{O}E = E\hat{O}\Gamma = \omega$.

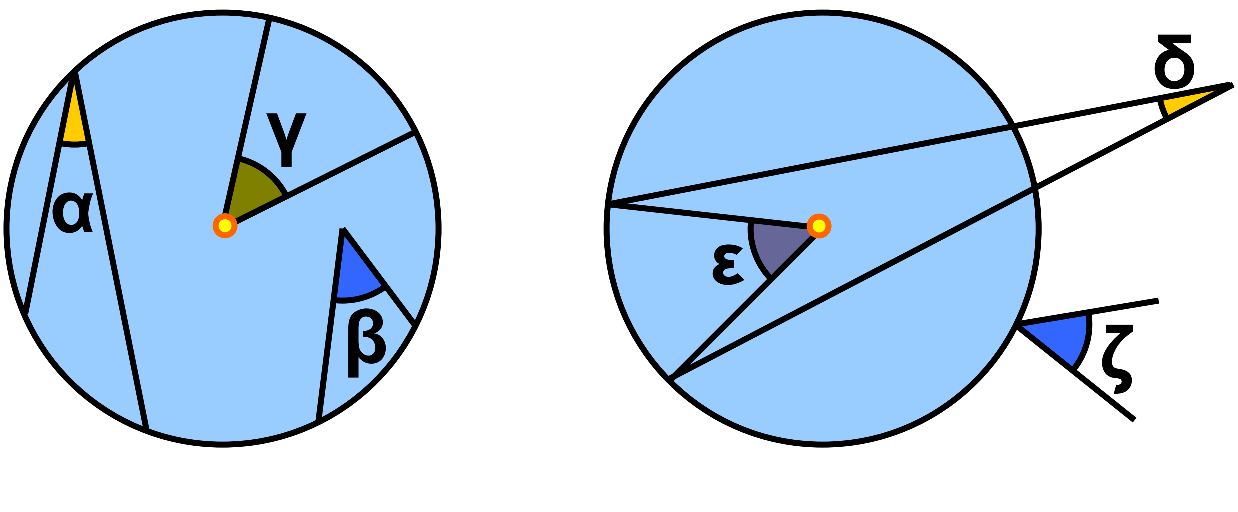
Όμως, $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}\Gamma + E\hat{O}\Gamma = \varphi + \omega$.

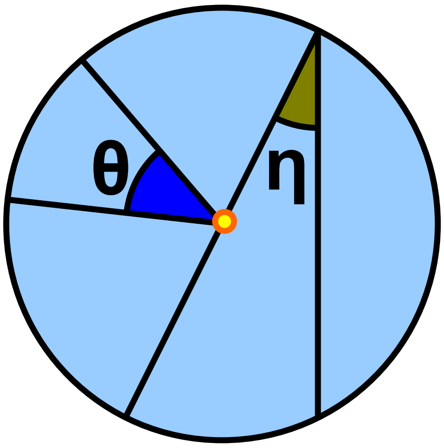
Έχουμε $B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}A = 180^o$, δηλαδή $2\varphi + 2\omega = 180^o$, οπότε $\varphi + \omega = 90^o$.

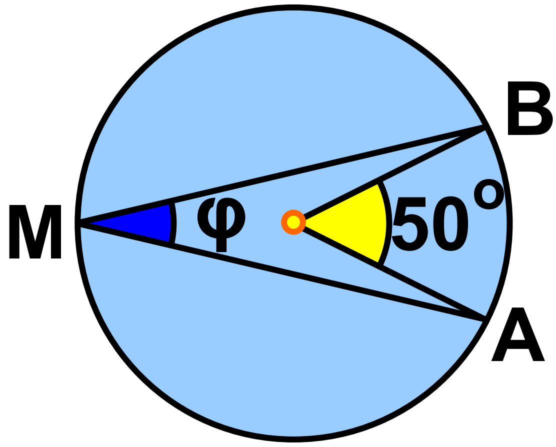
Άρα $\Delta\hat{O}E = 90^o$ και το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$ είναι ίσο με 90^o.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στα παρακάτω τρία σχήματα ποιες από τις γωνίες είναι εγγεγραμμένες και ποιες επίκεντρες;



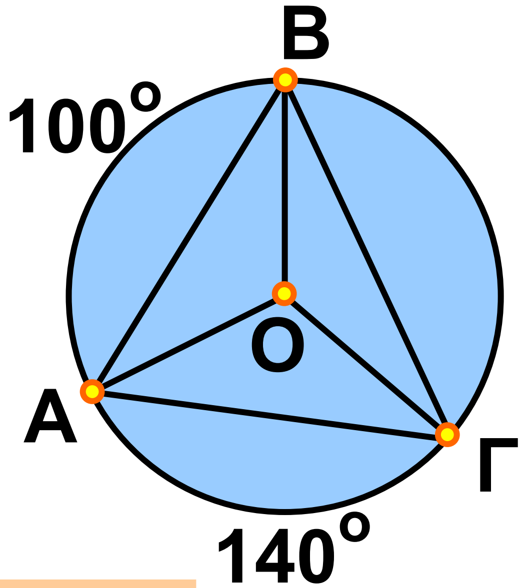




2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50°	25°	100°
β)	το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι	50°	25°	100°

3. Στον πίνακα της επόμενης σελίδας να βάλε-τε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



		A	B	Γ
α)	το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
β)	το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$ είναι:	120°	140°	100°
γ)	το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
δ)	το μέτρο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ είναι:	60°	70°	50°

4. Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι:
Α: 80° Β: 180° Γ: 90° Δ: 45°.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Στους παρακάτω πίνακες να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

α) το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:

Α	Β	Γ
180^o	60^o	90^o

β) Αν σ’ έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:

Α	Β	Γ
είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμμένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγεγραμμένης

γ) Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:

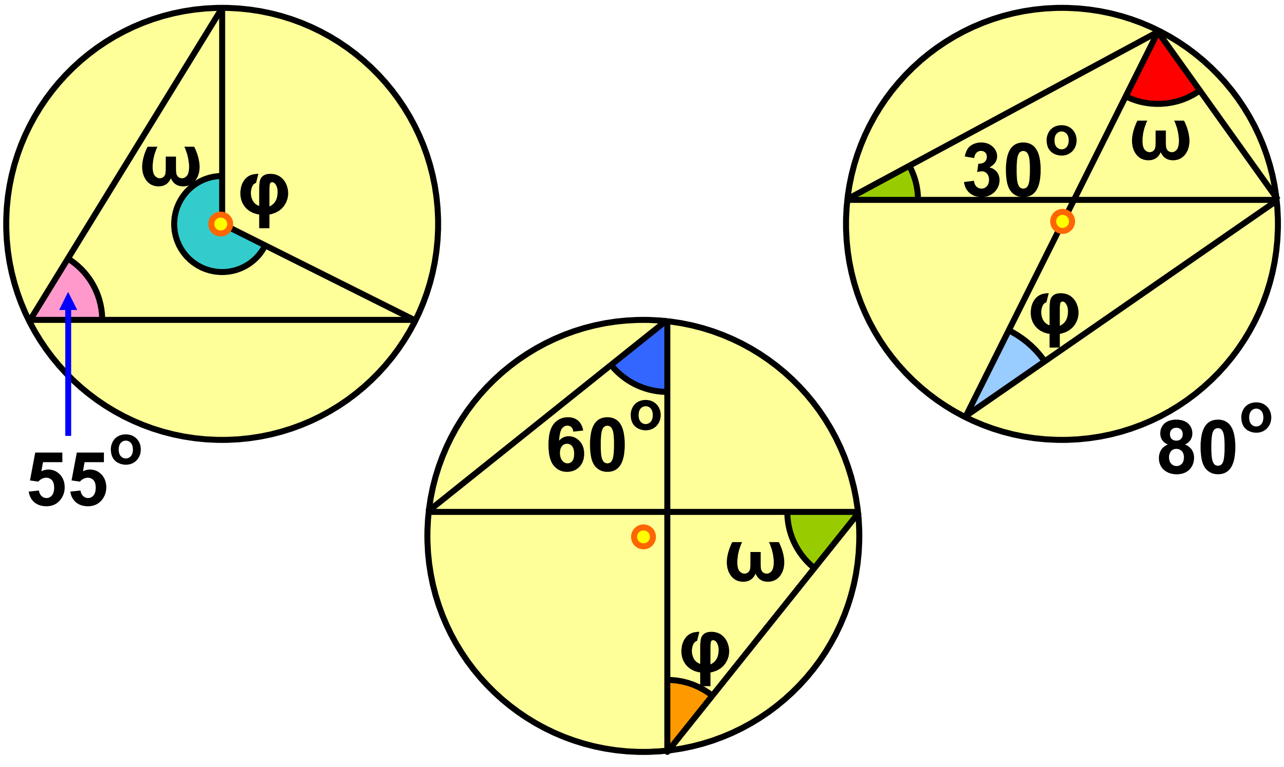
Α	Β	Γ
60^o	90^o	30^o

δ) Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:

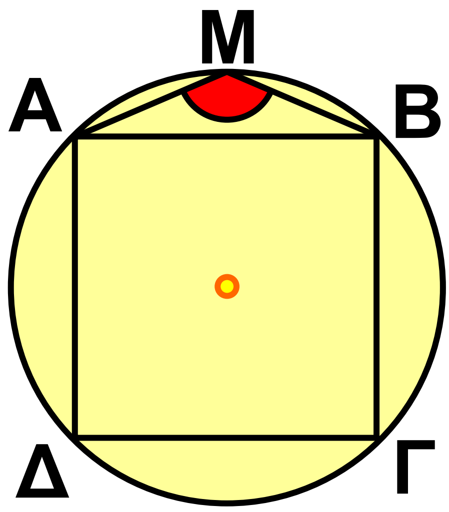
Α	Β	Γ
45^o	90^o	270^o

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

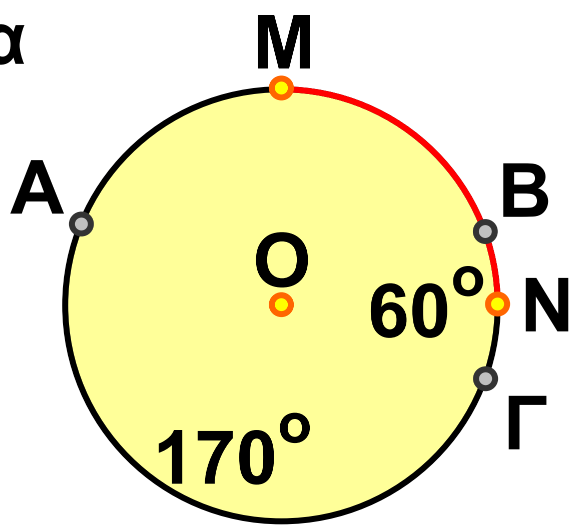
1 Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.



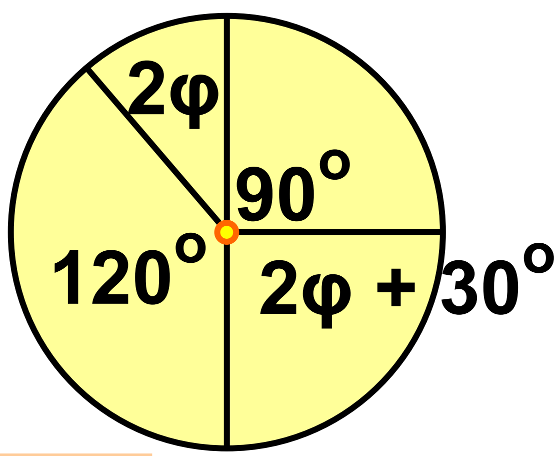
2 Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Μ}Β$.



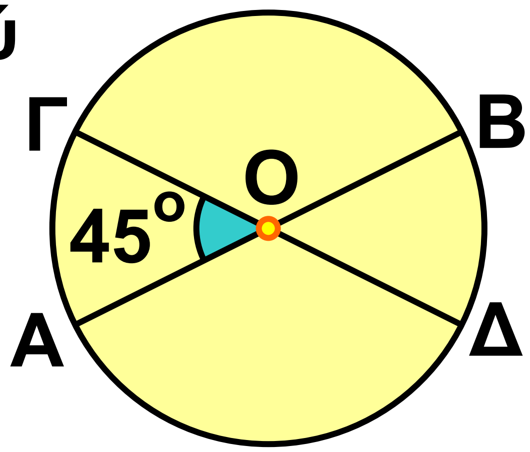
3 Έστω Μ και Ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ αντίστοιχα, ενός κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν $\overset{\frown}{ΒΓ} = 60^o$ και $\overset{\frown}{ΑΓ} = 170^o$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΜΝ}$.



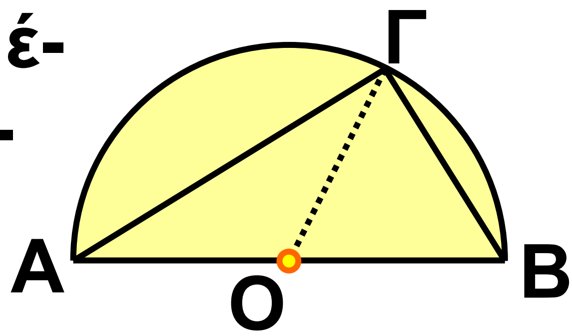
4 Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο διπλανό σχήμα.



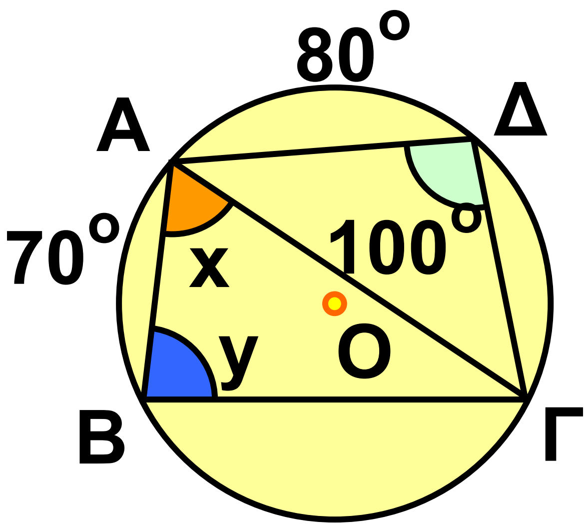
5 Στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΔΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΑ}$, αν γνωρίζουμε ότι $Α\hat{Ο}Γ = 45^o$ και ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου.



6 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6 cm δίνεται σημείο του Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{ΑΓ} = 2\overset{\frown}{ΒΓ}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

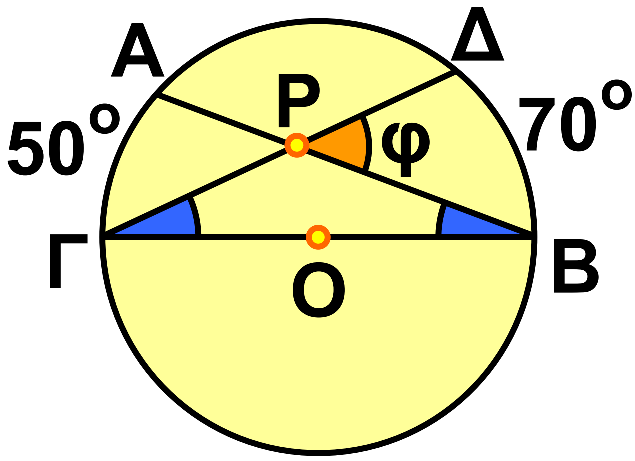


7 Να υπολογίστε τις γωνίες x, y στο διπλανό σχήμα.



8 Σ' έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 100^o$, $\overset{\frown}{B\Gamma} =$ $= 160^o$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 80^o$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

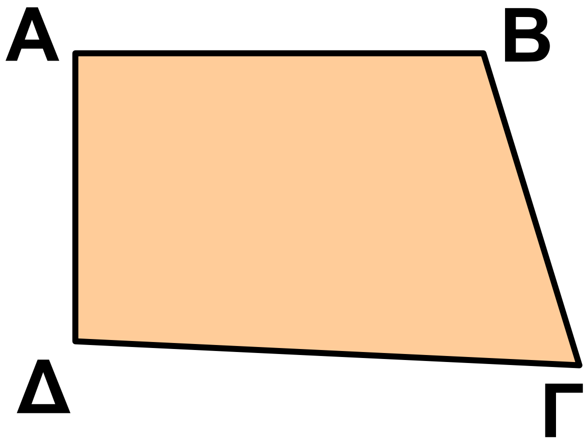
9 Στον κύκλο κέντρου Ο οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ. Αν $\overset{\frown}{A\Gamma} =$ 50^o και $\overset{\frown}{B\Delta} = 70^o$, να υπολογίσετε τη γωνία φ.



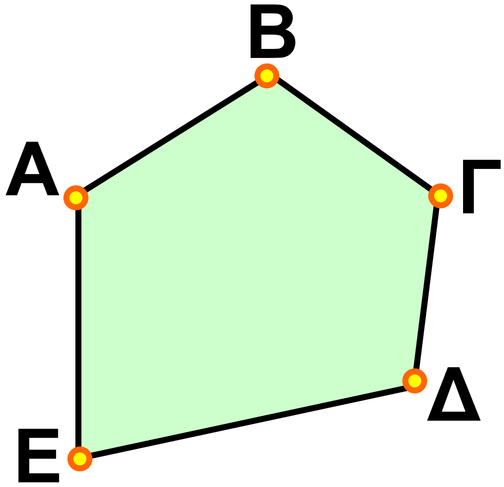
3.2. Κανονικά πολύγωνα

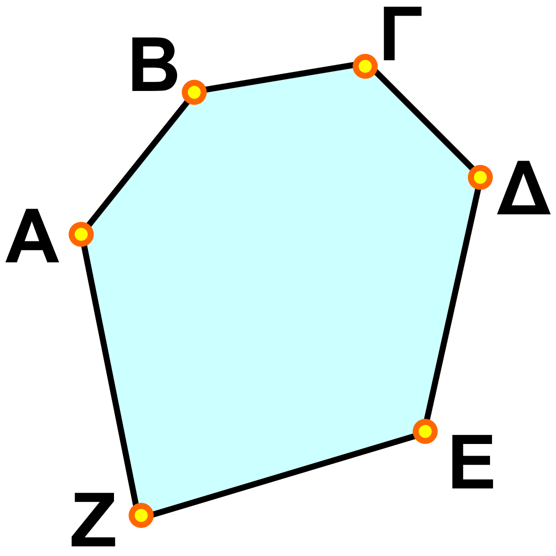
Στην Α΄ Γυμνασίου μελετήσαμε διάφορα είδη τετραπλεύρων, όπως το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο, το ρόμβο, το τετράγωνο και το τραπέζιο.

Ένα τυχαίο τετράπλευρο είναι ένα πολύγωνο με τέσσερις κορυφές.

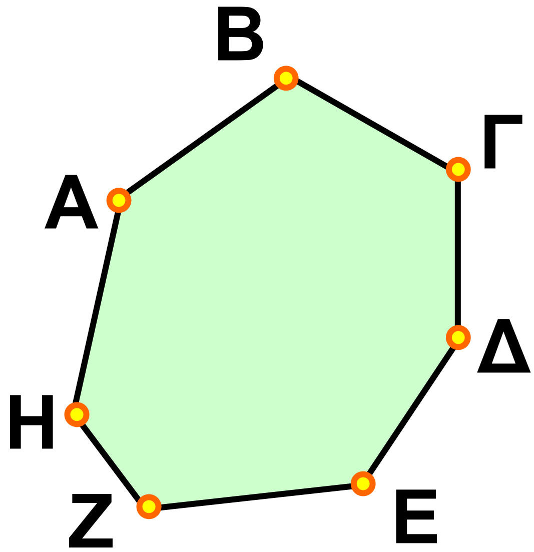


Μπορούμε να σχηματίσουμε και πολύγωνα με 5, 6, 7, ... κορυφές, τα οποία αντίστοιχα λέγονται πεντάγωνο, εξάγωνο, επτάγωνο.....κ.τ.λ.



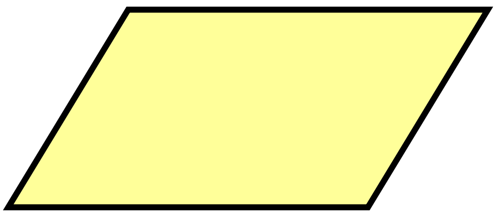


εξάγωνο



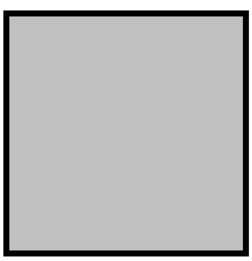
επτάγωνο

- Ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα το λέμε ν-γωνο. Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται τετράπλευρο.

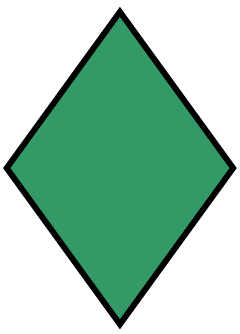


παραλληλόγραμμο

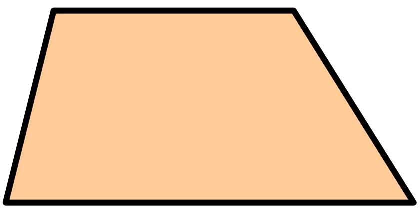
ορθογώνιο



τετράγωνο

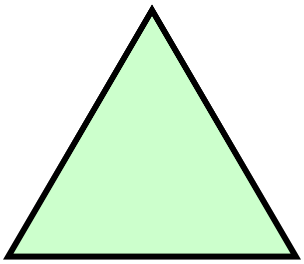


ρόμβος

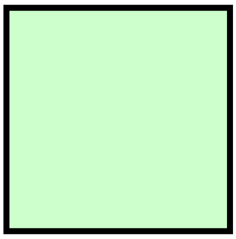


τραπέζιο

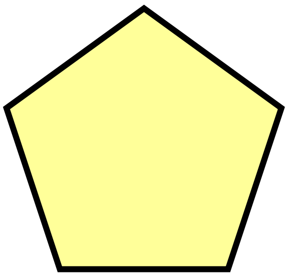
● Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες. π.χ.



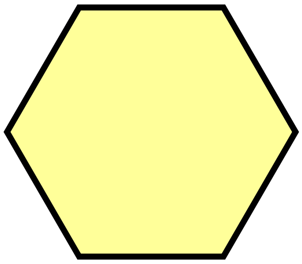
ισόπλευρο τρίγωνο



τετράγωνο



κανονικό πεντάγωνο



κανονικό εξάγωνο

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

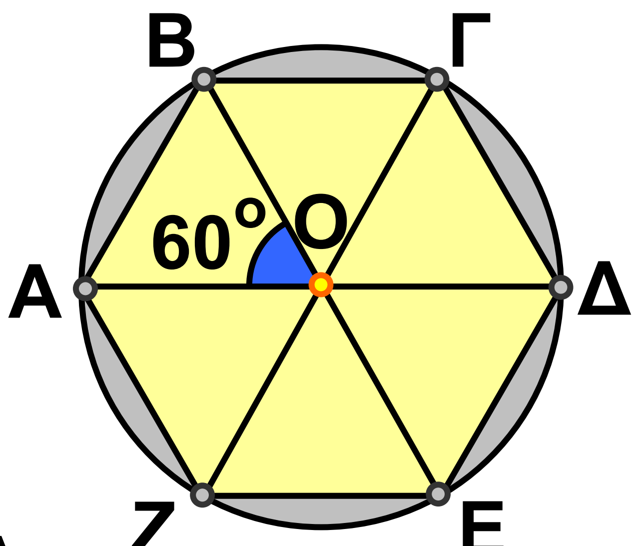
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

α) Να χωρίσετε έναν κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα:
$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$, $\overset{\frown}{EZ}$, $\overset{\frown}{ZA}$.

β) Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα (χορδές) ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ;
γ) Τι είδους πολύγωνο είναι το ΑΒΓΔΕΖ;

Λύση

α) Αφού όλος ο κύκλος έχει μέτρο 360^o, για να τον χωρίσουμε σε έξι ίσα τόξα, κάθε τόξο θα έχει μέτρο $\frac{360^o}{6} = 60^o$.



Σχηματίζουμε διαδοχικά έξι επίκεντρες γωνίες $ω = 60^o$, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα.

β) Γνωρίζουμε από την Α' Γυμνασίου ότι ίσα τόξα αντιστοιχούν σε ίσες χορδές, επομένως:
ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ.

γ) Η γωνία $\widehat{ABΓ}$ του εξαγώνου είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου με αντίστοιχο τόξο, μέτρου:

$\overparen{AZ} + \overparen{ZE} + \overparen{BΔ} + \overparen{ΔΓ} =$

$60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.

Επομένως, $\widehat{ABΓ} = \frac{1}{2} 240^\circ = 120^\circ$.

Ομοίως, έχουμε ότι:

$\widehat{BΓΔ} = \widehat{ΓΔE} = \widehat{ΔEZ} = \widehat{EZA} = \widehat{ZAB} =$

$= 120^\circ$.

Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους, οπότε είναι κανονικό.

Η διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευ-ρές (κανονικό ν-γωνο) ακολουθεί τα εξής βήματα:

1ο βήμα

Υπολογίζουμε τη γωνία $ω = \frac{360^\circ}{ν}$

2ο βήμα

Σχηματίζουμε διαδοχικά ν επίκε-ντρες γωνίες ω, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε ν ίσα τόξα.

3ο βήμα

Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμ-μα τμήματα τα άκρα των τόξων.

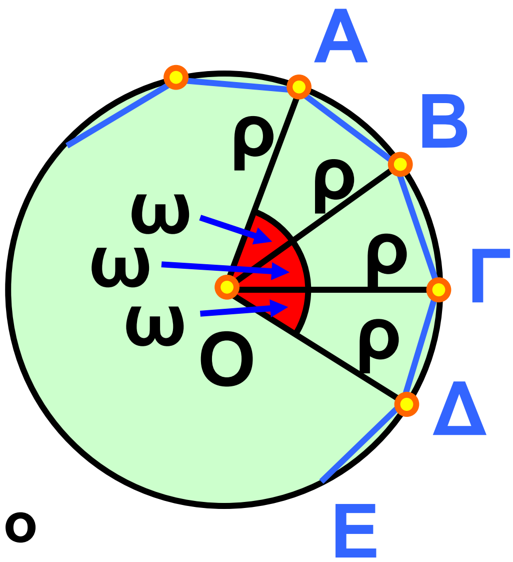
Είδαμε ότι με την προηγούμενη διαδικασία κατασκευάζεται ένα κανονικό εξάγωνο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου. Ο κύκλος αυτός λέγεται περιγε-γραμμένος κύκλος του πολυγώνου.

Επίσης, λέμε ότι το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στο συγκεκριμένο κύκλο. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εγγράψουμε σε ένα κύκλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και γενικά ένα κανονικό ν-γωνο.

Γωνία και κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου

➤ Κεντρική γωνία ν-γώνου

Ας θεωρήσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ).



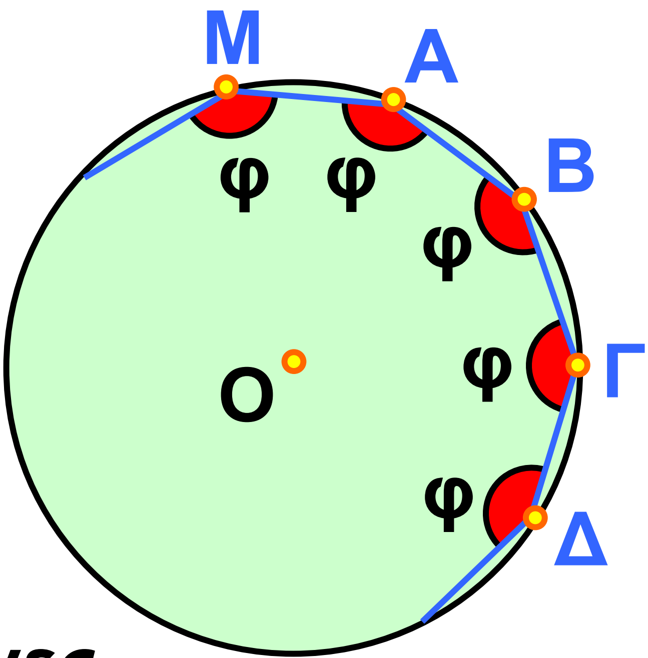
Είδαμε προηγουμένως ότι για να χωρίσουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα, θεωρούμε ν διαδοχικές επικεντρες γωνίες $ω = \frac{360^o}{ν}$.

Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται **κεντρική γωνία** του κανονικού ν-γώνου.

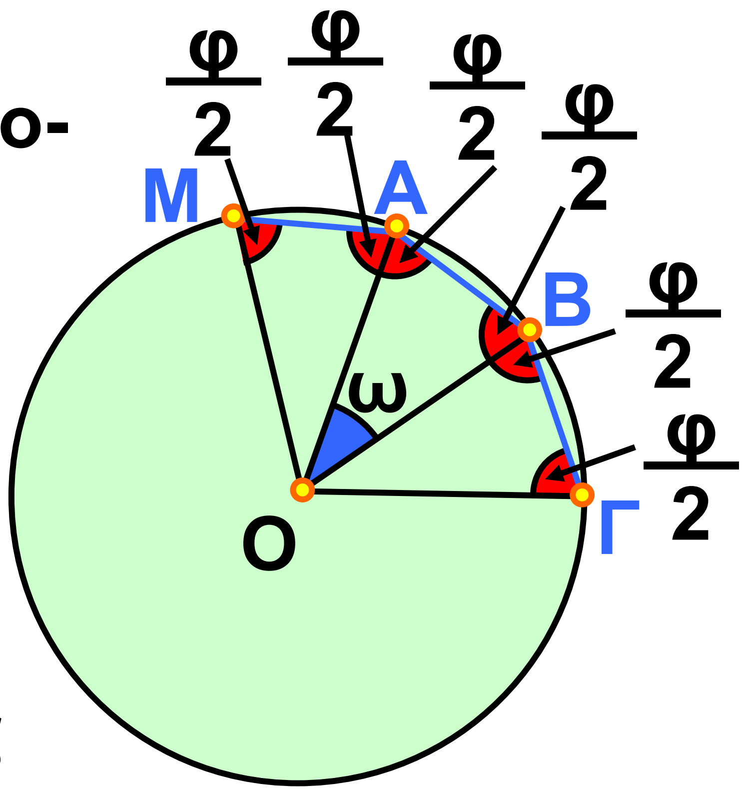
Επομένως:

> Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $ω = \frac{360^o}{ν}$.

➤ Γωνία ν-γώνου



Σε οποιοδήποτε κανονικό ν-γωνο οι γωνίες $M\widehat{A}B$, $A\widehat{B}\Gamma$, $B\widehat{\Gamma}\Delta$, ... κ.ο.κ. είδαμε ότι είναι ίσες, αφού είναι εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα και τις συμβολίζουμε με φ.



● Η γωνία φ ονομάζεται **γωνία του κανονικού ν-γώνου.**

Ας δούμε τη σχέση της κεντρικής γωνίας ω και της γωνίας φ του ν-γώνου. Ενώνουμε το κέντρο του ν-γώνου με τις κορυφές, οπότε σχηματίζονται ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα. Σε καθένα από τα τρίγωνα αυτά οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με $\frac{\varphi}{2}$. Στο τρίγωνο ΟΑΒ θα έχουμε ότι:

$$\omega + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 180^\circ \text{ ή } \omega + \varphi = 180^\circ$$

ή $\boxed{\varphi = 180^\circ - \omega}$

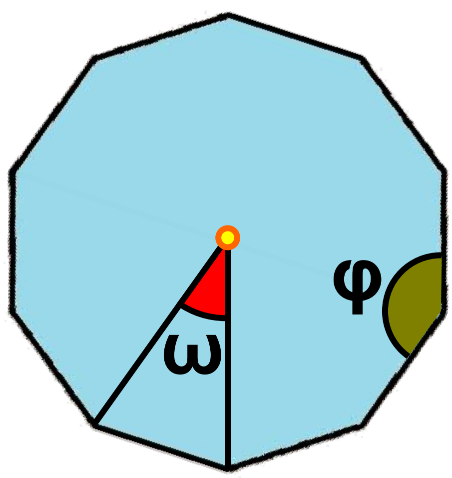
Επομένως:

Η γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ν-γώνου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

α) Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου.

β) Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 162°.



Λύση: α) Αν ονομάσουμε φ τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου και ω την κεντρική του γωνία, έχουμε:

$$\varphi = 180^{\circ} - \omega = 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{10} =$$

$$180^{\circ} - 36^{\circ} = 144^{\circ}.$$

β) ισχύει ότι: $\varphi = 180^{\circ} - \omega$ ή

$$162^{\circ} = 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{\nu} \text{ ή}$$

$$\frac{360^{\circ}}{\nu} = 180^{\circ} - 162^{\circ} \text{ ή } \frac{360^{\circ}}{\nu} = 18^{\circ}$$

$$\text{ή } \nu = \frac{360^{\circ}}{18^{\circ}} \text{ ή } \nu = 20.$$

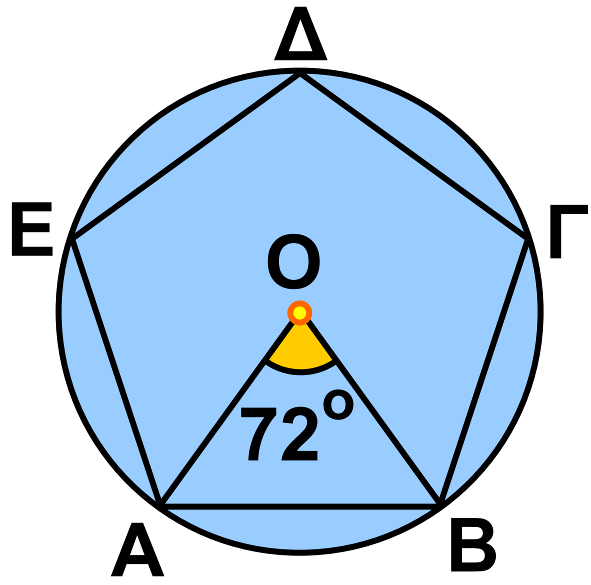
Δηλαδή το κανονικό εικοσάγωνο έχει γωνία $\varphi = 162^{\circ}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο.

Λύση: ➤ Γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία

$AOB = \dfrac{360^o}{5} = 72^o.$



➤ Με το διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{AB}$.

➤ Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.

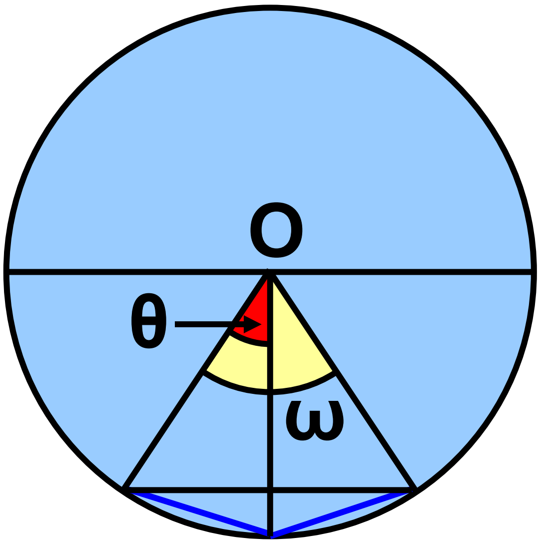
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται ένα κανονικό ν-γωνο. Να κατασκευάσετε το κανονικό πολύγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές (2ν-γωνο).

Λύση: Αν ω είναι η κεντρική γωνία του πολυγώνου που έχει ν πλευρές, και θ η κεντρική γωνία του πολυγώνου με 2ν πλευρές, έχουμε ότι $\omega = \dfrac{360^o}{\nu}$ και $\theta = \dfrac{360^o}{2\nu}$.

Επομένως, $\theta = \dfrac{\omega}{2}$.

Αν φέρουμε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του ν-γώνου, οι γωνίες που θα σχηματιστούν θα είναι οι κεντρικές γωνίες του πολυγώνου με 2ν πλευρές. Οι διχοτόμοι, όπως γνωρίζουμε, διέρχονται από τα μέσα των τόξων. Τα μέσα αυτών των τόξων και οι κορυφές του αρχικού ν-γώνου αποτελούν τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στον πίνακα της επόμενης σελίδας να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

α) Η κεντρική γωνία κανονικού εξα-γώνου είναι:		
Α	Β	Γ
120^{o}	30^{o}	60^{o}

β) Η κεντρική γωνία κανονικού δωδεκάγωνου είναι:		
Α	Β	Γ
120^{o}	30^{o}	60^{o}

γ) Η κεντρική γωνία κανονικού πενταγώνου είναι:		
Α	Β	Γ
52^{o}	72^{o}	132^{o}

δ) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 36^{o}. Το πλήθος των πλευρών του είναι:		
Α	Β	Γ
6	10	12

ε) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 10^{o}. Το πλήθος των πλευρών του είναι:		
Α	Β	Γ
12	24	36

2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

α) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 40^{o}. Η γωνία του πολυγώνου είναι:		
Α	Β	Γ
50^{o}	90^{o}	140^{o}

β) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 72^{o}. Η γωνία του πολυγώνου είναι:		
Α	Β	Γ
108^{o}	18^{o}	172^{o}

γ) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 30^o. Η γωνία του πολυγώνου είναι:		
Α	Β	Γ
150^o	30^o	60^o

3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

Ένα κανονικό πολύγωνο έχει 15 πλευρές.		
α) Η κεντρική γωνία του είναι:		
Α	Β	Γ
15^o	24^o	30^o
β) Η γωνία του πολυγώνου είναι:		
Α	Β	Γ
24^o	156^o	72^o

Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 150^{o}		
γ) Η κεντρική γωνία του είναι:		
Α	Β	Γ
15^{o}	24^{o}	30^{o}
δ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:		
Α	Β	Γ
15	12	8

Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 135^{o}		
ε) Η κεντρική γωνία του είναι:		
Α	Β	Γ
35^{o}	45^{o}	65^{o}
στ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:		
Α	Β	Γ
8	12	18

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.

πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3		
5		
6		
10		

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15°	
	150°
72°	
	160°

2 Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι τετραπλάσια της κεντρικής του γωνίας. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολύγωνου.

3 Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία ω και τη γωνία φ ενός κανονικού εξαγώνου και να επαληθεύσετε ότι: $ω + φ = 180^\circ$.

4 Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι τα $\frac{5}{3}$ της ορθής. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

5 Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο:

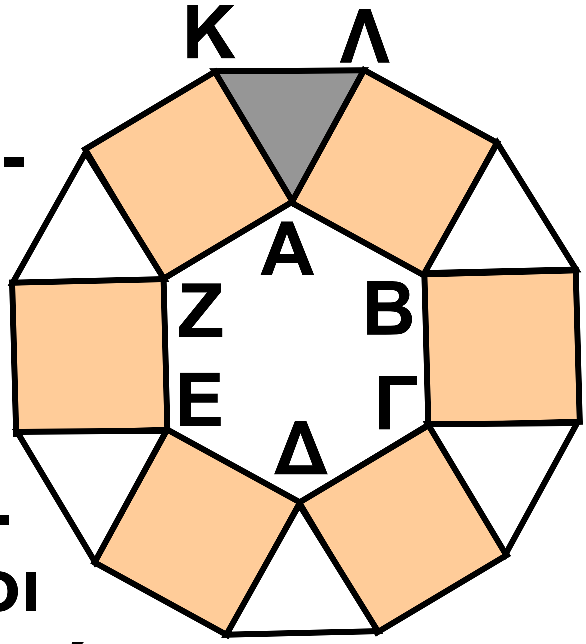
α) με κεντρική γωνία $ω = 16^\circ$.

β) με γωνία $φ = 130^\circ$.

6 Να κατασκευάσετε κανονικό οκτάγωνο.

7 **Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία;**

8 **Με πλευρές τις πλευρές ενός κανονικού εξάγωνου, κατασκευάζουμε τετράγωνα εξωτερικά του εξαγώνου. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές των τετραγώνων, που δεν είναι και κορυφές του εξαγώνου, σχηματίζουν κανονικό δωδεκάγωνο.**



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξο-

χότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις

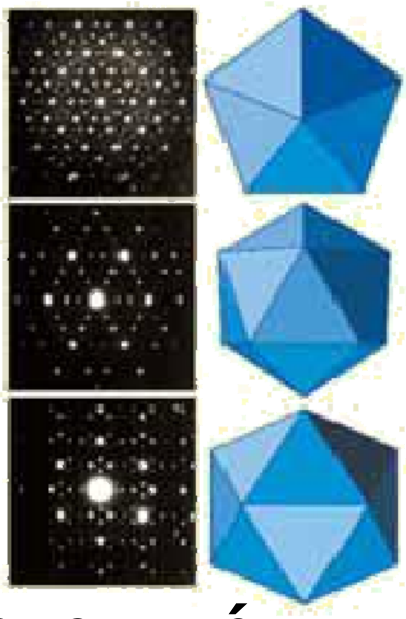
από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα. Ανάλογες διακοσμήσεις ή *ακόμη και εφαρμογές στις κατά-σκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφο-ρες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο «συμμετρικός» τρόπος χρωματισμού.*

Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρη-σκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ' αυτό το είδος Τέχνης. Για πα-ράδειγμα, η ισλαμική

θρησκεία απαγορεύει την αναπαρά-σταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για το λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι

μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.



Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του

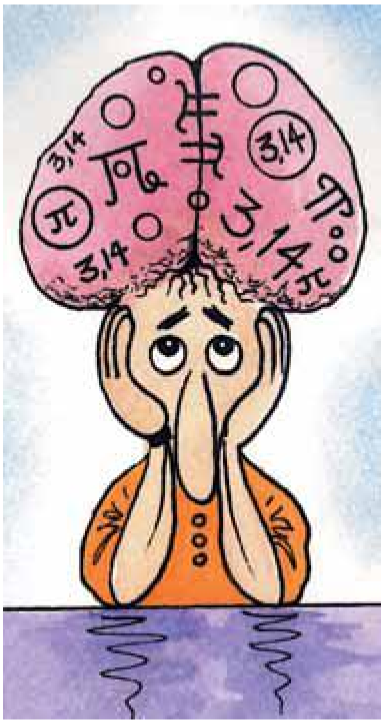
20ου αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.

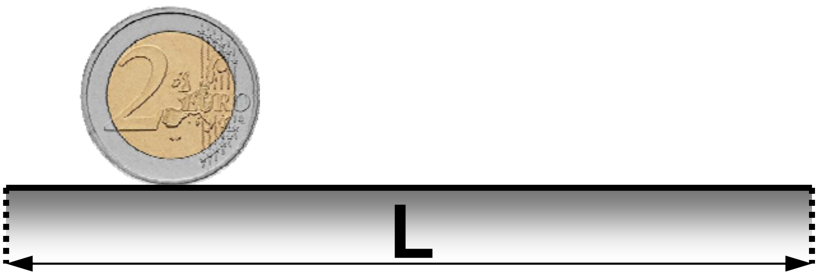
Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

3.3. Μήκος κύκλου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ας θεωρήσουμε ένα νόμισμα των 2 €. Αφού μετρήσετε τη διάμετρο του δ, να βάλετε μελάνι γύρω - γύρω από το νόμισμα και να το κυλίσετε κάθετα στο χαρτί, έτσι ώστε να κάνει μια πλήρη περιστροφή.





α) Το μήκος L που διαγράφει είναι το μήκος του κύκλου. Συμπληρώστε τον πίνακα της επόμενης σελίδας:

δ	=	
L	=	
$\frac{L}{\delta}$	=	

β) Ας δούμε κατόπιν μερικές προσεγγιστικές μετρήσεις από την Αστρονομία για την «περιφέρεια» και τις διαμέτρους κάποιων πλανητών. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Πλανήτες	L	δ	$\frac{L}{\delta}$
Ερμής	15320 km	4879 km	
Αφροδίτη	38006,6 km	12104 km	
Άρης	21333,2 km	6794 km	
Γη	40053,8 km	12756 km	
Σελήνη	10914,6 km	3476 km	

Να κάνετε τις πράξεις με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

α) έχουμε ότι:

δ	=	2,5 cm
L	=	7,85 cm
$\frac{L}{\delta}$	=	3,14

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{L}{\delta}$ είναι περίπου 3,14 για όλους τους πλανήτες. Αυτός ο σταθερός λόγος ονομάστηκε από τους αρχαίους Έλληνες ως «ο αριθμός π», ο πιο διάσημος και αξιοσημείωτος απ' όλους τους αριθμούς (βλέπε Ιστορικό σημείωμα).

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία. Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία του π είναι:

π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971 ...

Από τη σχέση $\frac{L}{\delta}$ = π, προκύπτει ότι:

Το μήκος του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση:

$L = \pi\,\delta$ ή $L = 2\,\pi\,\rho$

<u>Παρατήρηση:</u>

Στις εφαρμογές και ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε για τον π την προσεγγιστική τιμή 3,14.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένας κύκλος έχει μήκος L = 9,42 cm. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

Λύση: Για το μήκος του κύκλου ισχύει ότι:

$$L = 2\pi\rho \text{ ή } \rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{9{,}42}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}5 \text{ cm.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας κύκλος έχει μήκος 10 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

Λύση: Θα ισχύει ότι: $L_1 = L_2 + 10$ ή $2\pi\rho_1 = 2\pi\rho_2 + 10$. Επομένως:

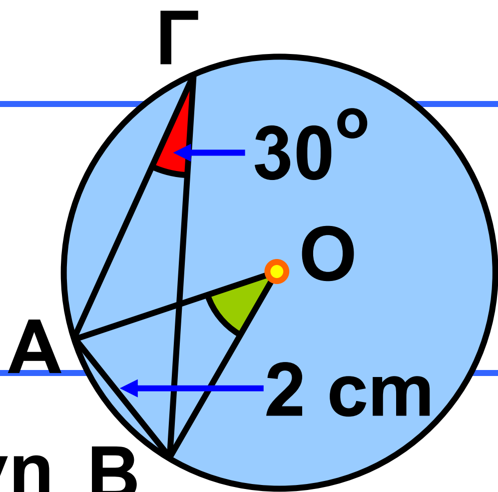
$\rho 1 = \rho 2 + \dfrac{10}{2\pi}$ ή $\rho 1 = \rho 2 + \dfrac{10}{2 \cdot 3{,}14}$

ή $\rho 1 = \rho 2 + 1{,}59$.

Δηλαδή, η ακτίνα του πρώτου κύκλου είναι μεγαλύτερη κατά 1,59 cm της ακτίνας του δεύτερου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί το μήκος του κύκλου στο διπλανό σχήμα.



Λύση: Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ είναι ίση με 30°, οπότε βρίσκουμε την αντίστοιχη επίκεντρη $\widehat{AOB} = 2 \cdot 30^{o} = 60^{o}$. Επομένως το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΒ = ΑΒ = 2 cm, οπότε ρ = 2 cm. Άρα, το μήκος του κύκλου είναι:

$L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$ cm.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

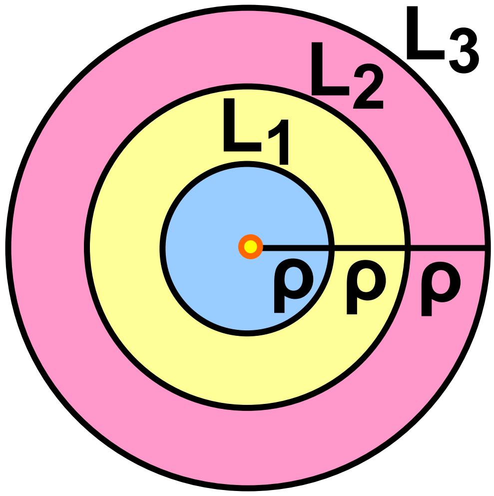
1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ	Μήκος κύκλου L
5 cm	
	37,68 cm
4 cm	
3 cm	
	12,56 cm
9 cm	

2. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το μήκος του κύκλου:

Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: τετραπλασιάζεται Δ: παραμένει το ίδιο.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Τρεις ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες ρ, 2ρ, 3ρ αντίστοιχα. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:



$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_2}{L_3}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$\frac{L_1}{2ρ}$	$\frac{L_2}{4ρ}$	$\frac{L_3}{6ρ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος έχει μήκος 20 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

2 Γύρω από τον κορμό ενός αιωνόβιου δέντρου τυλίγουμε ένα σκοινί. Μετράμε το σκοινί και βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,5 m. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού.

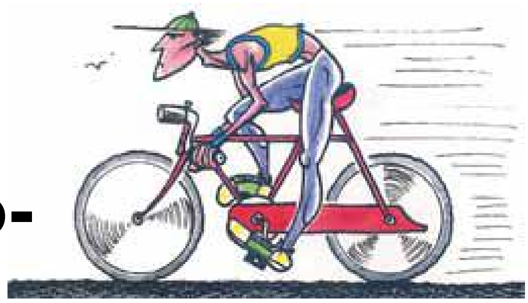
3 Οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5 cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι ακτίνες τους
β) οι περίμετροί τους.

4 Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο 2 προς 1. Να βρείτε το λόγο:
α) των διαμέτρων τους.
β) των ακτίνων τους.

5 Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 2,5 cm. Να βρείτε πόσο διάστημα θα διαγράψει το άκρο του λεπτοδείκτη σε 12 ώρες.

6 Στη μηχανή ενός αυτοκινήτου δύο τροχαλίες Α, Β συνδέονται με ελαστικό ιμάντα. Αν ρ_A = 2 cm και ρ_B = 8 cm, να βρείτε πόσες στροφές θα κάνει η Α, αν η Β κάνει μία στροφή.

7 Ένας ποδηλάτης, που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα ρ = 30 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20 km/h;



8 Γνωρίζουμε ότι ο Ισημερινός της Γης έχει μήκος 40.000 km περίπου.

Θεωρώντας ότι η Γη είναι σφαιρική να βρείτε την ακτίνα της.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971...
Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, -όπως λέγεται- αριθμός που συναντάται στη φύση. *Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο* ***π*** *θεωρούνταν ίσος με το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο* ***π*** *είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το* $3\frac{1}{8}$.
Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $(\frac{8}{9}\delta)^2$*, όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε, π ≈ 3,16049...*

Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν μέθοδο για τον υπολογισμό του π. Το συνδύασαν με ένα από τα επιστημονική περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.

Εκτιμήσεις του π

Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρουν προσεγγίσεις του π με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \leq \pi \leq 3\frac{10}{70}$

$3,14085 \leq \pi \leq 3,142857$

$\pi \approx 3\frac{1}{7}$ *ή* $\frac{22}{7}$

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ: $\pi \approx \frac{377}{120}$ *(=3,1416…)*

TSU CHUNG-CHI (Κίνα):
$3,1415926 \leq \pi \leq 3,1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$

AL-KASHI *(15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

LUDOLPH VAN CEULEN*: 20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

SNELL: *34 ψηφία.*

VIETE *(1592): πρώτος τύπος:* $\frac{\pi}{2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

JOHN WALLIS:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots$$

***LEIBNIZ** (1673):*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$$

***JOHN MACHIN** (1706): 100 δεκαδικά ψηφία*

***JOLIANN DASE** (1824 - 1861): 200*

***WILLIAM SHANKS** (1853): 707*

***ENIAC** (H/Y)(1949): 2037*

***CDC 6600** (1967): 500.000*

***Ιαπωνική Ομάδα** (1993): 16.777.216 (=2^{24}).*

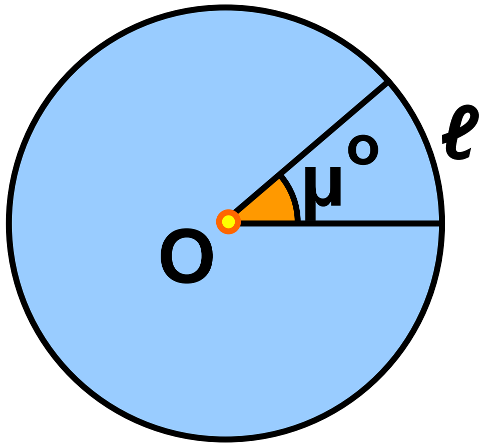
3.4. Μήκος τόξου

Για να υπολογίσουμε το μήκος ενός τόξου μετρημένου σε μοίρες, αρκεί να εφαρμόσουμε την απλή μέθοδο των τριών.

Ένα τόξο 360^o (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος $2\pi\rho$.

Ένα τόξο μ^o πόσο μήκος έχει;

Τόξο	Μήκος
$360°$	$2\pi\rho$
$\mu°$	ℓ



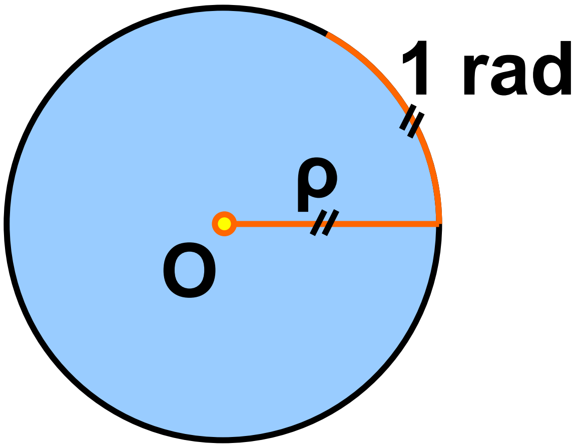
Έχουμε: $\dfrac{360}{2\pi\rho} = \dfrac{\mu}{\ell}$

ή $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.

Το μήκος ενός τόξου μ^o ισούται με:

$$ή\ \ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}.$$

Ακτίνια (rad)



Αρκετές φορές ως μονάδα μέτρησης των τόξων ενός κύκλου θεωρούμε το τόξο που έχει το ίδιο μήκος με την ακτίνα ρ του κύκλου. Αυτή η μονάδα μέτρησης λέγεται **ακτίνιο** ή **rad**. Αν χρησιμοποιήσουμε ακτίνια, τότε:

Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με: $\ell = \alpha\rho$.

Σχέση μοιρών και ακτινίων

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις:

$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$ $\qquad$ $\ell = \alpha\rho$

βρίσκουμε ότι: $2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360} = \alpha\rho$ ή

$\pi \cdot \frac{\mu}{180} = \alpha$ ή $\boxed{\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$.

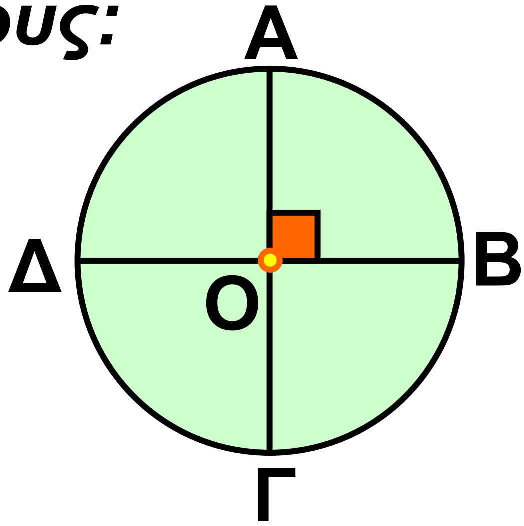
Η αναλογία αυτή εκφράζει τη σχέση των μοιρών με τα ακτίνια.

Σχόλιο:

Ο κύκλος χωρίζεται σε τέσσερα ίσα τόξα από δύο κάθετες διαμέτρους:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$.

Καθένα από αυτά τα τόξα έχει μέτρο 90^o και ονομάζεται τεταρτοκύκλιο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω τόξα:

$\frac{\pi}{4}$ rad, 25^o, 48^o, $\frac{3\pi}{2}$ rad,

225^o, $\frac{11\pi}{6}$ rad

Λύση: Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα τόξα, θα πρέπει είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε μοίρες είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε rad. Ας κάνουμε και τις δύο μετατροπές:

Μοίρες	$\frac{\pi}{4} = 45^{o}$	25^{o}
rad	$\frac{\pi}{4}$	$25^{o} = \frac{5\pi}{36}$

Μοίρες	48^{o}	$\frac{3\pi}{2} = 270^{o}$
rad	$48^{o} = \frac{4\pi}{15}$	$\frac{3\pi}{2}$

Μοίρες	225^{o}	$\frac{11\pi}{6} = 330^{o}$
rad	$225^{o} = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Επομένως, ισχύει ότι:

$25^{o} < 45^{o} < 48^{o} < 225^{o} < 270^{o} < 330^{o}$

ή $\frac{5\pi}{36} < \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{15} < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα τόξο 30^o έχει μήκος 1,3 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση: Το μήκος του τόξου είναι :

$\ell = 2\pi\rho\,\frac{\mu}{360}$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$1{,}3 = \pi\rho\frac{30}{180}$ ή $1{,}3 = \pi\rho\frac{1}{6}$ ή

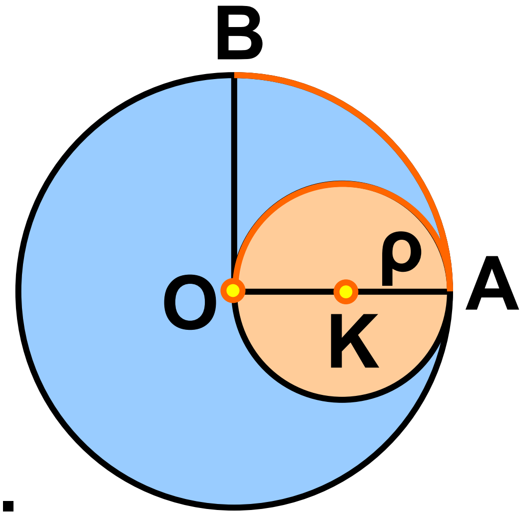
$\pi\rho = 7{,}8$ ή $\rho = \frac{7{,}8}{\pi} = \frac{7{,}8}{3{,}14} =$

$= 2{,}48$ (cm).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να αποδείξετε ότι τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AO}$ και $\overset{\frown}{AB}$ στο σχήμα της επόμενης σελίδας είναι ίσα. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Λύση: Στον κύκλο (Κ, ρ) το τόξο ΑΟ είναι ημικύκλιο, επομένως έχει μήκος:



$$\ell_1 = 2\pi\rho\frac{180}{360} = \pi\rho.$$

Στον κύκλο (Ο,2ρ) το τόξο ΑΒ αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο, οπότε

έχει μήκος: $\ell_2 = 2\pi \cdot (2\rho)\,\frac{90}{360} = \pi\rho.$

Άρα, τα δύο τόξα έχουν ίδιο μήκος. **Συμπεραίνουμε ότι δύο τόξα με ίσα μήκη δεν είναι απαραίτητα ίσα, αφού μπορεί να ανήκουν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε τα μέτρα των τόξων της πρώτης γραμμής από μοίρες σε ακτίνια (rad) της δεύτερης γραμμής.

Μοίρες	90°	60°	180°	270°	45°	360°
Ακτίνια	$\frac{\pi}{4}$	2π	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

2. Αν το μήκος ℓ ενός τόξου μ° είναι ίσο με το $\frac{1}{8}$ του μήκους του κύκλου στον οποίο ανήκει, τότε:

Α: $\mu = 45^\circ$ Β: $\mu = 90^\circ$ Γ: $\mu = 60^\circ$

Δ: $\mu = 180^\circ$

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα της επόμενης σελίδας:

Τόξο σε Μοίρες	30°			
Τόξο σε Ακτίνια		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

Τόξο σε Μοίρες	100°		60°	270°
Τόξο σε Ακτίνια		$\frac{7\pi}{6}$		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε Μοίρες		15°			180°
Τόξο σε Ακτίνια	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	

2 Να υπολογίσετε το μήκος ενός τεταρτοκύκλιου ακτίνας ρ = 8 cm.

3 Σ' έναν κύκλο που έχει μήκος 188,4 cm να βρείτε το μήκος τόξου 30^{o}.

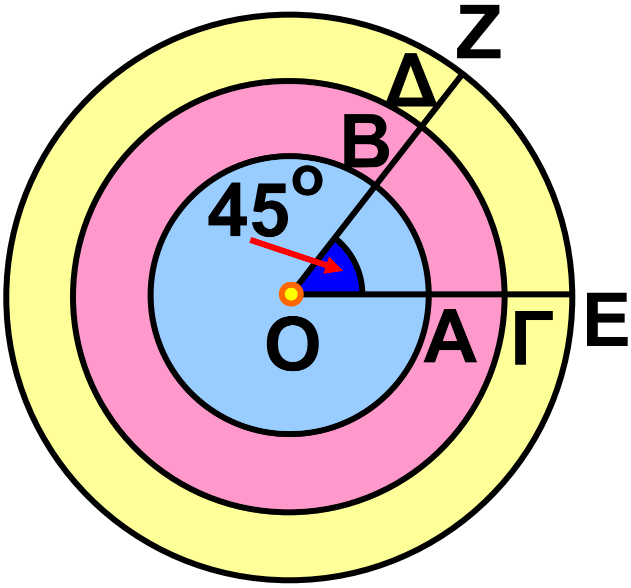
4 Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ = 10 cm.

5 Ένα τόξο 45^{o} έχει μήκος 15,7 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

6 Δίνονται 2 τόξα π ακτινίων. Να εξετάσετε αν είναι πάντοτε ίσα.

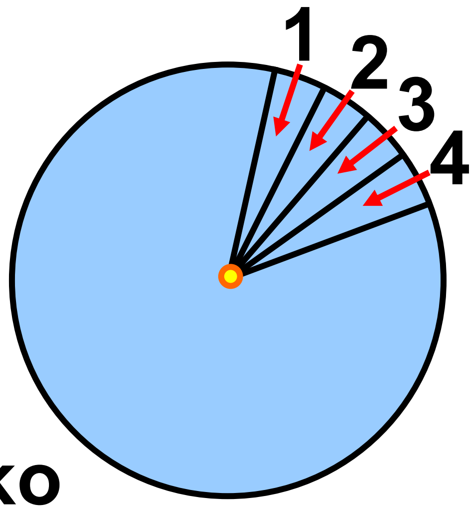
7 Δίνονται τρεις ομόκεντροι κύκλοι ακτίνων 1 cm, 1,5 cm και 2 cm και μια επίκεντρη γωνία 45^{o}. Να βρείτε

**τα μήκη των τόξων που αντιστοι-
χούν στη γωνία αυτή.**

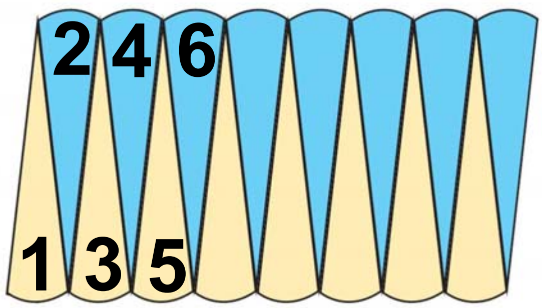


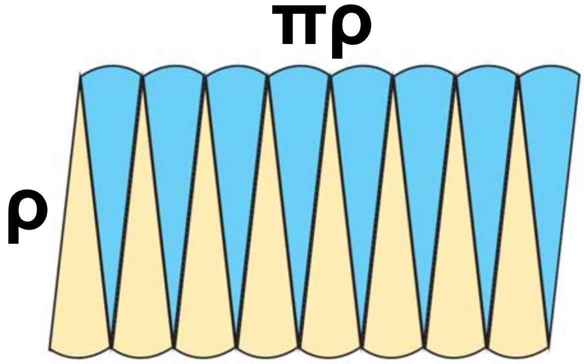
3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Ο ΘΕΟΣ ΗΛΙΟΣ ΕΓΙΝΕ…



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη μπορούμε. Κόβουμε τα κομματάκια αυτά και κατόπιν τα τοποθετούμε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:





Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα σχήμα που «μοιάζει» με ορθογώνιο. Αν συνεχίσουμε να χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο ολοένα σε πιο μικρά ίσα μέρη, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο, του οποίου η «βάση» είναι ίση με το μισό του μήκους του κύκλου, δηλαδή με **πρ**, και το «ύψος» με την ακτίνα του κύκλου.

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, δηλαδή με ρ • πρ.

Επομένως:

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $Ε = πρ^2$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

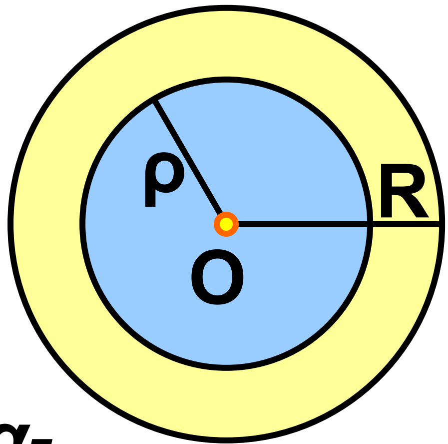
Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 6,28 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση: Το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο L = 2πρ, δηλαδή

$6{,}28 = 2 \cdot 3{,}14\ \rho$, οπότε $\rho = 1$ (cm). Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι: $E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα η κίτρινη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κύκλους ονομάζεται κυκλικός δακτύλιος. Αν το εμβαδόν του κίτρινου δακτυλίου είναι ίσο με το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δίσκου, ο οποίος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ cm, να βρείτε την ακτίνα R του μεγάλου κύκλου.



Λύση: Το εμβαδόν Ε του δακτυλίου ισούται με τη διαφορά των εμβαδών $E_1 = \pi R^2$ και $E_2 = \pi\rho^2$ των

δύο κυκλικών δίσκων. Επομένως,
$E = E_1 - E_2 = \pi R^2 - \pi\rho^2$.

Αφού $E = E_2$, θα έχουμε:
$\pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2$ ή $\pi R^2 = 2\pi\rho^2$ ή
$R^2 = 2\rho^2$ ή $R^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$.
Οπότε: R = 2 cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Μια πιτσαρία προσφέρει πίτσες κυκλικού σχήματος σε τρία μεγέθη: τη μικρή, τη μεσαία και τη μεγάλη. Η μικρή έχει διάμετρο 23 cm και κοστίζει 7 €. Η μεσαία έχει διάμετρο 28 cm και κοστίζει 8 € και 50 λεπτά. Η μεγάλη έχει διάμετρο 33 cm και κοστίζει 11 € και 90 λεπτά. Ποια από τις τρεις πίτσες συμφέρει από άποψη τιμής;

Λύση: Για να συγκρίνουμε τις 3 πίτσες, αρκεί να βρούμε το κόστος τού 1 cm^2 για κάθε πίτσα. Η μικρή έχει εμβαδόν:

$E_1 = \pi\rho_1^2 = \pi \cdot (\frac{23}{2})^2 = 415,27\ (cm^2)$.

Η μεσαία έχει εμβαδόν:

$E_2 = \pi\rho_2^2 = \pi \cdot 14^2 = 615,44\ (cm^2)$.

Η μεγάλη έχει εμβαδόν:

$E_3 = \pi\rho_3^2 = \pi \cdot (\frac{33}{2})^2 = 854,87\ (cm^2)$.

Το κόστος του 1 cm^2 για κάθε πίτσα είναι:

Μικρή	$\frac{700}{415,27}$=1,69 (λεπτα/cm^2)
Μεσαία	$\frac{850}{615,44}$=1,38 (λεπτα/cm^2)
Μεγάλη	$\frac{1190}{854,87}$=1,39 (λεπτα/cm^2)

Επομένως, συμφέρει να αγοράσουμε τη μεσαία πίτσα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν ίσο αριθμητικά με το μήκος του. Η ακτίνα του είναι ίση με:

Α: 4 Β: 2 Γ: 6 Δ: 5.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

2. Ένας κύκλος έχει μήκος L = 4 cm. Το εμβαδόν του είναι:

Α: 12 cm^2 Β: $\frac{4}{\pi}$ cm^2 Γ: 9 cm^2 Δ: 16 cm^2.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν του:

Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Εμβαδόν κύκλου Ε	Ακτίνα ρ κύκλου
	5 cm
28,26 cm^2	
	2,5 cm
942 cm^2	

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν Ε
1 cm		
2 cm		
3 cm		
4 cm		

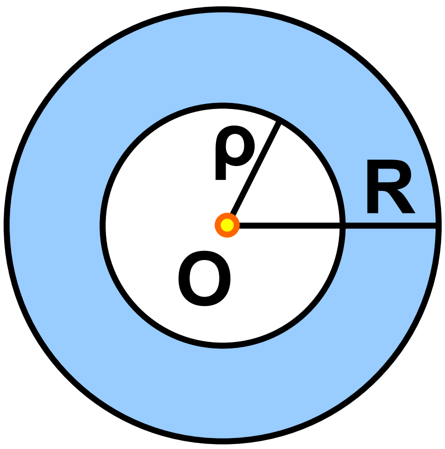
Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν Ε
ρ cm		
2ρ cm		
3ρ cm		
4ρ cm		

Τι παρατηρείτε;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

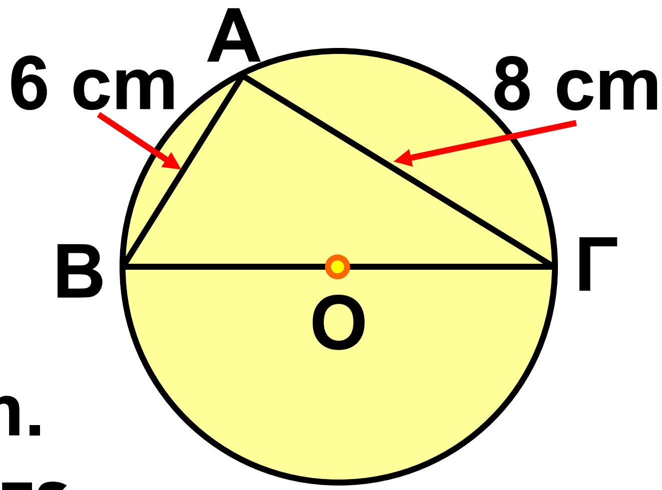
1 **Ένας κύκλος (Ο, ρ) έχει διάμετρο 10 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει τετραπλάσια επιφάνεια από τον κύκλο (Ο, ρ).**

2 **Να βρείτε το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δακτυλίου, αν ρ=2 cm και R=3 cm.**



3 **Στο σχήμα της επόμενης σελίδας να υπολογίσετε το μήκος και**

το εμβαδόν του κύκλου.



4 Ένας κύκλος έχει ακτίνα 10 cm. Να κατασκευάσετε κυκλικό δίσκο με διπλάσιο εμβαδόν.

5 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 3 cm. Να βρεθεί (κατά προσέγγιση) η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου που είναι ισοδύναμος (δηλαδή έχει το ίδιο εμβαδόν) με το τετράγωνο.

6 Λυγίζουμε ένα σύρμα μήκους 1,256 m, ώστε να σχηματίσει κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που αντιστοιχεί στο συρμάτινο κύκλο.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς $α = 6$ cm.

8 Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν $144π$ cm^2. Να βρείτε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60^o.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1^{o} – 89^{o}

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	,01908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί-τονο	εφαπτο-μένη
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,2698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900

Περιεχόμενα 2ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

(συνέχεια από τον 1ο τόμο)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.