Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2.2 – 3.4

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Παναγιώτης Βλάμος, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης***

Παναγιώτης Δρούτσας, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης***

Γεώργιος Πρέσβης, ***Μαθημ/κός Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης***

Κων/νος Ρεκούμης, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης***

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Βασίλειος Γιαλαμάς, ***Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.***

Χαράλαμπος Τουμάσης, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

Πολυξένη Ρόδου, ***Μαθηματικός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης***

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Θεοδόσης Βρανάς, ***Σκιτσογράφος - Εικονογράφος***

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>
Ευγενία Βελάγκου, *Φιλόλογος*
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>
Γεώργιος Πολύζος, *Πάρεδρος ε.θ.*
του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>
Γεώργιος Μήλιος, *Ζωγράφος-*
Χαράκτης

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>
Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και
75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

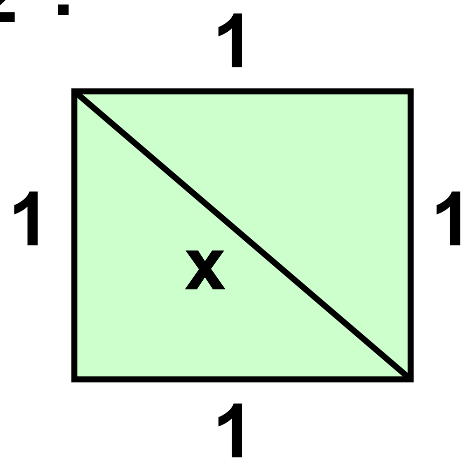
Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2.2 – 3.4

2.2. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

Άρρητοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμο-θεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο.
Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ. περίπου) «αποκάλυψε» τον «άρρητο» $\sqrt{2}$. Σύντομα βρέθηκαν και άλλοι άρρητοι αριθμοί. Ο Εύδοξος ο Κνί-διος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από

την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών.
Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$.



Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, δηλαδή δεν είναι ρητός. Γι' αυτό λέγεται άρρητος.

Γενικά:

Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει την μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, ονομάζεται άρρητος αριθμός.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός.

Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$1 = 1^2 < 2 < 2^2 = 4$$

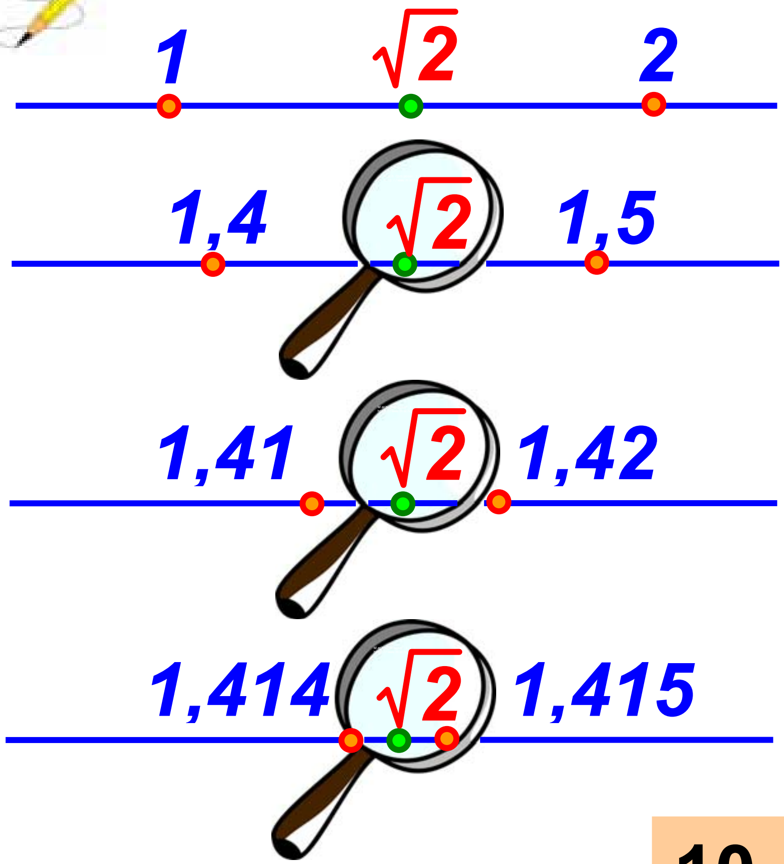
$$1{,}96 = 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$$

$$1{,}9881 = (1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2 = 2{,}0164$$

$$1{,}9994 = (1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2 = 2{,}0022$$
$$1{,}99996 = (1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2 = 2{,}00024$$
$$1{,}9999899 = (1{,}41421)^2 < 2 < (1{,}41422)^2 = 2{,}000018$$

....

Άρα:



$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

Επομένως τον αριθμό x = $\sqrt{2}$, που προσπαθούμε να βρούμε, δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε να προσεγγίσουμε τον 2 ως εξής:

Άρα:

Έχουμε:

με **προσέγγιση χιλιοστού**:

$$\sqrt{2} = 1,414$$

με **προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού**:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

με **προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού**:

$$\sqrt{2} = 1,41421$$ κ.ο.κ.

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις** του αριθμού $\sqrt{2}$.

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$,... είναι άρρητοι. Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π.

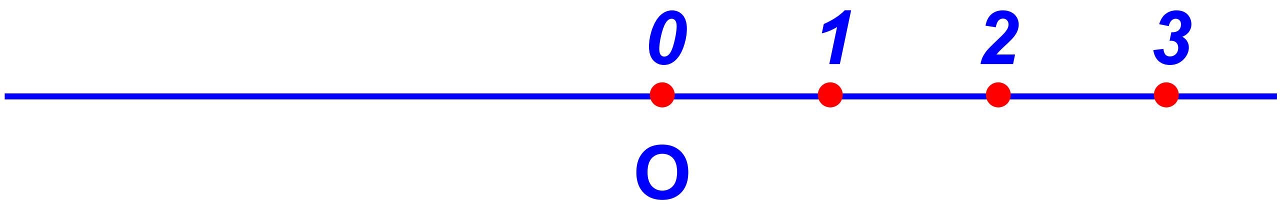
Σχόλιο:

Τις τετραγωνικές ρίζες μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τη βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης ως εξής: Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα $\boxed{2}$ και $\boxed{\sqrt{\ }}$, οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία. Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαμε ειδικούς πίνακες.

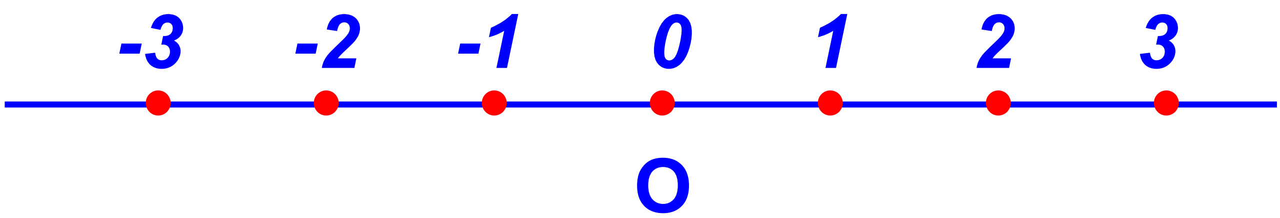
Πραγματικοί αριθμοί

Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.

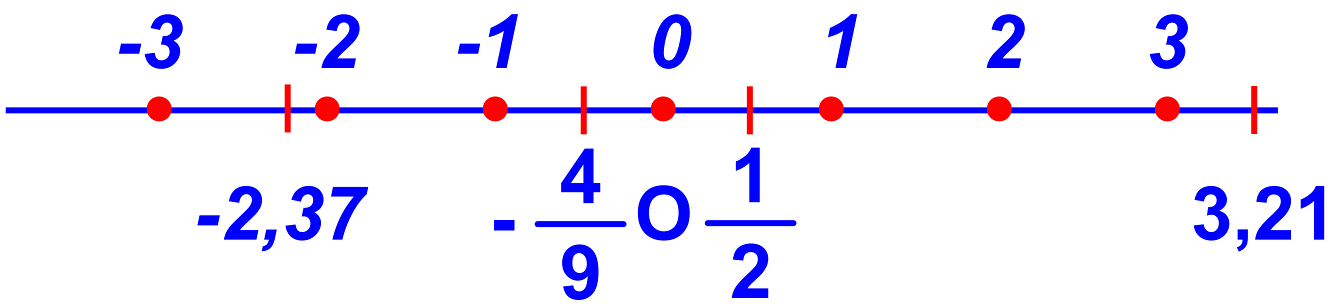
- **Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, … παριστάνονται στη παρακάτω ευθεία με σημεία.**
  Στην αρχή Ο έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).



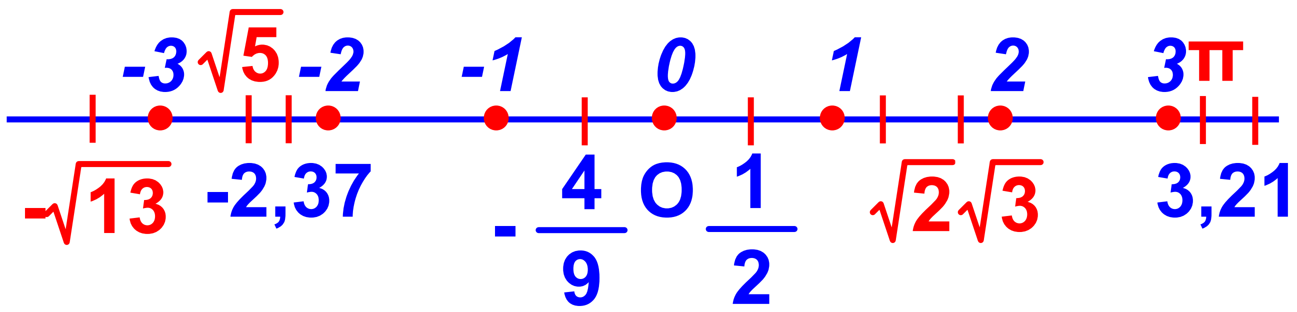
- **Οι ακέραιοι αριθμοί: … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 … παριστάνονται πάλι με σημεία.**
  Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.



➤ Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός. Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.



➤ Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{13}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

Λύση:

α) Με διαδοχικές δοκιμές έχουμε:

Επειδή	και	είναι
$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$3 < \sqrt{13} < 4$.
Επειδή	και	είναι
$(3{,}6)^2 = 12{,}96$	$(3{,}7)^2 = 13{,}69$	$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$.
Επειδή	και	είναι
$(3{,}60)^2 = 12{,}960$	$(3{,}61)^2 = 13{,}032$	$3{,}60 < \sqrt{13} < 3{,}61$.
Επειδή	και	είναι
$(3{,}605)^2 = 12{,}996$	$(3{,}606)^2 = 13{,}003$	$3{,}605 < \sqrt{13} < 3{,}606$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Χρησιμοποιήστε ένα μικροϋπολογιστή τσέπης για να βρείτε με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{50}$, γ) $\sqrt{72}$,

δ) $\sqrt{1764}$, ε) $\sqrt{427}$.

Λύση:

Έχουμε ότι:

α) Πατώντας διαδοχικά τα πλήκτρα και $\boxed{3}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ στην οθόνη παρουσιάζεται ο αριθμός 1,7320508. Άρα, με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων ισχύει ότι: $\sqrt{3} = 1,732$.

β) Ομοίως $\sqrt{50} = 7,071$

γ) Ομοίως $\sqrt{72} = 8,485$

δ) Ομοίως $\sqrt{1764} = 42$

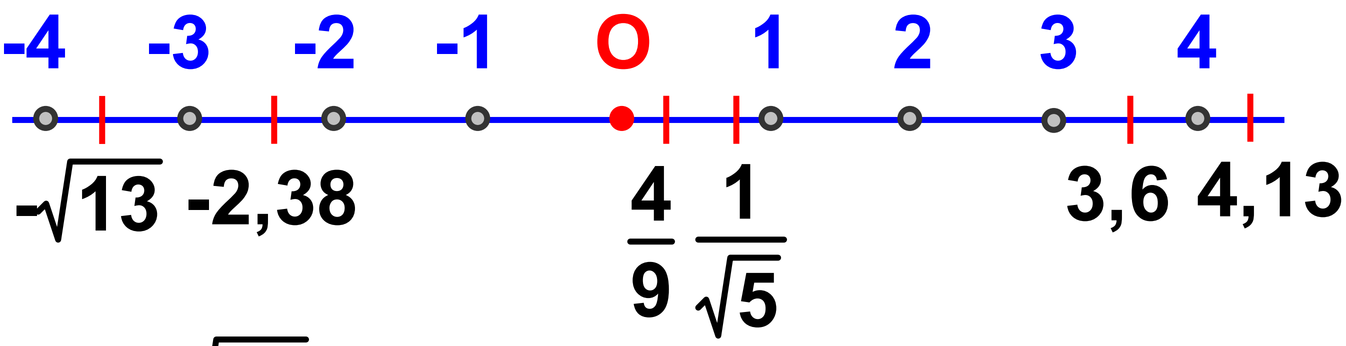
ε) Ομοίως $\sqrt{427} = 20,664$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς: -4, -2,38, $\frac{4}{9}$, $-\sqrt{13}$, 4,13, 3,6, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 1, 2.

Λύση:

α) Μπορούμε να γράψουμε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας τις ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων για τους άρρητους, οπότε έχουμε:



$-4 < -\sqrt{13} = -3{,}61 < -3 < -2{,}38 < -2 <$

$< 0 < \frac{4}{9} = 0{,}4 < \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}45 < 1 < 2 <$

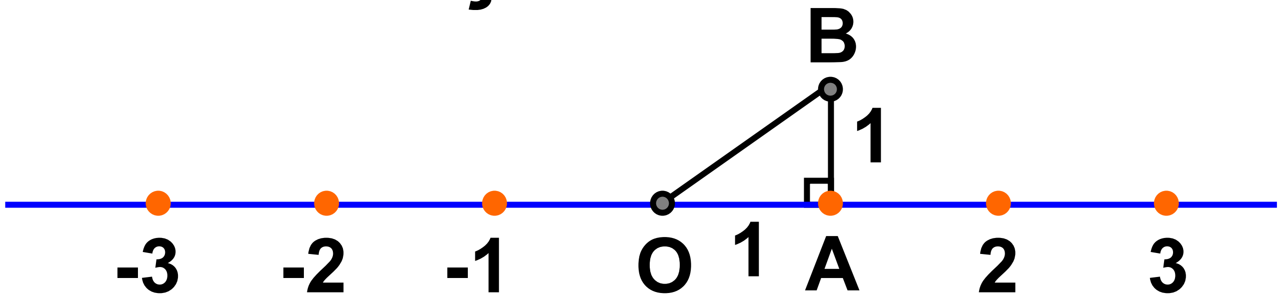
$< 3{,}6 < 4 < 4{,}13$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

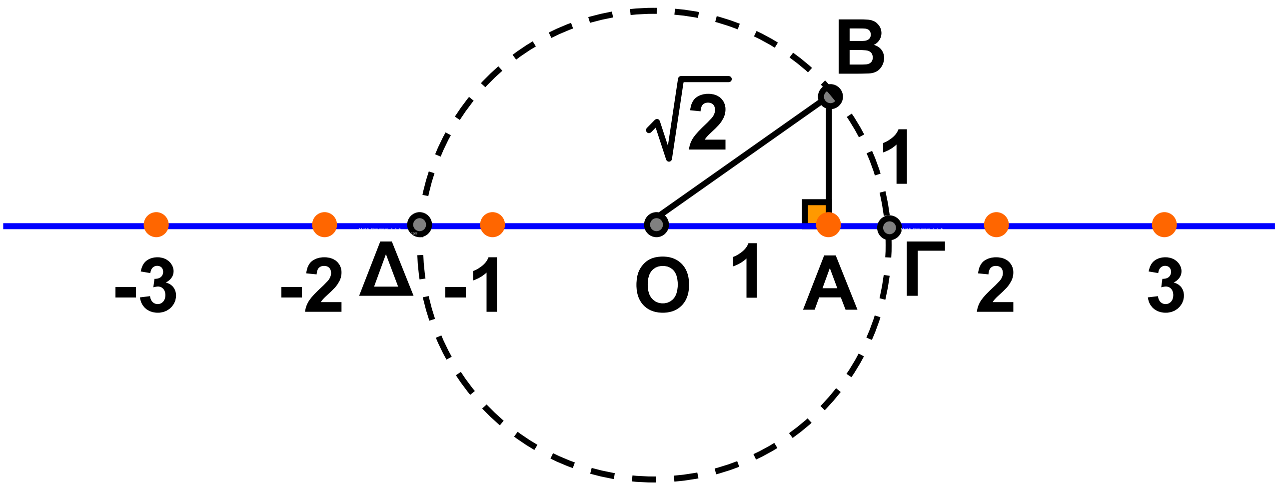
Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

Λύση:

Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ στον άξονα μήκους 1. Το τρίγωνο ΟΑΒ που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 12 + 12 = 2$ ή $OB = \sqrt{2}$. Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ, Δ.



Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$, ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος -$\sqrt{2}$.

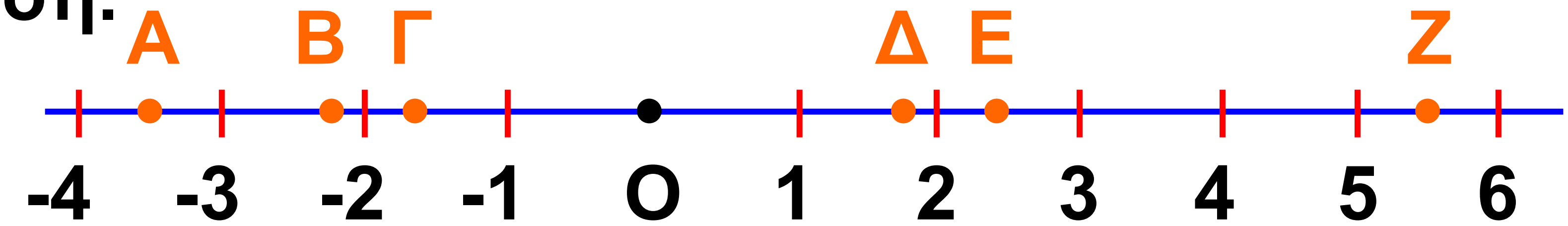
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **Αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών, να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.**

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) $4 < \sqrt{4,5} < 5$		
β) $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$		
γ) $7 < \sqrt{15} < 8$		

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
δ) $10 < \sqrt{21} < 11$		
ε) $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$		
στ) $2 < \sqrt{7} < 3$		

2 Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ. Στις παρα-κάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



α)	Ο αριθμός $\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Α	Ε	Γ	Δ
β)	Ο αριθμός $\sqrt{6}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	Ε	Ζ
γ)	Ο αριθμός $-\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Β	Δ	Α
δ)	Ο αριθμός $-\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	Β	Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α) $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^2$ β) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$

γ) $\sqrt{18}$, $\sqrt{\frac{18}{2}}$, $\sqrt{18^2}$

2 Τοποθετήστε σε μία σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

α) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{2}$ β) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 2, $\sqrt{2}$

γ) $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ δ) $\sqrt{2}$, $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

3 Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών:

α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{5}$, γ) $\sqrt{7}$, δ) $\sqrt{8}$.

4 **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α) $x^2 = 0$, β) $x^2 = 5$,

γ) $x^2 = -3$, δ) $x^2 = 17$.

5 **Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 12 cm^2. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευράς του.**

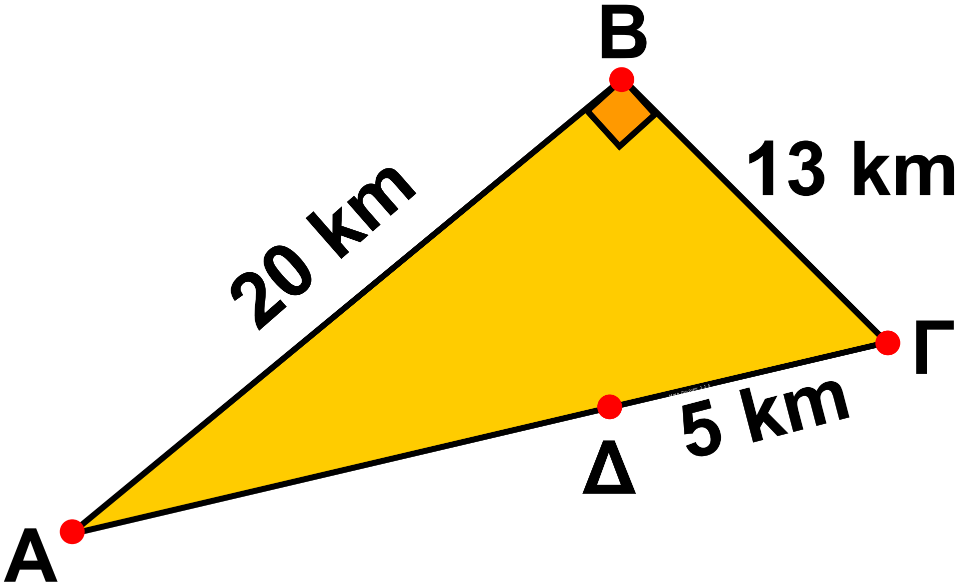
6 **Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο 12 cm. Να βρείτε: α) το μήκος της πλευράς του με προσέγγιση δύο δεκαδικών, β) την ακριβή τιμή του εμβαδού του.**

2.3. Προβλήματα

Όπως γνωρίζουμε, δε μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια την τιμή ενός άρρητου αριθμού. Σε διάφορα όμως προβλήματα της πραγματικής ζωής συναντάμε άρρητους αριθμούς για τους οποίους χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις δύο ή τριών δεκαδικών ψηφίων.

Πρόβλημα 1

Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις ΑΒ = 20 km, ΒΓ = 13 km και ΓΔ = 5 km. Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = 20^2 + 13^2$ ή

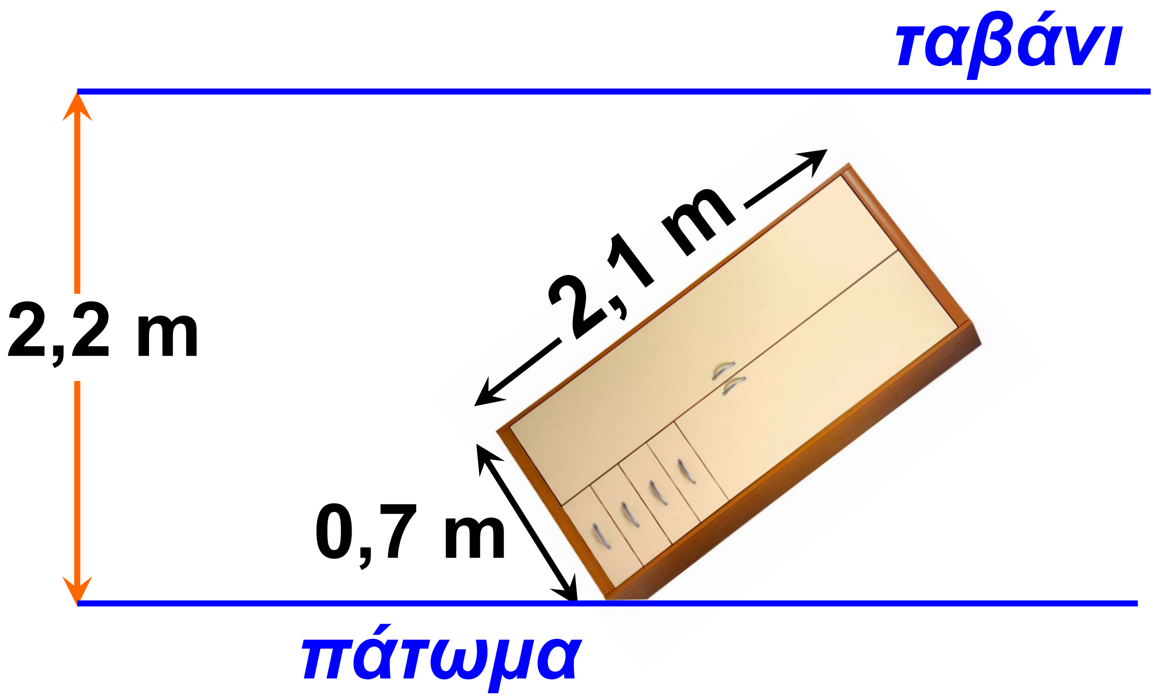
$ΑΓ^2 = 569$ ή $ΑΓ = \sqrt{569}$ ή

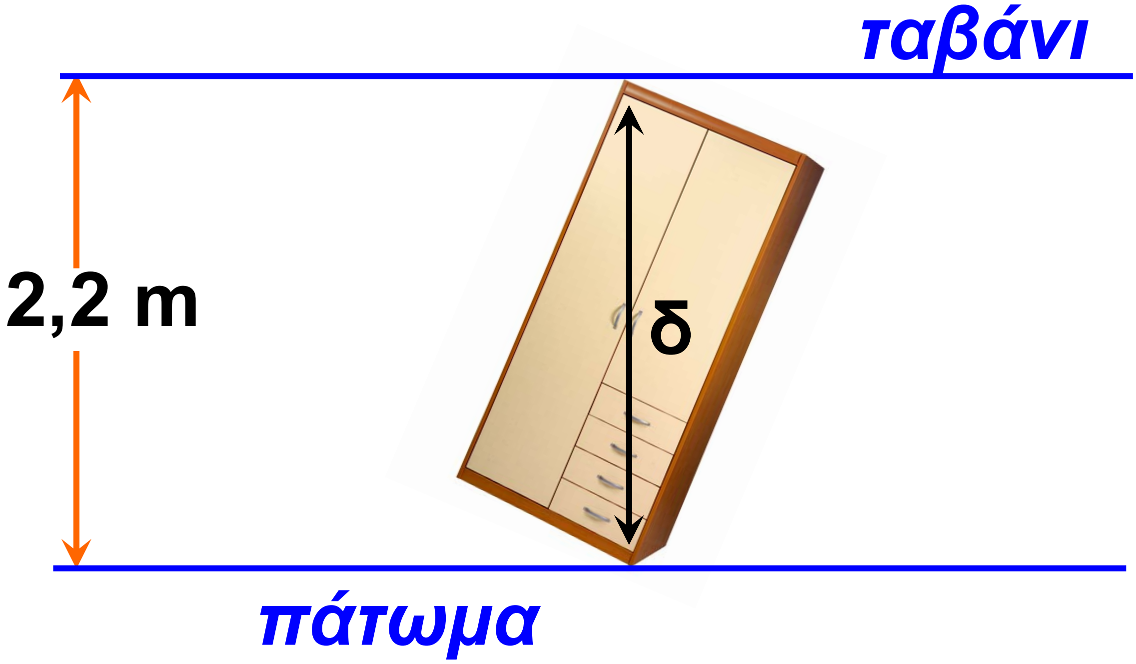
ΑΓ = 23,85 (km) με προσέγγιση εκατοστού.

Επομένως, ΑΔ = ΑΓ – ΔΓ =
= 23,85 - 5 = 18,85 (km).

Πρόβλημα 2

Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι του παρακάτω σχήματος;





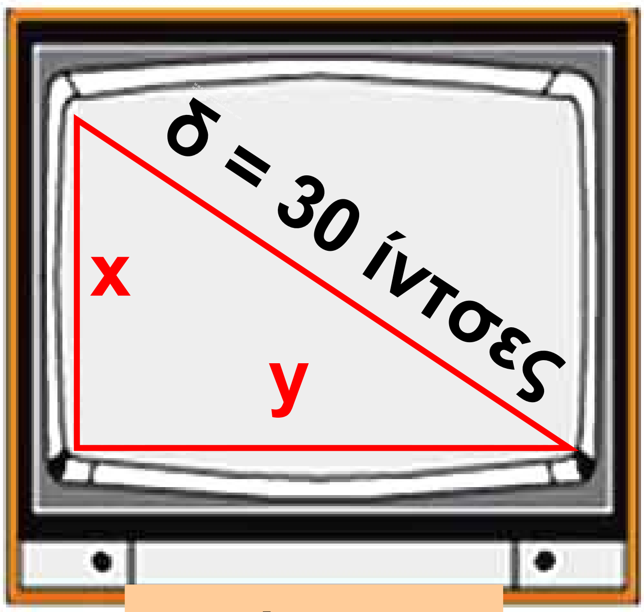
Λύση

Αν η διαγώνιος δ είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το ύψος 2,2 m του δωματίου, τότε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $δ^2 = 2{,}1^2 + 0{,}7^2 =$ $= 4{,}41 + 0{,}49 = 4{,}90$.
Άρα $δ = \sqrt{4{,}90} = 2{,}21$ (m) με προσέγγιση εκατοστού. Επομένως, δε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι, γιατί $δ > 2{,}2$ (m).

Πρόβλημα 3

Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x, y έχουν λόγο $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.



Λύση

Αφού x, y είναι οι διαστάσεις της οθόνης και 30 ίντσες η διαγώνιος, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι: $x^2 + y^2 = 30^2$.

Από τα δεδομένα έχουμε $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$,

οπότε $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2$ **ή** $\frac{x^2}{y^2} = \frac{7}{16}$

ή $x^2 = \frac{7}{16}y^2$

και αντικαθιστώντας στο Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\frac{7}{16}y^2 + y^2 = 30^2$ **ή** $\frac{23}{16}y^2 = 30^2$ **ή**

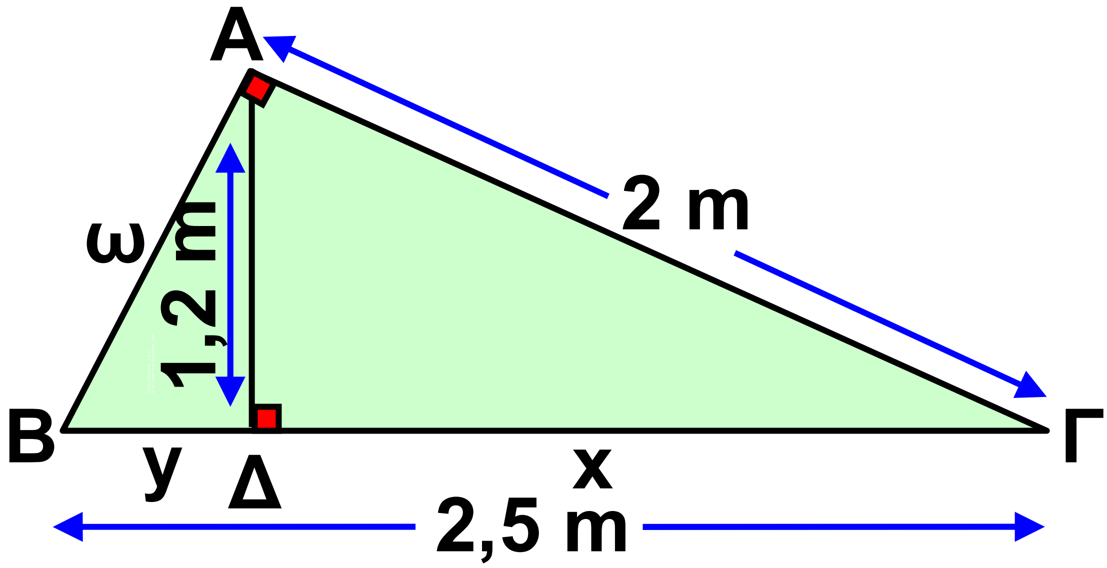
$23y^2 = 14400$ **ή** $y^2 = \frac{14400}{23}$ **ή**

$y^2 = 626{,}08$ **ή** $y = 25{,}02$ **(ίντσες)**

και $x = \frac{\sqrt{7}}{4}\ 25{,}02 = 16{,}55$ **(ίντσες)**

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x, y και ω.



Λύση

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2$ ή

$2^2 = 1{,}2^2 + x^2$ ή

$x^2 = 2^2 – 1{,}2^2 = 4 – 1{,}44 = 2{,}56$.

Άρα $x = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$ (m).

Επίσης ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ ή

$2{,}5 = y + 1{,}6$ ή

$y = 2{,}5 – 1{,}6 = 0{,}9$ (m).

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

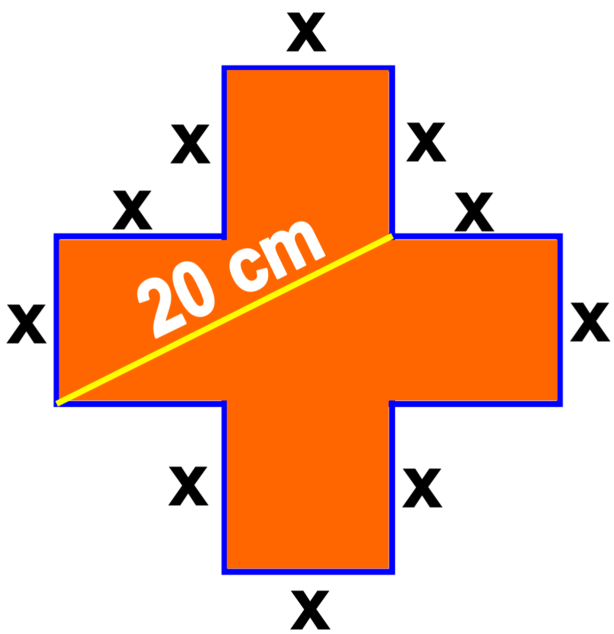
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή

$\omega^2 = 1{,}2^2 + 0{,}9^2 = 1{,}44 + 0{,}81 = 2{,}25$.

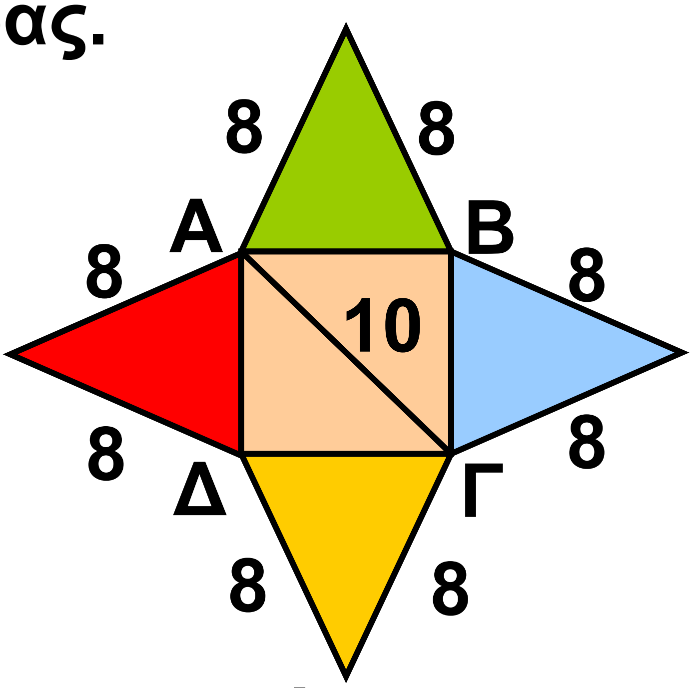
Άρα $\omega = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ (m).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

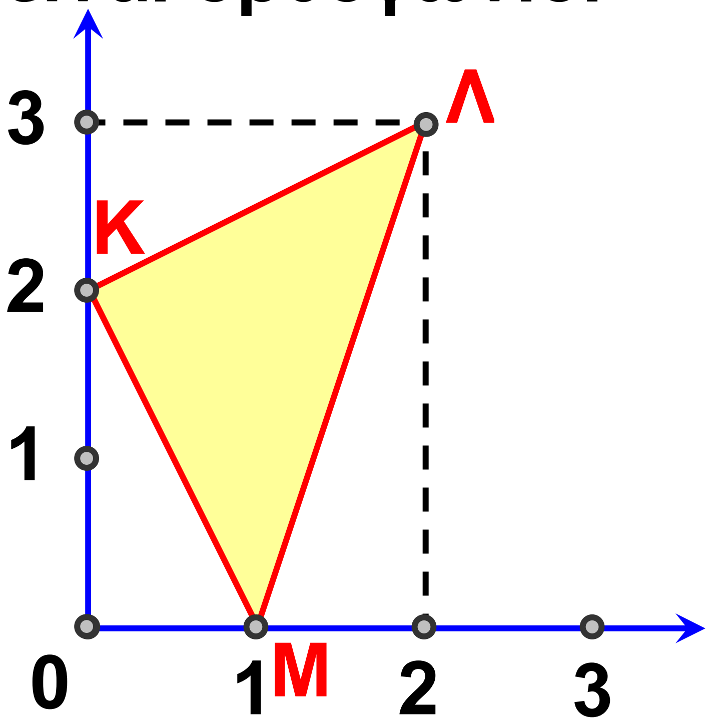
1 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σταυρού του σχήματος.



2 Το ανάπτυγμα σε χαρτόνι μιας πυραμίδας αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, που η διαγώνιός του είναι 10 cm και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα που οι ίσες πλευρές τους είναι 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.



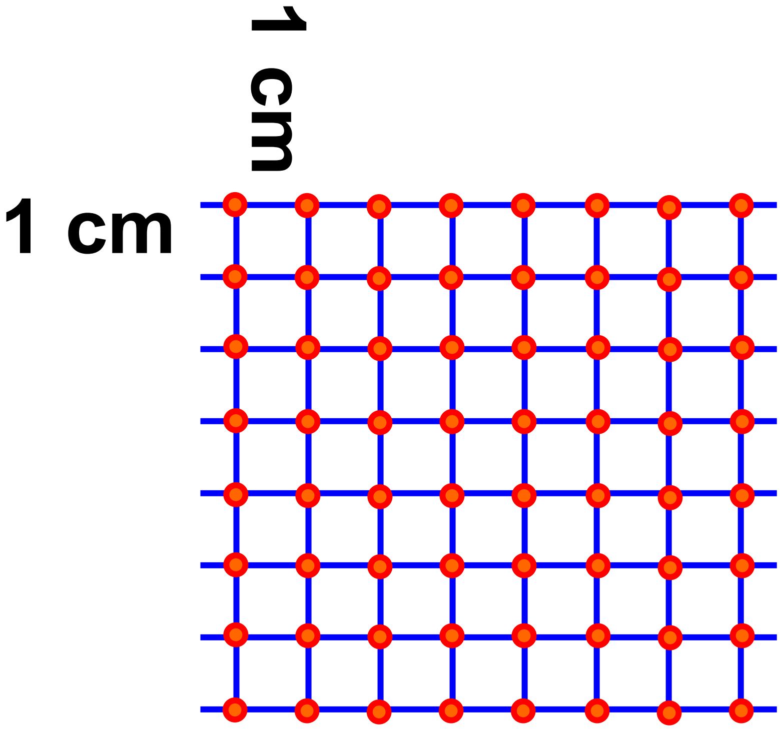
3 Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι Κ(0,2), Λ(2,3), Μ(1,0). Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

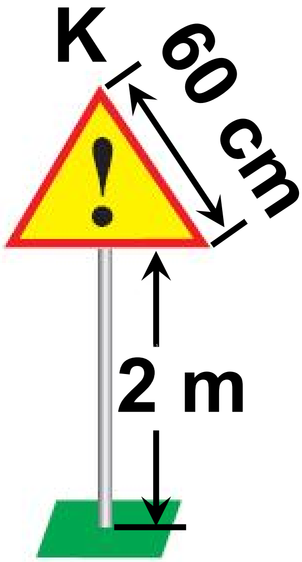


4 **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12 cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.**

5 **Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 10 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η τρίτη πλευρά του, ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. (*Υπόδειξη: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις*).**

6 **Οι κουκκίδες του παρακάτω σχήματος απέχουν 1 cm οριζόντια και κατακόρυφα.**
α) Να ενώσετε δύο κουκκίδες, ώστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται να είναι: i) $\sqrt{2}$ cm , ii) $\sqrt{5}$ cm, iii) $\sqrt{13}$ cm.
β) Να ενώσετε τέσσερις κουκκίδες, ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο με εμβαδόν: i) 2 cm^2, ii) 5 cm^2, iii) 13 cm^2.

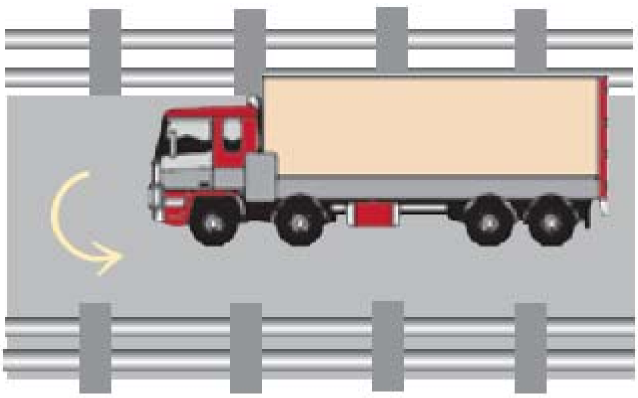


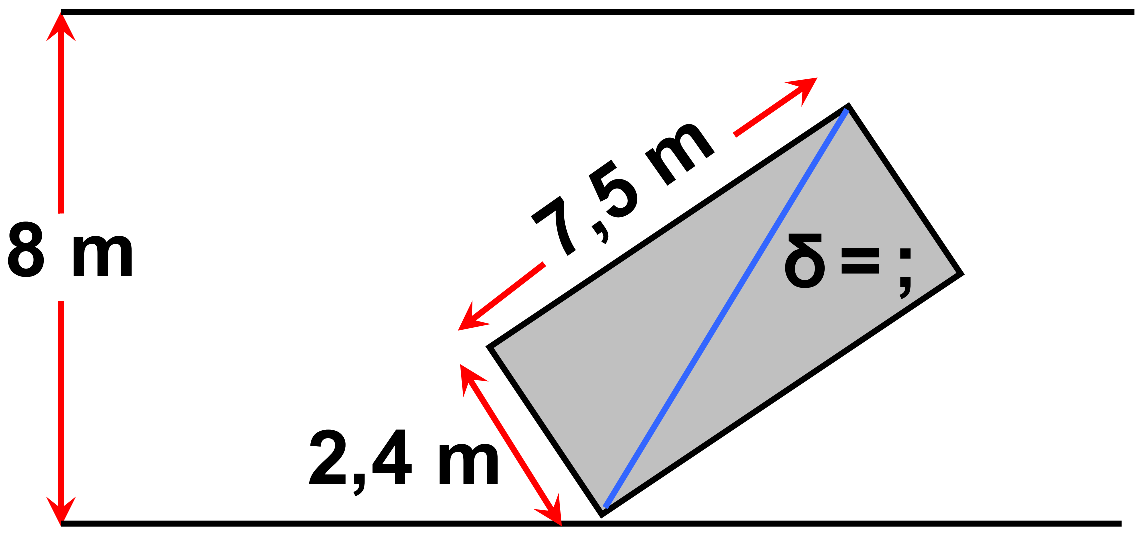


7 Το σήμα της φωτογραφίας έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 60 cm και στηρίζεται σε κολόνα ύψους 2 m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Κ της πινακίδας από το έδαφος.

8 Τα βέλη στην άσφαλτο αποτελούνται από ένα κίτρινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από ένα κίτρινο ισοσκελές τρίγωνο. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 20 cm και 2,3 m. Το τρίγωνο έχει βάση 60 cm και ίσες πλευρές 2,1 m. Πόσα περίπου τέτοια βέλη μπορούμε να βάψουμε με 1 κιλό κίτρινου χρώματος το οποίο μπορεί να καλύψει επιφάνεια 540 dm^2;

9 Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m. Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;





Επανάληψη Κεφαλαίου 2

Πραγματικοί αριθμοί

✐ Τετραγωνική ρίζα:

ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ένας θετικός αριθμός ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Ιδιότητες

Αν $\sqrt{\alpha} = x$, τότε $x^2 = \alpha$, όπου οι αριθμοί α και x είναι **θετικοί ή ίσοι με μηδέν.**

Επομένως: $\boxed{(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha}$

✐ Άρρητοι αριθμοί

ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί, δηλαδή δε μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, με μ, ν ακέραιους και $\nu \neq 0$.

✐ Πραγματικοί αριθμοί

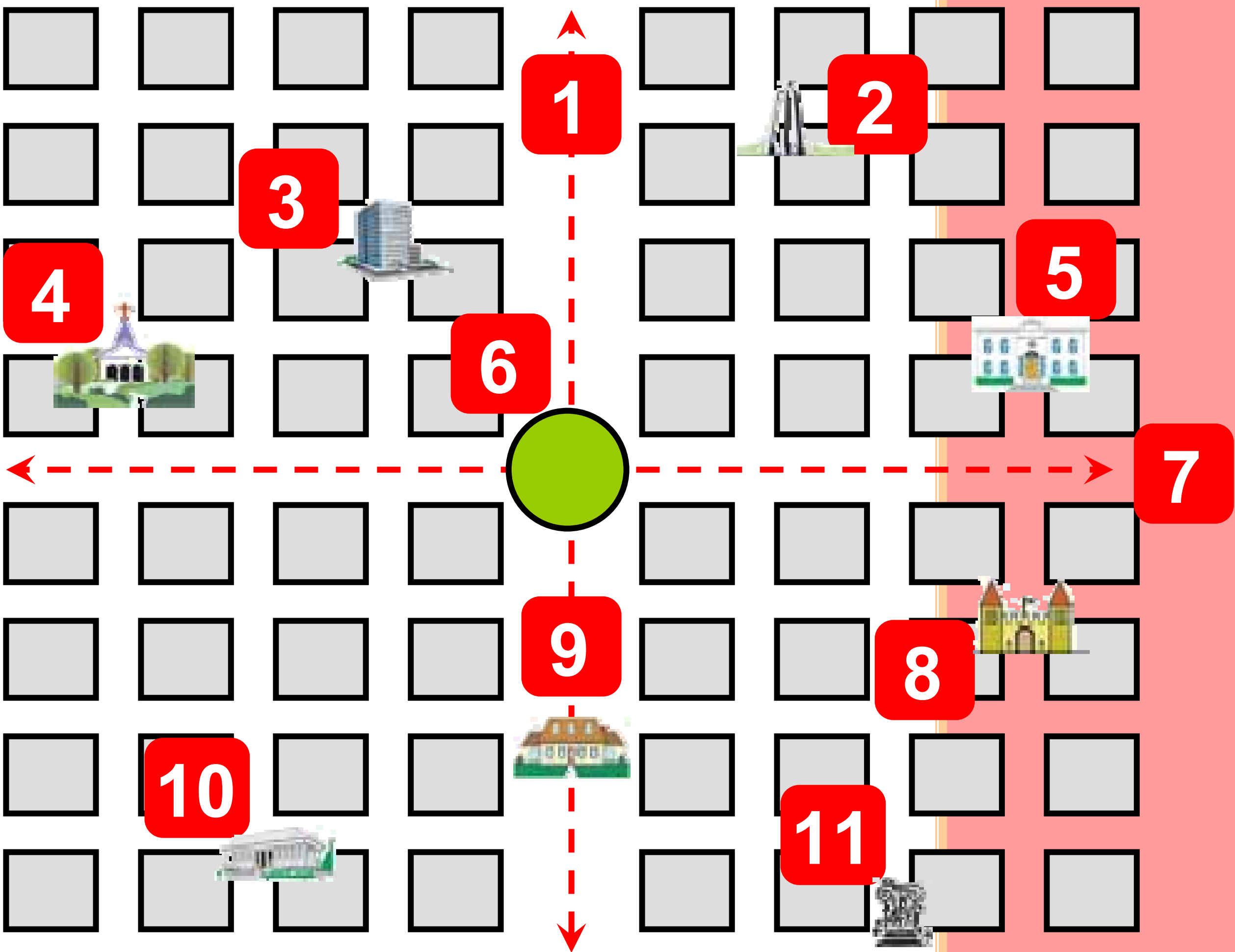
ονομάζονται όλοι οι ρητοί και όλοι οι άρρητοι αριθμοί.

1	Λεωφόρος Ευημερίας
2	Μνημείο Ηρώων
3	Εμπορικό Κέντρο
4	Εκκλησία
5	Δημαρχείο
6	Πλατεία Ομονοίας
7	Λεωφόρος Ευτυχίας
8	Μεσαιωνικό Κάστρο
9	Σχολείο
10	Μουσείο
11	Ερείπια Αρχαίου Ναού

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Συναρτήσεις



Εισαγωγικο Σημειωμα

3.1 Η έννοια της συνάρτησης
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες. Γραφική παράσταση συνάρτησης
3.3 Η συνάρτηση $y = αx$
3.4 Η συνάρτηση $y = αx + β$
3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{α}{x}$. Η υπερβολή

***Η** συνάρτηση αποτελεί θεμελιώδη έννοια των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε όλες τις θετικές επιστήμες. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την έννοια της συνάρτησης και θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση συναρτήσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Θα εξετάσουμε έτσι τις συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις γραφικές παραστάσεις της ευθείας και της υπερβολής.*

3.1. Η έννοια της συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%. α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα.Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας; β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:
για τον πρώτο εργαζόμενο:

$$\frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24€,$$

για τον δεύτερο εργαζόμενο:

$$\frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33 \text{ €},$$

β) Η αύξηση θα είναι:

$$\frac{3}{100} \cdot x = 0{,}03x \text{ δηλαδή } y = 0{,}03x.$$

Παρατήρηση:

Η σχέση y = 0,03x μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής x. Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό x = 700 €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι y = 0,03 · 700 = 21 €. Ομοίως, για x = 1500 βρίσκουμε αύξηση y = 0,03 · 1500 = 45 €.

Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση). Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση.**

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x». Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση
$y = 0{,}03x$.

Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Έτσι, για τη συνάρτηση
$y = 0{,}03x$ έχουμε:

Για $x = 700$, $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$.
Για $x = 800$, $y = 0{,}03 \cdot 800 = 24$.
Για $x = 900$, $y = 0{,}03 \cdot 900 = 27$.
Για $x = 1000$, $y = 0{,}03 \cdot 1000 = 30$.
Για $x = 1100$, $y = 0{,}03 \cdot 1100 = 33$.

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα, ο οποίος λέγεται πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = 0{,}03x$.

x	700	800	900	1000	1100
y	21	24	27	30	33

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση y = 2x + 3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y					

Λύση:

Για x = -2:

$$y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1.$$

Για x = -1:

$$y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1.$$

Για x = 0:

$$y = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Για x = 1:

$$y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5.$$

Για x = 2:

$$y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

Άρα, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.

α) Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;

β) Να εκφράσετε την ποσότητα y σε κιλά του λαδιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας x των ελιών που παράγει.

γ) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παρά-γει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;

Λύση:

α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 0,2 κιλά λάδι, από 500 κιλά ελιές θα πάρει 0,2 · 500 = 100 κιλά λάδι.

β) Από x κιλά ελιές θα πάρει 0,2x κιλά λάδι. Δηλαδή $y = 0,2x$.
γ) Από τη συνάρτηση $y = 0,2x$, για $y = 250$ κιλά λάδι έχουμε: $250 = 0,2x$ ή $x = \frac{250}{0,2} = 1250$. Άρα, θα πρέπει να παράγει 1250 κιλά ελιές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 20 € ο καθένας. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x, είναι:

α) $y = 20x$ β) $y = x + 20$

γ) $y = \frac{x}{20}$ δ) $y = 0,2x$

2 Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 15%. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x, είναι:

α) $y = x + \frac{15}{100}$ β) $y = x + 15$

γ) $y = 1{,}15x$ δ) $y = 0{,}15x$

3 Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y είναι 100 cm^2. Η σχέση που εκφράζει το μήκος του y ως συνάρτηση του x, είναι:

α) $y = 100x$ β) $y = 100 + x$

γ) $y = \frac{100}{x}$ δ) $y = 100 - x$

4 Το Δίνεται τετράγωνο πλευράς x. Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν Ε του τετραγώνου ως συνάρτηση του x είναι:

α) $E = 2x$ β) $E = x^2$

γ) $E = \sqrt{2x^2}$ δ) $E = 4x$

5 **Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με τον πίνακα τιμών της στήλης Β. (*Στη στήλη Β ένας πίνακας τιμών περισσεύει.*)**

ΣΤΗΛΗ Α

(α) $y = 2x + 1$

(β) $y = x^2 + 1$

(γ) $y = 1 - x$

ΣΤΗΛΗ Β

i)

x	-3	-1	0	1	2
y	10	2	1	2	5

ii)

x	-3	-1	0	1	2
y	-5	-1	1	3	5

iii)

x	-3	-1	0	1	2
y	4	2	1	0	-1

iv)

x	-3	-1	0	1	2
y	4	2	1	0	2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3x - 2$

x	-3	-2	-1	0	2
y					

β) $y = \dfrac{x - 1}{2}$

x	-1	0	2	4	5
y					

2 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = x^2 + 1$

x	-3	-1	0	2	5
y					

β) $y = x^2 + 3x - 2$

x	-3	-2	0	1	3
y					

3 Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%. Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο.

4 Ένας πωλητής παίρνει μισθό 600 € το μήνα και ποσοστό 7% επί του ποσού των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y, που κερδίζει το μήνα, ως συνάρτηση του ποσού x των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

5 Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y (σε cm).
α) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x.
β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 100 cm^2, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x.

6 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος x (σε cm). Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε και την περίμετρο Π του

τετραγώνου ως συναρτήσεις του x. Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	2,5	5	0,3
Ε					
Π					

7 **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 3x – 5$:**

x	-3	-1	0	2
y				

8 **Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 70 χιλιόμετρα την ώρα.**
α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε 2 ώρες και πόση σε 5 ημέρες;
β) Να εκφράσετε την απόσταση S (σε χιλιόμετρα) που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες).

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα χάρτη μιας πόλης στον οποίο φαίνονται οι δύο κεντρικές οδικές αρτηρίες της πόλης και μερικά οικοδομικά τετράγωνα.

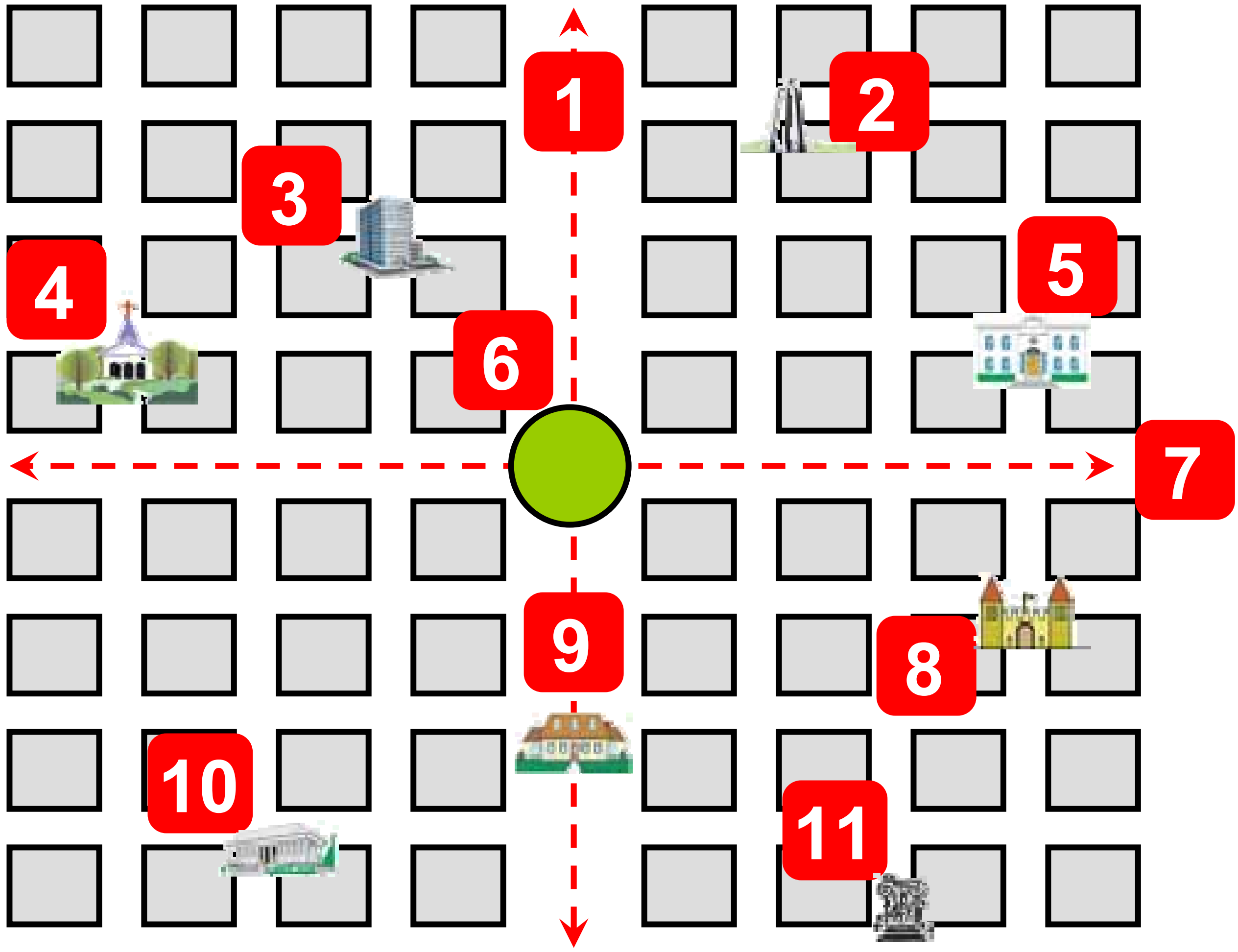
Έχουν, επίσης, σημειωθεί μερικά βασικά σημεία της πόλης, όπως η Ομόνοια (κεντρική πλατεία και σημείο διασταύρωσης των δύο βασικών λεωφόρων), το Δημαρχείο, το Εμπορικό Κέντρο, κ.τ.λ.

Για να επισκεφθούμε κάποιο από αυτά τα σημεία (π.χ. το Δημαρχείο), ξεκινώντας από την Ομόνοια πρέ-πει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα δεξιά πάνω στη Λεωφόρο

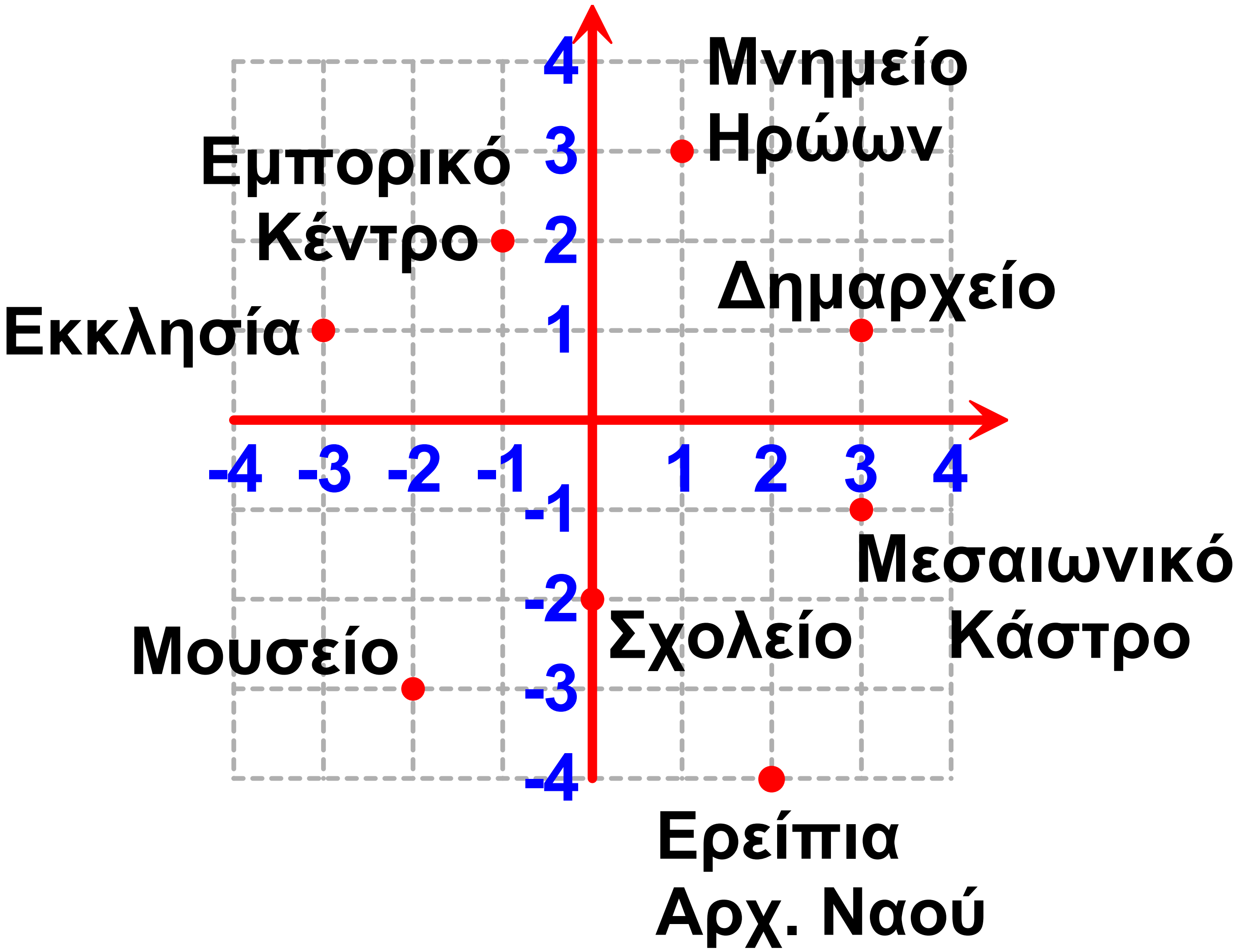
Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω παράλληλα προς τη Λεωφόρο Ευημερίας.
Δηλαδή, η θέση του Δημαρχείου προσδιορίζεται επακριβώς από το ζεύγος των αριθμών (3, 1).

Ομοίως, η θέση της Εκκλησίας προσδιορίζεται από το ζεύγος των αριθμών (-3, 1). Δηλαδή για να πάμε στην εκκλησία ξεκινώντας από την Ομόνοια, πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα αριστερά στη Λεωφόρο Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω, παράλληλα προς την Λεωφόρο Ευημερίας.

Να χρησιμοποιήσετε το διπλανό διάγραμμα (που είναι ένας πιο απλός χάρτης της ίδιας πόλης), για να προσδιορίσετε τη θέση και των άλλων βασικών σημείων της πόλης που φαίνονται στο χάρτη.



1	Λεωφόρος Ευημερίας
2	Μνημείο Ηρώων
3	Εμπορικό Κέντρο
4	Εκκλησία
5	Δημαρχείο
6	Πλατεία Ομονοίας
7	Λεωφόρος Ευτυχίας
8	Μεσαιωνικό Κάστρο
9	Σχολείο
10	Μουσείο
11	Ερείπια Αρχαίου Ναού



Λύση

Ξεκινώντας από την Ομόνοια (Ο) έχουμε:

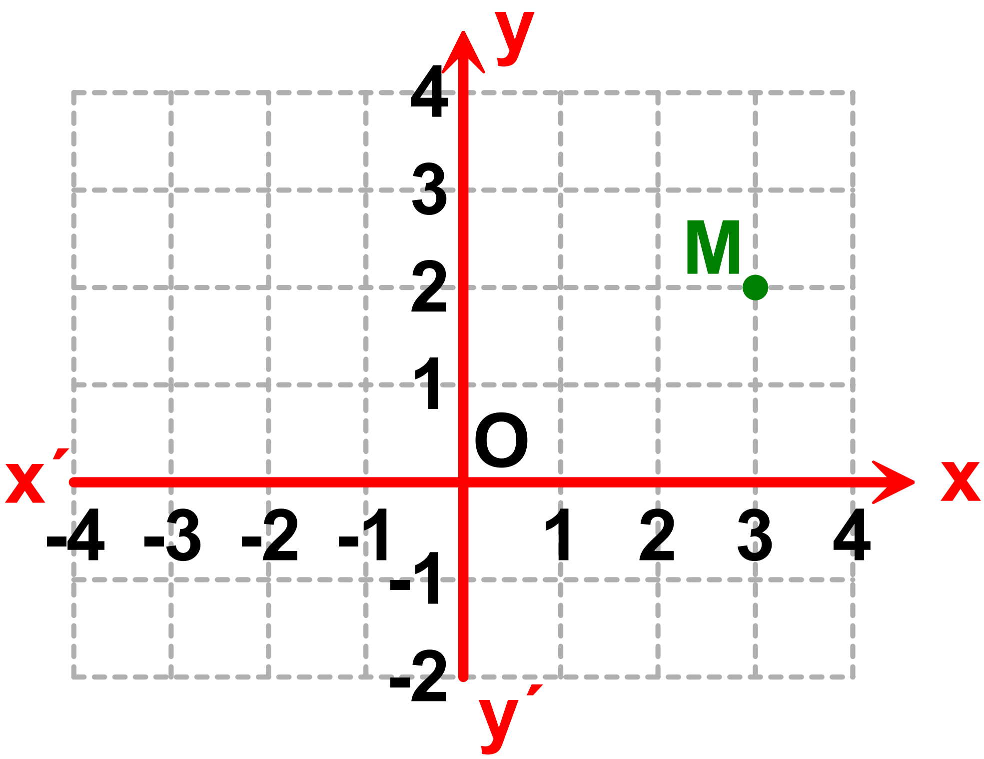
- **Μνημείο Ηρώων: 1 τετράγωνο δεξιά και 3 πάνω, άρα (1, 3).**
- **Εμπορικό Κέντρο: 1 τετράγωνο αριστερά και 2 πάνω, άρα (-1, 2).**
- **Μουσείο: 2 τετράγωνα αριστερά και 3 κάτω, άρα (-2, -3).**

- **Σχολείο: 0 τετράγωνα αριστερά (ή δεξιά) και 2 κάτω, άρα (0, -2).**
- **Ερείπια Αρχ. Ναού: 2 τετράγωνα δεξιά και 4 κάτω, άρα (2, -4).**
- **Μεσαιωνικό Κάστρο: 3 τετράγωνα δεξιά και 1 κάτω, άρα (3, -1).**

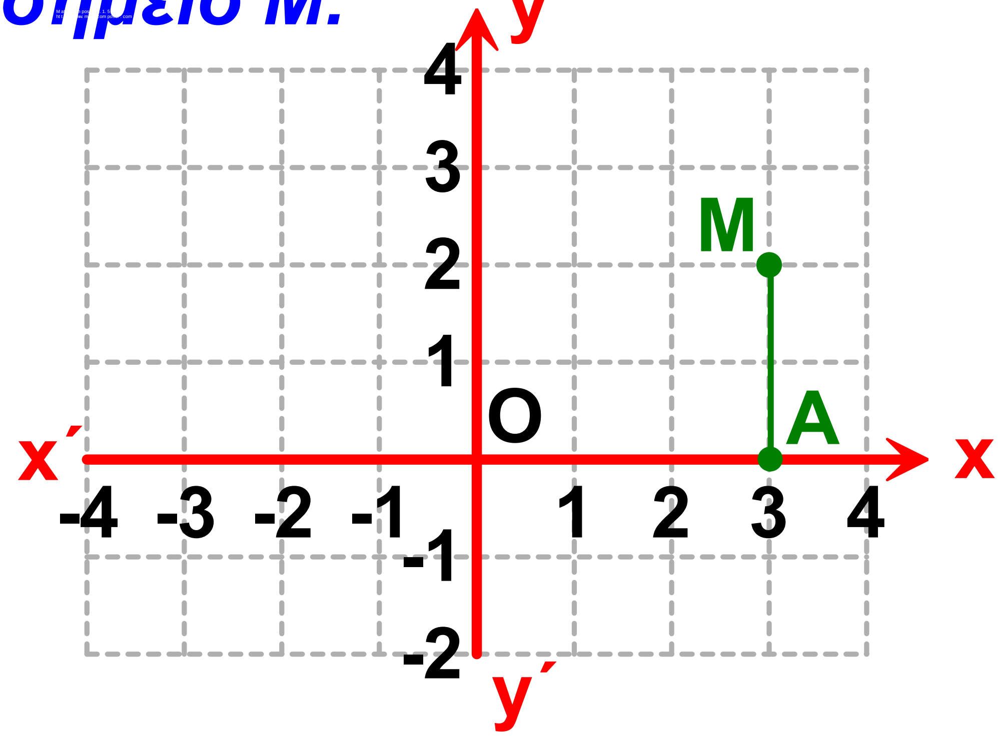
Σύστημα συντεταγμένων

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου της πόλης χρησιμοποιώντας δύο βασικούς οδικούς άξονες: τις Λεωφόρους Ευτυχίας και Ευημερίας.

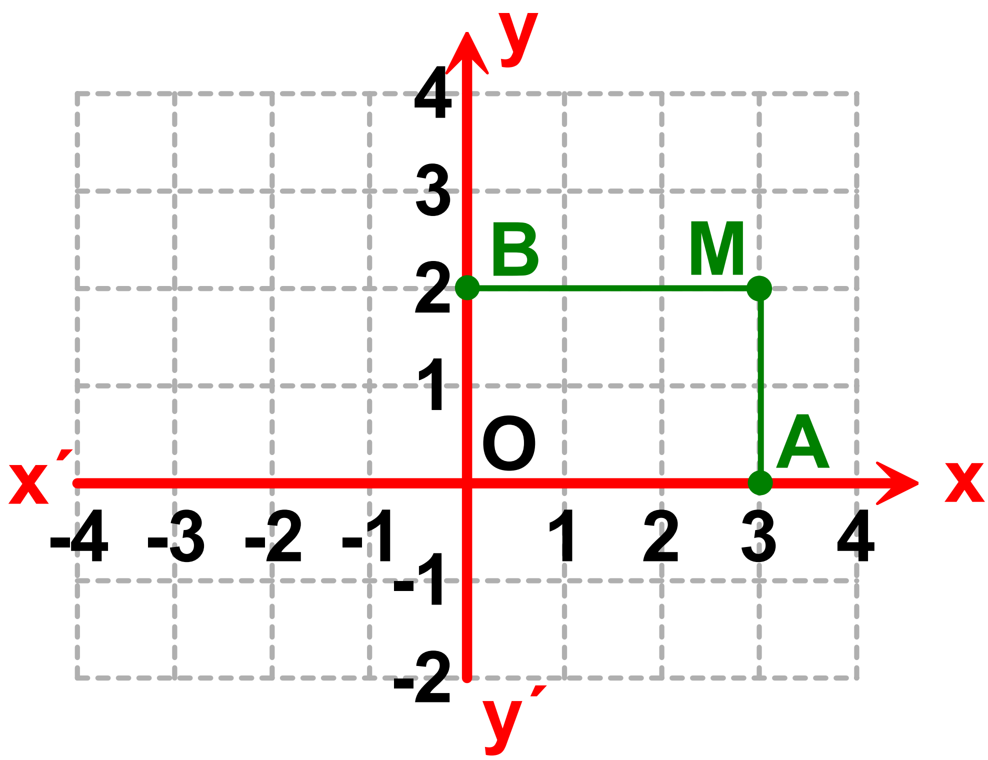
Την ιδέα αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε γενικότερα για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, ως εξής:



1. *Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y, με κοινή αρχή O και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο M.*



2. *Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y΄y που τέμνει τον* *άξονα x΄x στο σημείο A. Για το σχήμα μας το A αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα x΄x.*

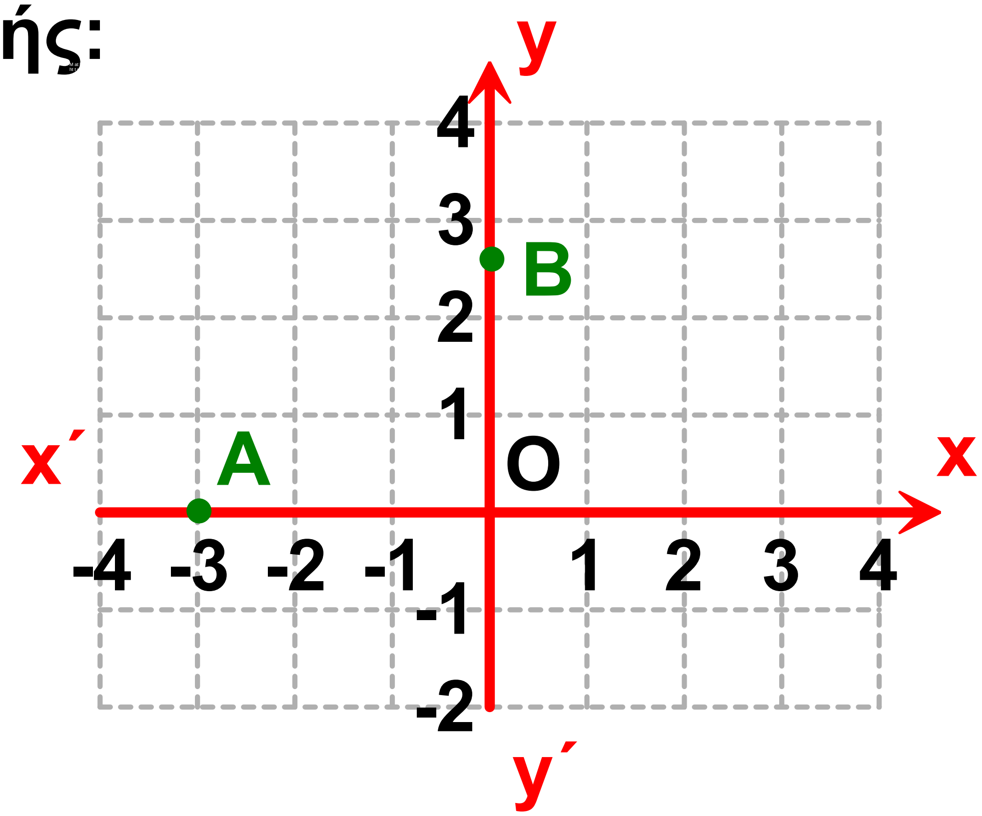


3. *Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x΄x που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B. Για το σχήμα μας το B αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα y΄y.*

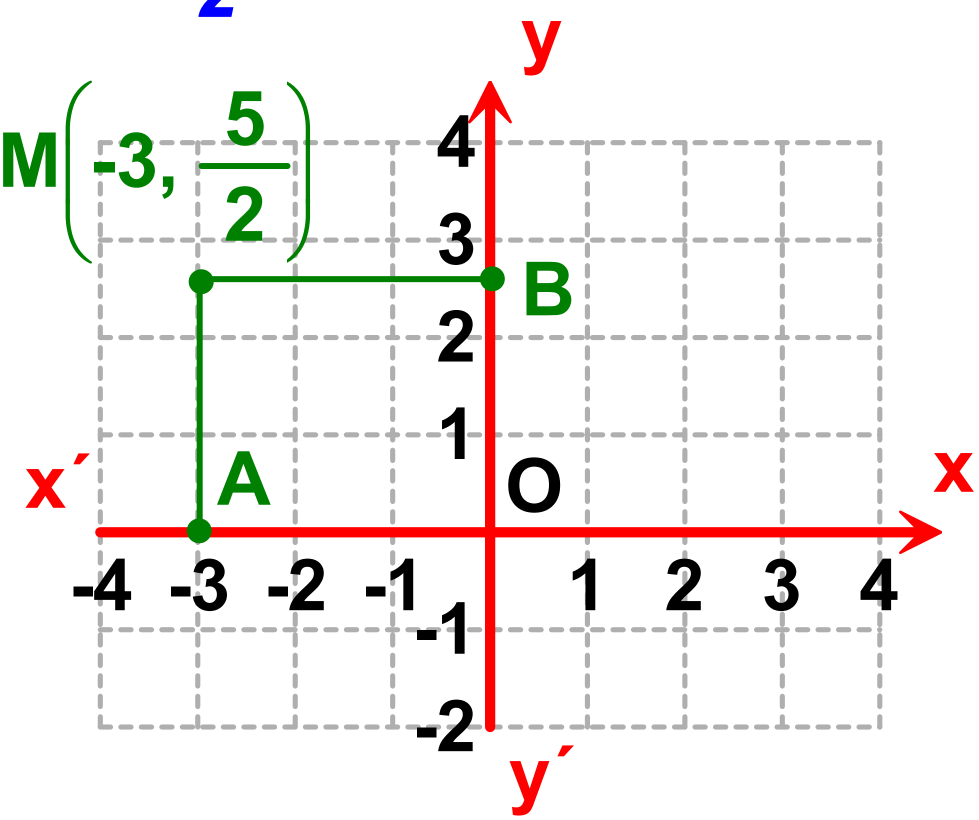
Δηλαδή, το σημείο M αντιστοιχεί στο ζεύγος των αριθμών (3, 2) και συμβολίζεται M(3, 2). Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται

τετμημένη του σημείου Μ και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη** του σημείου Μ. Η τετμημένη και η τεταγμένη του Μ λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου Μ.

Αλλά και αντιστρόφως, αν έχουμε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο και ένα ζεύγος αριθμών π.χ. το $(-3, \frac{5}{2})$, μπορούμε να βρούμε ένα μόνο σημείο Μ του επιπέδου που αντιστοιχεί στο ζεύγος αυτό ως εξής:



1. Σημειώνουμε με Α το σημείο του άξονα x΄x που αντιστοιχεί στον αριθμό -3 και με Β το σημείο του άξονα y΄y που αντιστοιχεί στον αριθμό $\frac{5}{2}$



2. Από τα σημεία Α και Β φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Μ, που είναι το ζητούμενο με συντεταγμένες $M\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

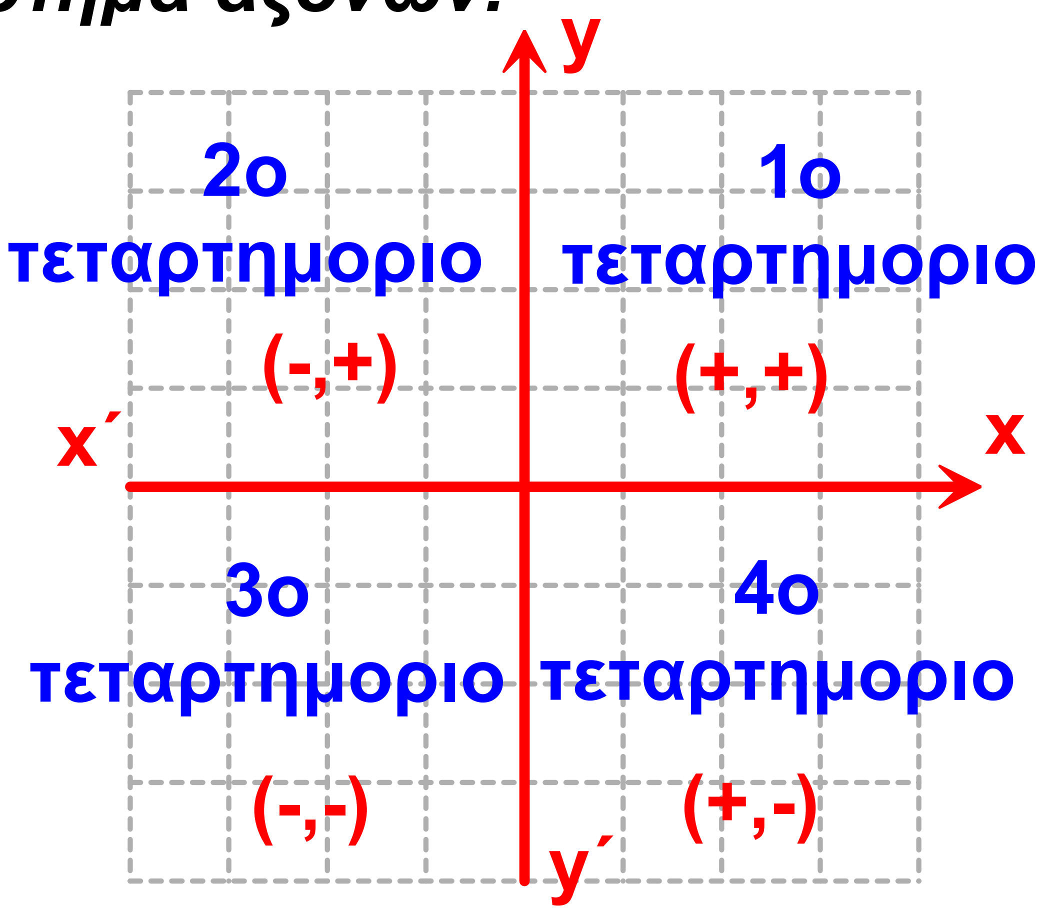
Άρα:

Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι άξονες x'x και y'y αποτελούν ένα **σύστημα ορθογωνίων αξόνων** ή απλώς **σύστημα αξόνων.**

Παρατηρήσεις:

*α) Στα παραπάνω σχήματα χρησιμοποιήσαμε κάθετους άξονες των οποίων οι μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο μήκος. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**. Όπως θα δούμε όμως παρακάτω, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες επιβάλλεται να* *χρησιμοποιήσουμε συστήματα αξόνων με διαφορετικού μήκους μονάδες μέτρησης στους άξονες x'x και y'y. Φυσικά, ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι ορθοκανονικό. Στα επόμενα σχήματα -εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά- λέγοντας σύστημα αξόνων θα εννοούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.*



β) Το σύστημα των αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που *λέγονται **τεταρτημόρια**. Στο παραπάνω σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.*

Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{1}{2}x^2$.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	-4	-2	0	2	4
y					

β) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα.

γ) Να ενώσετε με γραμμές τα σημεία αυτά. Τι γραμμή σχηματίζεται;

δ) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα (α), (β) και (γ) για την ίδια συνάρτηση $y = \frac{1}{2}x^2$ χρησιμοποι-

ώντας τον παρακάτω πίνακα τιμών. Τι παρατηρείτε;

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

ε) Τι γραμμή θα σχηματιστεί, αν χρησιμοποιήσουμε ένα πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη τιμών;

Λύση

α) Για x = -4 είναι

$$y = \frac{1}{2}(-4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 .$$

Για x = -2 είναι

$$y = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 .$$

Για x = 0 είναι

$$y = \frac{1}{2}(0)^2 = 0 .$$

Για x = 2 είναι

$$y = \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 .$$

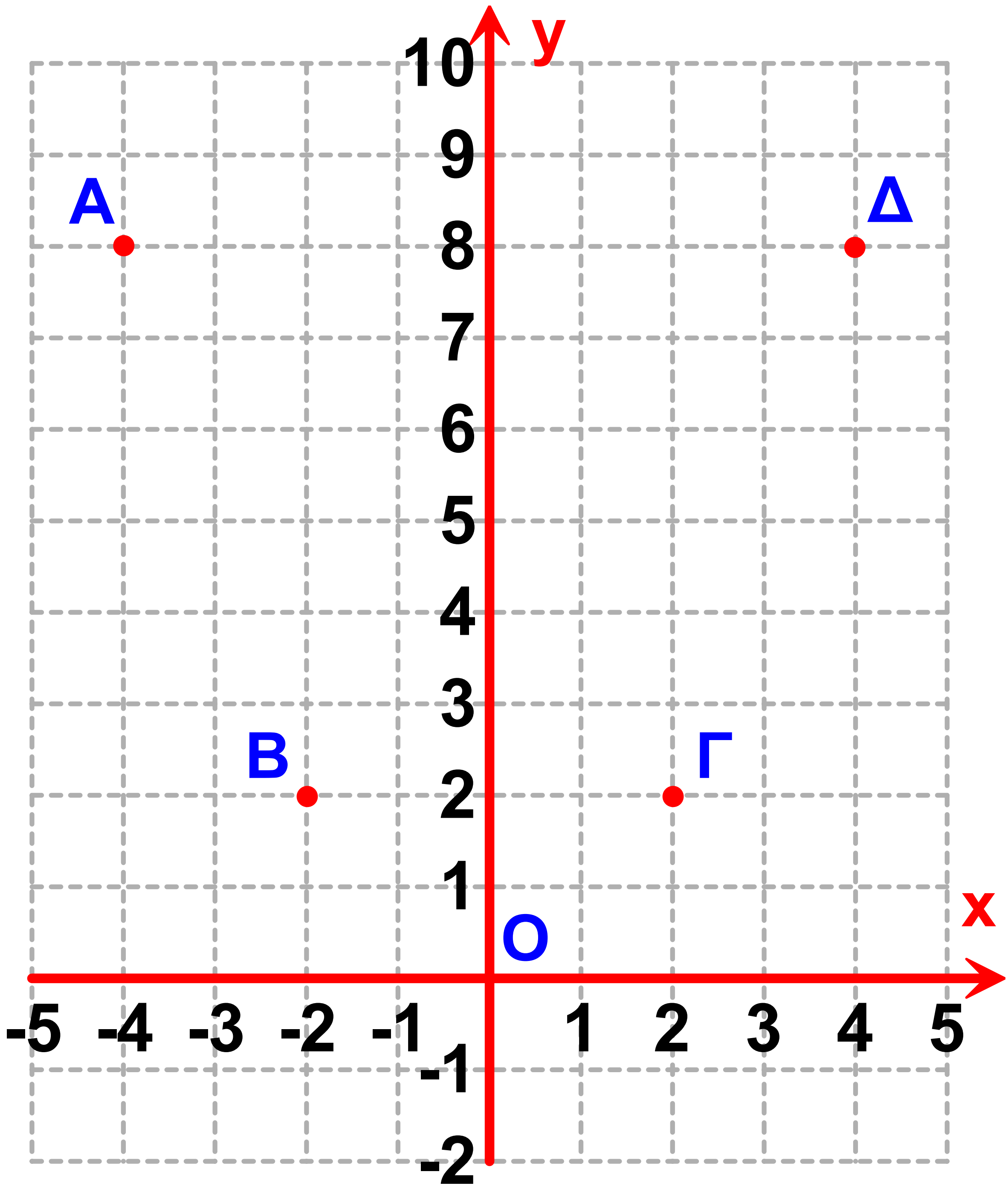
Για x = 4 είναι

$$y = \frac{1}{2}(4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 .$$

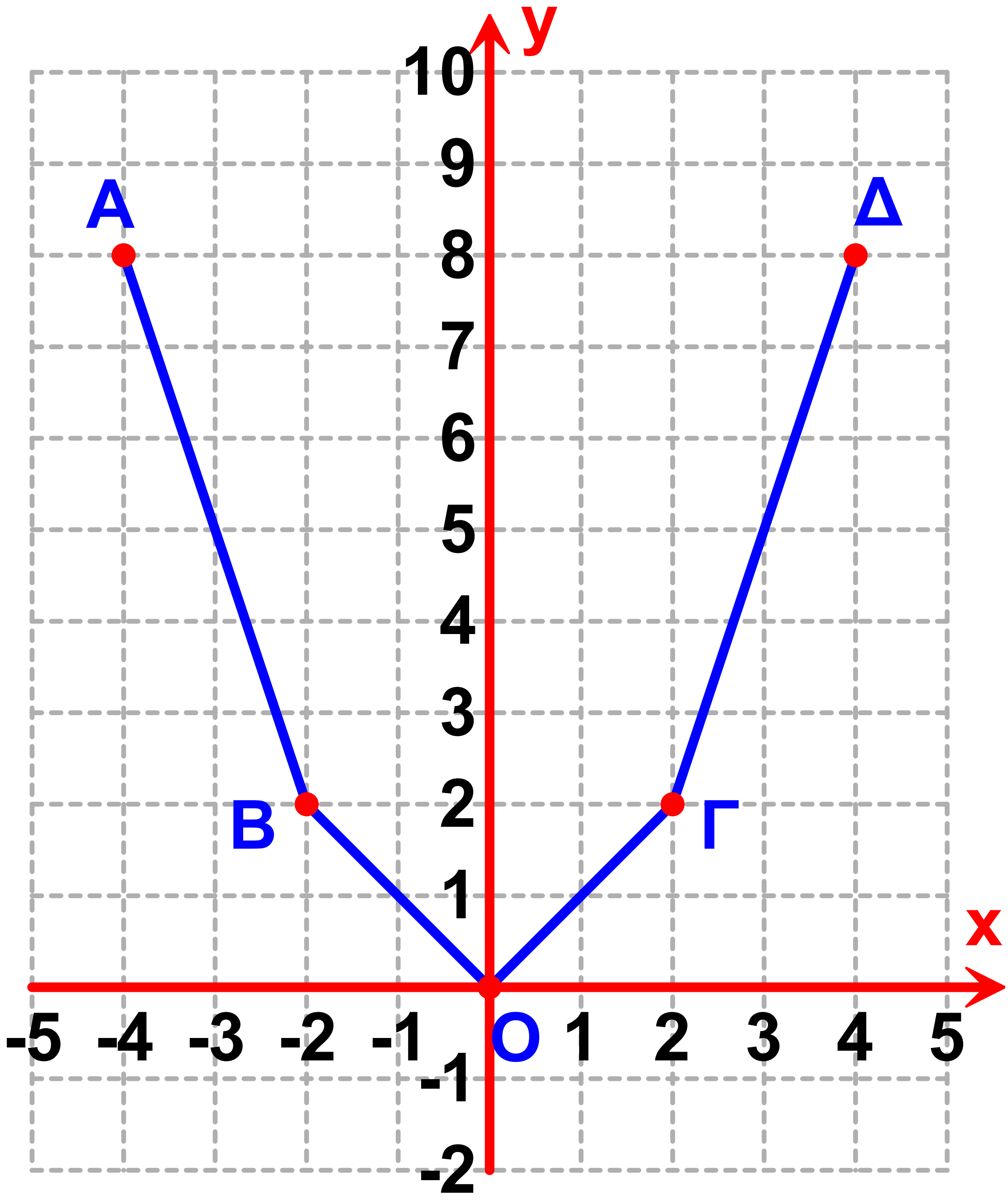
Επομένως, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

β).Τα ζεύγη (x, y) που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα είναι: (-4, 8), (-2, 2), (0, 0), (2, 2) και (4, 8) που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος



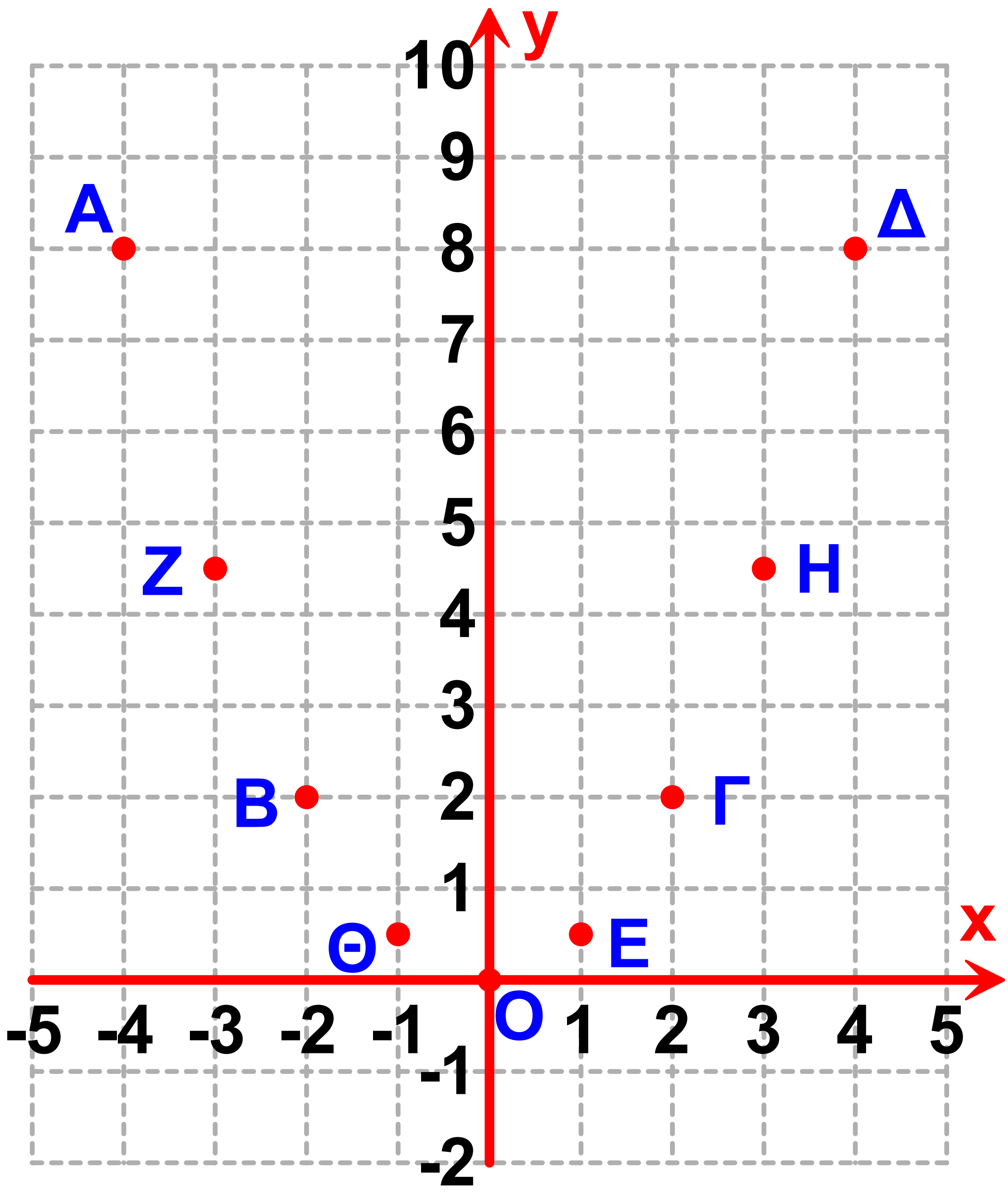
γ) Ενώνοντας με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή.

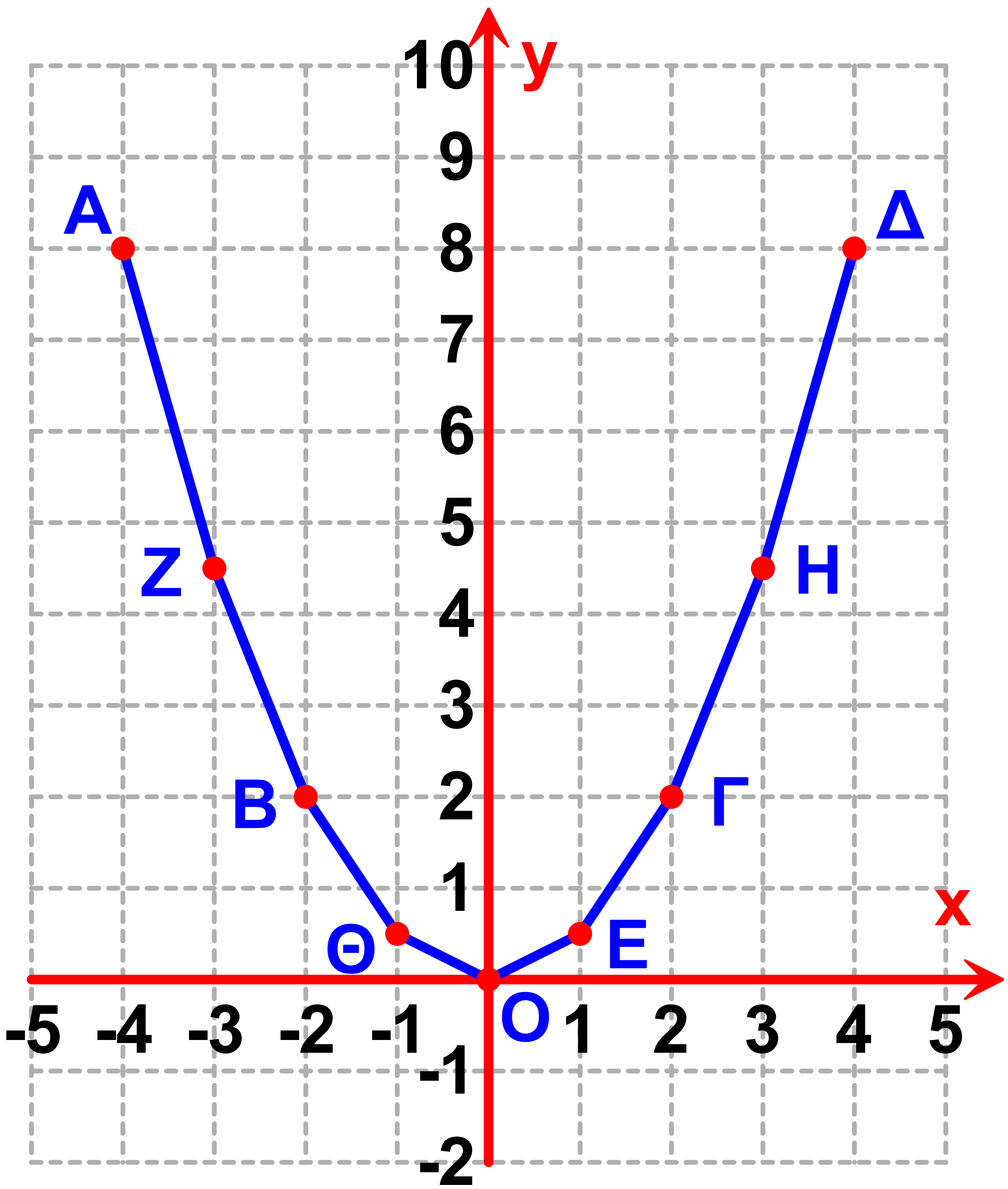


δ) Ομοίως έχουμε:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Τα σημεία τώρα είναι περισσότερα και η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται μοιάζει με καμπύλη.



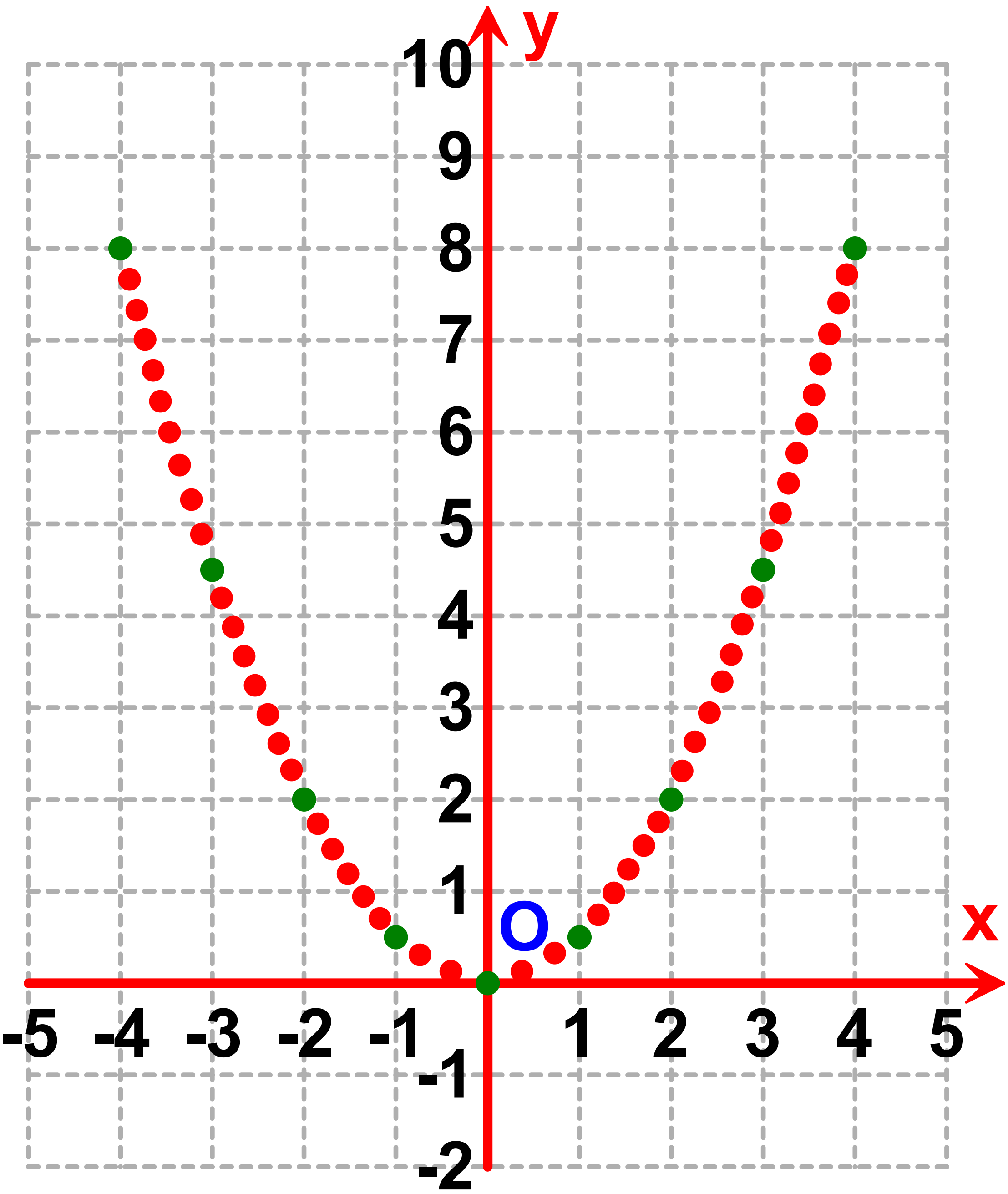


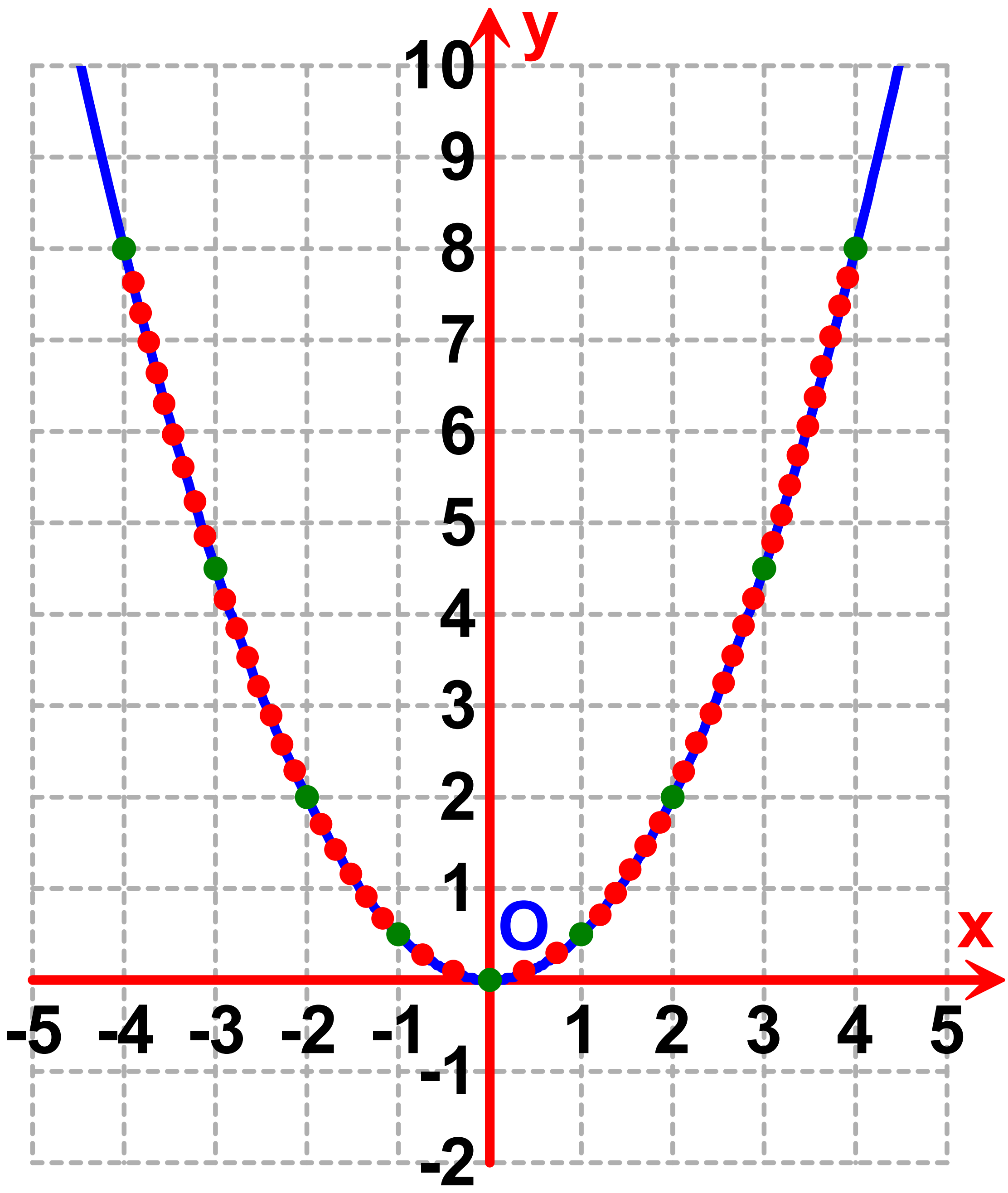
ε) Ας χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη. Για παράδειγμα:

x	-4	-3,9	-3,8	-3,7	-3,6	…	0
y	8	7,605	7,22	6,845	6,48	…	0

x	0	…	3,6	3,7	3,8	3,9	4
y	0	…	6,48	6,845	7,22	7,605	8

Όπως παρατηρούμε στα παρακάτω σχήματα, η γραμμή που θα σχηματιστεί θα είναι καμπύλη.





Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτη-σης αυτής το σύνολο όλων των

σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

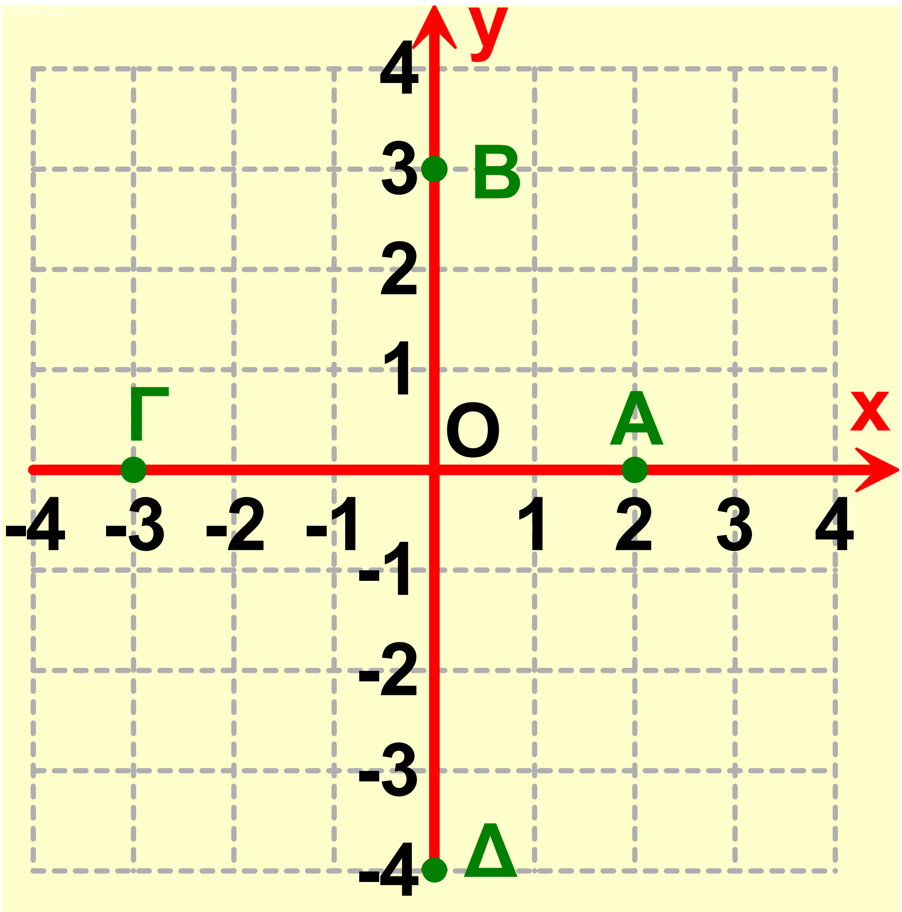
Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει μια «εποπτική» εικόνα της συνάρτησης αυτής και μας βοηθάει να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών x και y.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος. Τι συμπεραίνετε;

Λύση:

Παρατηρούμε ότι από τα σημεία Α και Γ οι κάθετες προς τον άξονα y'y αντιστοιχούν στο σημείο Ο, οπότε αυτά τα σημεία έχουν τεταγμένες 0. Άρα είναι Α(2, 0), Γ(-3, 0).



Ομοίως, από τα σημεία Β και Δ οι κάθετες προς τον άξονα x'x αντιστοιχούν στο σημείο Ο, οπότε τα σημεία αυτά έχουν τετμημένη 0. Άρα είναι Β(0, 3) και Δ(0, -4).

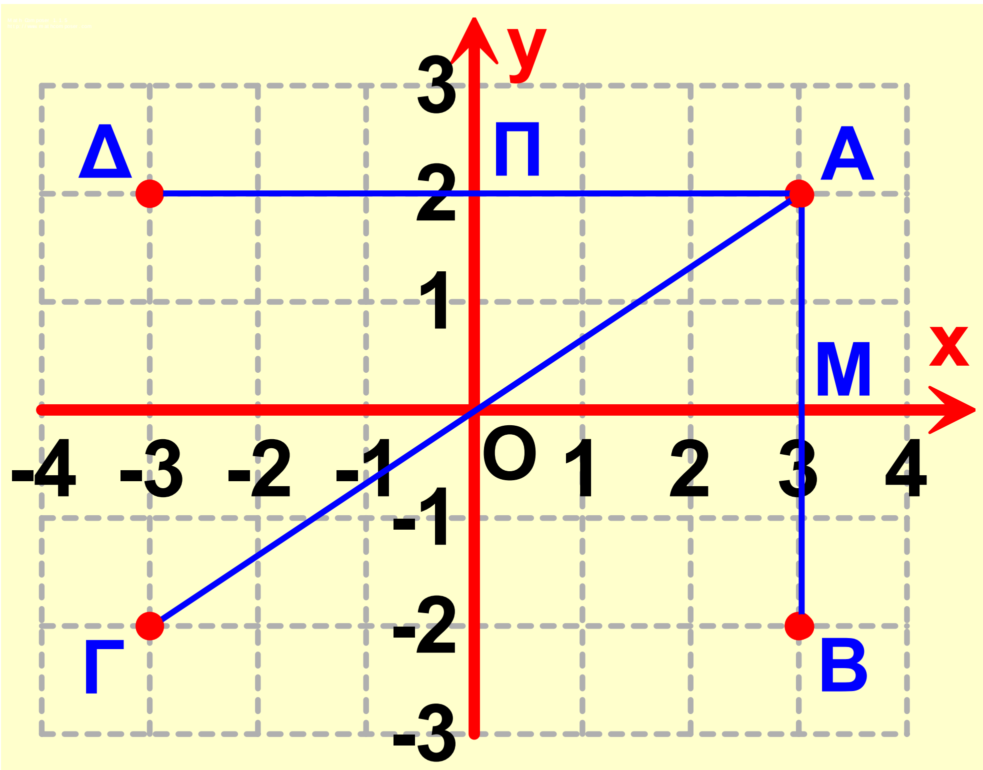
Δηλαδή:

Κάθε σημείο του άξονα x'x έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα y'y έχει τετμημένη 0.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται το σημείο Α(3, 2). Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς:
α) τον άξονα x'x β) τον άξονα y'y
γ) την αρχή Ο των αξόνων.
Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών;

Λύση:



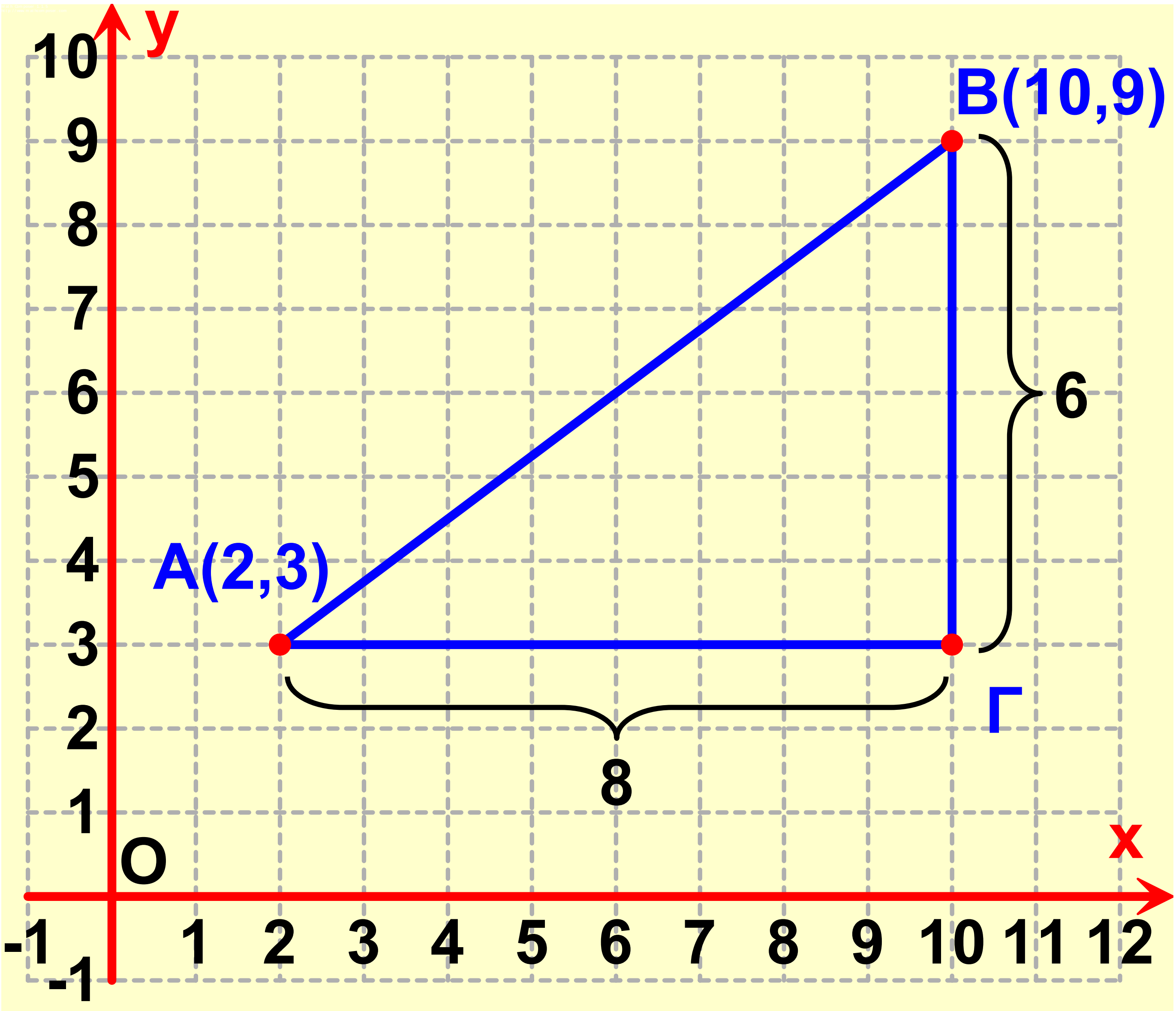
Από το Α φέρνουμε κάθετες ΑΜ και ΑΠ στους άξονες x'x και y'y.

α) Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΒ = ΜΑ. Το σημείο Β είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα x'x και έχει συντεταγμένες (3, -2).
β) Προεκτείνουμε την ΑΠ κατά τμήμα ΠΔ = ΠΑ. Το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y'y και έχει συντεταγμένες (-3, 2).
γ) Ενώνουμε το Α με την αρχή Ο των αξόνων και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΓ = ΟΑ. Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή Ο και έχει συντεταγμένες (-3, -2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνονται τα σημεία Α(2, 3) και Β(10, 9). Να υπολογίσετε την απόστασή τους ΑΒ. Τι συμπεραίνετε;

Λύση:



Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παραπάνω σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (10, 3), οπότε ΑΓ = 10 – 2 = 8 και ΒΓ = 9 – 3 = 6.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:
$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ή $AB^2 = 8^2 + 6^2$ ή $AB^2 = 100$ ή $AB = 10$
Γενικότερα:

Αν δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Έχει διαπιστωθεί ότι το νερό της θάλασσας δεν έχει παντού την ίδια θερμοκρασία. Όσο πιο βαθιά κατεβαίνουμε, τόσο πιο κρύο γίνεται το νερό. Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη στο βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα:

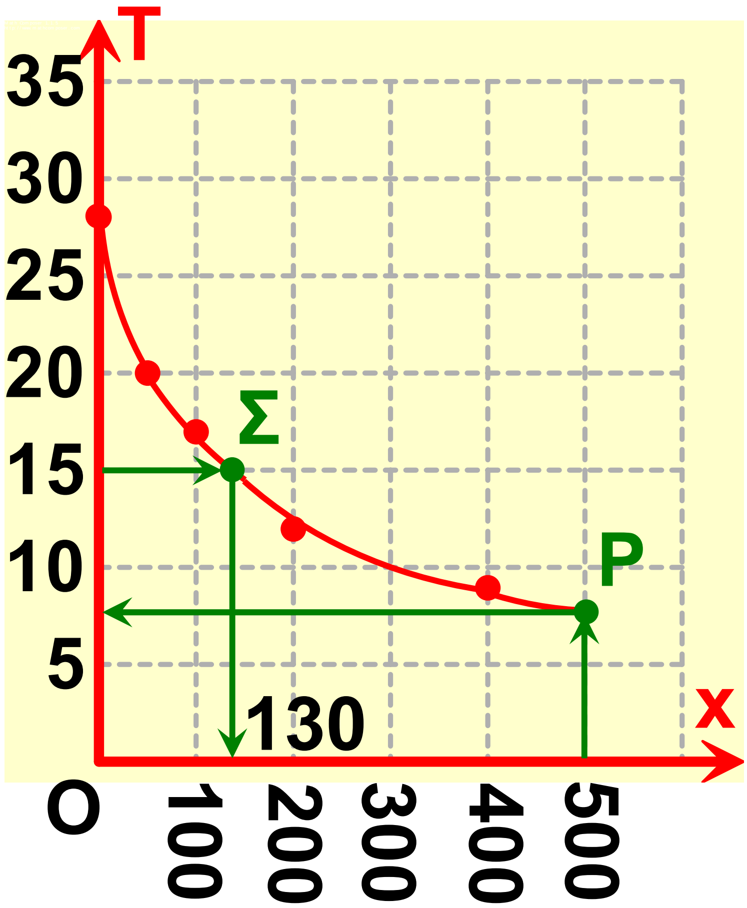
x	0	50	100	200	400
y	28	20	17	12	9

όπου Τ είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) η οποία μεταβάλλεται ως συνάρτηση του βάθους x (σε μέτρα).
α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
β) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων.
γ) Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι 15°C;

Λύση:

α) Σ' ένα σύστημα αξόνων τοποθετούμε τα σημεία με συντεταγμένες (0, 28), (50, 20), (100, 17), (200, 12) και (400, 9). Χρησιμοποιούμε ένα μη

ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στον άξονα x΄x η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε 100 μέτρα, ενώ στον άξονα y΄y η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 5°C. Στη συνέχεια, ενώνουμε με μία καμπύλη τα σημεία αυτά.



β) Για να βρούμε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων, από το σημείο με τετμημένη 500 του

άξονα x΄x φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y, που τέμνει την γραφική παράσταση στο σημείο P. Στη συνέχεια, από το P φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x΄x, που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη (περίπου) 8. Άρα, η θερμοκρασία σε βάθος x = 500 m είναι (περίπου) T = 8°C.

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι 15°C, φέρνουμε από το σημείο με τεταγμένη 15 του άξονα y΄y παράλληλη προς τον άξονα x΄x που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Σ. Στη συνέχεια, από το Σ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y΄y, που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη (περίπου) 130 m. Άρα, η θερμοκρασία είναι 15°C σε βάθος (περίπου) x = 130 m.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

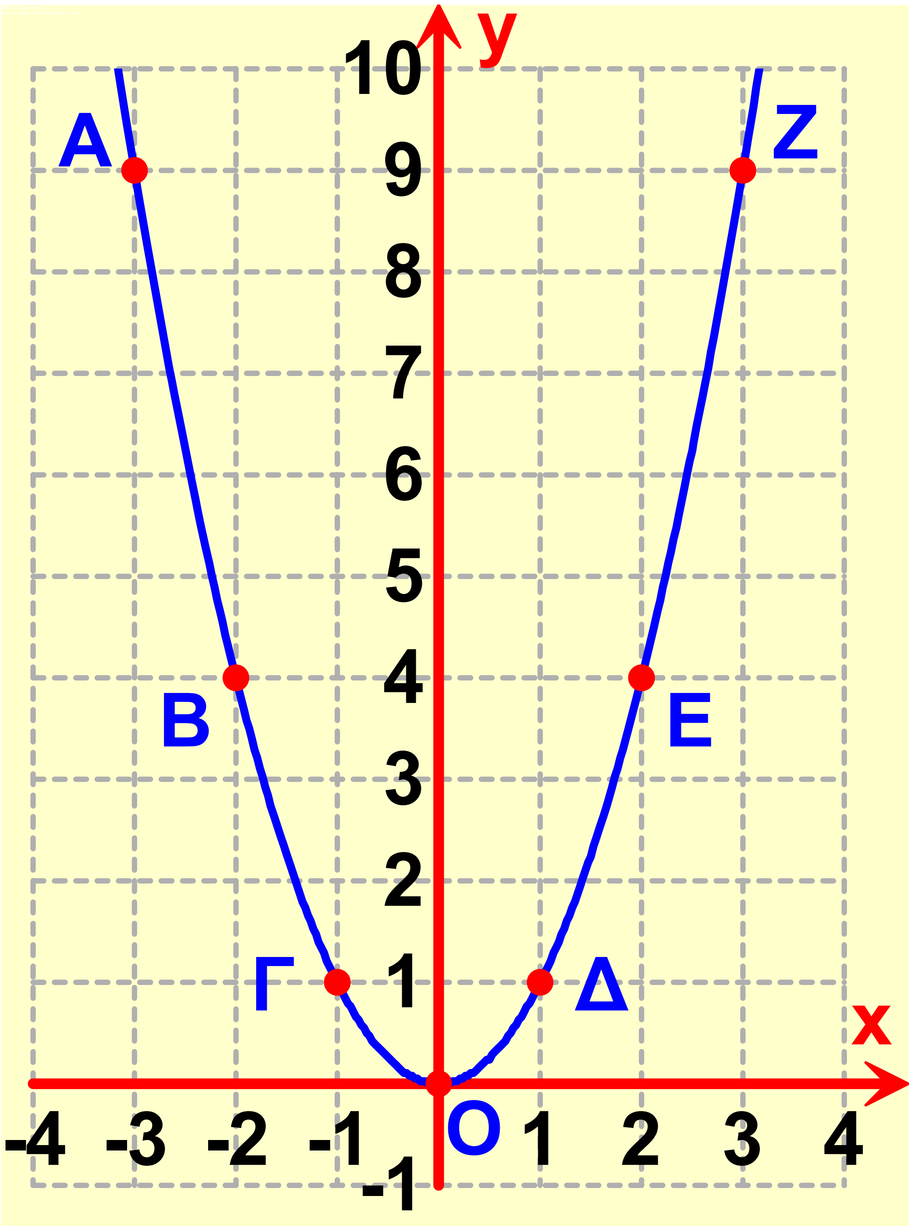
Λύση:

Σχηματίζουμε, καταρχάς, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Στη συνέχεια, τοποθετούμε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) του παραπάνω πίνακα. Έτσι, βρίσκουμε τα σημεία Α(-3, 9), Β(-2, 4), Γ(-1, 1), Ο(0, 0), Δ(1, 1), Ε(2, 4) και Ζ(3, 9).

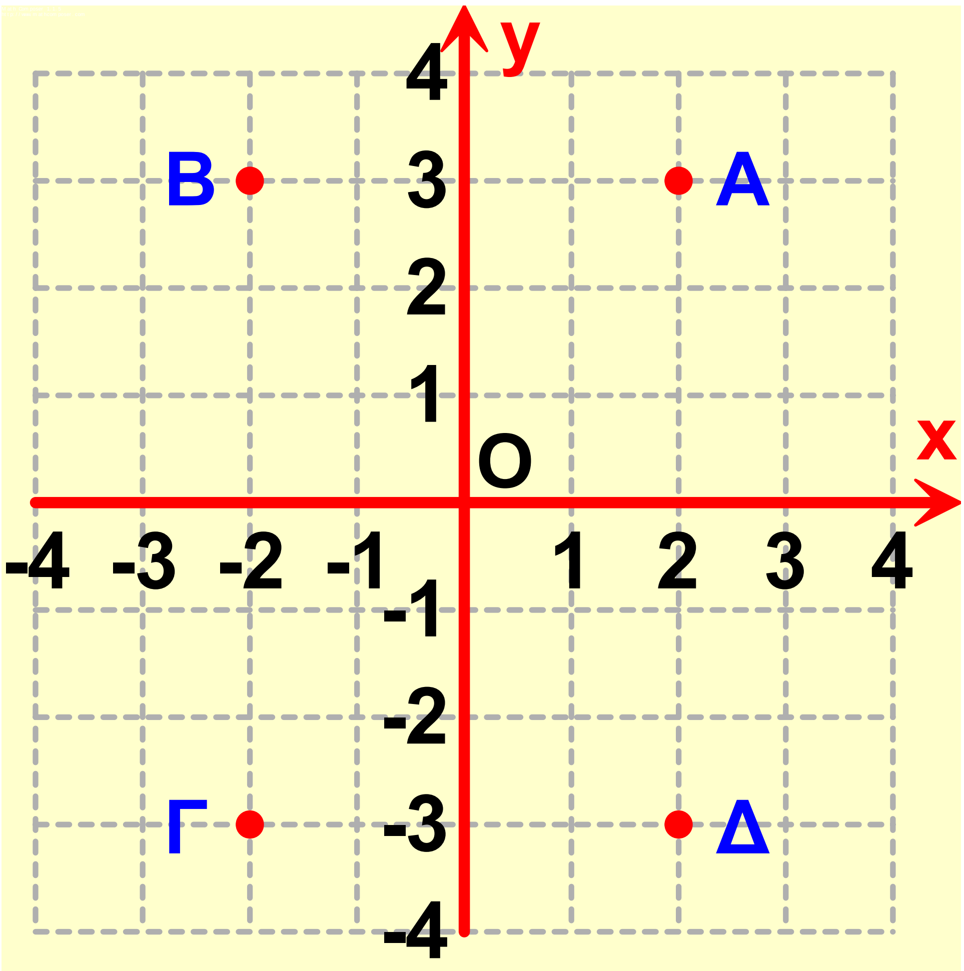
Στη συνέχεια, ενώνουμε με τη σειρά τα σημεία αυτά. Η καμπύλη που προκύπτει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σημείο τις συντεταγμένες του:**

Σημείο	Συντεταγμένες
Α	(2,3)
	(3,2)
Β	(-2,3)
	(-3,2)
Γ	(-2,-3)
	(-3,-2)
Δ	(2,-3)
	(3,-2)



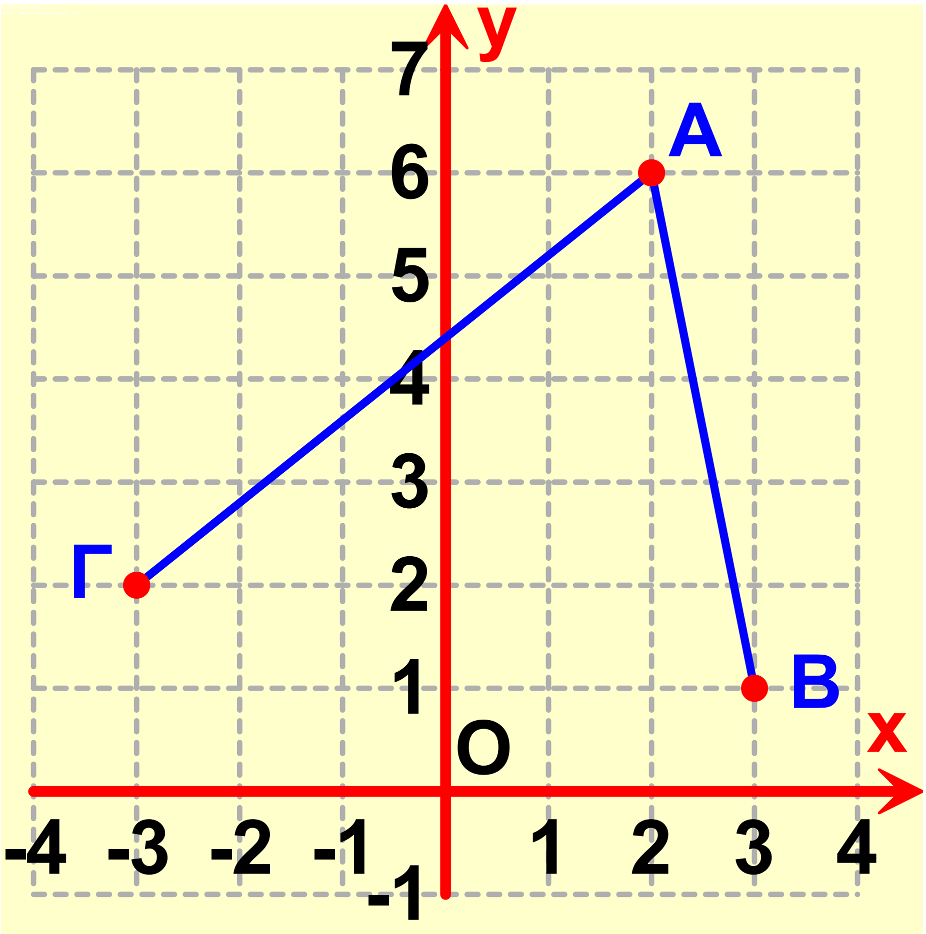
2 **Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της 1ης γραμμής.**

Σημείο Α	Συμμετρικό του Α ως προς τον x΄x	Συμμετρικό του Α ως προς τον y΄y	Συμμετρικό του Α ως προς το Ο
(-2, 3)	(-2, -3)	(2, 3)	(2, -3)
(3, 5)			
(-3, 5)			
(-3, -5)			
(3, -5)			

3 Στο παρακάτω σχήμα είναι:

α) ΑΒ < ΑΓ, β) ΑΒ > ΑΓ, γ) ΑΒ = ΑΓ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



4 Στο παρακάτω σχήμα:

α) Α: $\hat{A} < 90°$ Β: $\hat{A} = 90°$

Γ: $\hat{A} > 90°$

β) Α: $εφθ=5$ Β: $εφθ = \frac{7}{5}$

Γ: $εφθ = \frac{5}{7}$ Δ: $εφθ = 1$

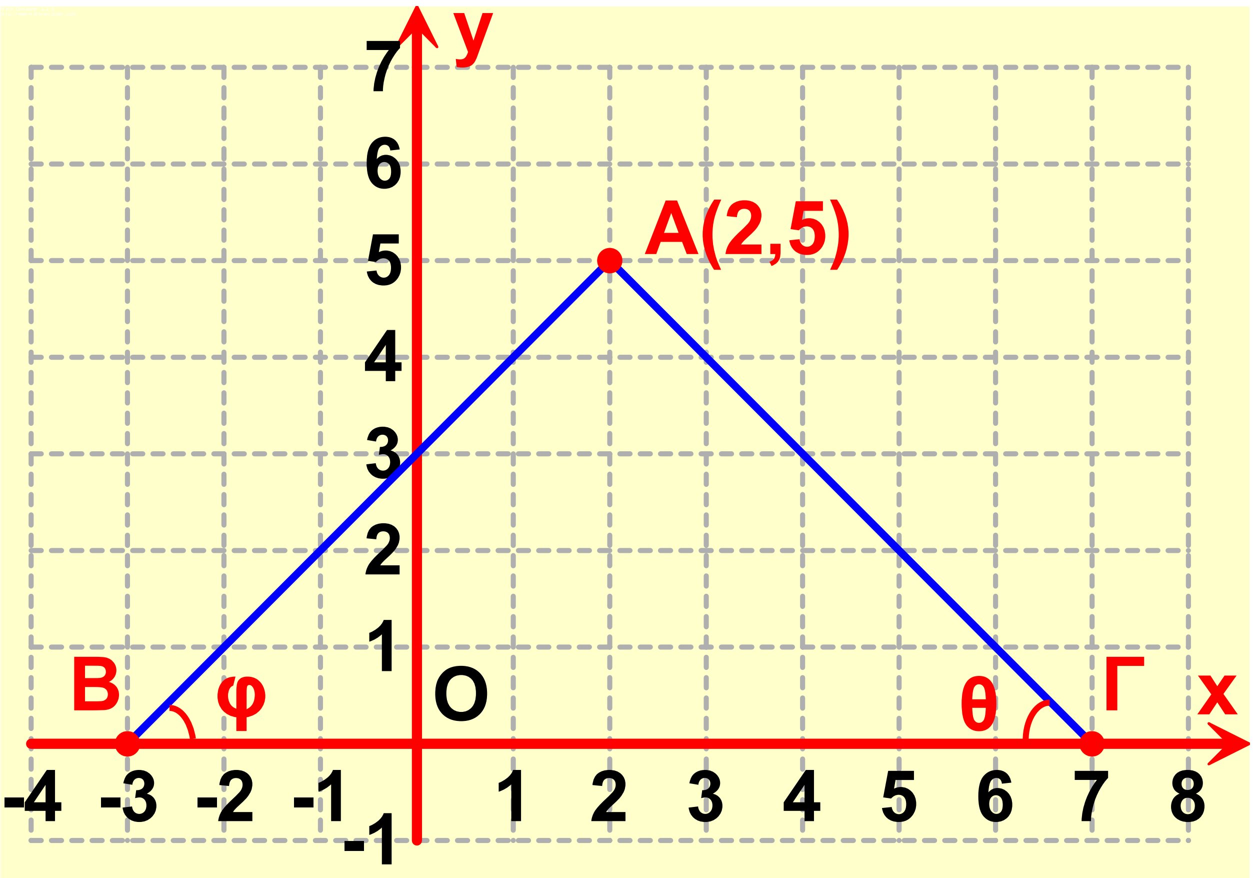
γ) Α: ΑΒ < ΑΓ Β: ΑΒ = ΑΓ

Γ: ΑΒ > ΑΓ

δ) Α: $εφφ=3$ Β: $εφφ = 5$

Γ: $εφφ=1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



5 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

α) για x=1, είναι y =........

A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5

β) για x=3, είναι y =........

A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5

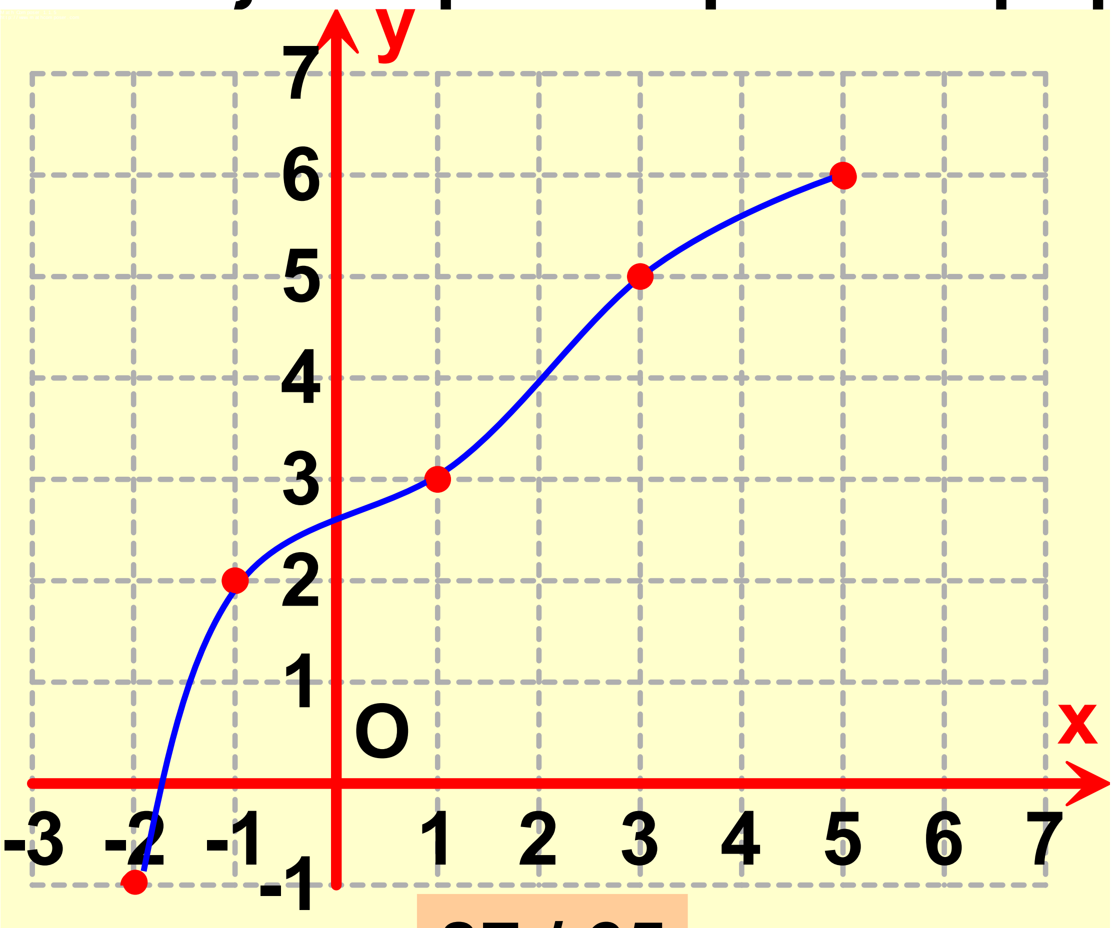
γ) για y=6, είναι x =........

A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5

δ) για y=2, είναι x =........

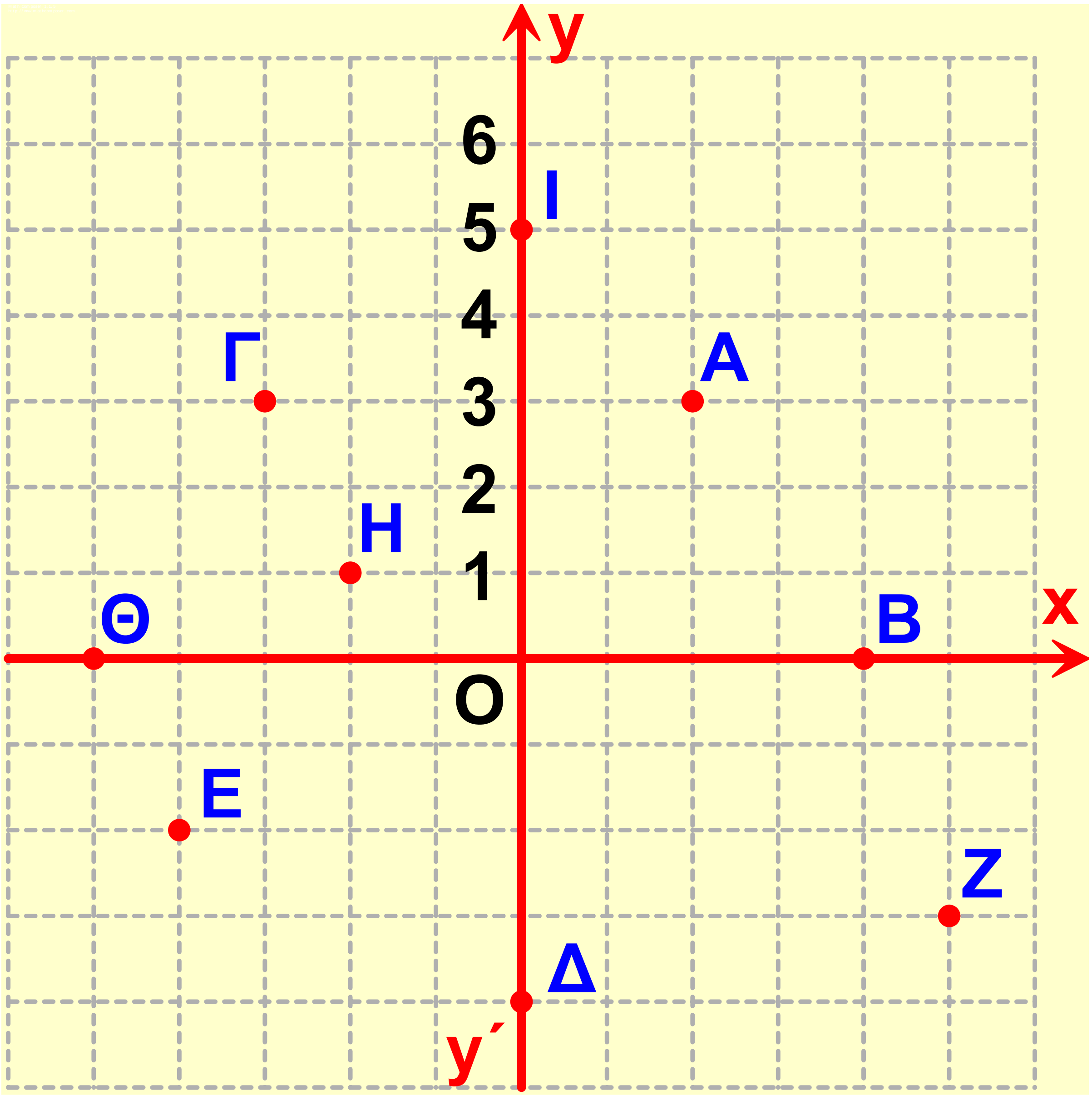
A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ και Ι.**



2 Σ’ ένα τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα σύστημα αξόνων και να σημειώσετε τα σημεία:

Α(-3, 2), Β(-0,25, 1),

Γ$(0, -\frac{5}{2})$ Δ$(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$

Ε$(-\sqrt{2}, 0)$ Ζ(2,4, -3,2).

3 Δίνονται τα σημεία Α(-3, 4) και Β$(2, -\frac{7}{2})$. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να βρείτε τις συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων ως προς τον άξονα x'x, τον άξονα y'y και την αρχή Ο των αξόνων.

4 α) Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

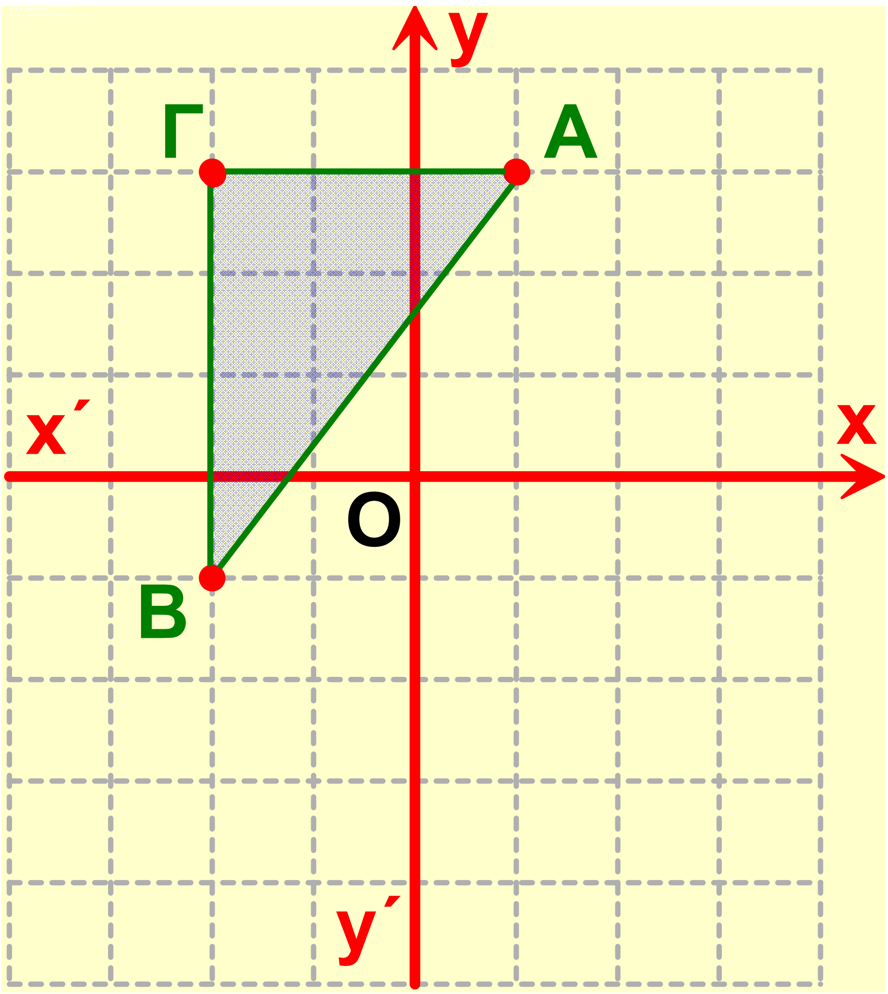
β) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το μήκος ΒΓ ισούται με:

Α: 1 + 3 = 4 **Β: 2 – 2 = 0**
Γ: 3 – 1 = 2 **Δ: -1 – 3 = -4**

ii) Το μήκος ΑΓ ισούται με:
Α: 3 – 3 = 0 **Β: 1 + 2 = 3**
Γ: 1 – 2 = -1 **Δ: 2 – 1 = 1**

γ) Αφού παρατηρήσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, να επαληθεύσετε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με 5.



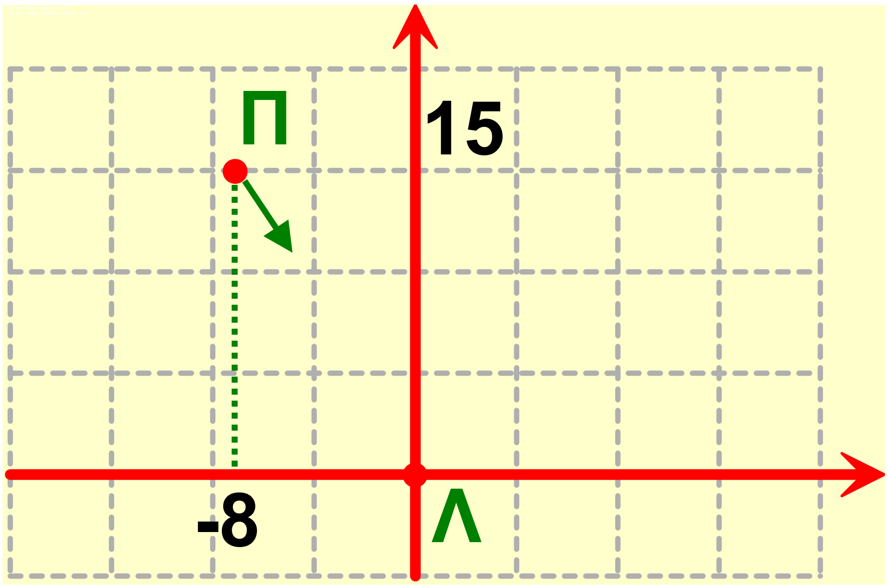
5 Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες x΄x και y΄y.

α) Α(3, 5) β) Β(-3, 2) γ) Γ(0, -4)

6 Να βρείτε τις απόστάσεις των σημείων:

α) Α(3, 5) και Β(5, 1)
β) Α(-2, 1) και Β(2, -3)
γ) Α(3,-5) και Β(-2,-5)
δ) Α(-5,-7) και Β(-5, 2)

7 Ένα πλοίο Π κινείται με ταχύτητα 8 μίλια την ώρα και κατευθύνεται προς το λιμάνι Λ. Η θέση του πλοίου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Λ και μονάδα μέτρησης το 1 μίλι, είναι (-8, 15). Σε πόση ώρα θα φτάσει στο λιμάνι;



8 Η πίεση P (σε cm Hg) του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h από το έδαφος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Πίεση P σε cm Hg	76	68	60	52

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Ποια είναι η πίεση σε ύψος 1,5 km από το έδαφος;
γ) Σε ποιο ύψος η πίεση είναι περίπου ίση με 70 cm Hg;

9 Η θερμοκρασία Τ του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Θερμοκρασία Τ σε °C	22	16	10	4

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
β) Πόση περίπου είναι η θερμοκρασία του αέρα σε ύψος 500 μέτρων;
γ) Σε ποιο ύψος η θερμοκρασία του αέρα είναι περίπου 12°C;

10 Όταν ένα σώμα (π.χ. μια μπάλα) πέφτει από ένα ψηλό σημείο (π.χ. από τον τελευταίο όροφο ενός ουρανοξύστη ύψους 100 m) δεν κινείται ομαλά (με σταθερή ταχύτητα), αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η απόσταση x που διανύει το σώμα ως συνάρτηση του χρόνου t.

t(s)	0	1	2	3	4
x(m)	0	5	20	45	80

Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

3.3. Η συνάρτηση y = αx

Ποσά ανάλογα –
Η συνάρτηση y = αx

Στην εφημερίδα διαβάζουμε διάφορες φράσεις, όπως: «... η τιμή της βενζίνης μειώθηκε ανάλογα με τη μείωση του πετρελαίου...». Οι φράσεις αυτές παρουσιάζουν ένα ποσό να μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο άλλο.

Όπως γνωρίζουμε, δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται τέσσερα τετράγωνα με πλευρές (σε cm) 0,5, 1, 1,5 και 2. α)
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

πλευρά x	0,5	1	1,5	2
περίμετρος y				
λόγος $\frac{y}{x}$				

β) Να εκφράσετε την περίμετρο y ενός τετραγώνου ως συνάρτηση του μήκους x της πλευράς του.

Λύση

α) Για x = 0,5 η περίμετρος είναι y = 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2.
Ομοίως, βρίσκουμε την περίμετρο και στις άλλες περιπτώσεις, που είναι αντίστοιχα: 4, 6 και 8.

Επίσης, για το λόγο $\frac{y}{x}$ έχουμε:

$$\frac{2}{0,5} = 4,\ \frac{4}{1} = 4,\ \frac{6}{1,5} = 4, \text{ και } \frac{8}{2} = 4$$

πλευρά x	0,5	1	1,5	2
περίμετρος y	2	4	6	8
λόγος $\frac{y}{x}$	4	4	4	4

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός πάντοτε και ίσος με 4.

Άρα $\frac{y}{x} = 4$ ή $y = 4x$. Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως συνάρτηση του x.

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε και αρνητικές τιμές της μεταβλητής x στη συνάρτηση y = αx.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Αφού συμπληρώσετε τον παρακά-τω πίνακα τιμών, ο οποίος περιλαμβάνει και αρνητικές τιμές του x, να κατασκευάσετε τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{2}x$.
Τι παρατηρείτε;

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

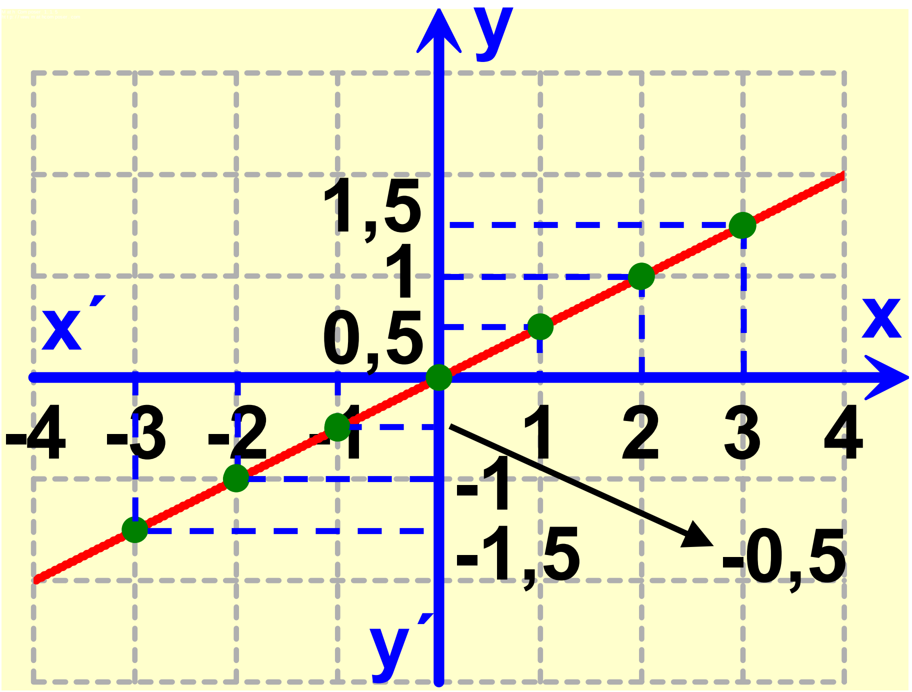
Λύση

Για x = -3 είναι $y = \frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} = -1{,}5$.

Ομοίως, βρίσκουμε τις υπόλοιπες τιμές και συμπληρώνουμε τον πίνακα.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5

Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των τιμών του πίνακα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

Όταν αναφερόμαστε στην ευθεία, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx, τότε λέμε: η ευθεία με εξίσωση y = αx ή απλώς η ευθεία y = αx. Ο άξονας x΄x είναι η ευθεία με εξίσωση y = 0x, δηλαδή y = 0.

Η κλίση της ευθείας $y = αx$

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία $y = αx$ ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με α, δηλαδή: $\frac{y}{x} = α$, για $x \neq 0$. Ο λόγος αυτός λέγεται κλίση της ευθείας $y = αx$.

Για παράδειγμα, η ευθεία $y = -2x$ έχει κλίση -2.

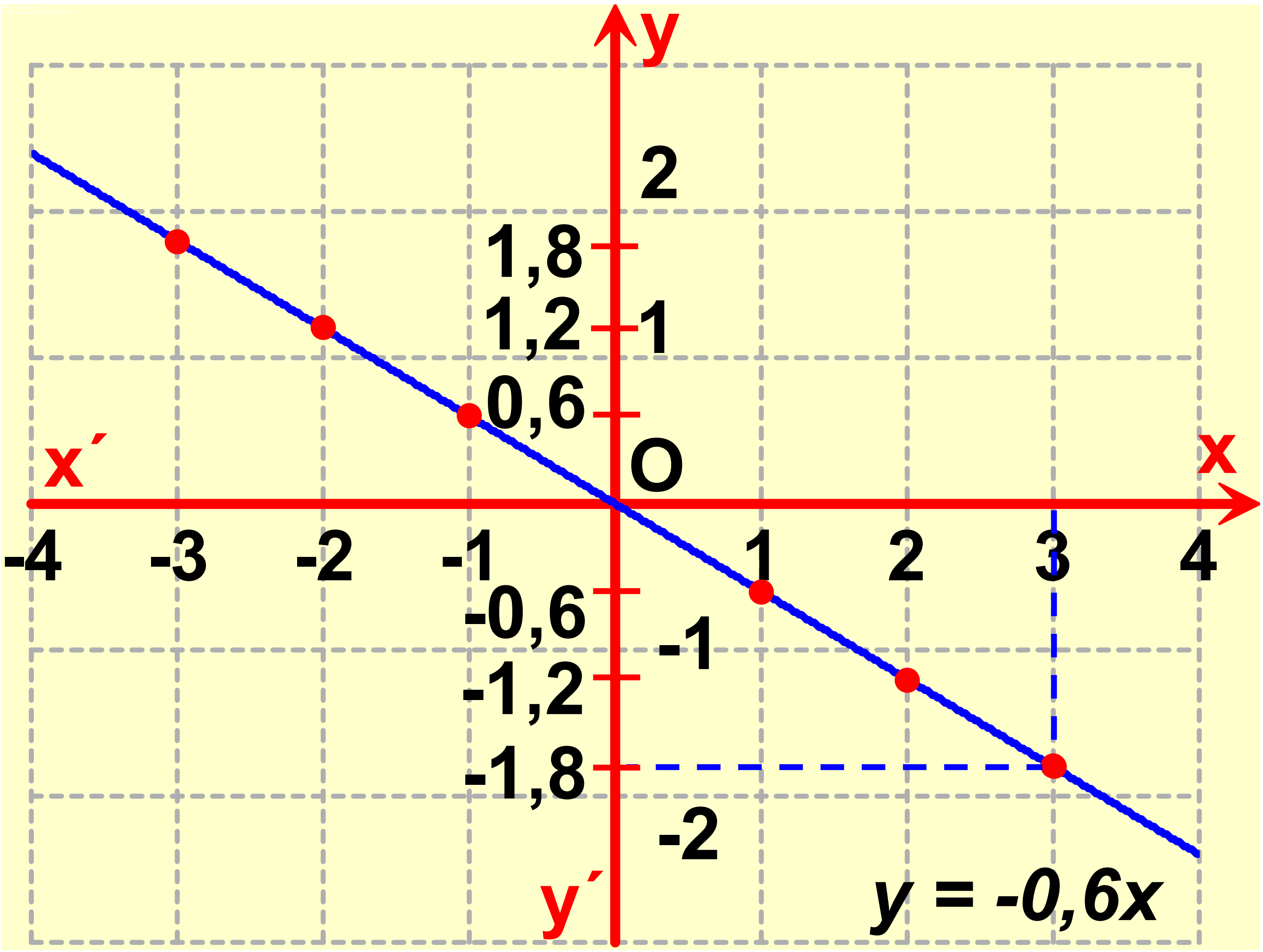
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την ευθεία με εξίσωση $y = -0,6x$.

Λύση:

Η συνάρτηση $y = -0,6x$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των

αξόνων. Επομένως, πρέπει να βρούμε ένα ακόμα σημείο της. Για x = 3 είναι y = -0,6 • 3 = -1,8. Άρα, η ευθεία περνάει από το σημείο Α(3, -1,8). Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



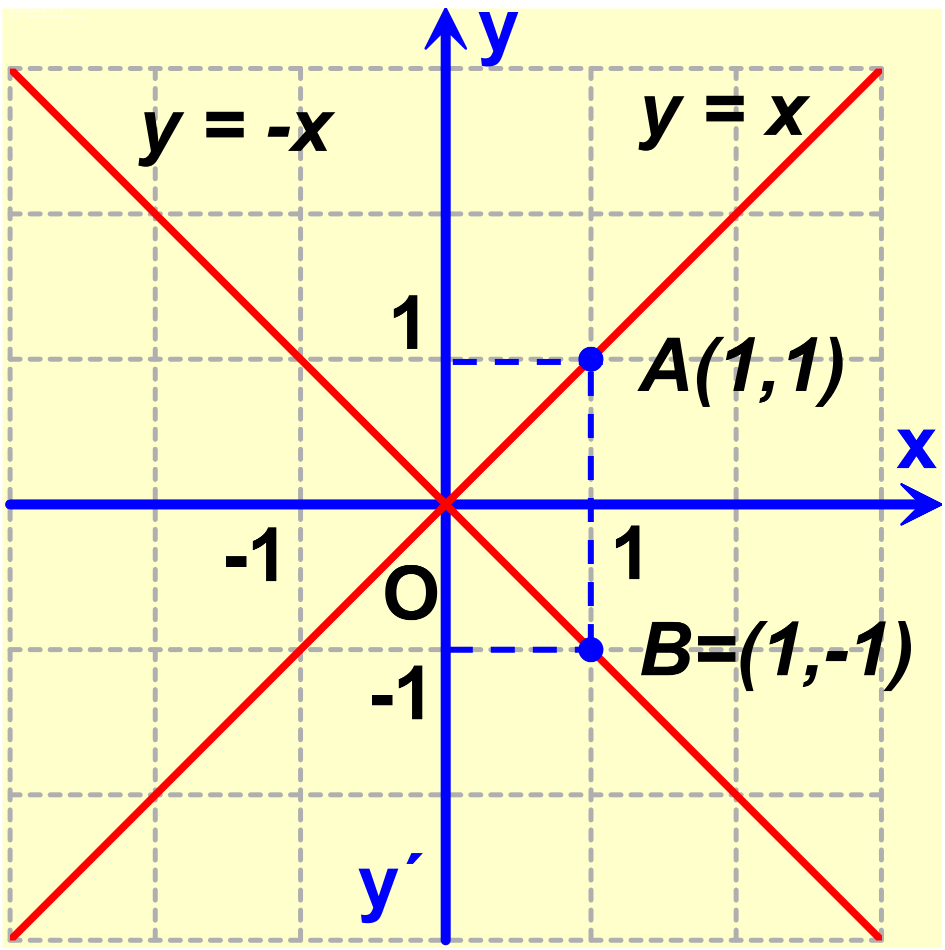
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις y = x και y = -x.

Λύση:

Η συνάρτηση y = x έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο. Ένα δεύτερο σημείο της προσδιορίζεται δίνοντας μια τυχαία τιμή στο x εκτός της μηδενικής. Για x = 1 είναι y = 1, άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(1, 1). Η ζητούμενη ευθεία είναι η ΟΑ. Ομοίως, βρίσκουμε ότι η γραφική παράσταση της y = -x είναι η ΟΒ.

Παρατήρηση: ***Η ευθεία με εξίσωση y = x είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων και η y = -x είναι διχοτόμος της 2ης και της 4ης γωνίας.***



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(-2, 1).

Λύση:

Το σημείο Α έχει συντεταγμένες $x = -2$, $y = 1$, οπότε η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = -\frac{1}{2}x$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένα πολυκατάστημα κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη.
α) Πόση έκπτωση αναλογεί σ' ένα ζευγάρι παπούτσια το οποίο κοστίζει αρχικά 100 €; Ποια είναι η τιμή που θα το αγοράσουμε μετά την έκπτωση;
β) Να συμπληρώσετε το παρακάτω πίνακα, με τις τιμές διαφόρων ειδών του καταστήματος και να εξετάσετε αν είναι ανάλογα τα ποσά x, y και τα ποσά x, ω.
γ) Να εκφράσετε τα ποσά y και ω ως συναρτήσεις του x.

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20				
Τελική τιμή ω	80				

Λύση:

α) Η έκπτωση που αναλογεί είναι

$100 \cdot \frac{20}{100} = 20$ €, οπότε θα το αγοράσουμε $100 - 20 = 80$ €.

β) Ομοίως, με το ερώτημα (α) συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20	40	10	16	30
Τελική τιμή ω	80	160	40	64	120

γ) Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, γιατί:

$$\frac{y}{x} = \frac{20}{100} = \frac{40}{200} = \frac{10}{50} = \frac{16}{80} = \frac{30}{150} = 0{,}2.$$

Επομένως, $y = 0{,}2x$.

Τα ποσά x και ω είναι ανάλογα, γιατί:

$$\frac{\omega}{x} = \frac{80}{100} = \frac{160}{200} = \frac{40}{50} = \frac{64}{80} = \frac{120}{150} = 0{,}8.$$

Επομένως, ω = 0,8x.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Τα ποσά x και y είναι ανάλογα.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	2	4	
y	5		15

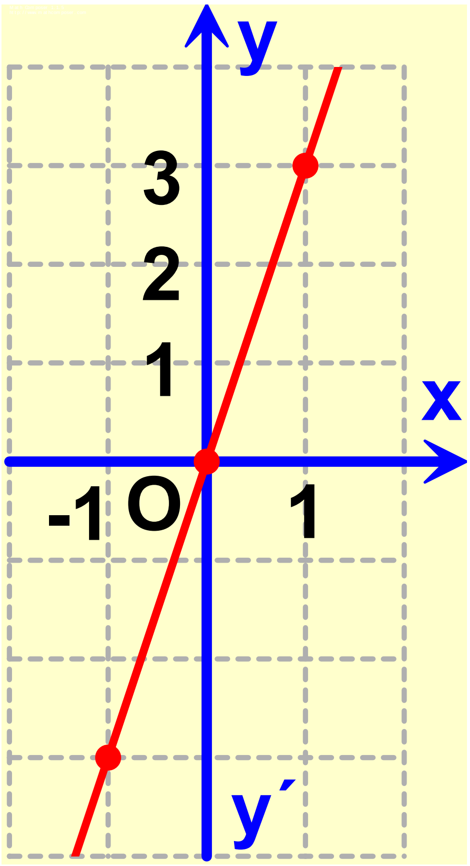
β) Ποιος από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το y ως συνάρτηση του x;

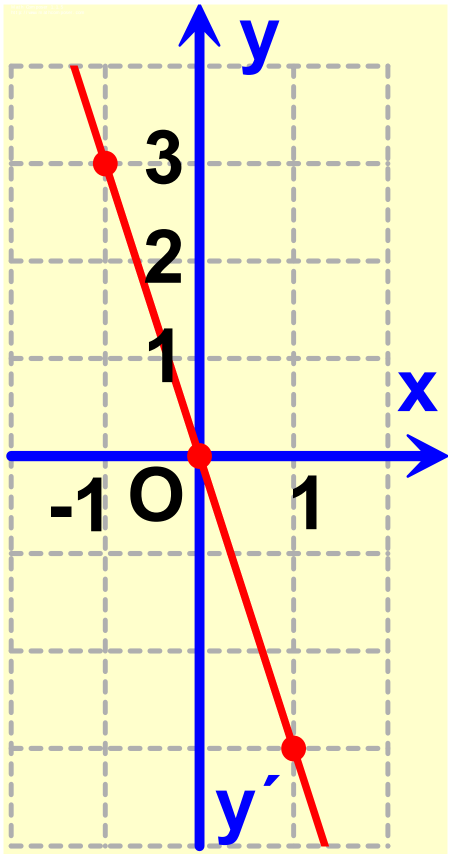
Α: $y = 5x$, Β: $y = \frac{2}{5}x$,

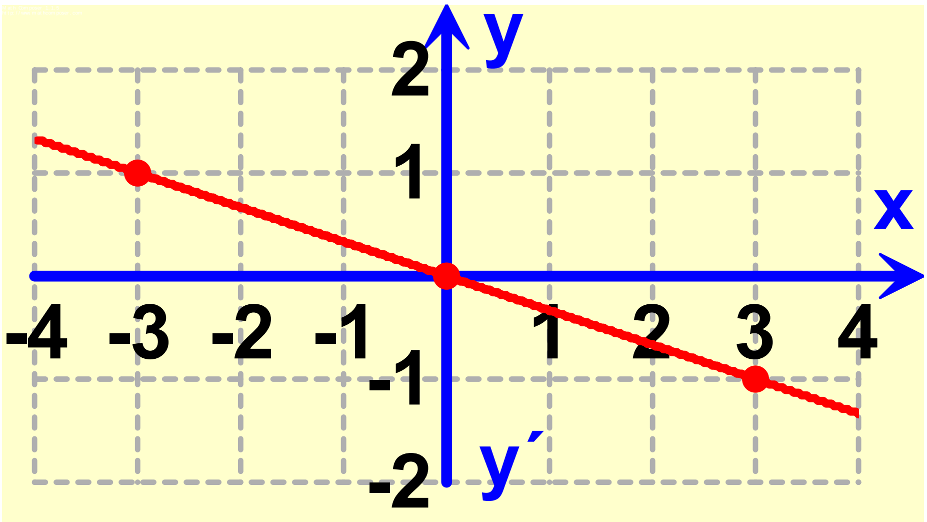
Γ: $y = \frac{5}{2}x$. Δ: $y = 0{,}4x$.

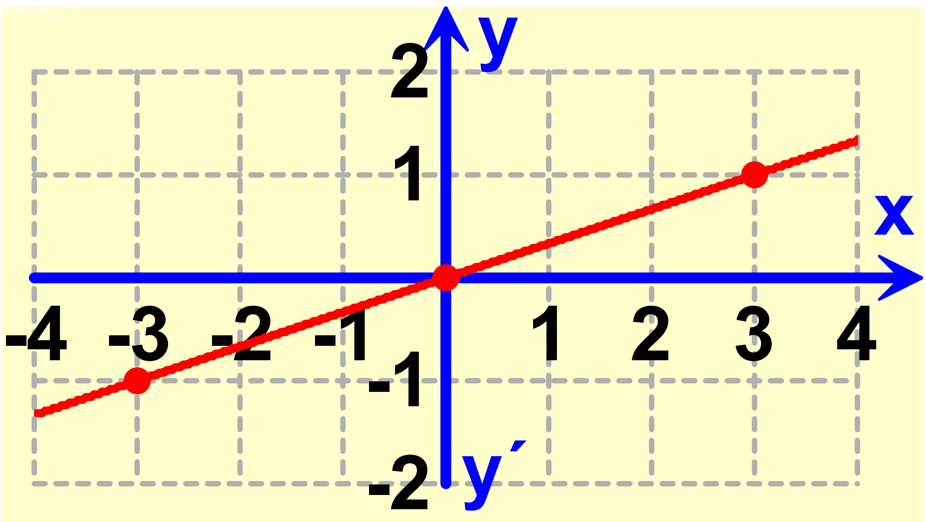
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2 Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι η $y = 3x$;


y
3
2
1
x
-1
O
1
y´


y
3
2
1
x
-1
O
1
y´


y
2
1
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-1
-2
y´


y
2
1
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-1
-2
y´

3 Ποια από τις παρακάτω ευθείες έχει κλίση $-\frac{1}{3}$;

α) $y = 3x$ β) $y = -3x$

γ) $y = \frac{1}{3}x$ δ) $y = -\frac{1}{3}x$

ε) $y = x - \frac{1}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Γνωρίζοντας ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	1	2	5		
y		6		21	30

β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

2 **Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:**
$y = 2x$, $y = 3x$ και $y = 5x$.

3 **Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:**

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

4 **Ένα κινητό κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ = 5$ m/s. Να εκφράσετε το διάστημα S που διανύει ως συνάρτηση του χρόνου t. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.**

5 **Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(2, 6).**

6 Να σχεδιάσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων μια ευθεία η οποία να διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και να έχει κλίση $\frac{3}{2}$.

7 Να βρείτε την κλίση μιας ευθείας η οποία να διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και από το σημείο Α(-1, 3).

8 Οι τιμές των αγροτικών προϊόντων σε μια χώρα αυξήθηκαν κατά 20% σ' ένα χρόνο.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των αγροτικών προϊόντων, ως συνάρτηση των παλιών τους τιμών x.
β) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση.
γ) Με τη βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης να βρείτε:

i) Τη σημερινή τιμή ενός προϊόντος που είχε πέρυσι 7 €.

ii)Την περσινή τιμή ενός προϊόντος που έχει τώρα 7 €.

9 Η ισοτιμία του Ευρώ έναντι του Δολλαρίου την 21/7/03 ήταν 112 \$ για 100 €.

α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει την τιμή y σε δολλάρια ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής x του προϊόντος αυτού σε Ευρώ.

β) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε δολλάρια ενός αεροπορικού εισιτηρίου που κοστίζει 250 €.

γ) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε Ευρώ ενός αεροπορικού εισιτηρίου κόστους 250 \$.

3.4. Η συνάρτηση $y = αx + β$

Η ευθεία με εξίσωση $y = αx + β$

Στις προηγούμενες παραγράφους μάθαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx$ είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx + β$. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Το κινητό της Κατερίνας.

Η Κατερίνα έχει κινητό τηλέφωνο με χρέωση 0,9 € για κάθε λεπτό ομιλίας.

α) Αν ονομάσουμε x το χρόνο ομιλίας (σε λεπτά) και y το ποσό πληρωμής (σε €) που αντιστοιχεί, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής y	0,9				

Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Η τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει και 10 € πάγιο το μήνα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με το νέο ποσό πληρωμής y με την προσθήκη και των 10 €.

Χρόνος Ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας					
Πάγιο					
Συνολικό Ποσό πληρωμής y					

Να εκφράσετε το νέο ποσό πληρωμής y ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας x και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

γ) Τι σχέση έχουν οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις;

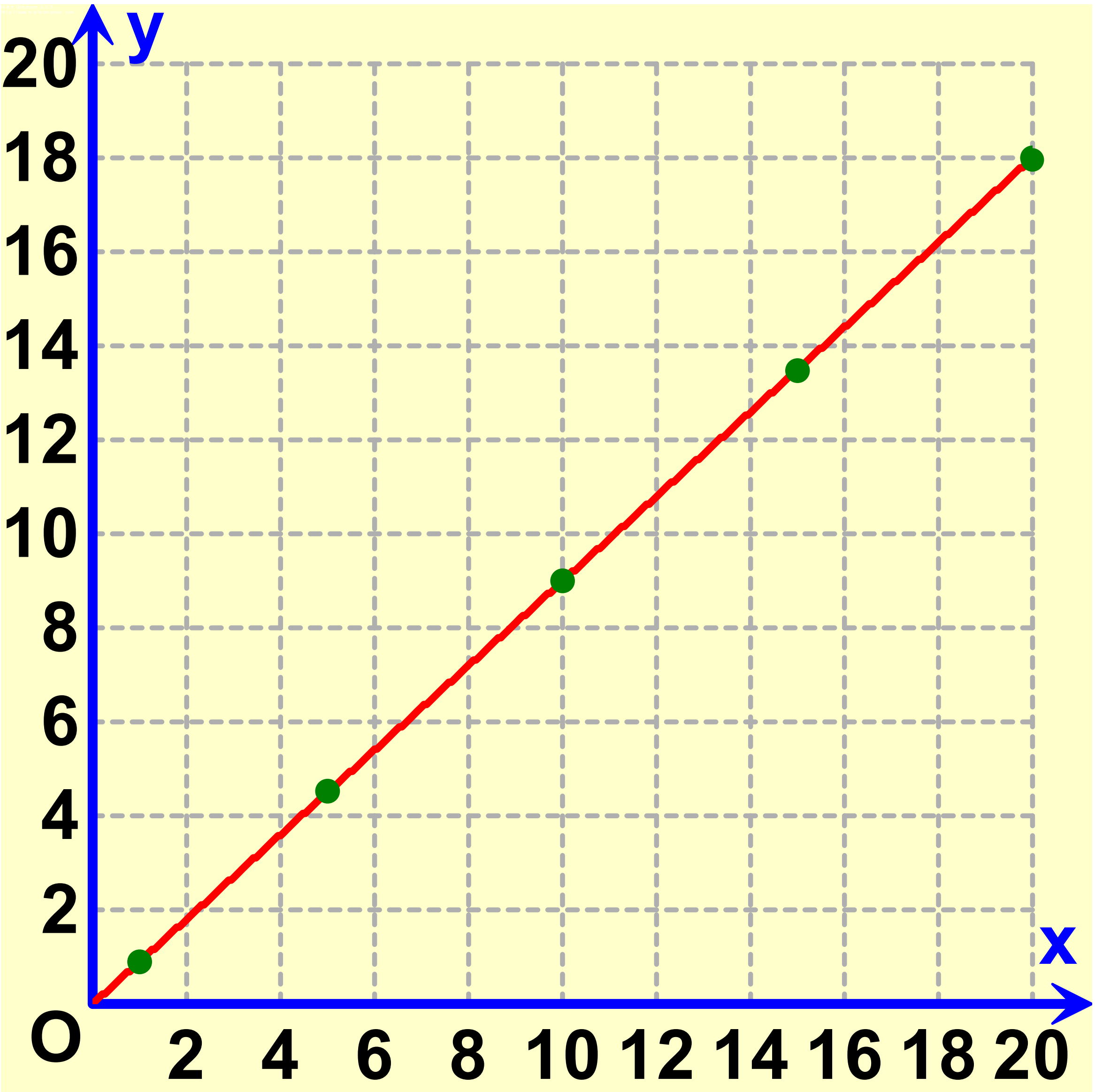
Λύση

α) Για x = 5 είναι y = 0,9 · 5 = 4,5 €. Ομοίως, βρίσκουμε τα υπόλοιπα ζεύγη του πίνακα.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής y	0,9	4,5	9	13,5	18

Παρατηρούμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, γιατί $\frac{y}{x} = 0,9$ ή y = 0,9x. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι μια ημιευθεία που αρχίζει από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 0,9, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$y = 0,9x$



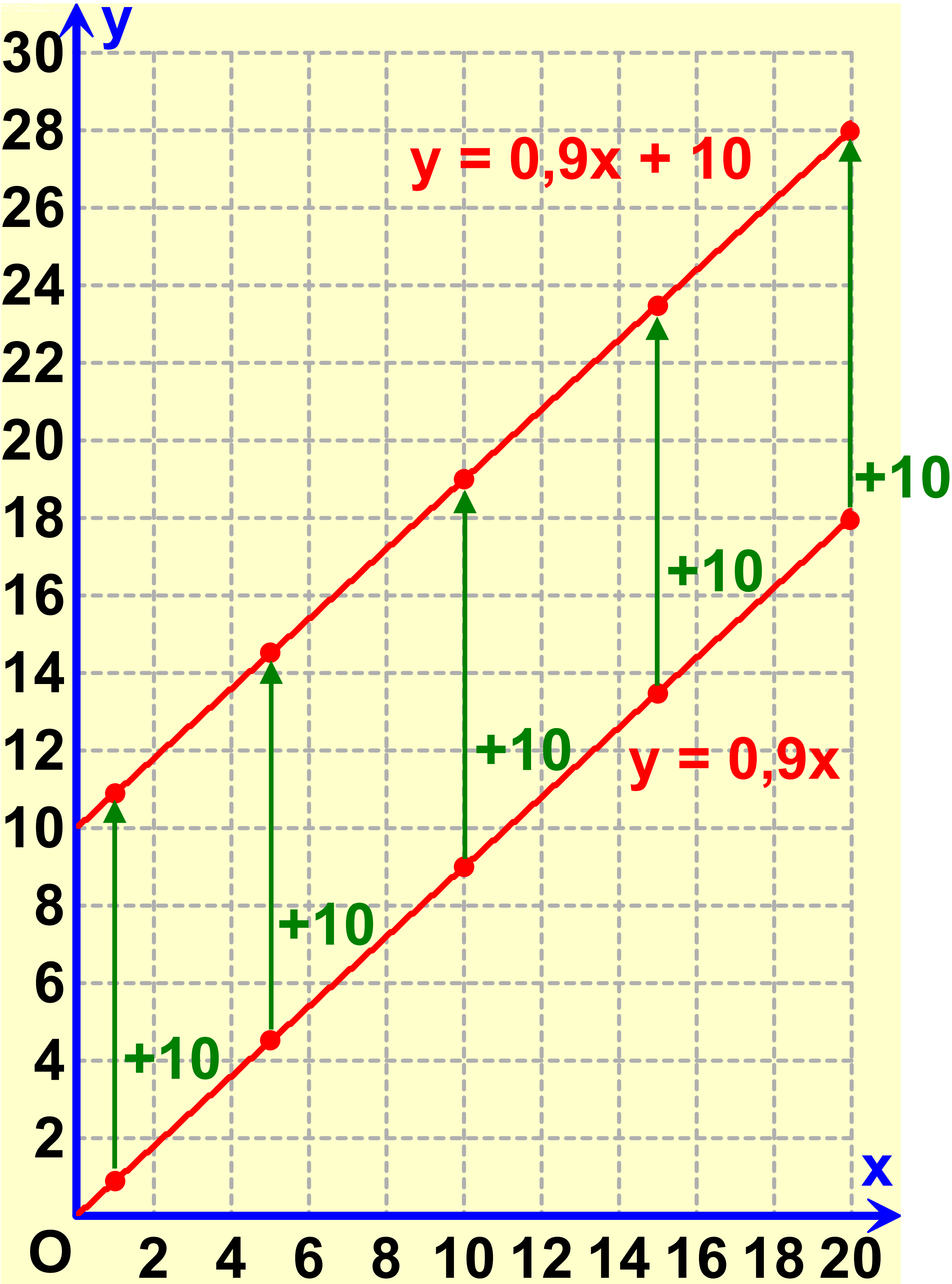
β) Εύκολα συμπληρώνουμε τον πίνακα προσθέτοντας στο ποσό πληρωμής και το πάγιο των 10 €. Η νέα συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό ποσό πληρωμής είναι

$y = 0,9x + 10$.

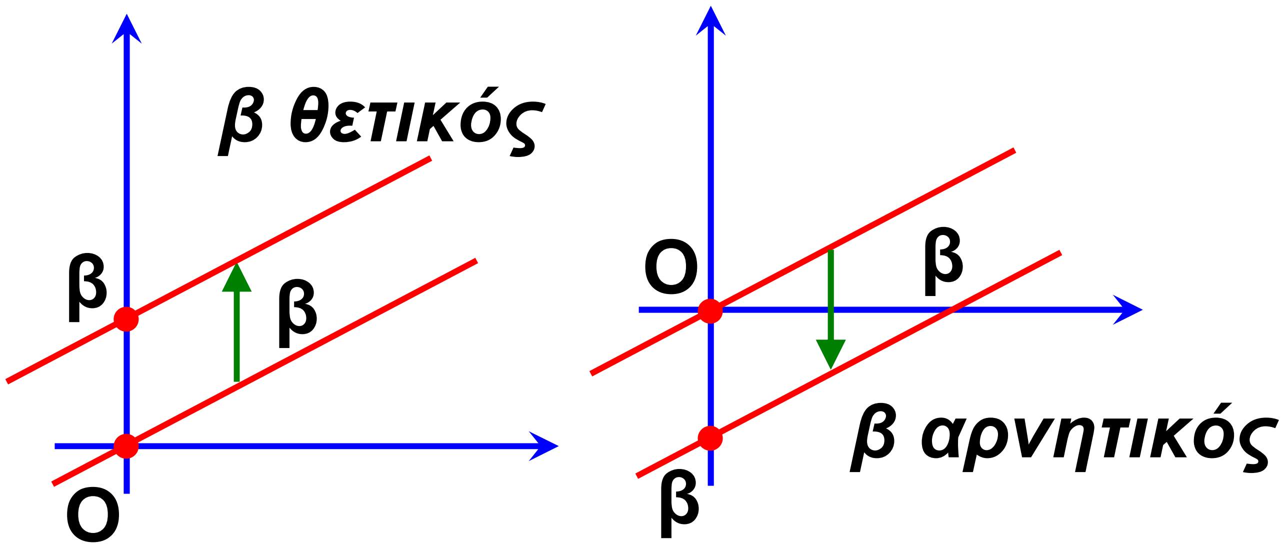
Χρόνος Ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας	0,9	4,5	9	13,5	18
Πάγιο	+10	+10	+10	+10	+10
Συνολικό Ποσό Πληρωμής y	10,9	14,5	19	23,5	28

Τοποθετούμε στο σύστημα αξόνων τα νέα ζεύγη (x, y) του παραπάνω πίνακα των οποίων η τεταγμένη είναι αυξημένη κατά 10 μονάδες. Αν ενώσουμε τα νέα αυτά σημεία, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 0{,}9x + 10$ είναι ημιευθεία παράλληλη προς

την ημιευθεία y = 0,9x, μετατοπισμένη κατά 10 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα y΄y.



Η γραφική παράσταση της $y = αx + β$, $β \neq 0$ είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = αx$, που διέρχεται από το σημείο $(0, β)$ του άξονα y΄y.



Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx + β$, θα λέμε: η ευθεία με εξίσωση $y = αx + β$ ή απλώς η ευθεία $y = αx + β$.

Ο αριθμός α, που, όπως γνωρί-ζουμε, λέγεται κλίση της ευθείας $y = αx$, λέγεται και κλίση της ευθείας $y = αx + β$.

Η εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$

Παρατηρήσαμε ότι οι συναρτήσεις $y = αx$ και $y = αx + β$ παριστάνουν ευθείες. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες εξισώσεις που παριστάνουν ευθείες, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η κυρία Μαρίκα σκοπεύει να ξοδέψει 15 € για να αγοράσει κρέας που κοστίζει 6 € το κιλό και πατάτες, που κοστίζουν 2 € το κιλό. Ποια σχέση συνδέει τα κιλά κρέας και τα κιλά πατάτες που τελικά θα αγοράσει;

Λύση

Έστω ότι θα αγοράσει x κιλά κρέας και y κιλά πατάτες. Θα ξοδέψει λοιπόν 6x € για το κρέας και 2y € για πατάτες. Εφόσον διαθέτει μόνο

15 €, πρέπει 6x+ 2y = 15. Αν λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς y, έχουμε:

$$6x + 2y = 15 \quad \text{ή}$$

$$2y = -6x + 15 \quad \text{ή}$$

⇧

Πήγαμε το 6x στο άλλο μέλος

$$y = -3x + \frac{15}{2}$$

⇧

Διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με 2

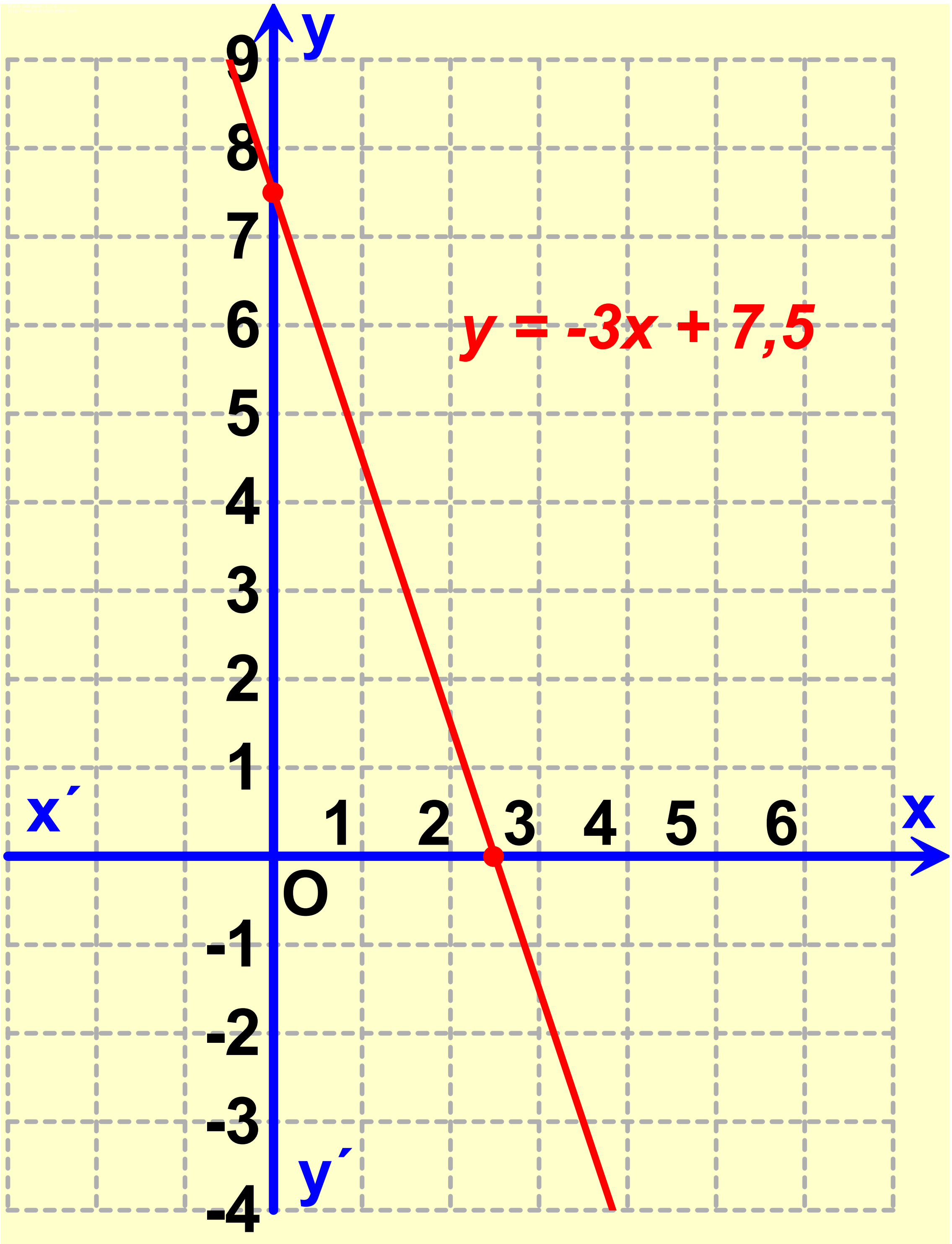
που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία.

Γενικά:

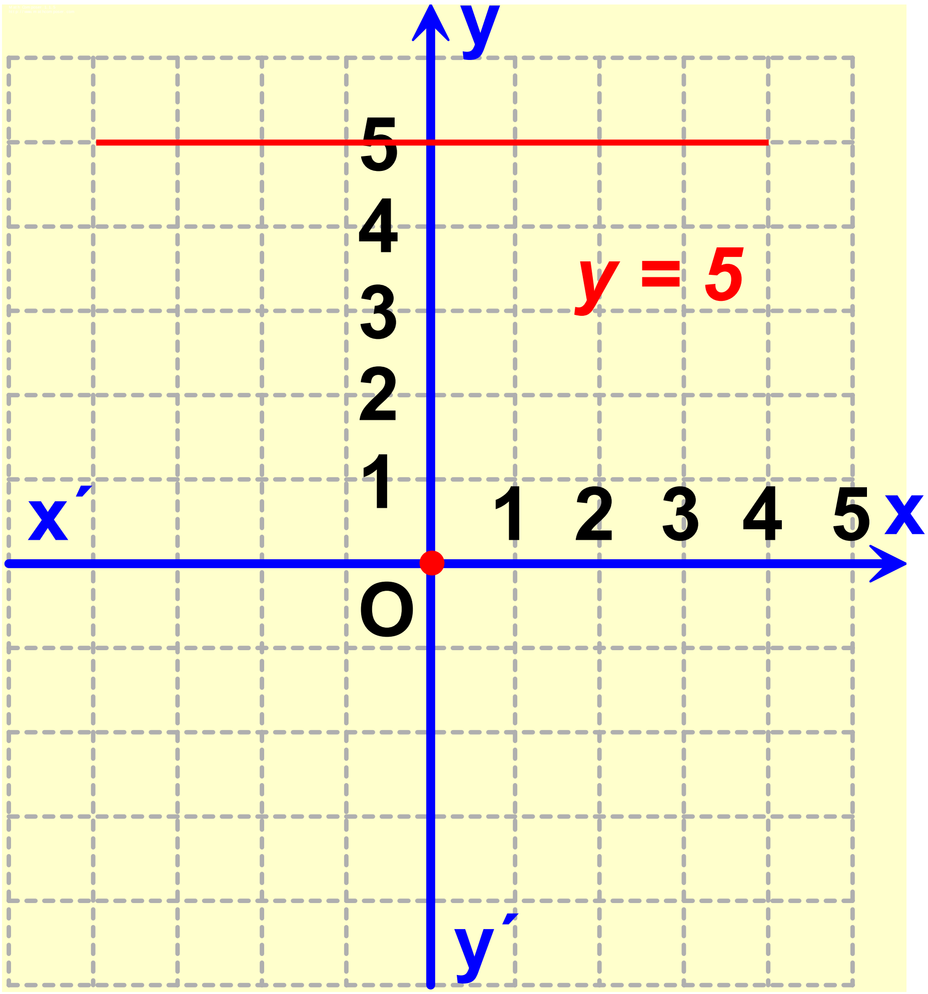
Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

Για παράδειγμα:

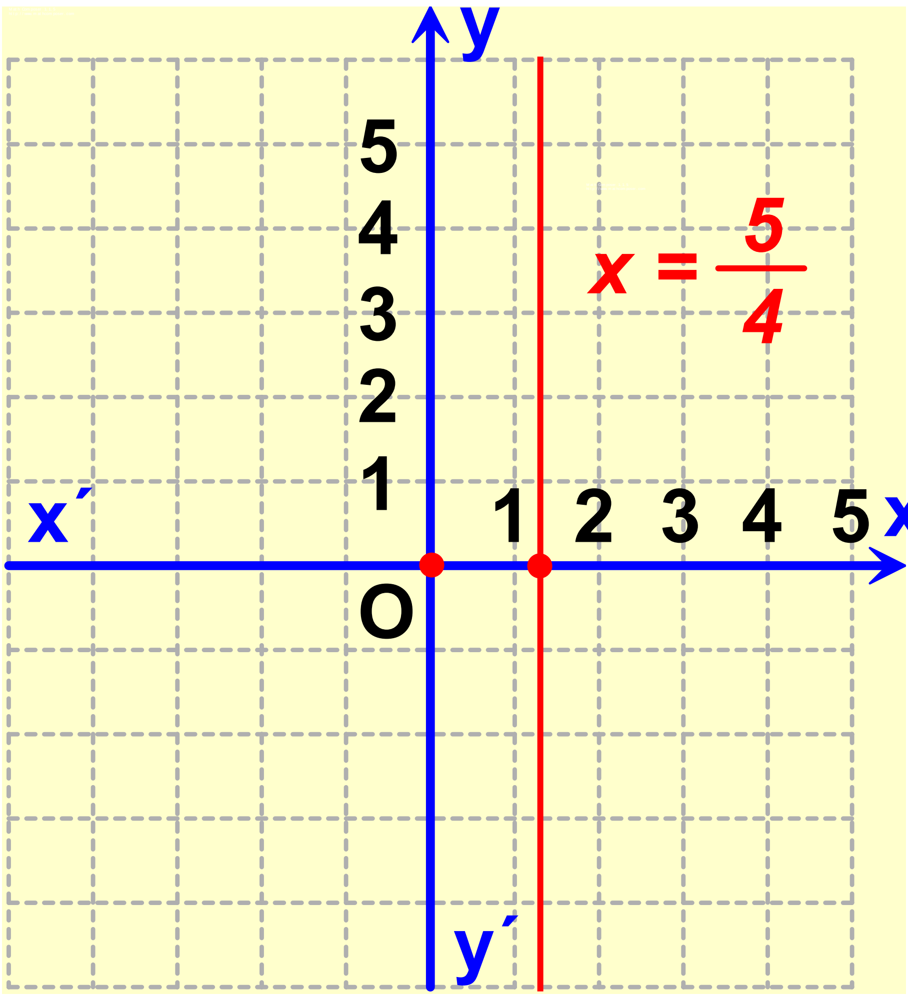
- **Η εξίσωση $12x + 3y = 15$ γράφεται $3y = -12x + 15$ ή $y = -4x + 5$ και παριστάνει ευθεία με κλίση $\alpha = -4$.**



• Η εξίσωση 0x + 3y = 15 γράφεται y = 5 και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x´x. Γενικότερα, η εξίσωση y = κ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x. Η ευθεία y = 0 παριστάνει τον άξονα x'x.



• Η εξίσωση 12x + 0y = 15 γράφεται $x = \frac{15}{2}$ ή $x = \frac{5}{4}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y΄y. Γενικότερα, η εξίσωση x = κ, παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y΄y. Η ευθεία x = 0 παριστάνει τον άξονα y΄y.



Σημεία τομής της ευθείας αx + βy = γ με τους άξονες

► Γνωρίζουμε ότι ο άξονας x´x έχει εξίσωση y = 0.
Επομένως, για να βρούμε το σημείο Α στο οποίο η ευθεία αx + βy = γ, με α ≠ 0 ή β ≠ 0 τέμνει τον άξονα x´x, θέτουμε y = 0 και υπολογίζουμε την τετμημένη του x.

► Γνωρίζουμε ότι ο άξονας y΄y έχει εξίσωση $x = 0$. Επομένως, για να βρούμε το σημείο Β στο οποίο η ευθεία $αx + βy = γ$, με $α \neq 0$ ή $β \neq 0$ τέμνει τον άξονα y΄y, θέτουμε $x = 0$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη του y.

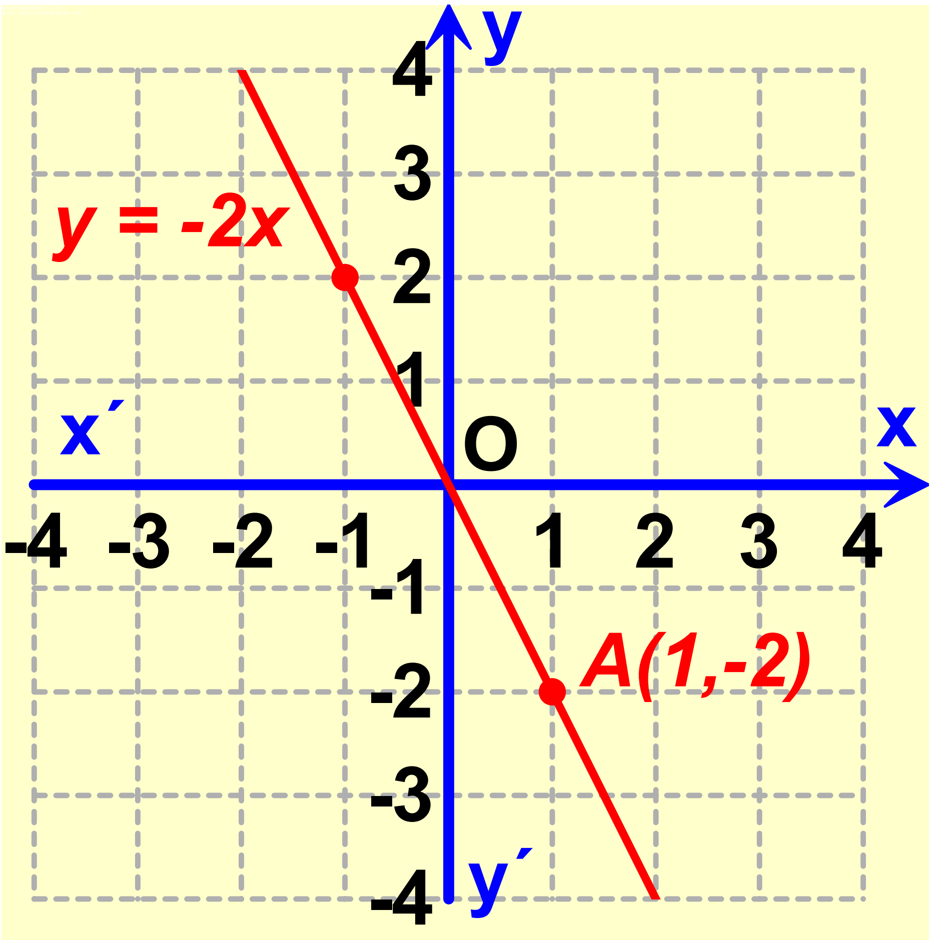
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -2x$, $y = -2x + 3$ και $y = -2x – 3$, όπου x ο πραγματικός αριθμός.

Λύση:

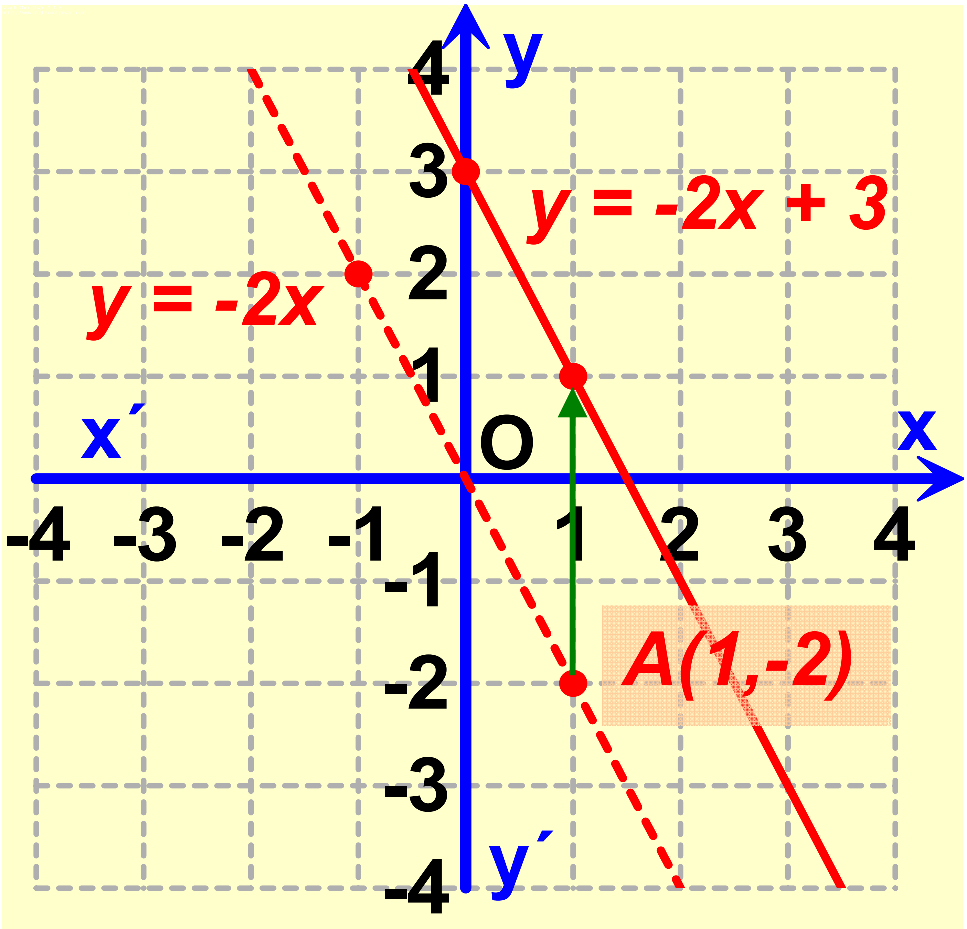
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x$ είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της. Για $x = 1$ είναι $y = -2 \cdot 1 = -2$.

Άρα, διέρχεται και από το σημείο Α με συντεταγμένες (1,-2). Ενώνουμε το Ο με το Α και προεκτείνουμε. Η γραφική παράσταση της y = -2x φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



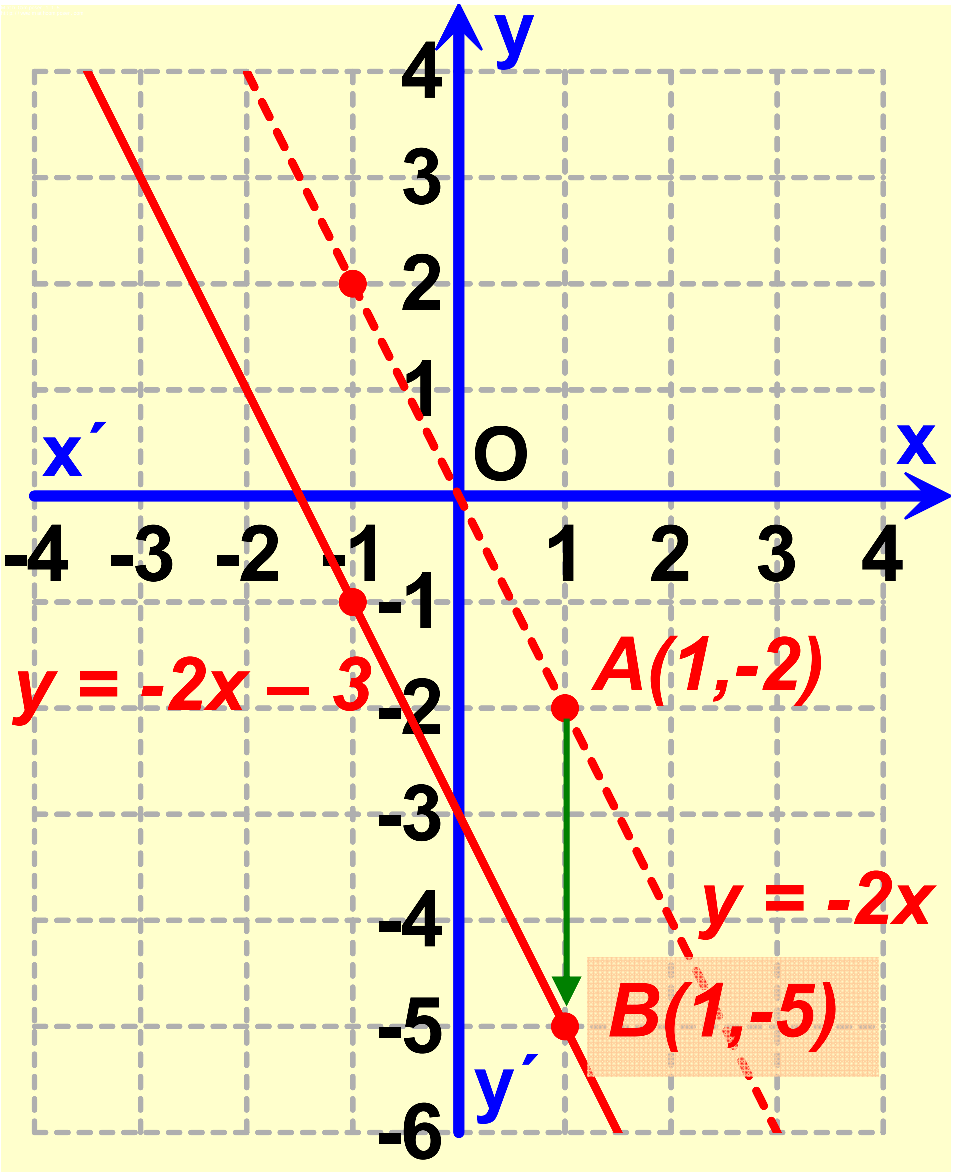
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = -2x + 3 είναι ευθεία παράλληλη με την y = -2x και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, 3). Μεταφέρουμε το σημείο (0, 0)

στο σημείο (0, 3) και το σημείο (1, -2) στο (1, 1). Ενώνουμε τα νέα αυτά σημεία και προεκτείνουμε.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = -2x + 3 φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης **y = -2x – 3** είναι ευθεία παράλληλη με την y = -2x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο

(0, -3). Μεταφέρουμε το σημείο (0, 0) στο σημείο (0, -3) και το σημείο (1, -2) στο (1, -5). Ενώνουμε τα σημεία αυτά και προεκτείνουμε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται η εξίσωση $3x - 4y = 12$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί.
α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες.
β) Να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων.
γ) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να βρείτε την κλίση της ευθείας.

Λύση:

α) **Για τον άξονα y΄y:**

θέτουμε x = 0 στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$3 \cdot 0 - 4y = 12$ **ή** $-4y = 12$

ή $y = \dfrac{12}{-4} = -3$

Άρα, τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α με συντεταγμένες (0, -3).

Για τον άξονα x˙x:

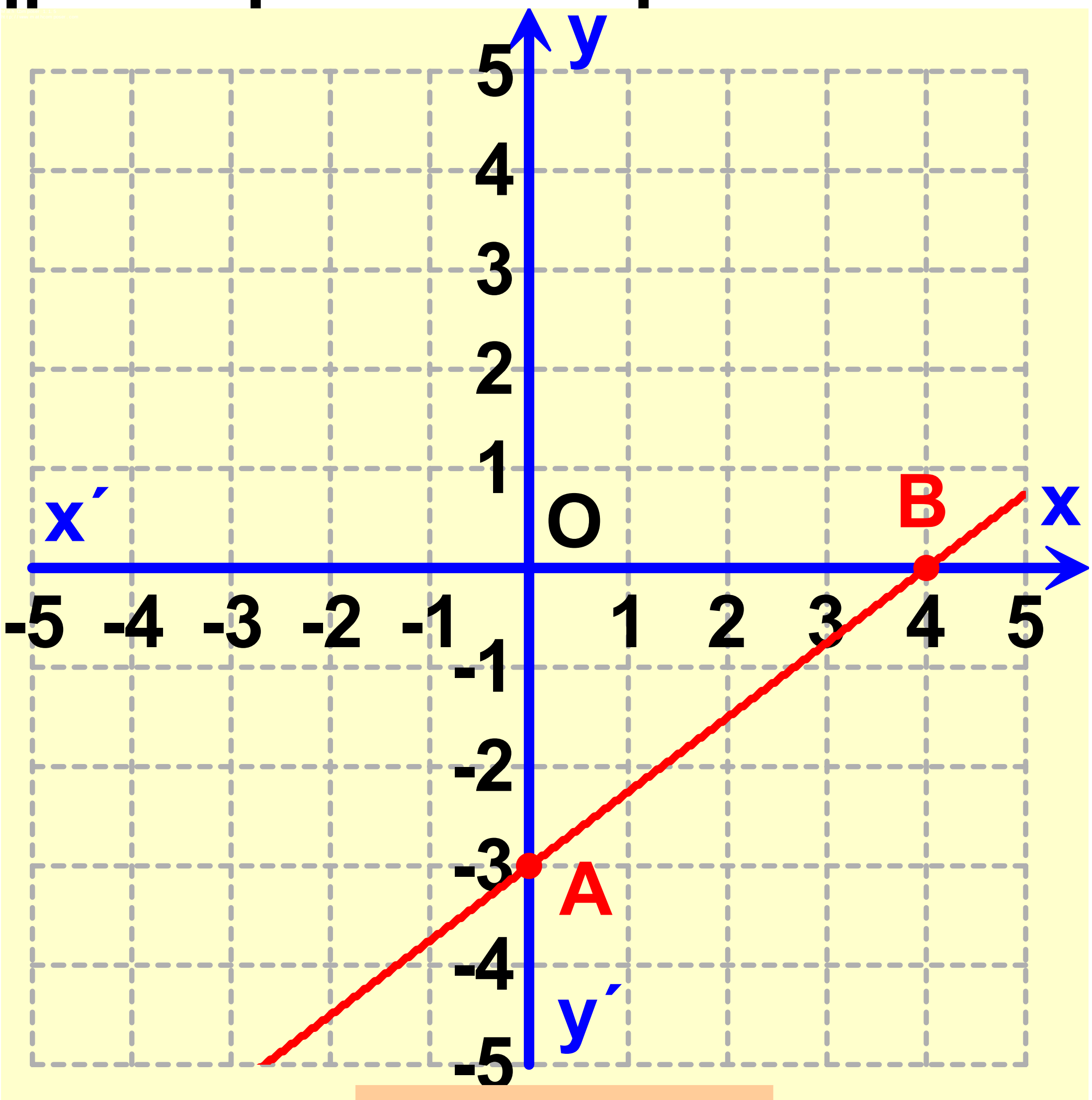
θέτουμε y = 0 στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$3 \cdot x - 4 \cdot 0 = 12$ ή $3x = 12$

ή $x = \dfrac{12}{3} = 4.$

Άρα, τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο B με συντεταγμένες (4, 0).

β) Ενώνουμε τα παραπάνω σημεία προεκτείνουμε.



Η γραφική παράσταση της ευθείας $3x - 4y = 12$ φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

γ) Για να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x, λύνουμε ως προς y τη σχέση $3x - 4y = 12$, δηλαδή:

$-4y = -3x + 12$ ή $y = \frac{-3}{-4}x + \frac{12}{-4}$

ή $y = \frac{3}{4}x - 3$ Η κλίση της ευθείας αυτής είναι $\frac{3}{4}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Η προσγείωση ενός αεροπλάνου

Η ταχύτητα (σε m/s) ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται, από τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος μέχρι να σταματήσει, δίνεται από τη σχέση:

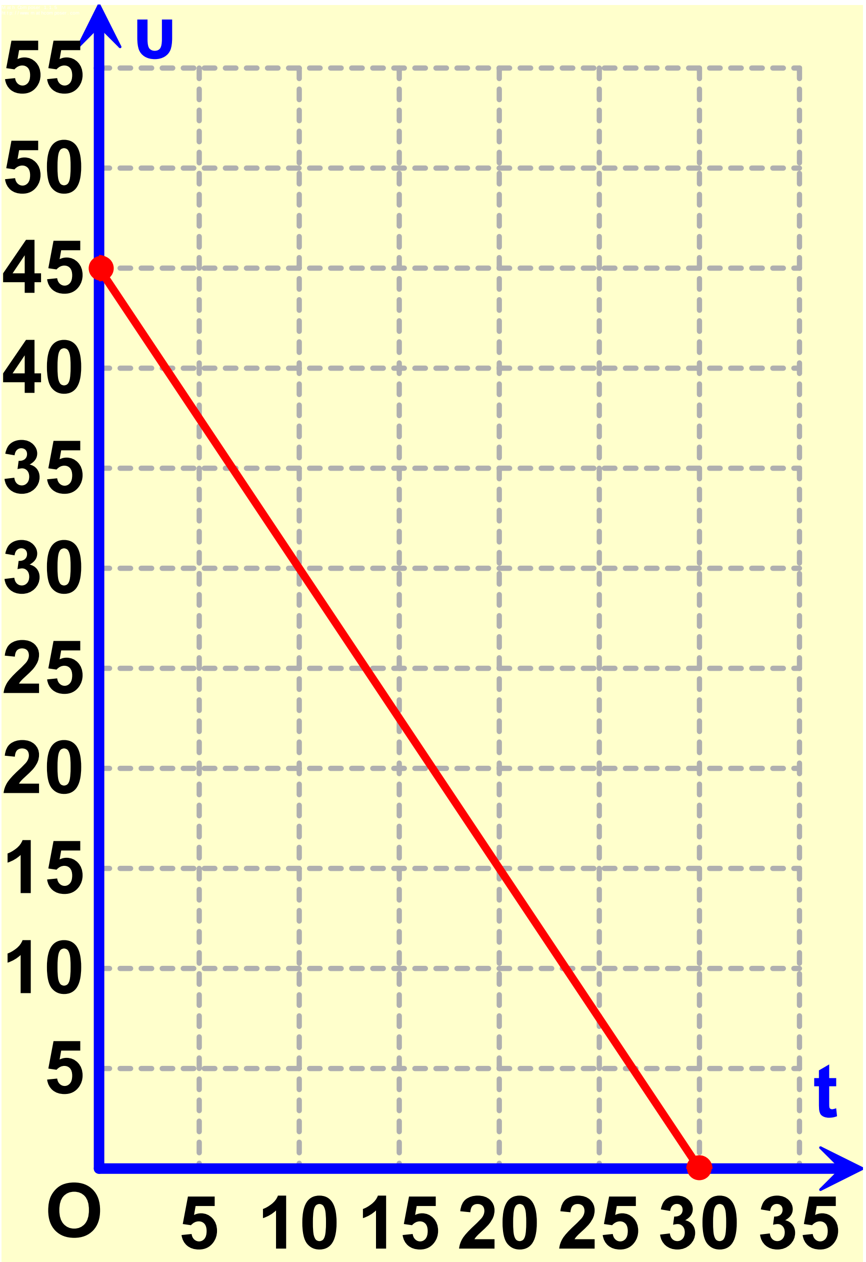
υ = 45 – 1,5 t, όπου t ο χρόνος που πέρασε από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο άγγιξε το έδαφος.
α) Να βρείτε την ταχύτητά του τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος. β) Να βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο και να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητά του υ ως συνάρτηση του χρόνου t.

Λύση:

α) Για t = 0 η ισότητα υ = 45 – 1,5 t δίνει υ = 45 m/s.

β) Τη στιγμή που σταματάει, το αεροπλάνο έχει ταχύτητα 0 m/s. Για την τιμή αυτή του υ, η ισότητα
υ = 45 – 1,5 t γίνεται:
0 = 45 – 1,5 t ή 1,5 t = 45 ή $t = \frac{45}{1,5}$
ή t = 30 (s).
Άρα, οι δυνατές τιμές του χρόνου t είναι 0 < t < 30.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υ = 45 – 1,5 t είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0, 45) και (30, 0).



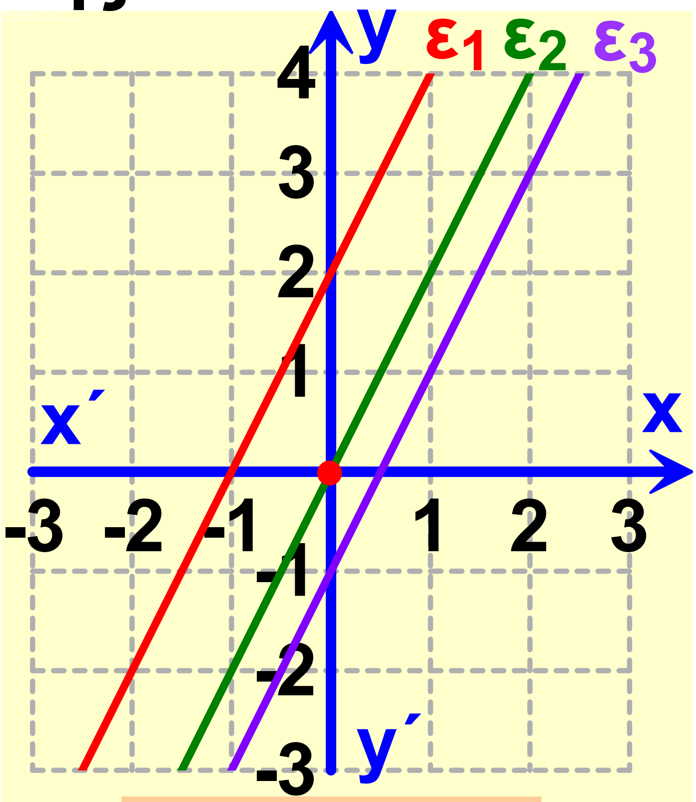
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Η ευθεία $y = 3x$ είναι παράλληλη προς την:

Α	$y = x + 3$	Γ	$y = x - 3$
Β	$y = 3x - 7$	Δ	$y = -3x + 5$

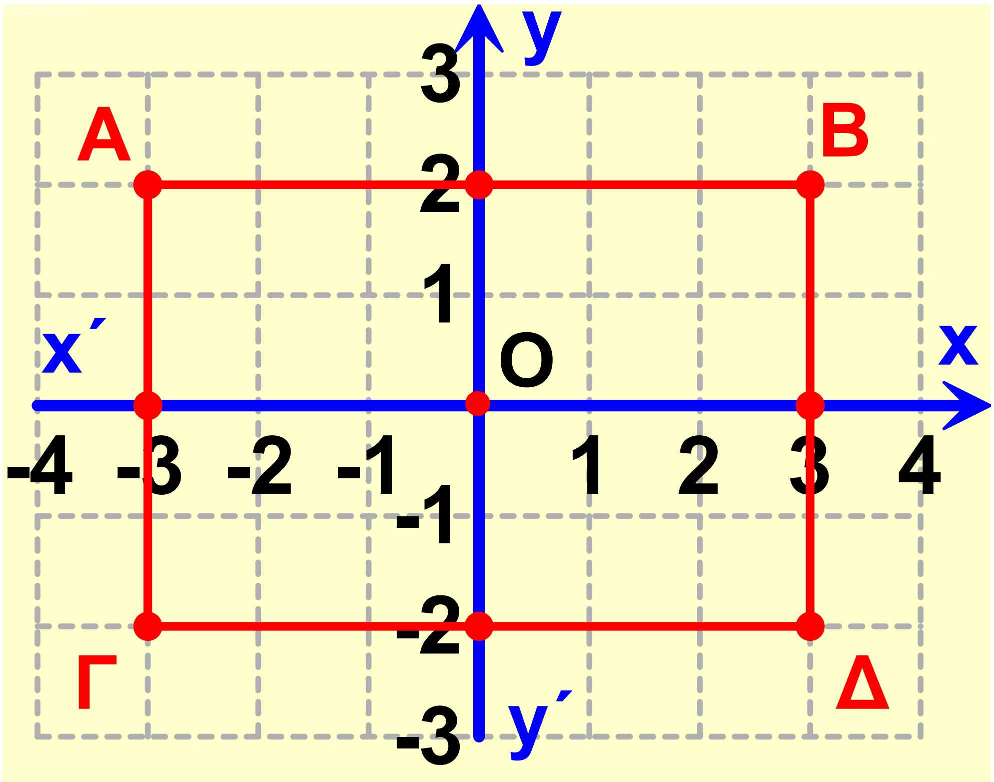
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις τρεις παράλληλες ευθείες της στήλης Β.
Να αντιστοιχίσετε καθεμιά με την εξίσωσή της.



Στήλη Α	Στήλη Β
ε_1	$y = 2x$
ε_2	$y = 2x - 1$
ε_3	$y = 2x + 2$

3 **Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει κέντρο το Ο και οι πλευρές του είναι παράλληλες προς τους άξονες x΄x και y΄y.**
Να αντιστοιχίσετε κάθε πλευρά με την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει.



Πλευρές	Ευθείες
ΑΒ	y = 2
ΑΓ	x = 3
ΓΔ	y = -2
ΒΔ	x = -3

4 Η ευθεία με εξίσωση $4x + y = 4$

		Α	Β	Γ	Δ	Ε
α)	έχει κλίση:	4	-4	1	-1	$\frac{1}{4}$
β)	τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο:	(4,1)	(4,0)	(-4,0)	(1,0)	(0,4)
γ)	τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο:	(0,1)	(0,4)	(4,4)	(0,-4)	(0,-1)

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5 **Μια ευθεία ε τέμνει τους άξονες στα σημεία (3, 0) και (0, 4). Η εξίσωσή της είναι:**

Α	$3x + 4y = 9$
Β	$3x + 4y = 16$
Γ	$4x + 3y = 12$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **Στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις:**

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = \frac{1}{2}x + 2 \;\text{ και }\; y = \frac{1}{2}x - 3$$

2 **Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $y = -3x + 2$, όταν:**

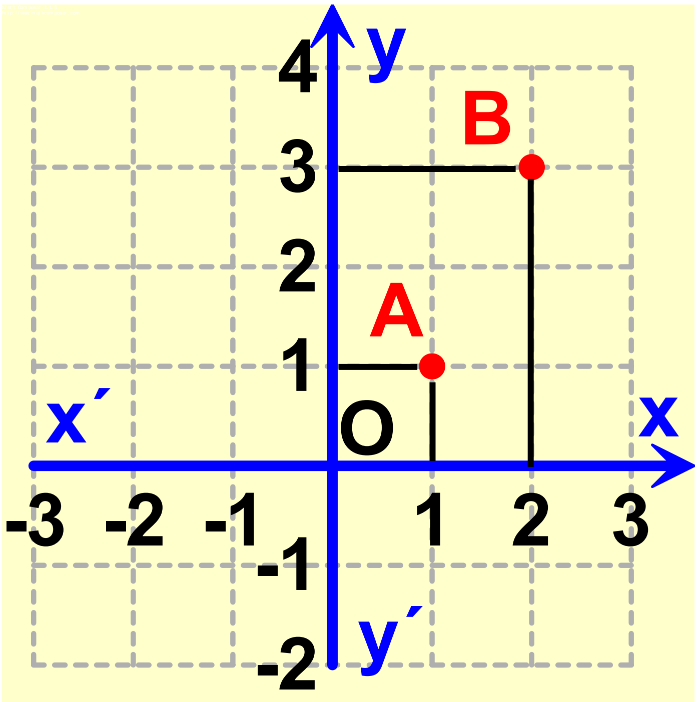
α) ο x είναι πραγματικός αριθμός.

β) $x \geq 0$.

γ) $-2 \leq x \leq 5$.

3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση 2 και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη -3.

4 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία Α(1, 1) και Β(2, 3).
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με $\sqrt{5}$.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση y = 2x – 1 διέρχεται από τα σημεία Α και Β.



5 Όταν χρησιμοποιούμε ταξί, πληρώνουμε 0,5 € για τη σημαία και 0,2 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Να βρείτε τη συνάρτηση που μας δίνει το ποσό y που θα πληρώσουμε για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.

6 Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $2x - 3y = 6$. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες.

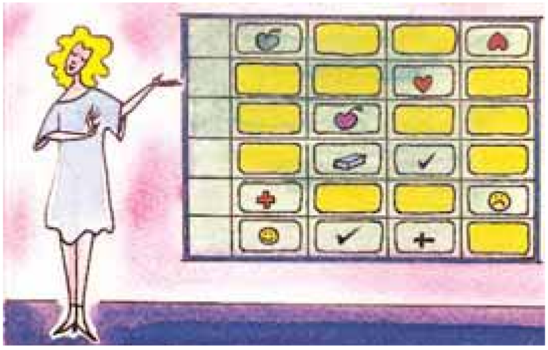
7 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $x + y = 2$.

8 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $y = 2$, $y = 3$, $x = 1$ και $x = -2$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ;
Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;

9 **Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με κόστος 200 € το τεμάχιο.**
Επίσης, πληρώνει 100 € την ημέρα για την ενοικίαση μιας αποθήκης, για να αποθηκεύει τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.
α) Να εκφράσετε το συνολικό ημερήσιο κόστος y του εργοστασίου ως συνάρτηση του αριθμού x των ηλεκτρονικών υπολογιστών που κατασκευάζει ημερησίως.
β) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.

10 **Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι κάθε παίκτης ξεκινάει έχοντας ως δώρο από την εταιρεία παραγωγής 1000 €. Στη συνέχεια, πρέπει να απαντήσει σε 20 ερωτήσεις. Σε κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 100 €,**

ενώ σε κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 50 €. Συμβολίζουμε με x το πλήθος των σωστών απαντήσεων.



α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το πλήθος ω των λανθασμένων απαντήσεων.
β) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το συνολικό κέρδος y του παίκτη.
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση y.

Περιεχόμενα 2ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (συνέχεια από τον 1ο τόμο)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ