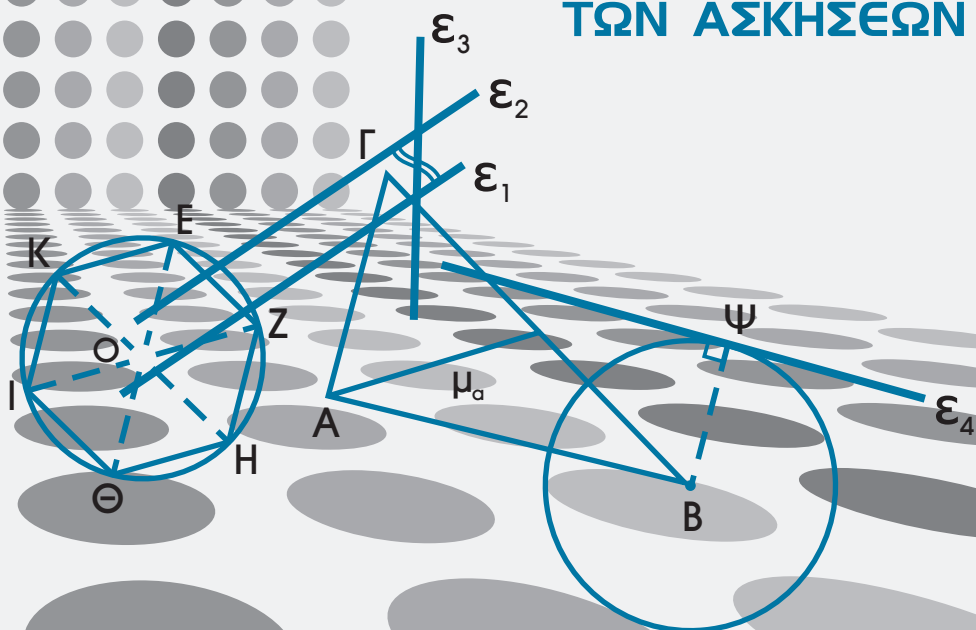


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Β'

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Β΄ ΤΕΥΧΟΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ: ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας

*Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης*

Βλάμος Παναγιώτης

Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος

Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός

Επίκουρος Καθηγητής Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης

Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: Βανδουλάκης Ιωάννης

*Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Λομποσον Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο*

Φιλολογική Επιμέλεια: Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων: Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση: Αλεξοπούλου Καίτη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΚΟΙΝΩΝΙΑ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Αγαπητοί Μαθητές,

το τεύχος που κρατάτε στα χέρια σας περιέχει τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού σας βιβλίου. Αν χρησιμοποιηθεί σωστά μπορεί να αποτελέσει πολύτιμη βοήθεια στην προσπάθειά σας να καταλάβετε τις γεωμετρικές έννοιες που εισάγονται στο βιβλίο σας και να τις χρησιμοποιήσετε δημιουργικά.

Σε καμμία περίπτωση το τεύχος των λύσεων δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στην πρώτη δυσκολία που παρουσιάζει μία άσκηση ή για να καλύψει την "επιμέλεια" ενός μαθητή προς τον καθηγητή του στο σχολείο.

Για να χρησιμοποιήσετε σωστά τις λύσεις των ασκήσεων πρέπει να ακολουθήσετε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία. Αρχικά, προσπαθήστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης. Αν αποτύχετε κάντε μία επανάληψη στην αντίστοιχη θεωρία για να διαπιστώσετε ότι δεν έχετε κενά. Κατόπιν, ξαναπροσπαθήστε την άσκηση διαβάζοντας και την υπόδειξη που βρίσκεται στο τέλος του σχολικού βιβλίου. Αν πάλι δυσκολεύεστε να λύσετε την άσκηση, τότε διαβάστε την ολοκληρωμένη λύση της. Φροντίστε να εντοπίσετε τα κύρια βήματα της λύσης, καθώς και τα κενά που σας οδήγησαν στο να μην αντιμετωπίζετε σωστά την άσκηση. Προσπαθήστε να διορθώσετε τα κενά αυτά και να ξαναλύσετε την άσκηση, χωρίς όμως να επαναλαμβάνετε τη λύση με στείρα απομνημόνευση, αλλά υλοποιώντας τα κύρια βήματά της. Τέλος, δοκιμάστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικό και ίσως καλύτερο τρόπο.

Πρέπει να τονισθεί ότι οι λύσεις είναι προτεινόμενες, με την έννοια ότι είναι δυνατόν και ελπίζουμε να βρεθούν κομψότερες από τους μαθητές.

Σημαντική είναι η προσπάθεια που έχει καταβληθεί, ώστε η κάθε άσκηση να προωθεί συγκεκριμένες αντιλήψεις και συνήθειες στο μαθητή, ενώ το σύνολο των ασκήσεων σε κατηγορία και διαβάθμιση οδηγούν τον μαθητή στην καλλιέργεια συγκεκριμένων ικανοτήτων.

Για να επιτευχθούν οι στόχοι αυτοί, είτε μέσα στη λύση της κάθε άσκησης, είτε μετά την ολοκλήρωσή της, αναγράφεται ο διδακτικός της στόχος, ενώ οι ασκήσεις χωρίστηκαν στις παρακάτω κατηγορίες, δίνοντας φυσικά βαρύτητα στη διαβάθμιση των ασκήσεων κάθε κατηγορίας:

1) Ασκήσεις Εμπέδωσης:

Οι ασκήσεις αυτές εισάγονται αμέσως μετά τη Θεωρία και τις Εφαρμογές, με σκοπό την εμπέδωση των εννοιών από τους μαθητές και τη χρήση τους σε απλές ασκήσεις.

2) Αποδεικτικές Ασκήσεις:

Είναι ασκήσεις που ταιριάζουν στη φύση της Γεωμετρίας, καλλιεργώντας την αποδεικτική διαδικασία στους μαθητές.

3) Σύνθετα θέματα:

Είναι θέματα που συνδυάζουν περισσότερες από μία γεωμετρικές έννοιες ή γνώσεις, είτε από το ίδιο κεφάλαιο, είτε από διαφορετικά, αναδεικνύοντας την κριτική σκέψη και συνδυαστική ικανότητα των μαθητών.

4) Γενικές Ασκήσεις:

Είναι ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας, που παρατίθενται στο τέλος κάθε Κεφαλαίου και απευθύνονται σε μαθητές με ιδιαίτερο ζήλο και αγάπη προς τη Γεωμετρία.

5) Δραστηριότητες:

Είναι αντικείμενο μελέτης ομάδας μαθητών ή και ενός, εφόσον του παρέχεται το κατάλληλο χρονικό διάστημα, ενώ θα πρέπει να δοθεί κάθε δυνατή βοήθεια και υποδείξεις από τον καθηγητή.

Κάθε κεφάλαιο, τέλος, πλαισιώνεται από ερωτήσεις κατανόησης που συντελούν στη σωστή επανάληψη και καλύτερη οργάνωση της ύλης.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11	85
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12	111
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13	137

7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Όταν έχουμε αναλογίες της μορφής $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots$ θέτουμε $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

(**Ασκήσεις:** § 7.6 Εμπέδωσης 1, 3, Αποδεικτικές 1)

- Αν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή σε τρίγωνο ή τραπέζιο προκύπτουν παράλληλες ευθείες.

(**Ασκήσεις:** § 7.7 Εμπέδωσης 5, 6, Αποδεικτικές 3, 6)

- Αν για δύο τμήματα α , β ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ ή $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{x}$, όπου x κατάλληλο τμήμα $\left(\text{ή } \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} \text{ με } x = y \right)$ τότε $\alpha = \beta$.

(**Ασκήσεις:** § 7.7 Εμπέδωσης 7, Αποδεικτικές 7)

- Σε τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ αν οι ημιευθείες $A\hat{D}$, $A\hat{E}$ είναι αντίστοιχα η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\hat{\Gamma}$ τα Δ , E είναι συζυγή αρμονικά των B και Γ .

(**Ασκήσεις:** § 7.8-7.9 Εμπέδωσης 7, Σύνθετα 1)

§ 7.1-7.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έστω ότι $\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \lambda$ τότε $\hat{A} = 4\lambda$, $\hat{B} = 3\lambda$ και $\hat{\Gamma} = 2\lambda$.

Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $9\lambda = 180^\circ \Leftrightarrow \lambda = 20^\circ$.

Άρα $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

2. Έστω $\hat{\phi}$ η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$. Τότε:

$$\frac{\hat{\omega}}{\hat{\phi}} = \frac{1}{3} \text{ ή } \hat{\phi} = 3\hat{\omega}. \text{ Αλλά } \hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ \text{ ή } 4\hat{\omega} = 180^\circ \text{ ή } \hat{\omega} = 45^\circ.$$

3. Έστω ότι $\frac{\alpha}{6} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3} = \lambda$ τότε $\alpha = 6\lambda$, $\beta = 4\lambda$ και $\gamma = 3\lambda$.

Αλλά $\alpha + \beta + \gamma = 65\text{cm}$, οπότε $13\lambda = 65\text{cm} \Leftrightarrow \lambda = 5\text{cm}$.

Άρα $\alpha = 30\text{cm}$, $\beta = 20\text{cm}$, $\gamma = 15\text{cm}$.

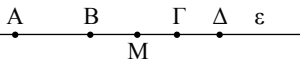
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi}}{3} = \frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{4} = \lambda$ τότε $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2\lambda$, $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 3\lambda$, $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 4\lambda$.

Αλλά $\hat{A}_{\varepsilon\xi} + \hat{B}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 360^\circ$ (4 ορθές), οπότε $9\lambda = 360^\circ \Leftrightarrow \lambda = 40^\circ$.

Άρα $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 80^\circ$, $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 120^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 160^\circ$.

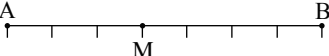
Επομένως $\hat{A} = 100^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 20^\circ$.

2. 

$$\text{Πρέπει } \frac{MA}{M\Delta} = \frac{MB}{M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA + M\Delta} = \frac{MB}{MB + M\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA}{20} = \frac{MB}{12} \Leftrightarrow 12MA = 20MB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12(MB + AB) = 20MB \Leftrightarrow 8MB = 12AB \Leftrightarrow MB = 9.$$

3.  Έστω σημείο Μ του ΑΒ τέτοιο ώστε:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Τότε } \frac{MA}{MA+MB} = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{3}{7} \Rightarrow MA = \frac{3}{7} AB.$$

Διαιρούμε το ΑΒ = α σε 7 ίσα μέρη και το άκρο του τρίτου από την αρχή τμήματος είναι το ζητούμενο σημείο.

§ 7.7

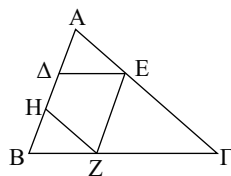
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Έχουμε: ΔΕ//ΒΓ: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta E}{\Delta \Gamma}$ (1)

$$EZ//AB: \frac{\Delta E}{\Delta \Gamma} = \frac{BZ}{Z\Gamma} \quad (2)$$

$$\text{και } ZH//\Delta\Gamma: \frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{HB}{HA} \quad (3)$$

$$\text{Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι: } \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}.$$



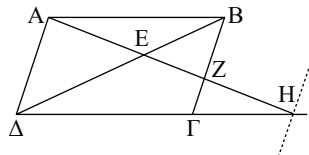
- ii) Έχουμε: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow \frac{\Delta A}{\Delta A + \Delta B} = \frac{HB}{HA + HB} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\Delta A}{AB} = \frac{HB}{AB} \Leftrightarrow \Delta A = HB.$

2. i) Έχουμε: ΖΓ//ΑΔ: $\frac{AZ}{AH} = \frac{\Delta \Gamma}{\Delta H} = \frac{AB}{\Delta H}$
 (ΔΓ = ΑΒ).

$$\text{ii) Έχουμε: } \Delta\Delta//BZ: \frac{\Delta E}{EZ} = \frac{\Delta E}{EB} \text{ και}$$

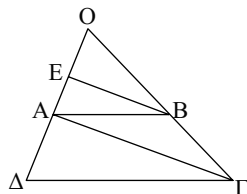
$$AB//\Delta H: \frac{EH}{AE} = \frac{\Delta E}{EB}.$$

$$\text{Άρα } \frac{\Delta E}{EZ} = \frac{EH}{AE} \Leftrightarrow AE^2 = EZ \cdot EH.$$



3. Αρκεί $\frac{O\Delta}{O\Lambda} = \frac{O\Lambda}{O\Xi}$. Έχουμε: ΑΒ//ΓΔ: $\frac{O\Delta}{O\Lambda} = \frac{O\Gamma}{O\Xi}$

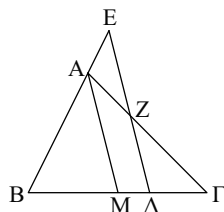
$$\text{και } BE//\Delta\Gamma: \frac{O\Lambda}{O\Xi} = \frac{O\Gamma}{O\Xi}. \text{ Άρα: } \frac{O\Delta}{O\Lambda} = \frac{O\Lambda}{O\Xi}.$$



4. Έχουμε: $AM \parallel \Delta E$: $\frac{AE}{AB} = \frac{M\Delta}{BM}$

και $\Delta Z \parallel AM$: $\frac{AZ}{A\Gamma} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$.

Άρα: $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{A\Gamma}$ ($BM = M\Gamma$) ή $\frac{AE}{AZ} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

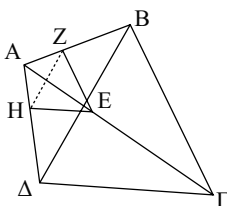


5. Αρκεί: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Delta}$

(αντίστροφο Θαλή στο τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$).

Έχουμε: $ZE \parallel B\Gamma$: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AE}{E\Gamma}$

και $EH \parallel \Delta\Gamma$: $\frac{AH}{H\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma}$. Άρα: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AE}{E\Gamma}$.

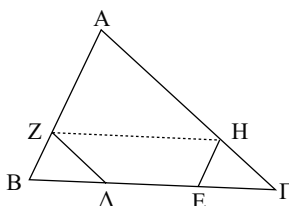


6. Αρκεί: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$ (αντίστροφο Θαλή στο

τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$). Έχουμε:

$Z\Delta \parallel A\Gamma$: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$ και $EH \parallel AB$: $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{BE}{E\Gamma}$.

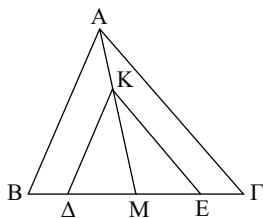
Άρα $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$ γιατί $B\Delta = E\Gamma$ και $BE = \Delta\Gamma$.



7. Έχουμε: $\Delta K \parallel AB$: $\frac{M\Delta}{MB} = \frac{MK}{MA}$

και $KE \parallel A\Gamma$: $\frac{ME}{M\Gamma} = \frac{MK}{MA}$.

Άρα $\frac{M\Delta}{MB} = \frac{ME}{M\Gamma}$, οπότε $M\Delta = ME$ ($MB = M\Gamma$).



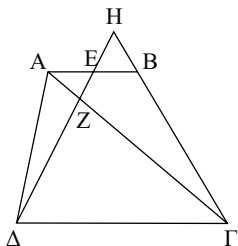
8. Αρκεί: $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{H\Delta}{HE}$.

Έχουμε: $AE \parallel \Delta\Gamma$: $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{AE}{\Delta\Gamma}$

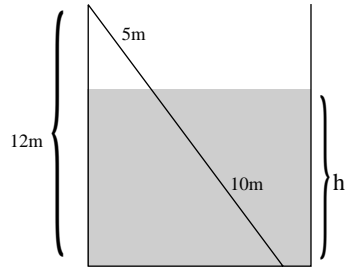
και $EB \parallel \Delta\Gamma$: $\frac{H\Delta}{HE} = \frac{EB}{\Delta\Gamma}$.

Άρα: $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{H\Delta}{HE}$ ($AE = EB$),

οπότε τα Z, H είναι συζυγή αρμονικά των Δ, E.



9. Έχουμε $B\Delta // ΓΕ$: $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{A E}$,
 οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων
 παίρνουμε $\frac{h}{10 \text{ m}} = \frac{12 \text{ m}}{15 \text{ m}} \Leftrightarrow h = 8 \text{ m}$.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω ότι το Γ είναι μεταξύ των O και B .

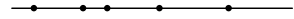
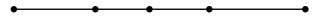
$$\text{Τότε: } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} > 1. \text{ Αλλά } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} > 1.$$

Επομένως $\Delta A > \Delta B$.

Έστω ότι το Γ είναι μεταξύ των O και A .

$$\text{Τότε: } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} < 1. \text{ Αλλά } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} < 1.$$

Επομένως $\Delta A < \Delta B$.

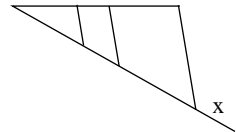


2. Έχουμε $4x = 6y = 3\omega \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{\omega}{4}$.

Παίρνουμε αυθαίρετα ευθύγραμμο τμήμα μ .
 Φέρουμε τυχαία ημιευθεία Ax και παίρνουμε σ' αυτή τα διαδοχικά τμήματα $A\Gamma = 3\mu$, $\Gamma\Delta = 2\mu$, $\Delta E = 4\mu$. Ενώνουμε το E με το B και φέρουμε $\Gamma Z // BE$ και $\Delta H // BE$. Τότε:

$$\frac{AZ}{A\Gamma} = \frac{ZH}{\Gamma\Delta} = \frac{HB}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{AZ}{3\mu} = \frac{ZH}{2\mu} = \frac{HB}{4\mu}.$$

Άρα $AZ = x$, $ZH = y$ και $HB = \omega$.



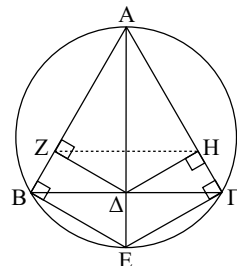
3. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$

(αντίστροφο Θαλή στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$).

Επειδή AE διάμετρος είναι $\hat{A}B E = \hat{A}\Gamma E = 90^\circ$.

Άρα $BE // \Delta Z$, οπότε $\frac{AZ}{ZB} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$ και $\Gamma E // \Delta H$,

οπότε $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$. Επομένως $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$.

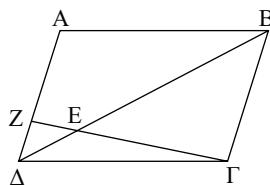


4. Έχουμε $\Delta Z // B\Gamma$: $\frac{\Delta E}{EB} = \frac{\Delta Z}{B\Gamma}$ ή $\frac{\Delta E}{EB} = \frac{\Delta Z}{A\Delta}$

($B\Gamma = A\Delta$) ή $\frac{\Delta E}{\Delta E + EB} = \frac{\Delta Z}{\Delta Z + A\Delta}$ ή

$\frac{\Delta E}{EB} = \frac{\Delta Z}{\Delta Z + \Delta Z + AZ}$ ή $\frac{1}{5} = \frac{\Delta Z}{2\Delta Z + AZ}$,

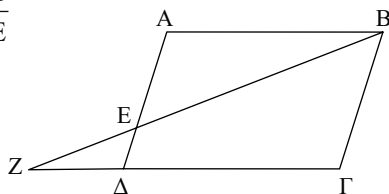
οπότε $AZ = 3\Delta Z$.



5. Έχουμε: $\Delta E // B\Gamma$: $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{ZB}{ZE} \Leftrightarrow \frac{\Delta A}{\Delta E} = \frac{ZB}{ZE}$

($B\Gamma = A\Delta$) και $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = \frac{EB}{ZE}$.

Άρα $\frac{\Delta A}{\Delta E} - \frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = \frac{ZB - EB}{ZE} = \frac{ZE}{ZE} = 1$.



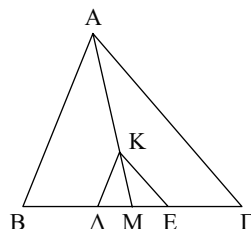
6. i) Έχουμε $\Delta K // AB$: $\frac{M\Delta}{\Delta B} = \frac{MK}{AK}$.

Αλλά $M\Delta = \frac{\Delta E}{2} = \frac{B\Delta}{2}$, οπότε $\frac{MK}{AK} = \frac{1}{2}$.

Άρα K βαρύκεντρο του $\hat{A}B\hat{\Gamma}$.

ii) Έχουμε: $ME = \frac{\Delta E}{2} = \frac{E\Gamma}{2}$, οπότε $\frac{ME}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$.

Άρα $\frac{MK}{AK} = \frac{ME}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$, οπότε $KE // A\Gamma$.



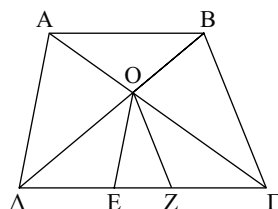
7. Έχουμε: $OE // A\Delta$: $\frac{\Delta E}{\Delta \Gamma} = \frac{AO}{A\Gamma}$ (1) και

$OZ // B\Gamma$: $\frac{Z\Gamma}{\Delta \Gamma} = \frac{BO}{B\Delta}$ (2)

Αλλά $AB // \Gamma\Delta$, οπότε $\frac{AO}{A\Gamma} = \frac{BO}{B\Delta}$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$\frac{\Delta E}{\Delta \Gamma} = \frac{Z\Gamma}{\Delta \Gamma} \Leftrightarrow \Delta E = Z\Gamma$.



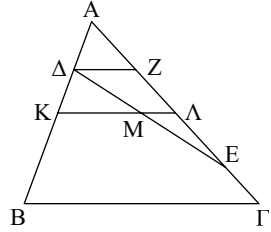
Σύνθετα Θέματα

1. Έστω Κ, Λ μέσα των ΑΒ, ΑΓ.
Φέρουμε ΔΖ//ΚΛ//ΒΓ.

Τότε

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΖ}{ΖΓ}, \text{ οπότε } \frac{ΑΖ}{ΖΓ} = \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ΑΖ}{ΑΖ + ΖΓ} = \frac{ΕΓ}{ΕΓ + ΕΑ} \Leftrightarrow \frac{ΑΖ}{ΑΓ} = \frac{ΕΓ}{ΑΓ} \Leftrightarrow ΑΖ = ΕΓ.$$

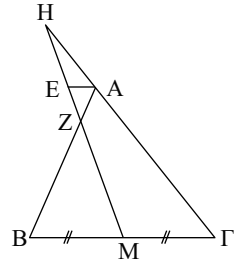


Επομένως στο τρίγωνο ΔΖΕ το Λ είναι το μέσο του ΖΕ και ΚΛ//ΔΖ. Άρα Μ μέσο του ΔΕ, οπότε Κ, Λ, Μ συνευθειακά.

2. Φέρουμε ΑΕ//ΒΓ. Τότε $\frac{ΗΑ}{ΗΓ} = \frac{ΑΕ}{ΜΓ}$ και

$$\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΑΕ}{ΜΒ}. \text{ Άρα } \frac{ΗΑ}{ΗΓ} = \frac{ΖΑ}{ΖΒ} \text{ (} ΜΒ = ΜΓ \text{)}$$

$$\text{ή } ΖΑ \cdot ΗΓ = ΗΑ \cdot ΖΒ.$$



3. Έστω ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά

$$\text{των Α, Β. Τότε: } \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } ΒΕ//ΟΑ \text{ είναι } \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΟΑ}{ΒΕ} \quad (2) \text{ και}$$

$$\text{επειδή } ΒΖ//ΟΑ \text{ είναι } \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΟΑ}{ΒΖ} \quad (3)$$

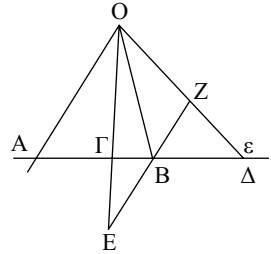
Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$$\frac{ΟΑ}{ΒΕ} = \frac{ΟΑ}{ΒΖ} \Leftrightarrow ΒΕ = ΒΖ.$$

Αντίστροφα: Έστω $ΒΕ = ΒΖ$

$$\text{τότε από (2), (3) προκύπτει ότι } \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}.$$

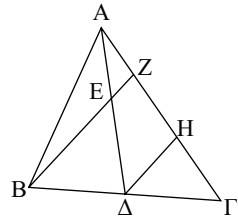
Άρα τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β.



4. Έχουμε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = λ$ και $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = κ$.

$$\text{Φέρουμε } ΔΗ//ΒΖ. \text{ Τότε: } \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΖΗ}{ΗΓ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ΖΗ}{ΗΓ} = λ \Leftrightarrow \frac{ΖΗ}{ΖΗ + ΗΓ} = \frac{λ}{λ + 1} \Leftrightarrow \frac{ΖΗ}{ΖΓ} = \frac{λ}{λ + 1} \quad (1)$$



$$\text{Επίσης } \frac{AE}{E\Delta} = \frac{AZ}{ZH} \Leftrightarrow \frac{AZ}{ZH} = \kappa \quad (2).$$

$$\text{Από (1), (2) προκύπτει ότι: } \frac{AZ}{ZH} \cdot \frac{ZH}{Z\Gamma} = \frac{\kappa\lambda}{\lambda+1} \Leftrightarrow \frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{\kappa\lambda}{\lambda+1}.$$

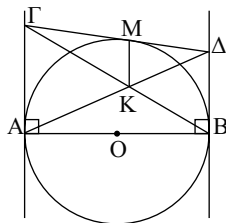
5. Επειδή $\Delta B \perp AB$, $A\Gamma \perp AB$ αρκεί $MK \parallel \Delta B \parallel A\Gamma$.

$$\text{Έχουμε: } A\Gamma \parallel \Delta B: \frac{K\Gamma}{KB} = \frac{A\Gamma}{\Delta B} \quad (1)$$

Αλλά $A\Gamma = \Gamma M$ και $\Delta B = M\Delta$ (2) (εφαπτόμενα τμήματα).

$$\text{Από (1), (2) προκύπτει ότι: } \frac{K\Gamma}{KB} = \frac{\Gamma M}{M\Delta}, \text{ οπότε}$$

$MK \parallel \Delta B$ (αντίστροφο Θαλή στο τρίγωνο $B\hat{A}\Gamma$).



§ 7.8-7.9

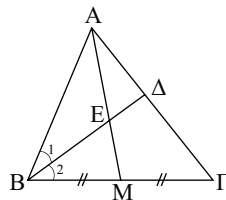
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έχουμε $A\hat{B}M$ (BE διχοτόμος):

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AB}{BM} = \frac{AB}{\frac{AB}{2}} = 2 \frac{AB}{B\Gamma} \quad (1)$$

$$\text{και } A\hat{B}\Gamma \text{ (B}\Delta \text{ διχοτόμος): } \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} \quad (2)$$

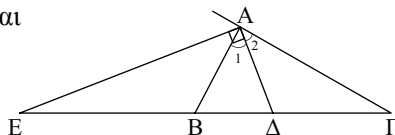
$$\text{Από (1), (2) προκύπτει ότι } \frac{AE}{EM} = 2 \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}.$$



2. Έχουμε $\Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{10 \cdot 6}{9+6} = \frac{60}{15} = 4$ και

$$EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{10 \cdot 6}{9-6} = \frac{60}{3} = 20.$$

$$\text{Άρα } \Delta E = \Delta B + EB = 24.$$



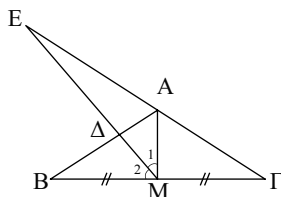
3. Έχουμε $A\hat{M}B$ (MΔ διχοτόμος):

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} \quad (1) \text{ και } A\hat{M}\Gamma$$

$$\text{(M}\epsilon \text{ εξωτερική διχοτόμος): } \frac{EA}{E\Gamma} = \frac{MA}{M\Gamma} \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } MB = M\Gamma \quad (3)$$

$$\text{Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι } \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{EA}{E\Gamma} \Leftrightarrow EA \cdot \Delta B = E\Gamma \cdot \Delta A.$$



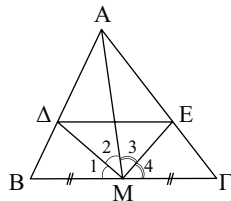
4. Έχουμε $\hat{A}MB$ ($M\Delta$ διχοτόμος):

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AM}{MB} \text{ και } \hat{A}M\Gamma \text{ (} ME \text{ διχοτόμος):}$$

$$\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AM}{M\Gamma} \cdot \text{Άρα } \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \text{ (} MB = M\Gamma \text{),}$$

οπότε $\Delta E // B\Gamma$

(αντίστροφο Θαλή στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$).



5. Επειδή $\Delta\Delta$, $B\text{E}$ και ΓZ διχοτόμοι είναι:

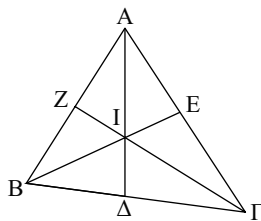
$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}, \frac{E\Gamma}{EA} = \frac{B\Gamma}{AB} \text{ και } \frac{Z\Delta}{ZB} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}.$$

$$\text{Άρα } \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{Z\Delta}{ZB} = \frac{AB}{A\Gamma} \cdot \frac{B\Gamma}{AB} \cdot \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = 1.$$

Αν $A\text{K}$, $B\text{L}$ και ΓM οι εξωτερικές διχοτόμοι του

τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$ ισχύει: $\frac{KB}{K\Gamma} \cdot \frac{A\Gamma}{A\Delta} \cdot \frac{MA}{MB} = 1$. Η

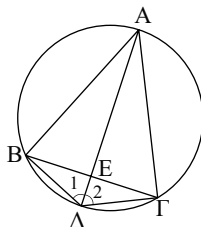
απόδειξη είναι όμοια.



6. Επειδή $AB = A\Gamma$ έχουμε $\widehat{AB} = \widehat{A\Gamma}$, οπότε

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Άρα στο τρίγωνο $B\hat{\Delta}\Gamma$ (ΔE διχοτόμος):

$$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow EB \cdot \Delta\Gamma = E\Gamma \cdot \Delta B.$$



7. Έχουμε $O\hat{A}\Gamma = O\hat{E}\Gamma$ και $O\hat{B}\Delta = O\hat{E}\Delta$,

οπότε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

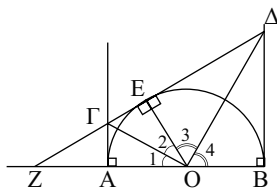
Άρα στο τρίγωνο $O\hat{E}Z$

η $O\Gamma$ είναι εσωτερική διχοτόμος

και η $O\Delta$ εξωτερική διχοτόμος της \hat{O} .

Επομένως τα Γ, Δ είναι συζυγή

αρμονικά των E, Z .



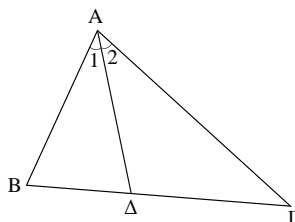
8. Έστω $AB = 20\text{m}$, $A\Gamma = 36\text{m}$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

$$\text{Τότε } \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \text{ (1).}$$

Από την (1) προκύπτει ότι $\Delta B < \Delta\Gamma$.

Άρα θα είναι $\Delta\Gamma - \Delta B = 12\text{m}$ (2).

Επομένως



$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma - \Delta B} = \frac{5}{9-5} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{\Delta B}{12 \text{ m}} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \Delta B = 15 \text{ m},$$

οπότε $\Delta \Gamma = 27 \text{ m}$ και $B\Gamma = \Delta B + \Delta \Gamma = 42 \text{ m}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έχουμε $O \hat{A} \Gamma$ (OB διχοτόμος):

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{OA}{O\Gamma} \quad (1) \text{ και } O \hat{B} \Delta$$

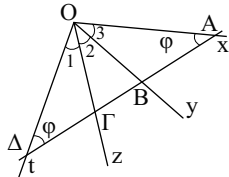
(OA εξωτερική διχοτόμος, γιατί $OA \perp O\Gamma$):

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{O\Delta}{O\Gamma} \quad (2)$$

Αλλά $O \hat{A} B = O \hat{\Gamma} \Delta$ ($OA = O\Delta$,

$\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{\phi}$, $\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 45^\circ$). Άρα $OB = O\Gamma$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = B\Gamma \cdot A\Delta$.



2. Έχουμε:

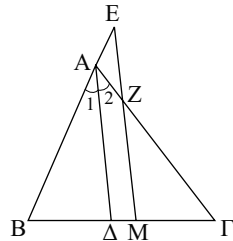
$$A\Delta // EM: \frac{BE}{AB} = \frac{BM}{B\Delta} \Leftrightarrow BE = \frac{AB \cdot BM}{B\Delta} \quad (1) \text{ και}$$

$$ZM // A\Delta: \frac{\Gamma Z}{A\Gamma} = \frac{\Gamma M}{\Gamma \Delta} \Leftrightarrow A\Gamma \cdot \Gamma M = \Gamma Z \cdot \Gamma \Delta \quad (2)$$

Επίσης $A \hat{B} \Gamma$ ($A\Delta$ διχοτόμος):

$$\frac{B\Delta}{\Gamma \Delta} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma \Delta} \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) επειδή $BM = \Gamma M$ προκύπτει ότι $BE = \Gamma Z$.



3. i) Έχουμε $A \hat{B} \Delta$ (BI διχοτόμος):

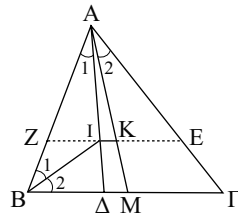
$$\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AB}{B\Delta} = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\text{Αλλά } B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}, \text{ οπότε } \frac{AI}{I\Delta} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}.$$

ii) α) Επειδή $\beta + \gamma = \alpha$ είναι $\frac{AI}{I\Delta} = 2$.

$$\text{Αλλά } K \text{ βαρύκεντρο, οπότε } \frac{AK}{KM} = 2. \text{ Επομένως } \frac{AI}{I\Delta} = \frac{AK}{KM},$$

οπότε $IK // B\Gamma$ (αντίστροφο Θαλή στο τρίγωνο $A\Delta M$).



β) Έχουμε $ZE // B\Gamma$, οπότε

$$\frac{ZE}{B\Gamma} = \frac{AK}{AM} \Leftrightarrow \frac{ZE}{\alpha} = \frac{\frac{2}{3}AM}{AM} \Leftrightarrow \frac{ZE}{\alpha} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow ZE = \frac{2\alpha}{3} \Leftrightarrow ZE = \frac{\beta + \gamma}{3}$$

(αφού $\beta + \gamma = 2\alpha$).

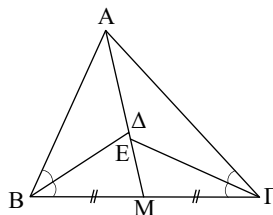
4. Έχουμε $A\hat{B}M$ ($B\Delta$ διχοτόμος):

$$\frac{A\Delta}{\Delta M} = \frac{AB}{BM} \text{ και } A\hat{\Gamma}M \text{ (}\Gamma E \text{ διχοτόμος):}$$

$$\frac{AE}{EM} = \frac{A\Gamma}{\Gamma M}. \text{ Άρα:}$$

$$\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} = \frac{AB + A\Gamma}{\frac{B\Gamma}{2}} \text{ (γιατί } BM = \Gamma M = \frac{B\Gamma}{2}) =$$

$$= 2 \frac{AB + A\Gamma}{B\Gamma} > 2 \text{ διότι } AB + A\Gamma > B\Gamma \text{ (τριγωνική ανισότητα).}$$



5. i) Έχουμε $O\hat{\Delta}\Gamma$ (OZ διχοτόμος): $\frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{O\Delta}{O\Gamma}$ (1) και

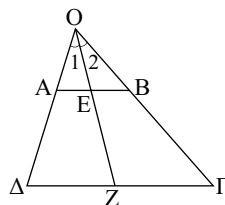
$$AB//\Gamma\Delta: \frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} \text{ (2)}$$

Από (1), (2) προκύπτει

$$\text{ότι } \frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow Z\Delta \cdot B\Gamma = Z\Gamma \cdot A\Delta.$$

ii) Όμοια $O\hat{A}B$ (OE διχοτόμος): $\frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB}$

$$\text{και } AB//\Gamma\Delta: \frac{OA}{OB} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}. \text{ Άρα } \frac{EA}{EB} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow EA \cdot B\Gamma = EB \cdot A\Delta.$$

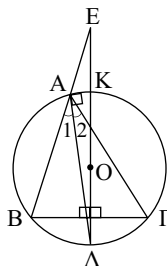


Σύνθετα Θέματα

1. Επειδή $K\Lambda$ διάμετρος έχουμε $K\hat{A}\Lambda = 90^\circ$ (1).

Επίσης, αφού $K\Lambda \perp B\Gamma$, το Λ είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (2)

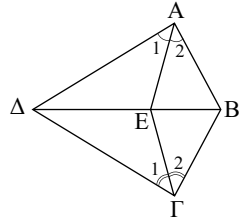
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι οι AK και $A\Lambda$ είναι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας \hat{A} του τριγώνου $E\hat{A}Z$. Άρα τα E, Z είναι συζυγή αρμονικά των K, Λ .



2. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{A} και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται σε σημείο E της ΒΔ τότε:

$$\frac{ΕΔ}{ΕΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \quad \text{και} \quad \frac{ΕΔ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ}.$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ} \Leftrightarrow ΑΒ \cdot ΓΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ.$$



Αντίστροφα:

Αν έχουμε $ΑΒ \cdot ΓΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$ ή $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ}$ θα δείξουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{A} και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στη ΒΔ. Έστω ότι η διχοτόμος της \hat{A} τέμνει τη ΒΔ στο E.

$$\text{Τότε:} \quad \frac{ΕΔ}{ΕΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}, \quad \text{οπότε από την υπόθεση} \quad \frac{ΕΔ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ}.$$

Άρα η ΓΕ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ (στο τρίγωνο ΒΓΔ).

3. Έστω Μ το ζητούμενο σημείο. Αν φέρουμε τη διχοτόμο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΒ και την προεκτείνουμε τέμνει τον κύκλο στο E. Επειδή $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ το E θα είναι το μέσο του τόξου \widehat{ANB} .

$$\text{Επίσης} \quad \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Άρα τόσο το Δ, όσο και το E προσδιορίζονται.

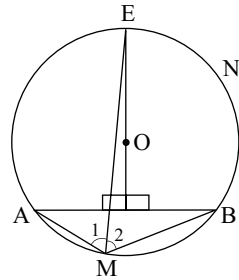
Κατασκευή: Διαιρούμε τη χορδή ΑΒ σε τμήματα

$$ΑΔ, ΔΒ \text{ τέτοια ώστε } \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Φέρουμε κάθετη στο μέσο της ΑΒ, η οποία διχοτομεί το τόξο \widehat{ANB} στο E.

Η ΕΔ προεκτεινόμενη ορίζει το σημείο Μ του τόξου \widehat{AB} , τέτοιο ώστε $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{\mu}{\nu}$.

Πράγματι $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{\mu}{\nu}$ εκ κατασκευής (αφού ΜΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΜΒ).

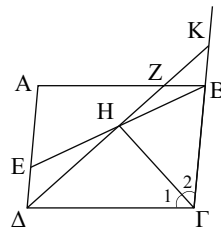


4. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει την ΒΓ στο Κ.

$$\text{Αρκεί} \quad \frac{ΗΚ}{ΗΔ} = \frac{ΚΓ}{ΔΓ}. \quad \text{Έχουμε: } ΔΕ // ΒΚ,$$

$$\text{οπότε} \quad \frac{ΗΚ}{ΗΔ} = \frac{ΚΒ}{ΔΕ} = \frac{ΚΒ}{ΖΒ} \quad (1) \quad (ΔΕ = ΖΒ).$$

$$\text{Επίσης } ΖΒ // ΔΓ, \text{ οπότε } \frac{ΚΓ}{ΚΒ} = \frac{ΔΓ}{ΖΒ} \quad \text{ή} \quad \frac{ΚΒ}{ΖΒ} = \frac{ΚΓ}{ΔΓ} \quad (2)$$

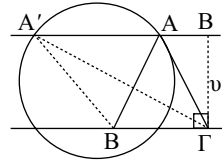


Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{HK}{H\Delta} = \frac{K\Gamma}{\Delta\Gamma}$,

οπότε η ΓΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

5. Η άγνωστη κορυφή Α του τριγώνου πρέπει:

i) Να απέχει από τη ΒΓ απόσταση ν , άρα θα ανήκει σε ευθεία παράλληλη της ΒΓ και σε απόσταση ίση με ν από αυτή.



ii) Να ικανοποιεί τη σχέση $\frac{AB}{AG} = \frac{\mu}{\nu}$, άρα θα ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΔΕ, όπου τα Δ και Ε διαιρούν το ΒΓ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$.

Κατασκευή: Ορίζουμε την $B\Gamma = \alpha$. Φέρουμε $\Gamma K \perp B\Gamma$ ώστε $\Gamma K = \nu$ και από το Κ φέρουμε $Kx \parallel B\Gamma$. Διαιρούμε το ΒΓ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ και βρίσκουμε τα Δ και Ε.

Τέλος γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΔΕ οπότε: Αν το ύψος ν είναι μικρότερο από την ακτίνα του κύκλου έχουμε δύο λύσεις (τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B\Gamma$ του σχήματος), αν το ύψος ν είναι ίσο με την ακτίνα μια λύση ενώ αν δεν είναι μεγαλύτερο καμμία λύση.

Γενικές Ασκήσεις

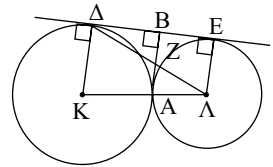
1. Έχουμε $K\Delta \perp \Delta E$, $\Delta E \perp \Delta E$.

Άρα $K\Delta \parallel AB \parallel \Delta E$. Επομένως $AZ \parallel K\Delta$:

$$\frac{AZ}{K\Delta} = \frac{\Delta A}{K\Lambda} \Leftrightarrow \frac{AZ}{R} = \frac{R}{R+\rho} \Leftrightarrow AZ = \frac{R \cdot \rho}{R+\rho} \quad (1)$$

και $ZB \parallel \Delta E$: $\frac{ZB}{\Delta E} = \frac{\Delta Z}{\Delta \Lambda} = \frac{K\Lambda}{K\Lambda}$ ή $\frac{ZB}{\rho} = \frac{R}{R+\rho} \Leftrightarrow ZB = \frac{R \cdot \rho}{R+\rho} \quad (2).$

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $AB = AZ + ZB = \frac{2R \cdot \rho}{R+\rho}$.

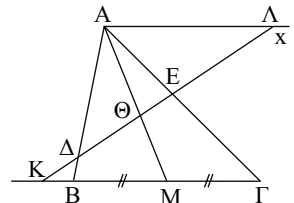


2. Φέρουμε $Ax \parallel B\Gamma$. Αν η ΔΕ τέμνει τις ΒΓ, Αx στα Κ, Λ αντίστοιχα έχουμε:

$A\Lambda \parallel KB$: $\frac{\Delta B}{\Delta A} = \frac{KB}{A\Lambda} \quad (1)$ και

$A\Lambda \parallel K\Gamma$: $\frac{E\Gamma}{E\Lambda} = \frac{K\Gamma}{A\Lambda} \quad (2)$

Από (1), (2) προκύπτει ότι:



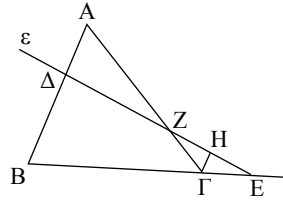
$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA} = \frac{KB + K\Gamma}{\Lambda\Lambda} = \frac{KB + KM + M\Gamma}{\Lambda\Lambda} = \frac{2KM}{\Lambda\Lambda} = 2 \frac{\Theta M}{\Lambda\Theta}$$

(γιατί $\frac{KM}{\Lambda\Lambda} = \frac{\Theta M}{\Lambda\Theta}$) $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ (αφού Θ βαρύκεντρο).

3. i) Φέρουμε $\Gamma H // AB$.

Τότε: $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Gamma H}$ και $\frac{Z\Gamma}{ZA} = \frac{\Gamma H}{\Delta A}$, οπότε

$$\frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = \frac{\Delta B}{\Gamma H} \cdot \frac{\Gamma H}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1.$$



Αντίστροφα: Θεωρούμε τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και Δ, E, Z σημεία των ευθειών $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα (έστω Δ, Z εσωτερικά των $AB, \Gamma A$ και E εξωτερικό, του $B\Gamma$) τέτοια ώστε: $\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1$. Τότε τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

Απόδειξη:

Η ευθεία ΔZ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο E' (γιατί αν $\Delta Z // B\Gamma$ τότε $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{ZA}{Z\Gamma}$,

οπότε από την υπόθεση θα είναι $EB = E\Gamma$ άτοπο). Για το τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$

και την ευθεία $\Delta E'$ έχουμε (Θεωρ. Μενελάου) $\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{E'B}{E'\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1$.

Αλλά από υπόθεση είναι: $\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1$, οπότε $\frac{E'B}{E'\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$.

Άρα τα E, E' ταυτίζονται (γιατί διαιρούν εξωτερικά το $B\Gamma$ στον ίδιο λόγο).

Παρατηρήσεις:

1) Από τα σημεία Δ, E, Z το ένα ή και τα τρία θα είναι σημεία των προεκτάσεων των πλευρών (Θεώρημα Pasch).

2) Αν π.χ. Δ, E, Z τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma A$ τότε

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1 \text{ χωρίς τα } \Delta, E, Z \text{ να είναι συνευθειακά.}$$

ii) Για το τρίγωνο $\hat{A}B\Delta$ και την ευθεία $Z\Gamma$ έχουμε

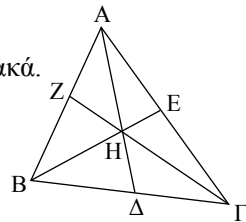
(Θεωρ. Μενελάου) $\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta} \cdot \frac{H\Delta}{HA} = 1$ (1)

Όμοια για το τρίγωνο $\hat{A}\Gamma\Delta$ και την ευθεία EB

είναι $\frac{HA}{H\Delta} \cdot \frac{B\Delta}{B\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} = 1$ (2)

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$



Αντίστροφα: Θεωρούμε τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και Δ, E, Z , σημεία των **πλευρών** του $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα. Αν ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$ τότε οι ευθείες $A\Delta, BE$ και ΓZ συντρέχουν. Η απόδειξη όμοια με το (i) (έστω H η τομή των $BE, \Gamma Z$ και Δ' η τομή της AH με την $B\Gamma$. Τότε...)

Σχόλιο:

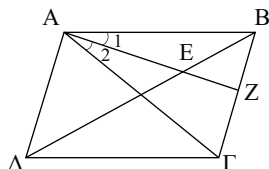
Αν από τα σημεία Δ, E, Z το ένα είναι εσωτερικό και τα άλλα δύο εξωτερικά (στις προεκτάσεις) των πλευρών, τότε οι ευθείες $A\Delta, BE, \Gamma Z$ συντρέχουν ή είναι παράλληλες.

4. Επειδή $A\Delta // BZ$ έχουμε: $\frac{EA}{EZ} = \frac{A\Delta}{BZ}$ (1).

Επίσης $\hat{A}B\Gamma$ (AZ διχοτόμος): $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{Z\Gamma}{BZ}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{EA}{EZ} - \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\Delta - Z\Gamma}{BZ} = \frac{B\Gamma - Z\Gamma}{BZ} = \frac{BZ}{BZ} = 1$$



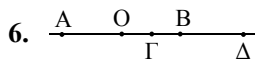
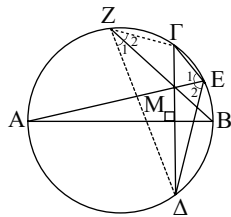
5. Επειδή $AB \perp \Gamma\Delta$ έχουμε $\widehat{A\Gamma} = \widehat{A\Delta}$

και $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B\Delta}$ οπότε $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ και $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$.

Άρα: $\Gamma \hat{E} \Delta$ (EM διχοτόμος): $\frac{M\Gamma}{M\Delta} = \frac{E\Gamma}{E\Delta}$ (1)

και $\Gamma \hat{Z} \Delta$ (ZM διχοτόμος): $\frac{M\Gamma}{M\Delta} = \frac{Z\Gamma}{Z\Delta}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{E\Gamma}{E\Delta} = \frac{Z\Gamma}{Z\Delta} \Leftrightarrow E\Gamma \cdot Z\Delta = E\Delta \cdot Z\Gamma$



i) Έχουμε: $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \Leftrightarrow \frac{O\Gamma + OA}{OB - O\Gamma} = \frac{O\Delta + OA}{O\Delta - OB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{O\Gamma + OA}{OA - O\Gamma} = \frac{O\Delta + OA}{O\Delta - OA} (OA = OB) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow OA^2 = O\Gamma \cdot O\Delta.$

ii) Έχουμε: $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB - A\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Delta - AB} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2ΑΓ \cdot ΑΔ = ΑΒ \cdot ΑΔ + ΑΒ \cdot ΑΓ \Leftrightarrow \frac{2}{ΑΒ} = \frac{1}{ΑΓ} + \frac{1}{ΑΔ}.$$

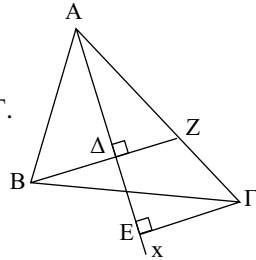
Σημείωση:

Τα Γ, Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο.

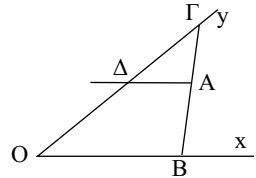
7. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ζ τότε επειδή

$$ΒΖ // ΓΕ \text{ έχουμε: } \frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΑΖ}{ΑΓ} \text{ ή } \frac{ΑΖ}{ΑΓ} = \frac{\mu}{\nu} \text{ ή } ΑΖ = \frac{\mu}{\nu} ΑΓ.$$

Επομένως το Ζ προσδιορίζεται και η Αx ορίζεται ως κάθετη της ΒΖ από το Α.



8. α) **Ανάλυση:** Έστω ΒΓ η ζητούμενη ευθεία και ότι η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Δ. Τότε το Δ είναι σταθερό (ορίζεται) και επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ το Δ είναι το μέσο του ΟΓ. Άρα ορίζεται και το Γ.



Κατασκευή: Φέρουμε από το Α παράλληλη στην Οx, βρίσκουμε το Δ και ορίζουμε το Γ πάνω στην Οy ώστε $ΟΔ = ΟΓ$. Η ζητούμενη ευθεία είναι η ΑΓ (που τέμνει την Οx στο Β).

Η **απόδειξη** είναι απλή.

β) Έχουμε:

$$ΑΒ = \frac{2}{3} ΒΓ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΒΓ - ΑΒ} = \frac{2}{3 - 2} \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = 2.$$

$$\text{Φέρουμε πάλι } ΑΔ // Οx, \text{ οπότε } \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΟΔ}{ΔΓ} \text{ ή } \frac{ΟΔ}{ΔΓ} = 2 \text{ ή } ΔΓ = \frac{ΟΔ}{2}.$$

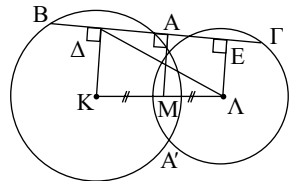
Άρα ορίζεται το σημείο Γ και συνεχίζουμε όπως στο (α).

γ) Όμοια έχουμε

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΟΔ}{ΔΓ} = \frac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow ΔΓ = \frac{\nu}{\mu} ΟΔ.$$

Άρα το ΔΓ κατασκευάζεται. Η συνέχεια όπως στο (α).

9. α) **Ανάλυση:** Έστω ΒΓ η ζητούμενη ευθεία ώστε $ΑΒ = ΑΓ$. Φέρουμε τα αποστήματα ΚΔ, ΛΕ, οπότε $ΑΔ = ΑΕ$. Επειδή $ΚΔ // ΛΕ$ αν Μ το μέσο του ΚΛ τότε, από το αντίστροφο του Θαλή, θα είναι $ΑΜ // ΚΔ // ΛΕ$. Άρα $ΑΜ \perp ΒΓ$, οπότε η ΒΓ κατασκευάζεται.



Κατασκευή: Ορίζουμε το Μ ως μέσο του ΚΛ και γράφουμε ευθεία κάθετη στην ΑΜ στο Α, που τέμνει τους κύκλους στα Β και Γ.

Απόδειξη: Φέρουμε τα αποστήματα ΚΔ, ΛΕ, οπότε ΚΔ//ΑΜ//ΛΕ.

$$\text{Άρα } \frac{MK}{ML} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow AD = AE \text{ (αφού } MK = ML) \Rightarrow AB = AG.$$

β) Ανάλογα με το (α) ορίζουμε το σημείο Μ το οποίο διαιρεί εσωτερικά την ΚΛ σε λόγο $\frac{MK}{ML} = \frac{3}{4}$ και γράφουμε ευθεία κάθετη στην ΑΜ στο Α, που τέμνει τους κύκλους στα Β και Γ.

10. Έχουμε $\hat{A}B\Delta$ (ΒΙ διχοτόμος):

$$\frac{IA}{I\Delta} = \frac{AB}{B\Delta} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}.$$

$$\text{Άρα } \frac{IA}{I\Delta} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \text{ (1) όμοια}$$

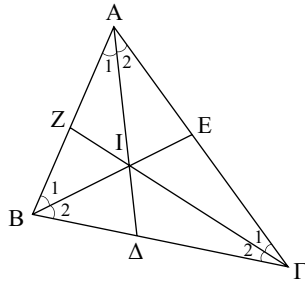
$$\frac{IB}{IE} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \text{ (2) και}$$

$$\frac{I\Gamma}{IZ} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \text{ (3)}$$

Από (1), (2), (3) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{IA}{I\Delta} + \frac{IB}{IE} + \frac{I\Gamma}{IZ} = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) \geq 6$$

(γιατί το άθροισμα δύο αντίστροφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2).



8

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Για να είναι όμοια δυο τρίγωνα αρκεί να ισχύει ένα από τα παρακάτω:
 - i) Να έχουν 2 γωνίες ίσες μία προς μία. **(Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 1).
 - ii) Να έχουν δυο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες. **(Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 2).
 - iii) Να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. **(Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 3).
 - Για να είναι όμοια δύο κυρτά πολύγωνα πρέπει να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές ίσες. **(Ασκήσεις:** Αποδεικτικές 2, Σύνθετα 1).
 - Με τη χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθυγράμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα (Εφαρμογή 2 § 8.2). **(Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 4, Αποδεικτικές 1).
- Σχόλιο:** Στην άσκηση 4, (Εμπέδωσης) υπολογίζουμε το ύψος ενός δέντρου, μετρώντας τη σκιά του. Αρχαίοι συγγραφείς αναφέρουν ότι με τον τρόπο αυτό ο Θαλής υπολόγισε το ύψος των πυραμίδων.

§ 8.1-8.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma}$ έχουν δύο γωνίες ίσες ($\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma}$ κοινή), άρα είναι όμοια.

ii) Αφού τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma}$ είναι όμοια έχουμε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma \cdot \Delta E = AB \cdot E\Gamma.$$

2. i) Έχουμε $A\Delta = \frac{1}{3}AB \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$ και

$$\Gamma E = \frac{2}{3}A\Gamma, \text{ οπότε } AE = \frac{1}{3}A\Gamma \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}.$$

Επομένως τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E}$ είναι όμοια γιατί έχουν και τη γωνία \hat{A} κοινή.

ii) Αφού τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E}$ είναι όμοια, έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}, \text{ οπότε } B\Gamma = 3\Delta E.$$

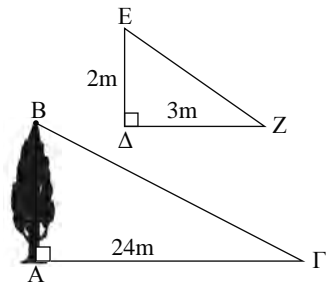
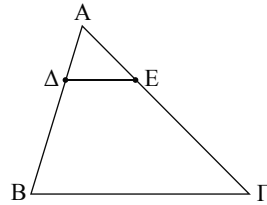
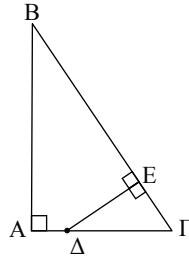
3. Αν α' , β' και γ' είναι οι πλευρές μετά τη διαστολή, από την εκφώνηση προκύπτει ότι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{1}{15}\alpha \Leftrightarrow \alpha' = \frac{16}{15}\alpha, \quad \beta' = \beta + \frac{1}{15}\beta \Leftrightarrow \beta' = \frac{16}{15}\beta \text{ και}$$

$$\gamma' = \gamma + \frac{1}{15}\gamma \Leftrightarrow \gamma' = \frac{16}{15}\gamma. \text{ Άρα } \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} \left(= \frac{16}{15} \right).$$

Επομένως το τρίγωνο με πλευρές α' , β' και γ' είναι όμοιο προς το αρχικό, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. Άρα το τρίγωνο και μετά τη διαστολή θα παραμείνει ορθογώνιο, αφού το αρχικό τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

4. Η ακτίνα $B\Gamma$ του ήλιου, το ύψος AB και η σκιά $A\Gamma$ του δέντρου σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Το ίδιο ισχύει για την ακτίνα EZ , τη ράβδο DE και τη σκιά της ΔZ . Επειδή τόσο οι κατακόρυφες AB και DE , όσο και οι ακτίνες του ήλιου $B\Gamma$ και EZ είναι παράλληλες, θα είναι $\hat{B} = \hat{E}$ (οξείες γωνίες με παράλληλες πλευρές). Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$ είναι όμοια, οπότε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.



Με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε:

$$\frac{AB}{2m} = \frac{24m}{3m} \Leftrightarrow AB = 16m.$$

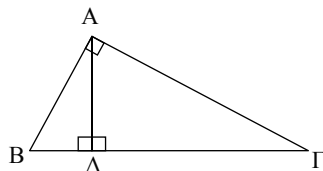
5. i) Τα τρίγωνα $\hat{A}B\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι όμοια (ορθογώνια και $\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).

$$\text{Άρα } \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta B}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma.$$

- ii) και iii) Τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι όμοια ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, \hat{B} κοινή).

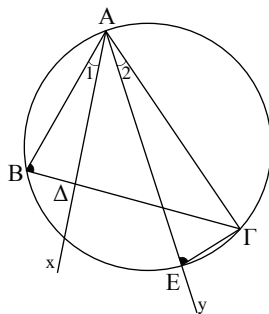
$$\text{Άρα } \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}, \text{ οπότε } \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$$

$$\text{και } \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot B\Gamma.$$



6. Έχουμε τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Delta}$ όμοιο με τρίγωνο $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B} = \hat{E}$ γιατί βαίνουν στο τόξο AΓ).

$$\text{Άρα } \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow A\Delta \cdot AE = AB \cdot A\Gamma.$$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

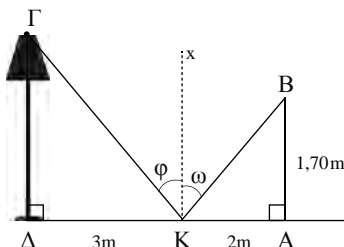
1. Επειδή $\varphi = \omega$ θα είναι και $\hat{\Delta}\hat{K}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{K}\hat{B}$ (συμπληρωματικές ίσων γωνιών).

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $\hat{\Delta}\hat{K}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{K}\hat{B}$ είναι όμοια,

$$\text{οπότε: } \frac{\Delta\Gamma}{AB} = \frac{\Delta K}{AK}.$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων

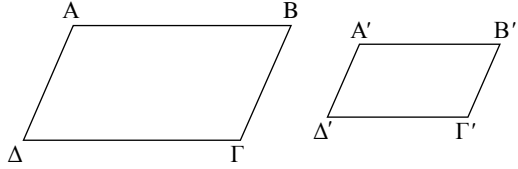
$$\text{προκύπτει ότι: } \frac{\Delta\Gamma}{1,7m} = \frac{3m}{2m} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{5,1}{2}m \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2,55m.$$



2. i) Έστω τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$
και $A'B'\Gamma'\Delta'$

$$\text{με } \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\text{και } \hat{A} = \hat{A}'.$$



Επειδή $B\Gamma = A\Delta$, $B'\Gamma' = A'\Delta'$, $\Delta\Gamma = AB$ και $\Delta'\Gamma' = A'B'$ θα είναι

$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} \quad (1)$$

Επίσης, επειδή $\hat{\Gamma} = \hat{A}$ και $\hat{\Gamma}' = \hat{A}'$ θα είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$, οπότε και $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$ (2) ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

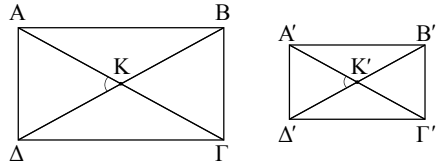
Από (1) και (2) προκύπτει ότι τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι όμοια.

- ii) Επειδή $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$ σύμφωνα με το (I) αρκεί να αποδείξουμε

$$\text{ότι } \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $K\hat{A}\Delta$

και $K'\hat{A}'\Delta'$ είναι όμοια
(αφού $\hat{K} = \hat{K}'$).

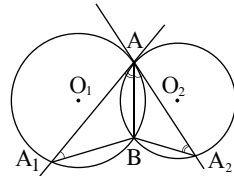


$$\text{Άρα } \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{KA}{K'A'} \quad (1). \text{ Το ίδιο ισχύει για τα τρίγωνα } K\hat{A}B \text{ και } K'\hat{A}'B'.$$

$$\text{Άρα } \frac{AB}{A'B'} = \frac{KA}{K'A'} \quad (2). \text{ Από (1) και (2) προκύπτει ότι } \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

3. Τα τρίγωνα $BA_1\hat{A}$ και $BA_2\hat{A}$ είναι όμοια,
γιατί $\hat{A}_1 = B\hat{A}A_2$ και $\hat{A}_2 = B\hat{A}A_1$
(γωνίες από χορδή και εφαπτόμενη).

$$\text{Άρα } \frac{AB}{BA_2} = \frac{BA_1}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BA_1 \cdot BA_2.$$

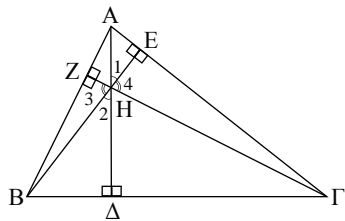


4. Έχουμε τρίγωνο $H\hat{A}E$ όμοιο με τρίγωνο
 $H\hat{B}\Delta$ ($\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$, $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$).

$$\text{Άρα } \frac{H\Delta}{HE} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow H\Delta \cdot HA = HB \cdot HE \quad (1)$$

Επίσης τρίγωνο $H\hat{B}Z$ όμοιο με τρίγωνο
 $H\hat{E}\Gamma$ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, $\hat{H}_3 = \hat{H}_4$).

$$\text{Άρα } \frac{HB}{H\Gamma} = \frac{HZ}{HE} \Leftrightarrow HB \cdot HE = H\Gamma \cdot HZ \quad (2)$$



Από (1), (2) προκύπτει ότι $HB \cdot HA = HB \cdot HE = HG \cdot HZ$.

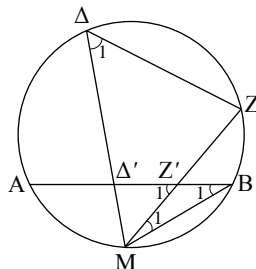
5. Έχουμε $\hat{Z}'_1 = \hat{M}_1 + \hat{B}_1$ (εξωτερική στο $M\hat{B}Z'$)

$$\hat{Z}'_1 = \frac{\widehat{BZ}}{2} + \frac{\widehat{MA}}{2} = \frac{\widehat{BZ}}{2} + \frac{\widehat{MB}}{2} = \frac{\widehat{MZ}}{2} = \hat{\Delta}_1.$$

Άρα τρίγωνο $M\hat{\Delta}Z$ όμοιο με τρίγωνο

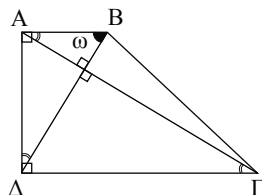
$M\hat{\Delta}'Z'$ (\hat{M} κοινή, $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}'_1$),

$$\text{οπότε } \frac{M\Delta'}{MZ} = \frac{MZ'}{M\Delta} \Leftrightarrow M\Delta \cdot M\Delta' = MZ \cdot MZ'.$$



6. Επειδή το ύψος είναι το $A\Delta$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$.
Αν $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \omega$, τότε $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 90^\circ - \omega$
και $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{A} = 90^\circ - \omega$, οπότε τα τρίγωνα $A\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}$ είναι όμοια,

$$\text{άρα: } \frac{AB}{\Delta A} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \quad \text{ή} \quad A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta.$$



Σύνθετα Θέματα

1. Θεωρούμε τα τραπέζια $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και $EZH\Theta$

$$(EZ \parallel H\Theta) \text{ με } \frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H}$$

$$\text{και } \hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{Z}.$$

Έστω $AB > \Gamma\Delta$, οπότε θα είναι

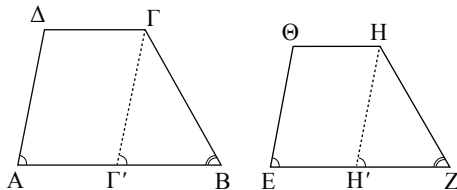
$$\text{και } EZ > \Theta H \text{ αφού } \frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H}. \text{ Φέρουμε } \Gamma\Gamma' \parallel \Delta A \text{ και } H H' \parallel \Theta E.$$

Τότε τα τρίγωνα $B\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'$ και $Z\hat{H}\hat{H}'$ είναι όμοια ($\hat{B} = \hat{Z}$, $\hat{\Gamma}' = \hat{A} = \hat{E} = \hat{H}'$),

$$\text{οπότε } \frac{\Gamma'B}{H'Z} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Gamma'}{HH'} = \frac{\Delta A}{\Theta E} \quad (1)$$

$$\text{Επίσης έχουμε } \frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H} = \frac{AB - \Delta\Gamma}{EZ - \Theta H} = \frac{\Gamma'B}{H'Z} \quad (2)$$

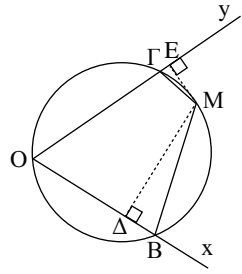
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H} = \frac{\Delta A}{\Theta E}$, δηλαδή οι πλευρές του τραapeζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του $EZH\Theta$. Επιπλέον, έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες ($\hat{A} = \hat{E}$, οπότε $\hat{\Delta} = \hat{\Theta}$ και $\hat{B} = \hat{Z}$, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{H}$). Άρα τα τραπέζια είναι όμοια.



2. Έστω $M\Delta = d$ και $ME = d'$. Το τετράπλευρο $OBM\Gamma$ είναι εγγράψιμο, οπότε $\hat{M}\hat{\Gamma}E = \hat{B}$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $M\hat{\Gamma}E$ και $B\hat{M}\Delta$ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{ME} \Leftrightarrow \frac{MB}{M\Gamma} = \frac{d}{d'}$$



3. Στο τρίγωνο $A\hat{\Gamma}\Delta$, επειδή η ΓZ είναι διχοτόμος

$$\text{έχουμε: } \frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} \quad (1).$$

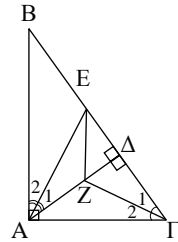
Στο τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$, επειδή η AE είναι διχοτόμος

$$\text{έχουμε: } \frac{EB}{E\Delta} = \frac{AB}{A\Delta} \quad (2).$$

Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι όμοια (ορθογώνια και $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$),

$$\text{οπότε } \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Delta} \quad (3). \text{ Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι } \frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{EB}{E\Delta},$$

οπότε από το αντίστροφο του Θαλή στο τρίγωνο $A\hat{\Delta}B$ έχουμε ότι $ZE \parallel AB$.



4. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

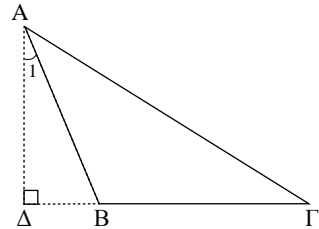
$$\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ + \hat{\Gamma} \quad (1).$$

Αλλά $\hat{B} = 90^\circ + \hat{A}_1$ (2) (ως εξωτερική στο τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι

$$\text{όμοια, οπότε: } \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma.$$



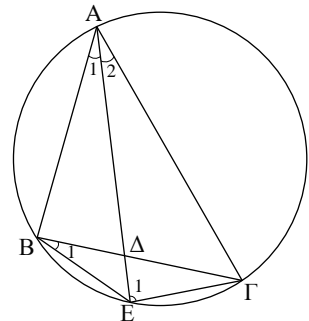
5. i) Έχουμε τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$ όμοιο με τρίγωνο $A\hat{E}\Gamma$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B} = \hat{E}_1$ γιατί βαίνουν στο \widehat{AG}).

$$\text{Άρα } \frac{AB}{AE} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE.$$

ii) Έχουμε τρίγωνο $A\hat{B}E$ όμοιο με

τρίγωνο $B\hat{\Delta}E$ (\hat{E} κοινή, $\hat{B}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_1$).

$$\text{Άρα } \frac{EB}{E\Delta} = \frac{EA}{EB} \Leftrightarrow EB^2 = EA \cdot E\Delta.$$



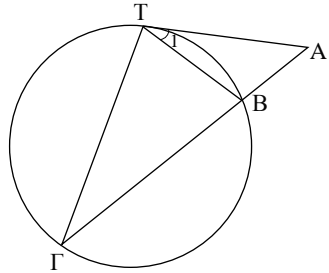
Γενικές Ασκήσεις

1. Έχουμε τρίγωνο $\hat{A}B\hat{T}$ όμοιο με τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Gamma}T$ (\hat{A} κοινή, $\hat{\Gamma} = \hat{T}_1$).

$$\text{Άρα } \frac{TB}{\hat{\Gamma}\hat{T}} = \frac{AT}{A\hat{\Gamma}} = \frac{AB}{AT} \quad (1)$$

Επομένως

$$\frac{TB^2}{\hat{\Gamma}\hat{T}^2} = \frac{AT^2}{A\hat{\Gamma}^2} \Leftrightarrow \frac{TB^2}{\hat{\Gamma}\hat{T}^2} = \frac{AT}{A\hat{\Gamma}} \cdot \frac{AT}{A\hat{\Gamma}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{TB^2}{\hat{\Gamma}\hat{T}^2} = \frac{AT}{A\hat{\Gamma}} \cdot \frac{AB}{AT} \Leftrightarrow \frac{TB^2}{\hat{\Gamma}\hat{T}^2} = \frac{AB}{A\hat{\Gamma}}$$



2. Έχουμε τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Delta}$ όμοιο με τρίγωνο $\hat{A}B\hat{E}$ (\hat{A} κοινή, $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$).

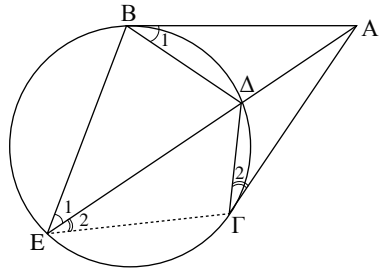
$$\text{Άρα } \frac{BE}{B\hat{\Delta}} = \frac{AB}{A\hat{\Delta}} \quad (1) \text{ και } A\hat{\Delta}\hat{\Gamma} \approx A\hat{E}\hat{\Gamma}$$

(\hat{A} κοινή, $\hat{E}_2 = \hat{\Gamma}_2$).

$$\text{Άρα } \frac{\hat{\Gamma}E}{\hat{\Gamma}\hat{\Delta}} = \frac{A\hat{\Gamma}}{A\hat{\Delta}} \quad (2).$$

Από (1), (2) επειδή $AB = A\hat{\Gamma}$ προκύπτει ότι

$$\frac{BE}{B\hat{\Delta}} = \frac{\hat{\Gamma}E}{\hat{\Gamma}\hat{\Delta}} \Leftrightarrow B\hat{\Delta} \cdot \hat{\Gamma}E = BE \cdot \hat{\Gamma}\hat{\Delta}.$$



3. Έχουμε τρίγωνο $B\hat{\Delta}E$ όμοιο με τρίγωνο $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}Z$ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ κατακορυφήν).

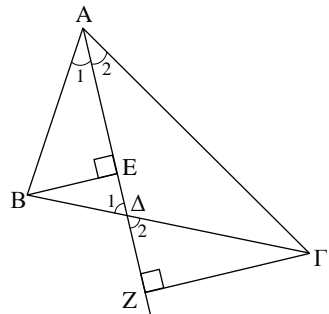
$$\text{Άρα } \frac{\Delta E}{\hat{\Delta}Z} = \frac{BE}{\hat{\Gamma}Z} \quad (1)$$

και $A\hat{B}E \approx A\hat{\Gamma}Z$ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$).

$$\text{Άρα } \frac{AE}{A\hat{Z}} = \frac{BE}{\hat{\Gamma}Z} \quad (2).$$

$$\text{Από (1), (2) προκύπτει ότι } \frac{AE}{A\hat{Z}} = \frac{\Delta E}{\hat{\Delta}Z} \Leftrightarrow \frac{EA}{E\hat{\Delta}} = \frac{ZA}{Z\hat{\Delta}}.$$

Άρα τα E, Z είναι συζυγή αρμονικά των A, Δ.



4. Έστω Ε σημείο της ΑΓ
 και $EZ \perp AB$, $EH \perp AD$.
 Φέρουμε $\Gamma K \perp AB$ και $\Gamma M \perp AD$.

Τότε $EH \parallel M\Gamma$, οπότε $\frac{EH}{M\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$

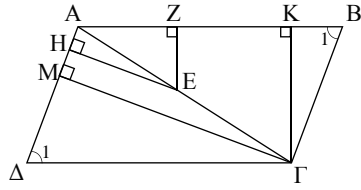
και $EZ \parallel K\Gamma$, οπότε $\frac{EZ}{K\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$.

Άρα $\frac{EH}{M\Gamma} = \frac{EZ}{K\Gamma} \Leftrightarrow \frac{EH}{M\Gamma} = \frac{M\Gamma}{K\Gamma}$ (1)

Αλλά τρίγωνο $\Gamma M \Delta$ όμοιο με τρίγωνο $K B \Gamma$ ($\hat{K} = \hat{M} = 90^\circ$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$),

οπότε $\frac{M\Gamma}{K\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AB}{A\Delta}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{EH}{EZ} = \frac{AB}{A\Delta}$.



5. i) Ισχύει $MA \cdot MB = 2R \cdot MH$
 (εφαρμογή $\beta\gamma = 2Rv_\alpha$).

Άρα $MH = d = \frac{MA \cdot MB}{2R}$.

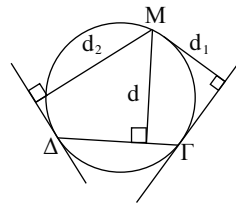
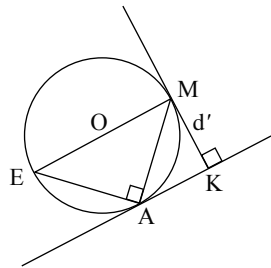
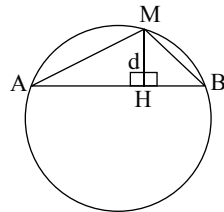
- ii) Φέρνουμε τη διάμετρο ME. Τότε $M\hat{A}E = 90^\circ$
 και $\hat{E} = \hat{A}_1$ (χορδή, εφαπτομένη).

Άρα τρίγωνο $M\hat{A}E$ όμοιο
 με τρίγωνο $M\hat{A}K$, οπότε

$\frac{MA}{MK} = \frac{ME}{MA} \Leftrightarrow \frac{MA}{d'} = \frac{2R}{MA} \Leftrightarrow d' = \frac{MA^2}{2R}$.

- iii) Είναι $d = \frac{M\Gamma \cdot M\Delta}{2R}$, $d_1 = \frac{M\Gamma^2}{2R}$,

$d_2 = \frac{M\Delta^2}{2R}$. Άρα $d_1 \cdot d_2 = \frac{M\Gamma^2 \cdot M\Delta^2}{(2R)^2} = d^2$.



6. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = A\Gamma \cdot B\Delta$.

Παίρνουμε σημείο Ε της ΑΓ ώστε $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}B$ (1)

Τότε τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$ όμοιο με τρίγωνο $\Delta\hat{E}\Gamma$ ($\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1$).

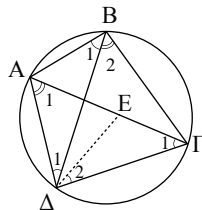
Άρα $\frac{AB}{E\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB \cdot \Gamma\Delta = E\Gamma \cdot B\Delta$ (2)

Επίσης τρίγωνο $A\hat{\Delta}E$ όμοιο με τρίγωνο $B\hat{\Gamma}\Delta$ ($\hat{A}_1 = \hat{B}_2$, $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}\Gamma$ ως διαφορά ή άθροισμα ίσων γωνιών).

$$\text{Άρα } \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{AE}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta \cdot B\Gamma = AE \cdot B\Delta \quad (3).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) προκύπτει ότι:

$$AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = B\Delta \cdot (E\Gamma + AE) = B\Delta \cdot A\Gamma.$$



9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Για να υπάρχει τρίγωνο με δεδομένα μήκη πλευρών πρέπει να ισχύει η **τριγωνική ανισότητα**. (Ασκήσεις: § 9.4 Εμπέδωσης 1, 2).
- Για να βρούμε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες (οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο) συγκρίνουμε το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών. (Ασκήσεις: § 9.2 Αποδεικτικές 1 - § 9.4 Εμπέδωσης 1, Αποδεικτικές 1).
- Για να υπολογίσουμε μια γωνία (σε μοίρες) χρησιμοποιώντας τις γνωστές μετρικές σχέσεις βρίσκουμε κατάλληλη σχέση μεταξύ των στοιχείων (πλευρών, διαμέσων κ.λπ.) ενός τριγώνου π.χ. Ισόπλευρο τρίγωνο, ορθογώνιο τρίγωνο με μια πλευρά ίση με το μισό της υποτείνουσας κ.λπ. (Ασκήσεις: § 9.4 Εμπέδωσης 3, § 9.5 Εμπέδωσης 3, Γενικές 8).

Σχόλιο: Πολλές φορές μια γωνία υπολογίζεται και τριγωνομετρικά (Νόμος συνημιτόνων, ημιτόνων κ.λπ.). (π.χ. § 9.4 Άσκηση Εμπέδωσης 3).

- Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 2 της § 9.7 αποδεικνύουμε ότι μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο. (Ασκήσεις: § 9.7 Σύνθετα 3).

§ 9.1-9.2

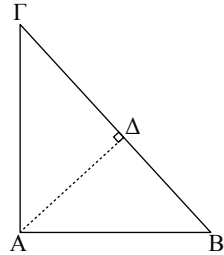
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Είναι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = 25 \Leftrightarrow B\Gamma = 5$

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow 3^2 = 5 \cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \frac{9}{5}$$

$$A\Gamma = B\Gamma - B\Delta = \frac{16}{5}$$

$$\text{και } A\Delta^2 = B\Delta \cdot A\Gamma = \frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{12}{5}.$$



2. Είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 3\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 90^\circ = 3\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$,

οπότε $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ και από την $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ προκύπτει

$$\text{ότι } \beta^2 = 3\gamma^2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \sqrt{3}, \text{ οπότε αληθές είναι το } \Gamma.$$

3. Επειδή $A\Delta < A\Gamma < B\Gamma$ και $\Gamma\Delta < A\Gamma$,
αρκεί να συγκρίνουμε τα $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$.

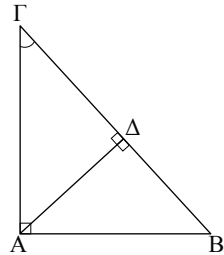
$$\text{Έχουμε: } AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow 25 = B\Gamma \frac{25}{13} \Leftrightarrow B\Gamma = 13,$$

$$\text{οπότε } \Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta = \frac{144}{13} \quad (1)$$

$$\text{και από τη σχέση } A\Delta^2 = B\Delta \cdot A\Gamma$$

$$\text{βρίσκουμε } A\Delta = \frac{60}{13} \quad (2). \text{ Από (1) και (2) προκύπτει}$$

ότι $A\Delta < \Gamma\Delta$ και επομένως $A\Delta < \Gamma\Delta < A\Gamma < B\Gamma$.



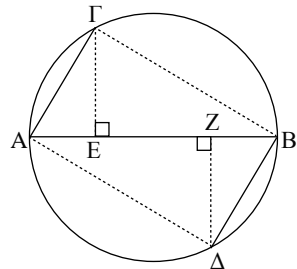
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έχουμε $\beta^2 + \gamma^2 = (2\kappa\lambda)^2 + (\kappa^2 - \lambda^2)^2 =$
 $= (\kappa^2 + \lambda^2)^2 = \alpha^2,$

$$\text{δηλαδή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ.$$

2. Επειδή AB διάμετρος, οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$
και $A\hat{\Delta}B$ είναι ορθές, οπότε από τα ορθογώνια
τρίγωνα $\Gamma\hat{A}B$ και $\Delta\hat{A}B$ έχουμε αντίστοιχα:
 $A\Gamma^2 = AB \cdot AE$ και $A\Delta^2 = AB \cdot AZ$.

Από τις σχέσεις αυτές με διαίρεση κατά μέλη
προκύπτει το ζητούμενο.



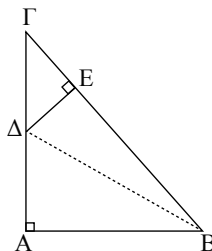
3. Φέρνουμε τη ΒΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\hat{E}\hat{B}\Delta$ και $\hat{E}\hat{\Gamma}\Delta$ έχουμε: $EB^2 = B\Delta^2 - \Delta E^2$ και $E\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta E^2$ αντίστοιχα, από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: $BE^2 - \Gamma E^2 = B\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow BE^2 - \Gamma E^2 = B\Delta^2 - A\Delta^2 \quad (1),$$

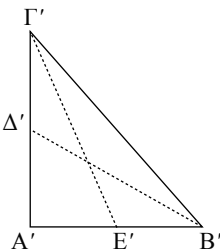
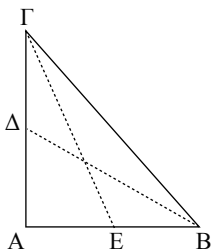
αφού το Δ είναι μέσον της ΑΓ. Από την (1) και επειδή το $A\hat{\Delta}B$ είναι ορθογώνιο προκύπτει $BE^2 - \Gamma E^2 = AB^2 \Leftrightarrow \Gamma E^2 + AB^2 = BE^2 \quad (2)$.

Είναι φανερό ότι $\Delta B > EB$.

Από την (2) προκύπτει ότι $BE > \Gamma E$ οπότε $\Delta B > EB > \Gamma E$.



4. i) Από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $A'\hat{B}'\Delta'$ έχουμε: $\mu_{\beta}^2 = \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4}$ και $\mu_{\beta'}^2 = \gamma'^2 + \frac{\beta'^2}{4}$ αντίστοιχα από τις οποίες, αφού $\mu_{\beta} = \mu_{\beta'}$ προκύπτει: $\gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} = \gamma'^2 + \frac{\beta'^2}{4} \quad (1)$.



Όμοια, από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\hat{\Gamma}E$ και $A'\hat{\Gamma}'E'$ και επειδή $\mu_{\gamma} = \mu_{\gamma'}$

προκύπτει $\beta^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \beta'^2 + \frac{\gamma'^2}{4} \quad (2)$.

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε:

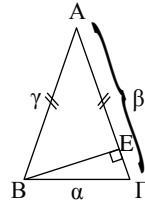
$$\frac{5}{4}(\beta^2 + \gamma^2) = \frac{5}{4}(\beta'^2 + \gamma'^2), \text{ από την οποία λαμβάνοντας υπόψη ότι}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \text{ και } \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha'^2, \text{ προκύπτει ότι } \alpha = \alpha'.$$

- ii) Είδαμε ότι $\beta^2 + \gamma^2 = \beta'^2 + \gamma'^2 \quad (3)$. Αφαιρώντας από την (3) την (1) προκύπτει $\frac{3}{4}\beta^2 = \frac{3}{4}\beta'^2$, δηλαδή $\beta = \beta'$. Επειδή πλέον τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $A'\hat{B}'\Gamma'$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές ίσες, είναι ίσα.

5. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\hat{E}\Gamma$ έχουμε: $\alpha^2 = BE^2 + E\Gamma^2 \quad (1)$.

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{B} \hat{E} A$ έχουμε: $\gamma^2 = BE^2 + AE^2$ (2). Επειδή $\beta = \gamma$ θα είναι $\beta^2 = \gamma^2 = BE^2 + AE^2$ (3). Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3BE^2 + 2AE^2 + GE^2$.



Σύνθετα Θέματα

1. i) Έχουμε: $\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{BL}{\Delta\Gamma}$ (1),

αφού $\hat{A} = 1L$ και $A\Delta \perp B\Gamma$.

Επίσης, από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta \hat{A} B$

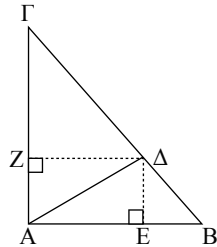
και $\Delta \hat{A} \Gamma$ έχουμε αντίστοιχα: $B\Delta^2 = AB \cdot EB$ (2)

και $\Delta\Gamma^2 = A\Gamma \cdot \Gamma Z$ (3).

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{AB^4}{A\Gamma^4} = \frac{B\Delta^2}{\Delta\Gamma^2} = \frac{AB \cdot EB}{A\Gamma \cdot \Gamma Z} \Leftrightarrow \frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}.$$

ii) Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta \hat{A} B$ και $\Delta \hat{A} \Gamma$ έχουμε: $A\Delta^2 = AB \cdot AE$ και $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot AZ$ από τις οποίες προκύπτει $A\Delta^4 = AB \cdot A\Gamma \cdot AE \cdot AZ$ (1). Αλλά $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot A\Delta$ (2). Από (1), (2) προκύπτει το ζητούμενο.

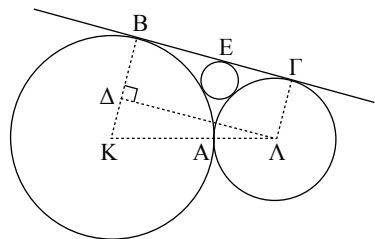


2. i) Φέρνουμε $L\Delta \perp BK$. Τότε $K\Lambda = R + \rho$, $K\Delta = R - \rho$ και $L\Delta = B\Gamma$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta \hat{K} \Lambda$ έχουμε:

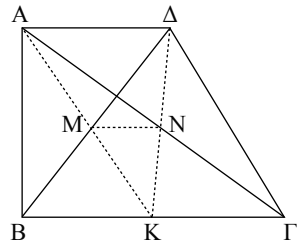
$$\begin{aligned} L\Delta^2 &= K\Lambda^2 - K\Delta^2 = \\ &= (R + \rho)^2 - (R - \rho)^2 = 4R\rho \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow L\Delta = 2\sqrt{R\rho}, \text{ δηλαδή } B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}. \end{aligned}$$

ii) Σύμφωνα με το i) έχουμε $BE = 2\sqrt{R\sigma}$ και $E\Gamma = 2\sqrt{R\sigma}$, οπότε από την προφανή σχέση $B\Gamma = BE + E\Gamma$ προκύπτει $\sqrt{R\rho} = \sqrt{R\sigma} + \sqrt{R\sigma}$ από την οποία με διαίρεση με $\sqrt{R\rho}$ προκύπτει το ζητούμενο.



3. i) Επειδή N μέσον AG και MN//KΓ, το M είναι μέσον του AK, δηλαδή στο τετράπλευρο ABKΔ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και αφού $\hat{A} = 90^\circ$, αυτό είναι ορθογώνιο.

ii) Έχουμε διαδοχικά:
 $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta K^2 = K\Gamma^2$
 (από το ορθογώνιο τρίγωνο $K \hat{\Delta} \Gamma$) =



$$= (2MN)^2 = 4MN^2,$$

$$\text{δηλαδή } \Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2.$$

4. Επειδή $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$, έχουμε: $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2 \geq 2\beta\gamma \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\beta\gamma$

(γιατί $\hat{A} = 90^\circ$) $\Leftrightarrow (\beta - \gamma)^2 \geq 0$ που ισχύει. Το "=" όταν $\beta = \gamma$.

5. Φέρνουμε $\Gamma Z, \Delta H \perp AB$ και τις $O\Gamma$ και $O\Delta$.

Το τρίγωνο $O\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ισοσκελές
 και επομένως $O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Delta}\Gamma = \varphi$.

Η γωνία $\Delta\hat{O}H$ είναι εξωτερική
 στο τρίγωνο $O\hat{E}\Delta$, οπότε $\Delta\hat{O}H = 45^\circ + \varphi$.

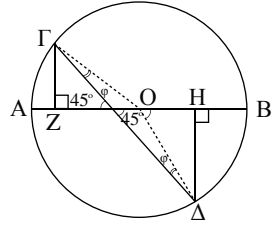
Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\hat{\Gamma}O$

και $H\hat{\Delta}O$ έχουν: $\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, $\Delta\hat{O}H = 45^\circ + \varphi = O\hat{\Gamma}Z$

και $O\Delta = O\Gamma (= R)$, άρα είναι ίσα και επομένως $\Gamma Z = OH$ (1).

Έχουμε: $\Gamma E^2 + \Delta E^2 = 2\Gamma Z^2 + 2\Delta H^2 = 2(OH^2 + \Delta H^2)$

(από την (1)) $= 2 \cdot O\Delta^2 = 2R^2$, δηλαδή $\Gamma E^2 + \Delta E^2 = 2R^2$.



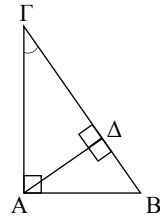
6. Από την ομοιότητα των τριγώνων $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{B}\Gamma$

έχουμε ότι: $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{x}{\omega} \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{x^2}{\omega^2}$ (1).

Όμοια, από την ομοιότητα των τριγώνων $\Delta\hat{A}\Gamma$

και $A\hat{B}\Gamma$ βρίσκουμε ότι $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{y^2}{\omega^2}$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη και
 λαμβάνοντας υπόψη ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$
 προκύπτει ότι $x^2 + y^2 = \omega^2$.



§ 9.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Επειδή $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ (τριγωνική ανισότητα) υπάρχει τρίγωνο. Η μεγαλύτερη γωνία είναι η A και αφού $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ θα είναι $\hat{A} < 90^\circ$. Άρα το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

2. Ναι, υπάρχει, αφού ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Έχουμε επίσης ότι:

$$\nu_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \frac{2}{6} \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 6 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right) \left(\frac{15}{2} - 4 \right)} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Όμοια } v_{\beta} = \frac{3\sqrt{7}}{2}, v_{\gamma} = \frac{15\sqrt{7}}{8}.$$

3. Έχουμε $\beta^2 = 4 + 2\sqrt{3}$, $\alpha^2 = 2$, $\gamma^2 = 4$.

Άρα $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{B} > 90^\circ$.

Στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ είναι $\hat{A} > 90^\circ$,

οπότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\alpha\Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha\Delta = \frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha\Delta = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha\Delta = \sqrt{3}. \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $\hat{A}B\Delta$ είναι $B\Delta^2 = AB^2 - \alpha\Delta^2 \Leftrightarrow \Delta B^2 = 1 \Leftrightarrow B\Delta = 1$.

Επειδή $AB = \gamma = 2$ και $B\Delta = 1$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$.

2ος τρόπος:

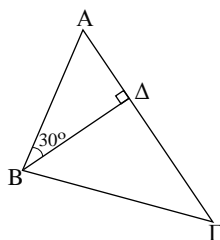
Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ προκύπτει ότι:

$$\cos \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{2})^2}{2(1 + \sqrt{3}) \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα $\hat{A} = 30^\circ$.

4. Είναι $\hat{A} = 60^\circ$, οπότε από το Νόμο των συνημιτόνων έχουμε: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cos \hat{A} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B\Gamma^2 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{21} \text{ cm.}$$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Ελέγχουμε αρχικά το είδος του τριγώνου.

Είναι $ΑΓ^2 = 144$, $ΒΓ^2 = 49$, $ΑΒ^2 = 81$.

Επειδή $ΑΓ^2 > ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ θα είναι $\hat{B} > 90^\circ$.

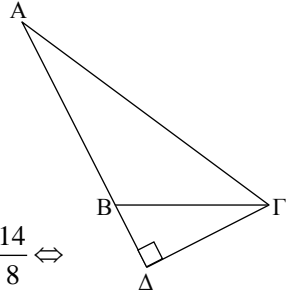
Έστω ΒΔ η προβολή της ΒΓ πάνω στην ΑΒ.

Επειδή $\hat{B} > 90^\circ$ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΒΔ = \frac{ΑΓ^2 - ΑΒ^2 - ΒΓ^2}{2ΑΒ} = \frac{144 - 81 - 49}{18} = \frac{14}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΒΔ = \frac{7}{9} \text{ cm.}$$

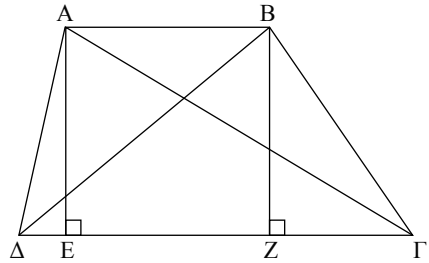


2. Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο στα τρίγωνα $ΑΓ\hat{\Delta}$ και $Β\hat{\Delta}\Gamma$ με την υπόθεση ότι $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta} < 111$.

Αν μία από τις $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}$ ήταν αμβλεία η απόδειξη είναι ανάλογη.

Τότε: $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 - 2ΔΓ \cdot ΔΕ$

$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΔΓ^2 - 2ΔΓ \cdot ΖΓ$



Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2ΔΓ(ΔΕ - ΖΓ) =$$

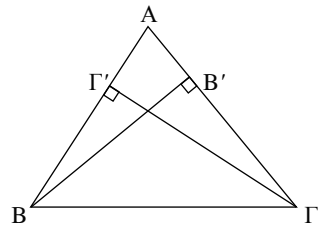
$$= ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2 \cdot ΓΔ \cdot ΕΖ = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2 \cdot ΑΒ \cdot ΓΔ.$$

3. Εφαρμόζοντας το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot ΒΓ'$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot ΓΒ'. \text{ Προσθέτοντας}$$

κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.



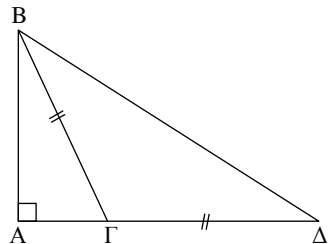
4. Στο τρίγωνο $ΒΓ\hat{\Delta}$ είναι $\hat{\Gamma} > 90^\circ$,
οπότε:

$$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + 2ΓΔ \cdot ΑΓ \stackrel{ΒΓ=ΓΔ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow ΒΔ^2 = 2ΒΓ^2 + 2ΒΓ \cdot ΑΓ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΒΔ^2 = 2ΒΓ(ΒΓ + ΑΓ) \stackrel{ΒΓ=ΓΔ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow ΒΔ^2 = 2ΒΓ \cdot ΑΔ.$$

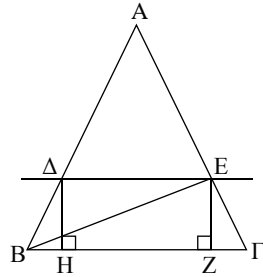


5. Στο τρίγωνο $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$ είναι $\hat{\Gamma} < 90^\circ$,
 οπότε: $BE^2 = E\hat{\Gamma}^2 + B\hat{\Gamma}^2 - 2B\hat{\Gamma} \cdot Z\hat{\Gamma} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow BE^2 = E\hat{\Gamma}^2 + B\hat{\Gamma} (B\hat{\Gamma} - 2Z\hat{\Gamma})$ (1)
 Φέρουμε $\Delta H \perp B\hat{\Gamma}$.

Τότε τα τρίγωνα $\hat{\Delta}B\hat{H}$ και $E\hat{Z}\hat{\Gamma}$
 είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, $\Delta H = EZ$),
 οπότε $BH = Z\hat{\Gamma}$.

Άρα $B\hat{\Gamma} - 2Z\hat{\Gamma} = B\hat{\Gamma} - Z\hat{\Gamma} - BH = HZ = \Delta E$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $BE^2 = E\hat{\Gamma}^2 + B\hat{\Gamma} \cdot \Delta E$.



Σχόλιο:

Το $B\Delta E\hat{\Gamma}$ είναι **ισοσκελές τραπέζιο**. Φέρνοντας δύο κατάλληλα ύψη δημιουργούνται ίσα τρίγωνα.

6. Έστω ότι υπάρχει. Πρέπει

$$5\alpha < 4\beta + 3\gamma \Leftrightarrow (5\alpha)^2 < (4\beta + 3\gamma)^2 \Leftrightarrow 25\alpha^2 < 16\beta^2 + 9\gamma^2 + 24\beta\gamma$$

$$(\text{διότι } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2) \Leftrightarrow 9\beta^2 + 16\gamma^2 - 24\beta\gamma < 0 \Leftrightarrow (3\beta - 4\gamma)^2 < 0 \text{ άτοπο.}$$

Άρα δεν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5α , 4β , 3γ .

Σύνθετα Θέματα

1. Στο $A\hat{B}\hat{\Gamma}$ φέρνουμε το ύψος $B\Delta$ και εφαρμόζοντας το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot A\Delta \Leftrightarrow$$

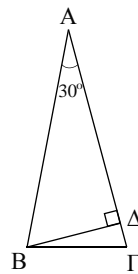
$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 2\beta^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$
 (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\hat{\Delta}$ επειδή $\hat{A} = 30^\circ$

είναι $B\Delta = \frac{\beta}{2}$, οπότε

$$A\Delta^2 = \beta^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = \frac{3\beta^2}{4} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\beta\sqrt{3}}{2}$$
 (2)

$$\text{Από (1), (2) έχουμε: } \alpha^2 = 2\beta^2 - 2\beta \cdot \frac{\beta\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow \alpha = \beta\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$



2. Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ είναι $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta} \Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta$ (1).

Στο τρίγωνο $M\hat{A}\Gamma$ είναι $\hat{A} < 90^\circ$

(αφού $\widehat{B\Gamma} < 180^\circ$), οπότε:

$$M\Gamma^2 = MA^2 + A\Gamma^2 - 2MA \cdot AE \quad (2)$$

Όμοια στο τρίγωνο $M\hat{B}\Delta$ έχουμε:

$$M\Delta^2 = MB^2 + B\Delta^2 - 2MB \cdot BH \quad (3)$$

Το $A\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο,
οπότε $AE = BH$ (4).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (2) και (3) και έχουμε:

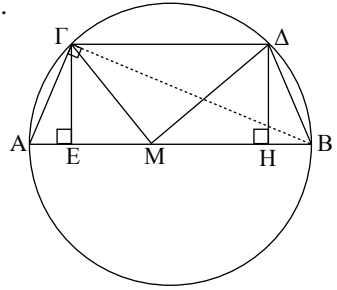
$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2 + A\Gamma^2 + B\Delta^2 - 2MA \cdot AE - 2MB \cdot BH \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2 + 2A\Gamma^2 - 2AE(MA + MB) \Leftrightarrow \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2 + 2(A\Gamma^2 - AE \cdot AB) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2 \text{ διότι } A\Gamma^2 = AB \cdot AE$$

επειδή $A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$ και GE ύψος του ορθογωνίου τριγώνου $A\hat{\Gamma}B$.



3. Από την ισότητα $\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$ προκύπτει ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$. Άρα η γωνία A είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι οξεία.

Έχουμε $\alpha > \beta$ συνεπώς $\alpha\beta^2 > \beta^3$ οπότε $\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 > \beta^3 + \gamma^3$
 $\alpha > \gamma$ $\alpha\gamma^2 > \gamma^3$

ή $\alpha(\beta^2 + \gamma^2) > \alpha^3$ ή $\beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2$ ή $\hat{A} < 90^\circ$.

§ 9.5

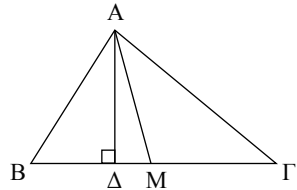
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Από το 1ο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 = 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\mu_\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2 \cdot 49 + 2 \cdot 36 - 4 \frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 121 \Leftrightarrow \alpha = 11.$$



ii) Έστω $M\Delta$ η προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ. Από το 2ο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} \Leftrightarrow M\Delta = \frac{49 - 36}{22} = \frac{13}{22}.$$

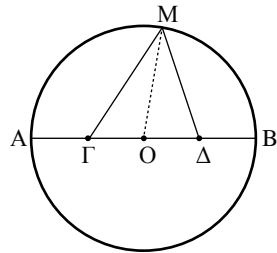
2. Είναι $\mu_\alpha^2 + \beta\gamma = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \beta\gamma = \frac{2(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2}{4}$.

Αρκεί $\frac{2(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2}{4} > \frac{\alpha^2}{4}$ ή $(\beta + \gamma)^2 > \alpha^2$ ή $\beta + \gamma > \alpha$, που ισχύει.

3. Από το θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $M\hat{\Gamma}\Delta$

έχουμε: $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2}$ ή

$$5 = 2R^2 + \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow 10 = 5R^2 \Leftrightarrow R^2 = 2 \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$$



4. i) Από τους τύπους των διαμέσων έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 &= \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \\ &= \frac{3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2}{4} = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

ii) Επειδή Θ βαρύκεντρο είναι: $\Theta A = \frac{2}{3}\mu_\alpha$, $\Theta B = \frac{2}{3}\mu_\beta$, $\Theta \Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma$.

Άρα από το (i) ερώτημα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta \Gamma^2 &= \left(\frac{2}{3}\mu_\alpha\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 = \frac{4}{9}(\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

Σχόλιο:

Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) τότε $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, οπότε

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}\alpha^2.$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($\hat{A} < 90^\circ$), οπότε από το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta \left\{ \begin{array}{l} \\ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma \quad (1) \end{array} \right.$$

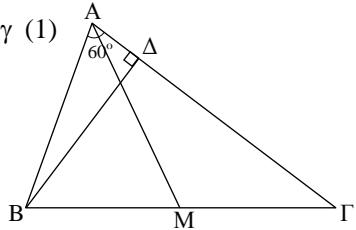
$$\text{Αλλά } A\Delta = \frac{\gamma}{2}$$

Στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ (AM διάμεσος)

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 =$$

$$= 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\beta^2 + 2\gamma^2 = 4\mu_\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{25+9+15}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{7}{2}.$$



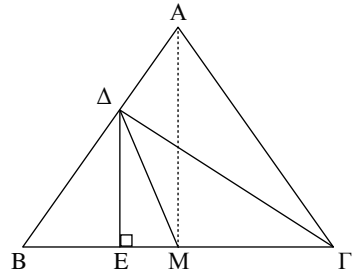
2. Αν M είναι το μέσο της BΓ, τότε από το τρίγωνο $\hat{\Delta}B\Gamma$ (ΔM διάμεσος) είναι:
 $\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = 2B\Gamma \cdot EM \quad (1)$

Επειδή $\Delta E \parallel AM$ (αφού $AM \perp B\Gamma$)

$$\text{είναι: } \frac{EM}{A\Delta} = \frac{BM}{AB} \Leftrightarrow \frac{EM}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{2AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EM = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2AB} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) έχουμε: } \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = \frac{B\Gamma^2 \cdot A\Delta}{AB}.$$



3. i) Φέρνουμε τις διαγωνίους AΓ, BΔ. Στο τρίγωνο $\hat{M}A\Gamma$ (MO διάμεσος):

$$MA^2 + M\Gamma^2 = 2MO^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } A\Gamma = B\Delta \quad (3)$$

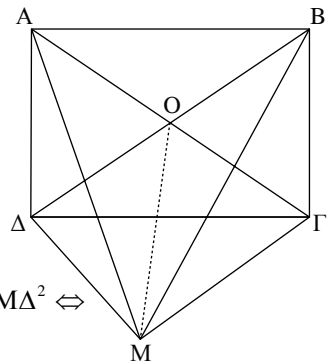
Από (1), (2), (3) έχουμε:

$$MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2.$$

ii) Από i) έχουμε:

$$MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2 \Leftrightarrow 1 + 3 = 2 + M\Delta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\Delta = \sqrt{2}.$$

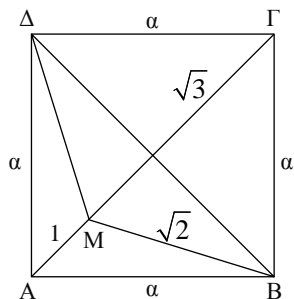


Άρα, αφού $MB = M\Delta = \sqrt{2}$, το M θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΔ, δηλαδή στην ΑΓ. Επομένως από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ είναι:

$$\alpha^2 + \alpha^2 = A\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 = (1 + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 4 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$



4. Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$

$$\text{έχουμε: } AB^2 + B\Gamma^2 = 2BM^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (1).$$

Όμοια στο τρίγωνο $\hat{A}\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = 2\Delta M^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = 2(BM^2 + \Delta M^2) + A\Gamma^2 \quad (3).$$

Αλλά στο τρίγωνο $\hat{B}M\Delta$ η MN είναι διάμεσος, οπότε:

$$BM^2 + \Delta M^2 = 2MN^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \quad (4).$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4MN^2$$

Σχόλιο:

Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο τα M και N ταυτίζονται.

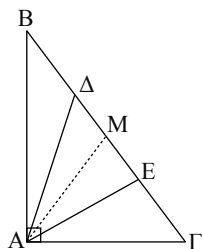
Άρα $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2$, δηλαδή «το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων».

5. Φέρουμε τη διάμεσο AM στο τρίγωνο $\hat{A}\Delta E$. Επειδή $B\Delta = E\Gamma$ η AM θα είναι διάμεσος και στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$.

$$\text{Άρα } AM = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1).$$

$$\text{Από την υπόθεση έχουμε ότι } B\Delta = \Delta E = E\Gamma = \frac{B\Gamma}{3} \quad (2).$$

$$\text{Επομένως: } A\Delta^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{BE^2}{2} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \Lambda\Delta^2 + \Lambda\text{E}^2 = 2\left(\frac{\text{B}\Gamma}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\text{B}\Gamma}{3}\right)^2}{2} = \frac{\text{B}\Gamma^2}{2} + \frac{\text{B}\Gamma^2}{18} = \frac{5}{9}\text{B}\Gamma^2.$$

6. Από το 1ο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha\mu_\alpha = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 4\alpha\mu_\alpha = 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha\mu_\alpha + 4\mu_\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (2\mu_\alpha - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\mu_\alpha - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{\text{A}} = 90^\circ.$$

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω το τραπέζιο με βάσεις $\text{AB} = 8$, $\text{ΓΔ} = 6$ και μη παράλληλες πλευρές $\text{ΑΔ} = 5$ και $\text{BΓ} = 6$. Αν E και Z τα μέσα των ΓΔ και AB αντίστοιχα πρέπει να υπολογίσουμε το μήκος EZ . Φέρουμε $\text{EH} // \text{ΑΔ}$ και $\text{EK} // \text{BΓ}$, όπως στο σχήμα.

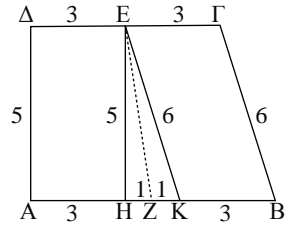
Τότε $\text{EH} = 5$, $\text{EK} = 6$,

$\text{HK} = \text{AB} - \text{AH} - \text{KB} = 2$ και EZ διάμεσος του τριγώνου EHK .

Επομένως από τους τύπους των διαμέσων προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \text{EZ}^2 &= \frac{2\text{EH}^2 + 2\text{EK}^2 - \text{HK}^2}{4} = \frac{2 \cdot 25 + 2 \cdot 36 - 4}{4} = \\ &= \frac{118}{4} = 29,5 \Leftrightarrow \text{EZ} \approx 5,45. \end{aligned}$$

Άρα το μήκος του δρόμου είναι 5,45Km και η διάνοιξη κοστίζει 2725 ευρώ.



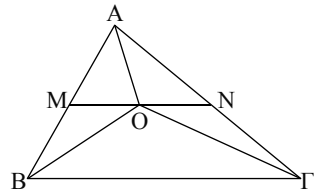
2. Έστω O το μέσο της MN , τότε έχουμε ότι:

$$\text{O}\text{A}^2 + \text{O}\Gamma^2 = 2\text{O}\text{N}^2 + \frac{\text{A}\Gamma^2}{2}$$

$$\text{O}\text{A}^2 + \text{O}\text{B}^2 = 2\text{O}\text{M}^2 + \frac{\text{A}\text{B}^2}{2}$$

και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$\text{O}\Gamma^2 - \text{O}\text{B}^2 = \frac{\text{A}\Gamma^2 - \text{A}\text{B}^2}{2}.$$

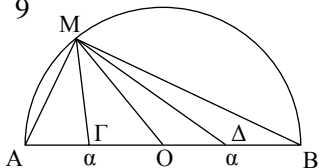


3. Είναι: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2\alpha^2 + \frac{4\alpha^2}{2} = 4\alpha^2$.

$$MG^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} = 2\alpha^2 + \frac{2\alpha^2}{9} = \frac{20\alpha^2}{9}.$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$MA^2 + MB^2 + MG^2 + M\Delta^2 = \frac{56\alpha^2}{9}.$$



4. Στο τρίγωνο $M\hat{A}\Gamma$ (MO διάμεσος):

$$MA^2 + M\Gamma^2 = 2MO^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $M\hat{B}\Gamma$ (MO διάμεσος):

$$MB^2 + M\Gamma^2 = 2MO^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \quad (2)$$

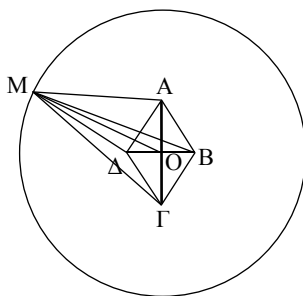
Από (1), (2) και υπόθεση με πρόσθεση

$$\text{κατά μέλη έχουμε: } 18\alpha^2 = 4(\lambda\alpha)^2 + \frac{A\Gamma^2 + B\Delta^2}{2} \quad (3)$$

Αλλά στο τρίγωνο $A\hat{O}B$ έχουμε $AB^2 = AO^2 + OB^2$ (γιατί;)

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{A\Gamma^2}{4} + \frac{B\Delta^2}{4} \Leftrightarrow 2\alpha^2 = \frac{A\Gamma^2 + B\Delta^2}{2} \quad (4)$$

Από (3), (4) είναι: $18\alpha^2 = 4\lambda^2\alpha^2 + 2\alpha^2 \Leftrightarrow 16\alpha^2 = 4\alpha^2\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$.



5. Εφαρμόζοντας το θεώρημα των διαμέσων έχουμε ότι:

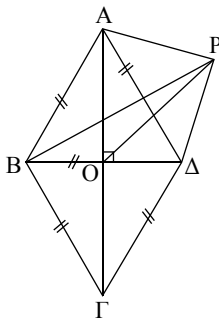
$$PA^2 + P\Gamma^2 = 2PO^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}$$

$$PB^2 + P\Delta^2 = 2PO^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$$

και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} (PA^2 - PB^2) + (P\Gamma^2 - P\Delta^2) &= \\ &= \frac{A\Gamma^2}{2} - \frac{B\Delta^2}{2} = \frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2. \end{aligned}$$

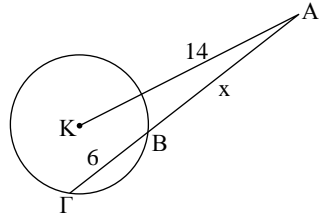
$$\left(A\Gamma \perp B\Delta \text{ και } A\Gamma = 2AO = \alpha\sqrt{3} \right)$$



§ 9.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Επειδή $AK > 6$ το A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.
 Άρα $AB \cdot A\Gamma = AK^2 - \rho^2$.
 Έστω $AB = x$ τότε $A\Gamma = x + 6$, οπότε
 $x(x + 6) = 14^2 - 6^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 160 = 0$
 απ' όπου προκύπτει ότι $AB = x = 10$.



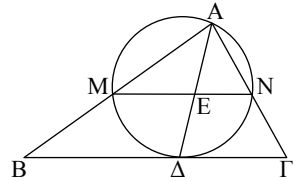
2. Επειδή M, N μέσα είναι E μέσο $A\Delta$

$$\text{και } ME = \frac{B\Delta}{2}, \quad NE = \frac{\Delta\Gamma}{2}.$$

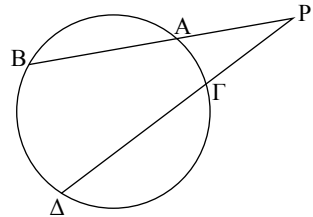
Οπότε από το θεώρημα τεμνόμενων χορδών είναι:

$$AE \cdot E\Delta = ME \cdot EN \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{2} \cdot \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{2} \cdot \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

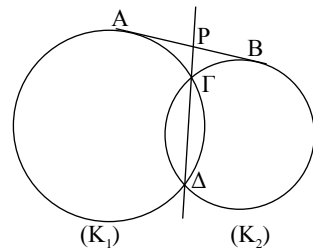
$$\Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma.$$



3. Είναι $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$ και $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$,
 οπότε $PA^2 = P\Delta^2$ ή $PA = P\Delta$ και $PB = P\Gamma$.



4. Έστω P το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και AB .
 Τότε είναι $PA^2 = P\Gamma \cdot P\Delta = PB^2$ ή $PA = PB$.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}BE$ έχουμε:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow$$

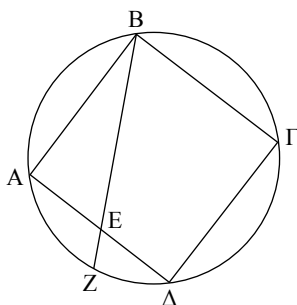
$$\Leftrightarrow BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}.$$

ii) Οι χορδές AD και BZ τέμνονται στο E ,

$$\text{οπότε } BE \cdot EZ = AE \cdot ED \Leftrightarrow EZ = \frac{AE \cdot ED}{BE} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EZ = \frac{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{10}.$$

$$\text{Επομένως } 5EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} = BE.$$



2. Στο τρίγωνο $\hat{A}B\Delta$ η AE είναι διχοτόμος, οπότε $\frac{EB}{EA} = \frac{AB}{A\Delta}$ (1).

Όμοια στο τρίγωνο $\hat{A}G\Delta$ είναι $\frac{ZG}{Z\Delta} = \frac{AG}{A\Delta}$ (2).

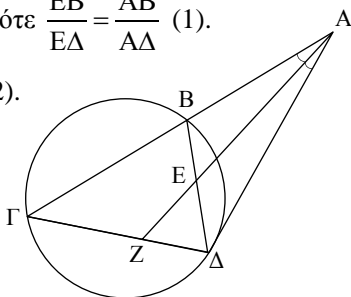
Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη

$$\text{προκύπτει ότι } \frac{EB \cdot ZG}{EA \cdot Z\Delta} = \frac{AB \cdot AG}{A\Delta^2}.$$

Αλλά $AB \cdot AG = A\Delta^2$

(τέμνουσα και εφαπτόμενη),

$$\text{οπότε } \frac{EB \cdot ZG}{EA \cdot Z\Delta} = 1 \Leftrightarrow EB \cdot ZG = EA \cdot Z\Delta.$$



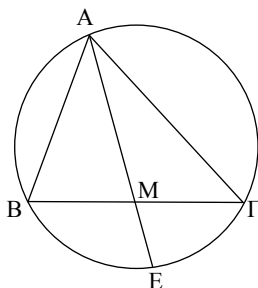
3. i) Οι χορδές AE και $B\Gamma$ τέμνονται στο M ,

$$\text{οπότε } AM \cdot ME = BM \cdot M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \cdot \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4} \quad (1).$$

ii) Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο

$$A\hat{B}\Gamma \text{ έχουμε: } AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow$$

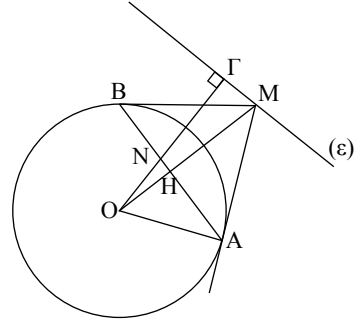


$$\Leftrightarrow AB^2 + AG^2 = 2AM^2 + 2AM \cdot ME = \\ = 2AM(AM + ME) = 2AM \cdot AE.$$

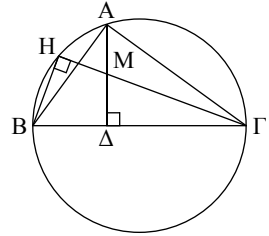
4. Φέρνουμε OM , τότε $OM \perp AB$ (γιατί;) άρα το τετράπλευρο ΓNHM είναι εγγράψιμο (γιατί), οπότε $ON \cdot OG = OH \cdot OM$ (1).

Αλλά το $\triangle OAM$ είναι ορθογώνιο στο A και AH ύψος, οπότε $OH \cdot OM = OA^2$ (γιατί;)

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} ON \cdot OG = R^2.$$



5. Φέρνουμε BH . Είναι $\widehat{BHG} = 90^\circ$, οπότε το τετράπλευρο $BDMH$ είναι εγγράψιμο (γιατί;) Άρα $GM \cdot GH = GD \cdot GB$ (1)
Επειδή $\triangle ABG$ ορθογώνιο και AD ύψος, είναι: $GA^2 = GB \cdot GD$ (2) (γιατί;)
Από (1), (2) έχουμε $GM \cdot GH = GA^2$.



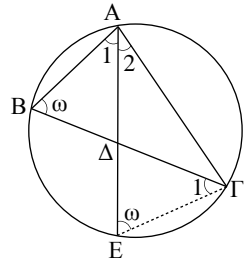
Σύνθετα Θέματα

1. Είναι $\Delta B \cdot \Delta \Gamma = A\Delta \cdot \Delta E \Leftrightarrow A\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta E \Leftrightarrow A\Delta = \Delta E$ (1)

Τα τρίγωνα $\triangle \hat{E}\Gamma$ και $\triangle \hat{A}\Gamma$ είναι όμοια

$$\text{(γιατί;)} \text{ οπότε: } \frac{\Delta E}{E\Gamma} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow \Delta E \cdot A\Gamma = E\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{A\Gamma}{2} \cdot A\Gamma = E\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 2E\Gamma^2.$$



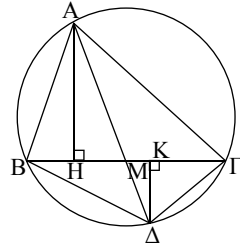
2. Στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, AM διάμεσος, οπότε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = 2\mu_\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{3\alpha^2}{4} = \mu_\alpha^2 \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$\Delta\Delta$, $B\Gamma$ χορδές, άρα: $AM \cdot M\Delta = BM \cdot M\Gamma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow M\Delta = \frac{BM \cdot M\Gamma}{AM} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} M\Delta = \frac{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

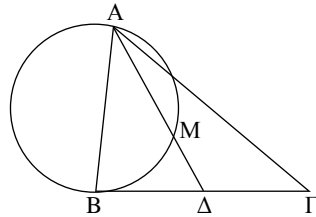
$$\Leftrightarrow M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} \quad (2)$$



3. Είναι: $\mu_\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \Leftrightarrow \mu_\gamma^2 = \frac{3\beta^2}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 = 3\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 \quad (1)$$

Αν $\Delta\Delta$ διάμεσος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta M \cdot \Delta A = \Delta B^2$ (γιατί;)



Έχουμε:

$$\Delta M \cdot \Delta A = \mu_\alpha \cdot \frac{1}{3}\mu_\alpha = \frac{1}{3}\mu_\alpha^2 = \frac{1}{3} \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \Delta M \cdot \Delta A = \frac{1}{3} \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta M \cdot \Delta A = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \Delta M \cdot \Delta A = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \Delta M \cdot \Delta A = \Delta B^2.$$

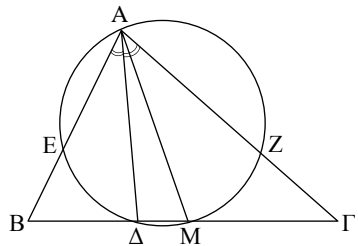
4. Είναι $BE \cdot BA = B\Delta \cdot BM$

και $\Gamma Z \cdot \Gamma A = \Gamma M \cdot \Gamma\Delta$, οπότε

διαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι:

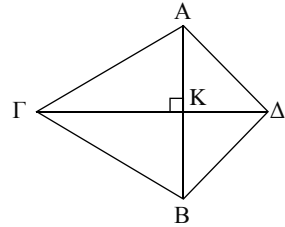
$$\frac{BE}{\Gamma Z} = \frac{A\Gamma}{AB} \cdot \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = 1$$

λόγω του Θεωρήματος των Διχοτόμων.



Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω $AB \perp \Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των $AB, \Gamma\Delta$. Τότε $A\Gamma^2 = AK^2 + K\Gamma^2$,
 $A\Delta^2 = AK^2 + K\Delta^2$,
 οπότε $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = K\Gamma^2 - K\Delta^2$ (1).
 Όμοια $B\Gamma^2 - B\Delta^2 = K\Gamma^2 - K\Delta^2$ (2).



Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$.

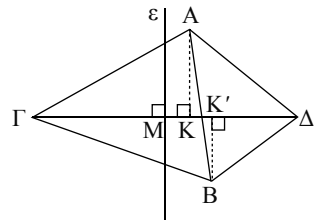
Αντίστροφα: Έστω ότι

$$A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2. \text{ Τότε}$$

$$(A\Gamma + A\Delta)(A\Gamma - A\Delta) = (B\Gamma + B\Delta)(B\Gamma - B\Delta)$$

απ' όπου προκύπτει ότι οι διαφορές $A\Gamma - A\Delta$ και $B\Gamma - B\Delta$ είναι ομόσημες.

Άρα τα σημεία A, B ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την μεσοκάθετο (ε) του $\Gamma\Delta$, οπότε οι προβολές τους K και K'



βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του μέσου M του $\Gamma\Delta$.

Από το 2ο θεώρημα διαμέσων προκύπτει ότι $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = 2\Gamma\Delta \cdot MK$ και $B\Gamma^2 - B\Delta^2 = 2\Gamma\Delta \cdot MK'$.

$$\text{Επομένως } 2\Gamma\Delta \cdot MK = 2\Gamma\Delta \cdot MK',$$

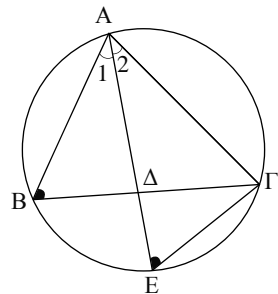
δηλαδή $MK = MK'$. Άρα $K \equiv K'$, οπότε $AB \perp \Gamma\Delta$.

2. Έστω ότι η $A\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο E . Οι χορδές AE και $B\Gamma$ τέμνονται στο Δ , οπότε: $A\Delta \cdot \Delta E = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta(AE - A\Delta) = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta \cdot AE - A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta \cdot AE = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ (1).

Αλλά τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma}$ είναι όμοια ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B} = \hat{E}$), οπότε:

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow A\Delta \cdot AE = AB \cdot A\Gamma \text{ (2)}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.



Σχόλιο:

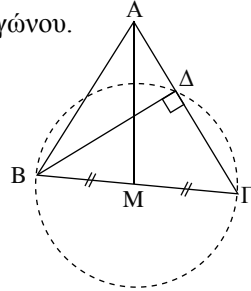
Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τη διχοτόμο $AD = \delta$ συναρτήσει των πλευρών a, β και γ του τριγώνου. Πράγματι είναι

$$AD = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}, \quad \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}, \quad \text{οπότε } \delta^2 = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta + \gamma)^2}.$$

3. 1ος τρόπος: Υπολογίζουμε όλους τους όρους του συμπεράσματος συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

$$\text{Έχουμε: } AM^2 = \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4} \quad (1)$$

$$BM = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow BM^2 = \frac{B\Gamma^2}{4} \quad (2)$$



Επειδή $\hat{A} < 90^\circ$ από το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot AD \Leftrightarrow AD \cdot A\Gamma = \frac{AB^2 + A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{2} \quad (3)$$

$$\text{Άρα } AM^2 = BM^2 + AD \cdot A\Gamma \stackrel{(1)(2)}{\Leftrightarrow} \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4} \stackrel{(3)}{=}$$

$$= \frac{B\Gamma^2}{4} + \frac{AB^2 + A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4} = \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4}, \text{ ισχύει.}$$

2ος τρόπος: Ο κύκλος διαμέτρου $B\Gamma$ διέρχεται από το Δ (αφού $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$). Άρα

$$AD \cdot A\Gamma = \Delta_{(M, BM)}^A \Leftrightarrow AD \cdot A\Gamma = AM^2 - BM^2 \Leftrightarrow AM^2 = BM^2 + AD \cdot A\Gamma.$$

4. i) Αν η AD δεν είναι κάθετη στη $B\Gamma$,

μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι $\hat{\Delta}_1 < 90^\circ$ και $\hat{\Delta}_2 > 90^\circ$.

Από το γενικευμένο πυθαγόρειο

θεώρημα στο τρίγωνο $A\hat{\Delta}B$ προκύπτει

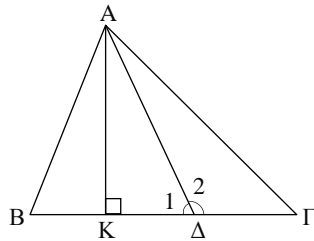
$$\text{ότι: } AB^2 = AD^2 + B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot K\Delta \Leftrightarrow$$

(πολλαπλασιάζουμε επί $\Delta\Gamma$)

$$\Delta\Gamma \cdot AB^2 = \Delta\Gamma \cdot AD^2 + \Delta\Gamma \cdot B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot K\Delta \quad (1)$$

Όμοια από το τρίγωνο $A\hat{\Delta}\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AD^2 + \Delta\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma \cdot K\Delta \Leftrightarrow (\text{πολλαπλασιάζουμε επί } B\Delta)$$



$$B\Delta \cdot A\Gamma^2 = B\Delta \cdot A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma^2 + 2B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot K\Delta \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

$$B\Delta \cdot A\Gamma^2 + \Delta\Gamma \cdot AB^2 = (B\Delta + \Delta\Gamma)A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma(B\Delta + \Delta\Gamma) \Leftrightarrow (B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma)$$

$$B\Delta \cdot A\Gamma^2 + \Delta\Gamma \cdot AB^2 = B\Gamma(A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma).$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η πρόταση ισχύει και όταν $A\Delta \perp B\Gamma$.

ii) Αν $AB = A\Gamma$ το Θ . Stewart γίνεται:

$$(B\Delta + \Delta\Gamma)AB^2 = B\Gamma(A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma) \quad \text{ή} \quad AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

5. i) Έστω $AM = \mu_\alpha$, $BE = \mu_\beta$, $\Gamma Z = \mu_\gamma$ και Θ το βαρύκεντρο.

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων

$$\text{έχουμε} \quad \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1).$$

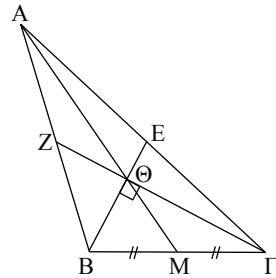
Πρέπει να υπολογίσουμε τη διάμεσο μ_α συναρτήσει της πλευράς α .

Επειδή $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$ το τρίγωνο $B\hat{\Theta}\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Θ με διάμεσο ΘM .

$$\text{Άρα} \quad \Theta M = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

$$(\text{αφού } \Theta \text{ βαρύκεντρο}) \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{3\alpha}{2}.$$

$$\text{Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι} \quad \beta^2 + \gamma^2 = 2 \cdot \frac{9\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2.$$



ii) Επειδή $\hat{A} < 90^\circ$ από το γενικευμένο

πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AK \Leftrightarrow$$

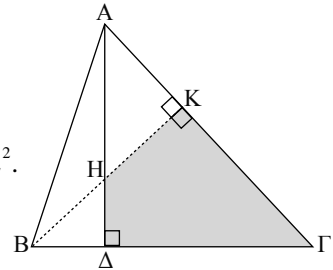
$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 5\alpha^2 - 2A\Gamma \cdot AK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A\Gamma \cdot AK = 5\alpha^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow A\Gamma \cdot AK = 2\alpha^2.$$

Επομένως αρκεί $A\Gamma \cdot AK = AH \cdot A\Delta$,

που ισχύει γιατί το τετράπλευρο $H\Delta\Gamma K$

είναι εγγράμημο ($\hat{\Delta} + \hat{K} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$).



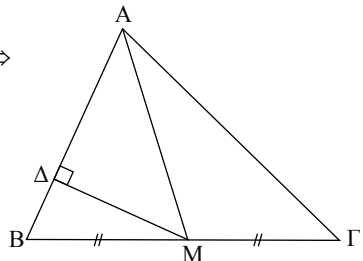
6. Για να προκύψει το γινόμενο $AB \cdot A\Delta$ εφαρμόζουμε γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\hat{B}M$.

$$\text{Έχουμε:} \quad BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AB \cdot A\Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = AM^2 + AB^2 - 2AB \cdot A\Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\Gamma^2 = 4AM^2 + 4AB^2 - 8AB \cdot A\Delta \quad (1)$$

Αλλά AM διάμεσος στο τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$,



οπότε: $4AM^2 = 2AB^2 + 2AG^2 - BG^2$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$BG^2 = 2AB^2 + 2AG^2 - BG^2 + 4AB^2 - 8AB \cdot \Delta\Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2BG^2 = 6AB^2 + 2AG^2 - 8AB \cdot \Delta\Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BG^2 = 3AB^2 + AG^2 - 4AB \cdot \Delta\Delta.$$

7. Αν Μ το μέσο της ΒΓ έχουμε:

$$AB^2 + AG^2 = 2AM^2 + \frac{BG^2}{2} \quad (1).$$

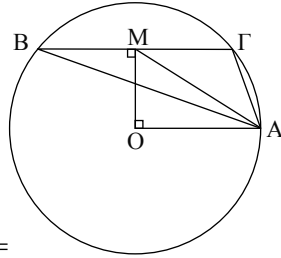
Επειδή έχουμε κύκλο μετασχηματίζουμε τη σχέση (1) και παίρνουμε

$$AB^2 + AG^2 = 2AM^2 + 2BM^2 =$$

$$= 2AM^2 + 2BM \cdot MG = 2AM^2 + 2(R^2 - OM^2) =$$

$$= 2(AM^2 - OM^2) + 2R^2 = 2OA^2 + 2R^2 \quad (\text{γιατί } M\hat{O}A = 90^\circ).$$

Άρα $AB^2 + AG^2 = 4R^2$, δηλαδή το άθροισμα $AB^2 + AG^2$ είναι σταθερό.



8. Αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο $E\hat{\Delta}H$ ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή

$$\Delta E^2 + \Delta H^2 = EH^2 \Leftrightarrow \Delta E^2 + \Delta H^2 = \frac{13R^2}{4}.$$

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα $E\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{H}\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta E^2 + E\Gamma^2 = 2OE^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} = 2R^2 + \frac{R^2}{2} \quad (1)$$

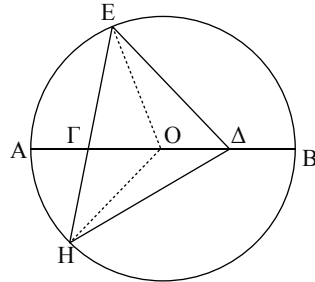
$$\text{και } \Delta H^2 + H\Gamma^2 = 2OH^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} = 2R^2 + \frac{R^2}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\Delta E^2 + \Delta H^2 = 5R^2 - (E\Gamma^2 + H\Gamma^2) \quad (3).$$

Αλλά $EH = E\Gamma + \Gamma H$, οπότε

$$EH^2 = E\Gamma^2 + \Gamma H^2 + 2E\Gamma \cdot \Gamma H \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \text{E}\Gamma^2 + \text{G}\text{H}^2 = \text{E}\text{H}^2 - 2\text{A}\Gamma \cdot \Gamma\text{B} \text{ (αφού } \text{E}\Gamma \cdot \text{G}\text{H} = \text{A}\Gamma \cdot \Gamma\text{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{E}\Gamma^2 + \text{G}\text{H}^2 = \frac{13\text{R}^2}{4} - 2 \frac{\text{R}}{2} \frac{3\text{R}}{2} \Leftrightarrow \text{E}\Gamma^2 + \text{G}\text{H}^2 = \frac{7\text{R}^2}{4} \text{ (4).}$$

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $\Delta\text{E}^2 + \Delta\text{H}^2 = \frac{13\text{R}^2}{4}$.

Άρα $\widehat{\text{E}\Delta\text{H}} = 90^\circ$.

10

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Αν γνωρίζουμε το εμβαδόν ενός σχήματος το χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε κάποια στοιχεία του (ύψος, βάση κ.λπ.). (Ασκήσεις: § 10.3 Εμπέδωσης 3 - § 10.4 Εμπέδωσης 2, 4).
- Η διάμεσος του τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα (εφαρμογή 3 § 10.3). (Ασκήσεις: § 10.4 Αποδεικτικές 2, 3 - Σύνθετα 2).
- Τρίγωνα που έχουν κοινή βάση και η άλλη κορυφή τους βρίσκεται σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση είναι ισοδύναμα (εφαρμογή 1 § 10.5). (Ασκήσεις: § 10.5 Σύνθετα 1 - Γενικές 1).
- Αν προεκτείνουμε τις πλευρές τριγώνου σχηματίζονται τρίγωνα που έχουν γωνίες παραπληρωματικές (ή ίσες). Όμοια αν από εσωτερικό σημείο τριγώνου φέρουμε **κάθετες** στις πλευρές του. (Ασκήσεις: § 10.5 Εμπέδωσης 3).
- Όταν έχουμε σχέση της μορφής $E_1 \cdot E_2 = E_3 \cdot E_4$ συνήθως την μετασχηματίζουμε σε **λόγο** εμβαδών $\left(\text{π.χ. } \frac{E_1}{E_3} = \frac{E_4}{E_2} \right)$. (Ασκήσεις: § 10.5 Σύνθετα 3 - Γενικές 4).

§ 10.1-10.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $\alpha = 4$.

Είναι φανερό ότι $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2 = 16$ τ.μ.,

$$(\Delta AZ) = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

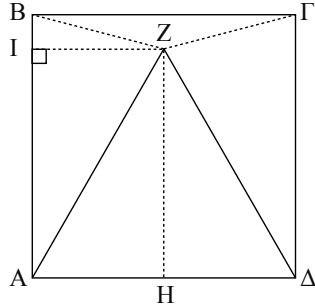
Φέρνουμε $ZI \perp AB$ και $ZH \perp AD$

$$\text{τότε: } ZI = AH = \frac{AD}{2} = 2,$$

$$\text{οπότε } (ABZ) = \frac{1}{2} AB \cdot ZI = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 = 4 \text{ τ.μ.}$$

Τα τρίγωνα $\hat{A}BZ$ και $\hat{\Delta}GZ$ είναι ίσα, οπότε και ισεμβαδικά και επομένως:

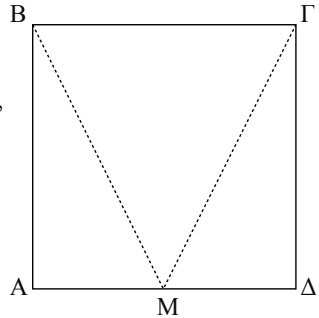
$$(B\Gamma Z) = (AB\Gamma\Delta) - 2(ABZ) - (\Delta AZ) = 16 - 2 \cdot 4 = 4\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3}.$$



2. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (AMB) + (\Delta M\Gamma) &= \frac{1}{2} AM \cdot AB + \frac{1}{2} M\Delta \cdot \Delta\Gamma = \\ &= \frac{1}{2} (AM + M\Delta) AB = \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{2} 10 \cdot 10 = 50, \end{aligned}$$

άρα το άθροισμα $(AMB) + (\Delta M\Gamma)$ είναι Γ : 50 τ.μ.



3. α) Επειδή $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{E} = 90^\circ$ θα είναι $\hat{B}_1 = 30^\circ$, οπότε $AE = \frac{AB}{2} = 3$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{E}B$ με εφαρμογή Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$v_\beta^2 = AB^2 - AE^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow v_\beta = 3\sqrt{3} \text{ μ.μ.}$$

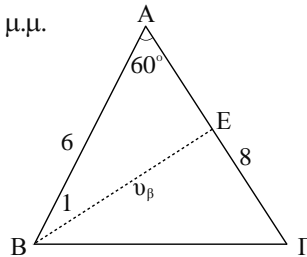
$$\beta) \text{ Έχουμε } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AG \cdot BE =$$

$$= \frac{1}{2} 8 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ τ.μ.}$$

γ) Είναι $E\Gamma = AG - AE = 8 - 3 = 5$ και από το $E\hat{B}\Gamma$ βρίσκουμε

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = (3\sqrt{3})^2 + 5^2 = 52 \Leftrightarrow B\Gamma = 2\sqrt{13} \text{ μ.μ. Αλλά}$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot v_\alpha \Leftrightarrow 12\sqrt{3} = \frac{1}{2} 2\sqrt{13} \cdot v_\alpha \Leftrightarrow v_\alpha = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{39}}{13} \text{ μ.μ.}$$

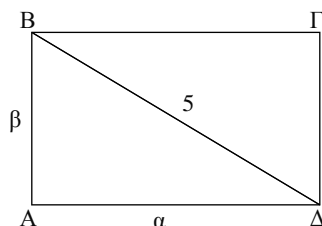


4. Έστω α, β οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε έχουμε $2\alpha + 2\beta = 14 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 7$ (1) και $\alpha^2 + \beta^2 = 25$ (2)

Υψώνοντας την (1) στο τετράγωνο και αξιοποιώντας την (2) έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 49 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 25 + 2\alpha\beta = 49 \Leftrightarrow \alpha\beta = 12,$$

δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 12 τ.μ.

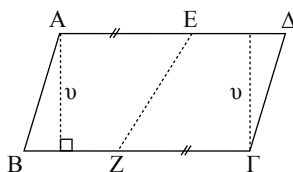


5. α) Έχουμε $(ABGD) = BG \cdot AH = 10 \cdot 5 = 50$ τ.μ.

β) Επειδή $AD = BG$ και $AE = ZG$ προκύπτει $EΔ = BΓ$, οπότε τα τραπέζια $AEZB$ και $EZΓΔ$ έχουν ίσες βάσεις μία προς μία, δηλαδή $AE = ZG$ και $BZ = EΔ$ και ίσα ύψη $υ$, οπότε:

$$(AEZB) = \frac{1}{2}(AE + BZ) \cdot υ = \frac{1}{2}(ZG + EΔ) \cdot υ = (EZΓΔ)$$

δηλαδή έχουν ίσα εμβαδά. Τα τραπέζια αυτά δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε: $(AEZB) + (EZΓΔ) = (ABGD) \Leftrightarrow 2(AEZB) = (ABGD) = 50$, άρα $(AEZB) = (EZΓΔ) = 25$ τ.μ.



6. Από το Δ φέρνουμε κάθετη ΔΗ προς την ΒΓ. Τότε το ΑΒΗΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $BH = 15$ και επομένως $HΓ = BΓ - BH = 5$ m.

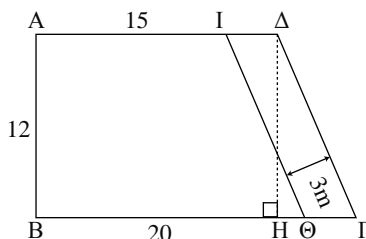
Από το ορθογώνιο τρίγωνο

$H\hat{\Gamma}\Delta$ ($\hat{H} = 90^\circ$) παίρνουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = \Delta H^2 + H\Gamma^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 13,$$

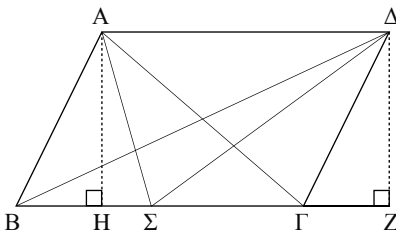
οπότε το εμβαδόν της λωρίδας $\Theta\Gamma\Delta$ που αποκόπτει ο δρόμος είναι $(\Theta\Gamma\Delta) = 13 \cdot 3 = 39$ τ.μ. Το εμβαδόν του αρχικού οικοπέδου είναι:

$$(ABGD) = \frac{1}{2}(AD + BΓ) \cdot υ = \frac{1}{2}(15 + 20) \cdot 12 = 210 \text{ τ.μ.}, \text{ οπότε το εμβαδόν του οικοπέδου } AB\Theta\Gamma \text{ που απομένει είναι } (AB\Theta\Gamma) = 210 - 39 = 171 \text{ τ.μ.}$$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Φέρνουμε τα ύψη ΑΗ, ΔΖ των τριγώνων ΣΑΓ, ΣΒΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΣΓ, ΣΒ αντίστοιχα. Τα ύψη αυτά, ως αποστάσεις των παραλλήλων ΑΔ και



ΒΓ, είναι ίσα, δηλαδή $AH = \Delta Z$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (\Sigma\Delta\Gamma) + (\Sigma\beta\Delta) &= \frac{1}{2}\Sigma\Gamma \cdot AH + \frac{1}{2}\Sigma\beta \cdot \Delta Z = \frac{1}{2}(\Sigma\Gamma + \Sigma\beta)AH = \\ &= \frac{1}{2}\beta\Gamma \cdot AH = (\beta\Gamma), \text{ άρα } (\Sigma\Delta\Gamma) + (\Sigma\beta\Delta) = (\beta\Gamma). \end{aligned}$$

2. α) Τα τρίγωνα $\hat{A}\beta\epsilon$ και $\hat{B}\epsilon\Gamma$ έχουν κοινό το ύψος ΒΖ από την κορυφή Β και ίσες βάσεις ΑΕ και ΕΓ (αφού Ε μέσο της ΑΓ).

$$\text{Επομένως } (\beta\epsilon\epsilon) = \frac{1}{2}A\epsilon \cdot BZ = \frac{1}{2}E\Gamma \cdot BZ = (\beta\epsilon\Gamma).$$

- β) Από το α) έχουμε $(\beta\epsilon\Gamma) = \frac{1}{2}(\beta\Gamma)$ (1)

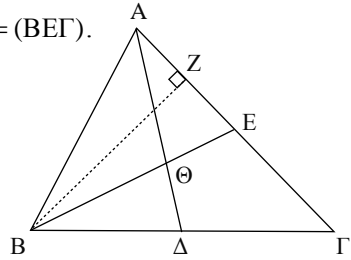
$$\text{Όμοια } (\beta\beta\Delta) = \frac{1}{2}(\beta\Gamma) \text{ (2).}$$

Από (1) και (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} (\beta\beta\Delta) &= (\beta\epsilon\Gamma) \Leftrightarrow (\beta\beta\Theta) + (\beta\Theta\Delta) = \\ &= (\beta\Theta\Delta) + (\Delta\Gamma\epsilon\Theta) \Leftrightarrow (\beta\beta\Theta) = (\Delta\Gamma\epsilon\Theta). \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } (\Delta\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(\beta\Gamma) = (\beta\epsilon\Gamma) \Leftrightarrow (\Delta\Delta\Gamma) = (\beta\epsilon\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\Delta\Theta\epsilon) + (\Delta\Gamma\epsilon\Theta) = (\beta\Theta\Delta) + (\Delta\Gamma\epsilon\Theta) \Leftrightarrow (\Delta\Theta\epsilon) = (\beta\Theta\Delta).$$



3. i) Επειδή ΑΔ διάμεσος του τριγώνου $\hat{A}\beta\Gamma$ έχουμε $(\beta\beta\Delta) = (\beta\Gamma\Delta)$. Όμοια, αφού ΣΔ διάμεσος του τριγώνου $\hat{\Sigma}\beta\Gamma$ έχουμε:

$$(\Sigma\beta\Delta) = (\Sigma\Gamma\Delta).$$

Με αφαίρεση των δύο αυτών σχέσεων κατά μέλη βρίσκουμε $(\beta\beta\Sigma) = (\beta\Gamma\Sigma)$.

- ii) Τα τμήματα ΣΕ, ΣΖ είναι ύψη των τριγώνων $\hat{A}\Sigma\Gamma$, $\hat{A}\Sigma\beta$ αντίστοιχα, οπότε σύμφωνα με το i) έχουμε:

$$(\beta\beta\Sigma) = (\beta\Gamma\Sigma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\beta \cdot \Sigma Z = \frac{1}{2}\beta\Gamma \cdot \Sigma\epsilon \Leftrightarrow \beta\beta \cdot \Sigma Z = \beta\Gamma \cdot \Sigma\epsilon.$$

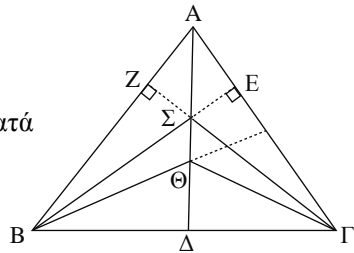
Επίσης, από το i) για $\Sigma \equiv \Theta$ έχουμε $(\beta\beta\Theta) = (\beta\Gamma\Theta)$ (1).

Πάλι από το i), αφού Θ σημείο της διαμέσου ΒΚ του τριγώνου $\hat{A}\beta\Gamma$ έχουμε $(\beta\beta\Theta) = (\beta\Theta\Gamma)$ (2).

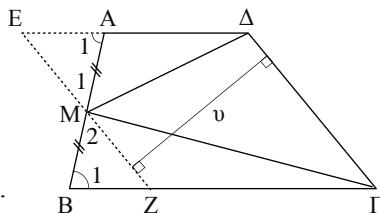
Από τις (1) και (2) προκύπτει $(\beta\beta\Theta) = (\beta\Gamma\Theta) = (\beta\Gamma\Theta)$ και

επειδή $(\beta\beta\Theta) + (\beta\Gamma\Theta) + (\beta\Gamma\Theta) = (\beta\beta\Gamma)$ προκύπτει τελικά ότι

$$(\beta\beta\Theta) = (\beta\Gamma\Theta) = (\beta\Gamma\Theta) = \frac{1}{3}(\beta\beta\Gamma), \text{ που είναι και το ζητούμενο.}$$



4. Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο E και τη ΒΓ στο Z.



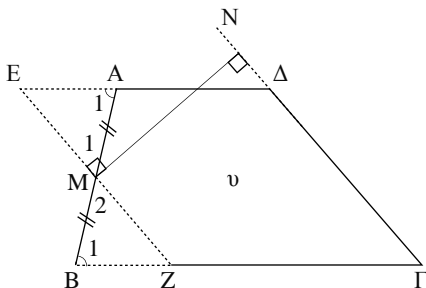
Τα τρίγωνα $\hat{E} \hat{A} M$ και $\hat{Z} \hat{B} M$ έχουν:

$AM = BM$, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$,
επομένως είναι ίσα, άρα και ισεμβαδικά.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } (AB\Gamma\Delta) &= (AMZ\Gamma\Delta) + (BMZ) = \\ &= (AMZ\Gamma\Delta) + (AME) = (EZ\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot \upsilon = 2 \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot \upsilon = 2(M\Gamma\Delta), \end{aligned}$$

δηλαδή $(AB\Gamma\Delta) = 2(M\Gamma\Delta)$.

5. Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο E και τη ΒΓ στο Z.



Τα τρίγωνα $\hat{E} \hat{A} M$ και $\hat{Z} \hat{B} M$ έχουν $AM = MB$, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, επομένως είναι ίσα,
άρα και ισεμβαδικά,

δηλαδή $(EAM) = (ZBM)$.

Με τη βοήθεια αυτού προκύπτει ότι

το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο $EZ\Gamma\Delta$ και επειδή $(EZ\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot MN$ προκύπτει $(AB\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot MN$.

6. i) Φέρνουμε $EH \perp A\Theta$. Στο τρίγωνο $\hat{A} \hat{E} \Theta$

η γωνία $\hat{E} \hat{A} \Theta$ είναι οξεία, επομένως έχουμε:

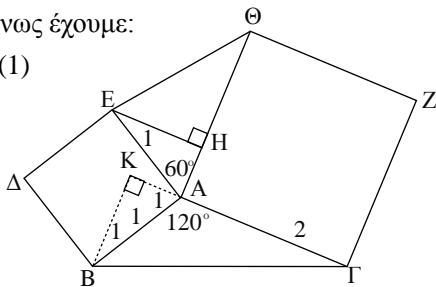
$$E\Theta^2 = AE^2 + A\Theta^2 - 2AE \cdot AH \quad (1)$$

Αλλά το τρίγωνο $\hat{H} \hat{A} E$ είναι
ορθογώνιο με $\hat{E}_1 = 30^\circ$,

$$\text{οπότε: } AH = \frac{AE}{2} = \frac{1}{2}$$

και η (1) γίνεται:

$$E\Theta^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow E\Theta = \sqrt{3}.$$



- ii) Στο i) βρήκαμε ότι

$E\Theta = \sqrt{3} \Leftrightarrow E\Theta^2 = 3 = 4 - 1 = A\Theta^2 - AE^2 \Leftrightarrow E\Theta^2 + AE^2 = A\Theta^2 \Leftrightarrow \hat{E} \hat{A} \Theta$
ορθογώνιο στο E, δηλαδή $\hat{A} \hat{E} \Theta = 1L$ και επειδή και $\hat{\Delta} \hat{E} A = 1L$
συμπεραίνουμε ότι τα Δ, E, Θ είναι συνευθειακά.

iii) Είναι $(B\Gamma Z\Theta E\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma Z\Theta) + (E\Theta A) + (AB\Delta E)$ (2).

Φέρνουμε το ύψος BK του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τότε $\hat{A}_1 = 60^\circ$, οπότε $\hat{B}_1 = 30^\circ$ και επομένως $AK = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\hat{A}B$ ($K=1L$)

έχουμε $BK^2 = AB^2 - AK^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow BK = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

οπότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ τ.μ. (3).

Εξάλλου $(A\Gamma Z\Theta) = 4$ τ.μ. και $(AB\Delta E) = 1$ τ.μ. (4).

Τέλος στο ερώτημα i) είδαμε ότι $E\Theta = \sqrt{3}$ και στο ii) ότι $A\hat{E}\Theta = 1L$,

οπότε $(EA\Theta) = \frac{1}{2} AE \cdot E\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5).

Αντικαθιστώντας τις (3), (4) και (5) στην (2)

βρίσκουμε $(B\Gamma Z\Theta E\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 5 + \sqrt{3}$.

7. Έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$ (1).

Αλλά $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot BM$ (2).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $M\hat{K}B$

έχουμε $\eta\mu\omega = \frac{BM}{BK} \Leftrightarrow BM = \eta\mu\omega \cdot BK$,

οπότε η (2) γίνεται:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot BK \cdot \eta\mu\omega$ (3).

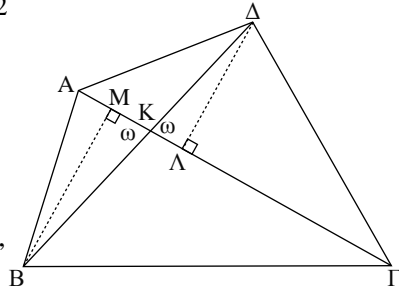
Όμοια βρίσκουμε ότι $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot \Delta K \cdot \eta\mu\omega$ (4).

Η (1) με τη βοήθεια των (3) και (4) δίνει:

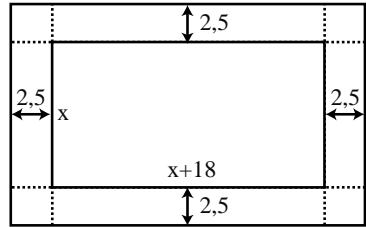
$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot (BK + \Delta K) \eta\mu\omega = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta \cdot \eta\mu\omega$.

Σχόλιο:

Αν $\omega = 30^\circ$ τότε $BM = \frac{BK}{2}$, $\Delta L = \frac{\Delta K}{2}$ και $(AB\Gamma\Delta) = \frac{A\Gamma \cdot B\Delta}{4}$.



8. Αν το πλάτος του οικοπέδου είναι x m, το μήκος του θα είναι $(x+18)$ m. Η δένδροστοιχία που περιβάλλει το οικόπεδο αποτελείται:



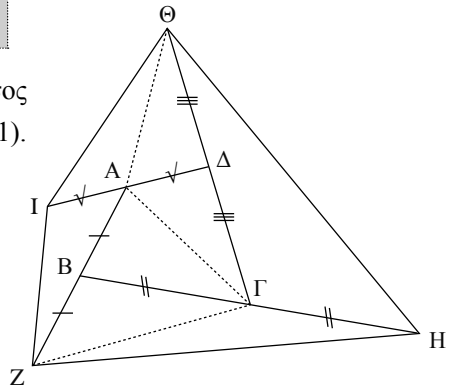
- i) Από δύο ορθογώνια με διαστάσεις $(x+18)$ m και $2,5$ m και συνολικό εμβαδόν $2(x+18) \cdot 2,5 = 5(x+18)$ m².
- ii) Από δύο άλλα ορθογώνια με διαστάσεις x m και $2,5$ m και συνολικό εμβαδόν $2 \cdot x \cdot 2,5 = 5x$ m².
- iii) Από τέσσερα τετράγωνα πλευράς $2,5$ m και συνολικό εμβαδόν $4 \cdot (2,5)^2 = 25$ m².

Επειδή το άθροισμα των εμβαδών ισούται με 695 m² έχουμε την εξίσωση $5(x+18) + 5x + 25 = 695$ ή $10x = 580$ ή $x = 58$.

Άρα το πλάτος είναι 58 m και το μήκος $58 + 18 = 76$ m.

Σύνθετα Θέματα

1. α) Επειδή $IA = AD$ η $ΘΙ$ είναι διάμεσος στο $\triangle IAD$, οπότε $(I\Theta A) = (A\Theta D)$ (1).
Όμοια η $A\Delta$ είναι διάμεσος στο $\triangle A\Gamma$, οπότε $(A\Theta \Delta) = (A\Delta \Gamma)$ (2).
Από (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.



- β) Σύμφωνα με το α) έχουμε $(I\Theta \Delta) = 2(I\Theta A) = 2(A\Delta \Gamma)$ (3).
Όμοια αν φέρουμε τη διάμεσο $Z\Gamma$ του τριγώνου BZH βρίσκουμε $(ZBH) = 2(AB\Gamma)$ (4).
Προσθέτοντας τις (3) και (4) κατά μέλη βρίσκουμε: $(I\Theta \Delta) + (ZBH) = 2(AB\Gamma \Delta)$.
- γ) Έχουμε $(IZH\Theta) = (I\Theta \Delta) + (ZBH) + (IAZ) + (H\Gamma\Theta) + (AB\Gamma \Delta)$ (5).
Στο β) βρήκαμε ότι $(I\Theta \Delta) + (ZBH) = 2(AB\Gamma \Delta)$ (6)
Όμοια βρίσκουμε ότι: $(IAZ) + (H\Gamma\Theta) = 2(AB\Gamma \Delta)$ (7).
Με τη βοήθεια των (6) και (7) η (5) δίνει: $(IZH\Theta) = 5(AB\Gamma \Delta)$.

2. Στο τρίγωνο $\hat{B}\hat{M}\hat{N}$ η $\hat{M}\hat{P}$ είναι διάμεσος, επομένως $(\hat{M}\hat{N}\hat{P}) = \frac{1}{2}(\hat{B}\hat{M}\hat{N})$.

Στο τρίγωνο $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}$ η $\hat{B}\hat{N}$ είναι διάμεσος,

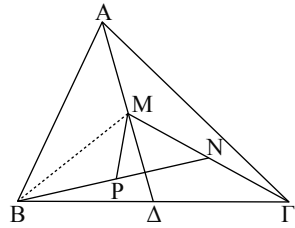
οπότε $(\hat{B}\hat{M}\hat{N}) = \frac{1}{2}(\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma})$ (2).

Όμως $(\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}) = (\hat{B}\hat{M}\hat{\Delta}) + (\hat{\Delta}\hat{M}\hat{\Gamma})$ και τα τμήματα $\hat{B}\hat{M}$ και $\hat{\Gamma}\hat{M}$ είναι διάμεσοι στα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ αντίστοιχα, οπότε:

$$(\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}) = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}) + \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}) = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}) \quad (3).$$

Αντικαθιστώντας στην (1) διαδοχικά τη (2) και την (3) βρίσκουμε:

$$(\hat{M}\hat{N}\hat{P}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}) = \frac{1}{8} (\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}).$$



3. α) Αρκεί να δείξουμε ότι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 1\text{L}$.

Τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{Z}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{H}$ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές ίσες, άρα θα είναι και $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$, οπότε $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \hat{B}_2 + \hat{B}_1 = \hat{B} = 1\text{L}$ αφού $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ τετράγωνο.

β) Το τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{Z}$ είναι ορθογώνιο στο \hat{B} , οπότε (πυθαγόρειο θεώρημα)

$$\hat{A}\hat{Z}^2 = \hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}\hat{Z}^2 = \alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{16} = \frac{25\alpha^2}{16} \Leftrightarrow \hat{A}\hat{Z} = \frac{5\alpha}{4}.$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{Z}$ είναι $\hat{B}\hat{K} \perp \hat{A}\hat{Z}$,

$$\text{οπότε } \hat{A}\hat{B}^2 = \hat{A}\hat{Z} \cdot \hat{A}\hat{K} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{5\alpha}{4} \hat{A}\hat{K} \Leftrightarrow \hat{A}\hat{K} = \frac{4\alpha}{5}.$$

Το τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{H}$ είναι ορθογώνιο στο $\hat{\Delta}$,

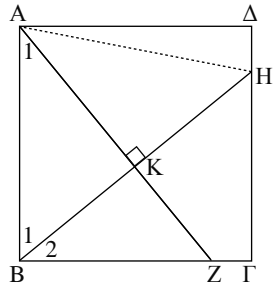
$$\text{οπότε } \hat{A}\hat{H}^2 = \hat{A}\hat{\Delta}^2 + \hat{\Delta}\hat{H}^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{16} = \frac{17\alpha^2}{16} \Leftrightarrow \hat{A}\hat{H} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{17}.$$

Τέλος από το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{K}\hat{A}\hat{H}$ ($\hat{K} = 1\text{L}$)

$$\text{έχουμε: } \hat{A}\hat{H}^2 = \hat{A}\hat{K}^2 + \hat{K}\hat{H}^2 \Leftrightarrow \frac{17\alpha^2}{16} = \frac{16\alpha^2}{25} + \hat{K}\hat{H}^2 \Leftrightarrow \hat{K}\hat{H} = \frac{13}{20}\alpha.$$

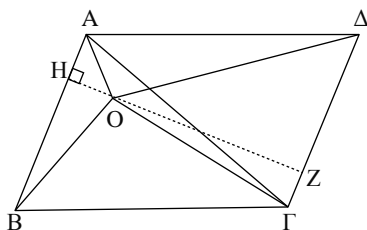
γ) Είναι $(\hat{A}\hat{K}\hat{H}\hat{\Delta}) = (\hat{A}\hat{K}\hat{H}) + (\hat{A}\hat{\Delta}\hat{H}) = \frac{1}{2} \hat{A}\hat{K} \cdot \hat{K}\hat{H} + \frac{1}{2} \hat{A}\hat{\Delta} \cdot \hat{\Delta}\hat{H} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\alpha}{5} \cdot \frac{13\alpha}{20} + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha}{4} = \frac{77}{200} \alpha^2 \text{ τ.μ.}$$



4. α) Από το Ο φέρνουμε ΗΖ κάθετη τις παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου.

$$\begin{aligned} \text{Τότε: } (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) &= \\ &= \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΟΗ + \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΟΖ = \\ &= \frac{1}{2} ΑΒ(ΟΗ + ΟΖ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΗΖ = \\ &= \frac{1}{2} (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) \end{aligned}$$



β) Έχουμε $(ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΑΒΓ) - (ΟΑΒ) = (ΟΓΔ)$, σύμφωνα με το α.

5. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων $ΑΓ = \delta_1$ και $ΒΔ = \delta_2$ του ρόμβου ΑΒΓΔ. Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, οπότε έχουμε:

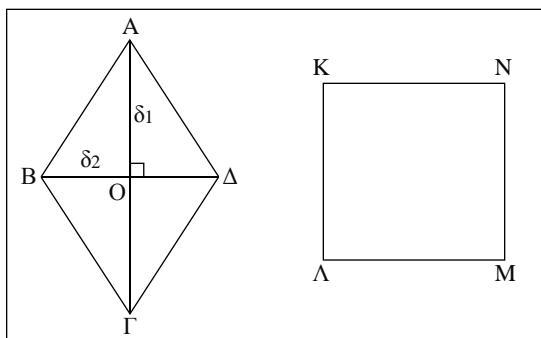
$$ΑΒ^2 = ΑΟ^2 + ΒΟ^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} = \frac{1}{4}(\delta_1^2 + \delta_2^2) \quad (1).$$

Είναι όμως γνωστό ότι: $x^2 + y^2 \geq 2xy$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, οπότε από την (1) προκύπτει:

$$\alpha^2 \geq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \delta_1 \delta_2 = \frac{\delta_1 \delta_2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ΚΛΜΝ) \geq (ΑΒΓΔ).$$

Προφανώς το "=" ισχύει όταν $\delta_1 = \delta_2$, δηλαδή όταν ο ρόμβος γίνει τελικά τετράγωνο.



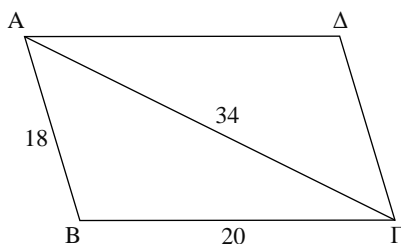
§ 10.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα, άρα και ισεμβαδικά και επομένως $(ΑΒΓΔ) = 2(ΑΒΓ)$.

Το εμβαδόν του $ΑΒΓ$ θα το υπολογίσουμε με τη βοήθεια του τύπου του Ήρωνα.

$$\text{Γι' αυτό έχουμε: } \tau = \frac{18 + 20 + 34}{2} = 36,$$



οπότε $(AB\Gamma) = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 2} = 144$ τ.μ. και επομένως
 $(AB\Gamma\Delta) = 2 \cdot 144 = 288$ τ.μ.

2. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z .

Τότε το $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $BZ = 11$ και επομένως $Z\Gamma = 14$.

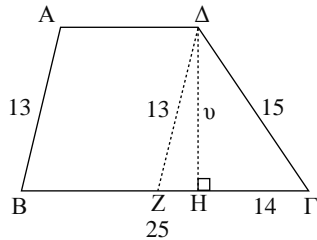
Επίσης $\Delta Z = AB = 13$. Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του, οπότε σύμφωνα με τον τύπο του Ήρωνα

έχουμε: $(\Delta Z\Gamma) = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ τ.μ. Φέρνουμε το ύψος ΔH του τριγώνου $\Delta Z\Gamma$ (που είναι και ύψος του τραπεζιού).

Τότε $(\Delta Z\Gamma) = \frac{1}{2} Z\Gamma \cdot \Delta H \Leftrightarrow 84 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \Delta H \Leftrightarrow \Delta H = 12$.

Το εμβαδόν πλέον του τραπεζιού $AB\Gamma\Delta$

είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} (A\Delta + B\Gamma) \Delta H = \frac{1}{2} (11 + 25) \cdot 12 = 216$ τ.μ.



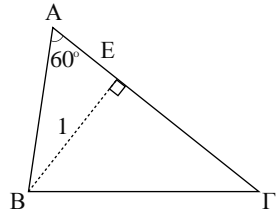
3. Έστω ότι $\hat{A} = 60^\circ$, φέρνουμε $BE \perp A\Gamma$, οπότε $\hat{B}_1 = 30^\circ$ και επομένως $AE = \frac{AB}{2} = 2$.

Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο $E\hat{A}\Gamma$ βρίσκουμε:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow BE = 2\sqrt{3},$$

οπότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ τ.μ.

Τριγωνομετρικά: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$.



4. i) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = 24$.

ii) Με το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε

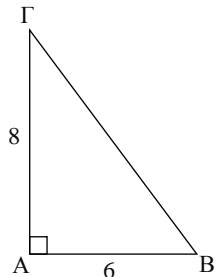
$$B\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Leftrightarrow B\Gamma = 10, \text{ οπότε}$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \nu_\alpha \Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \nu_\alpha \Leftrightarrow \nu_\alpha = \frac{24}{5}.$$

iii) Έχουμε: $\tau = \frac{1}{2} (6 + 8 + 10) = 12$,

οπότε από τον τύπο $E = \tau \cdot \rho$

βρίσκουμε ότι $\rho = \frac{24}{12} = 2$.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έχουμε $\beta\gamma = \alpha u_\alpha \Leftrightarrow \beta\gamma = 2E$ και επειδή $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ η τελευταία είναι ισοδύναμη με την: $\beta\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{2R} \Leftrightarrow \alpha = 2R$ η οποία σημαίνει ότι η πλευρά ΒΓ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου, οπότε η γωνία Α είναι ορθή και αντίστροφα.

2. i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} E < \tau(\tau - \alpha) &\Leftrightarrow E^2 < \tau^2(\tau - \alpha)^2 \Leftrightarrow \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma) < \tau^2(\tau - \alpha)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\tau - \beta)(\tau - \gamma) < \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - (\gamma - \beta)^2 < (\beta + \gamma)^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ. \end{aligned}$$

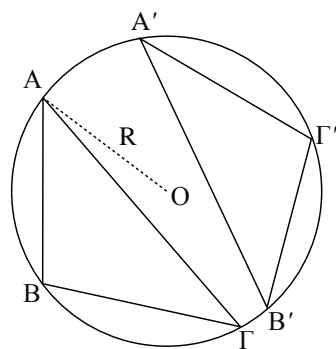
ii) Όμοια $E = \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$.

iii) Επίσης $E > \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$.

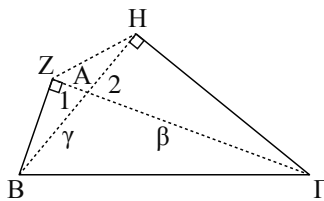
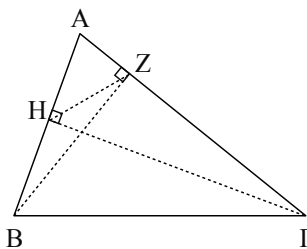
3. Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $A'B'\hat{\Gamma}'$ έχουν τον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο (O, R) και επομένως έχουμε:

$$(AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \text{ και } (A'B'\Gamma') = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{4R}.$$

Με διαίρεση αυτών κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.



4. Έστω ότι η γωνία \hat{A} είναι οξεία.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{H}\Gamma$ ($\hat{H} = 1L$) έχουμε $AH = \beta \sigma \nu \alpha$ και από το $A\hat{Z}B$ ($\hat{Z} = 1L$) ότι $AZ = \gamma \sigma \nu \alpha$, οπότε:

$$(AZH) = \frac{1}{2} AH \cdot AZ \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} (\beta \cdot \sigma\upsilon\nu A)(\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A)\eta\mu A =$$

$$= \frac{1}{2} \beta\gamma\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu^2 A = (AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2 A.$$

Έστω ότι $\hat{A} > 90^\circ$ τότε $AZ = -\gamma\sigma\upsilon\nu A$ και $AH = -\beta\sigma\upsilon\nu A$,
 οπότε πάλι $(AZH) = \frac{1}{2} AZ \cdot AH \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \beta\gamma\eta\mu A \sigma\upsilon\nu^2 A = (AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2 A.$

5. i) Έχουμε: $(AB\Gamma) = E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon_\alpha \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \frac{2E}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\upsilon_\alpha} = \frac{\alpha}{2E}.$

Όμοια $\frac{1}{\upsilon_\beta} = \frac{\beta}{2E}, \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{\gamma}{2E}.$

Άρα: $\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{\alpha}{2E} + \frac{\beta}{2E} + \frac{\gamma}{2E} = \frac{2\tau}{2E} = \frac{\tau}{\tau\rho} = \frac{1}{\rho}.$

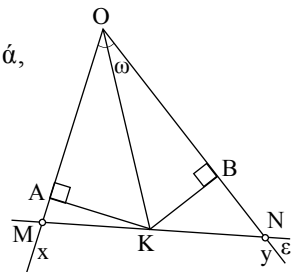
Σύνθετα Θέματα

1. α) Από το Κ φέρνουμε $KA \perp Ox$ και $KB \perp Oy$.
 Τότε τα τμήματα KA και KB είναι σταθερά,
 ανεξάρτητα δηλαδή από τη θέση της $(\epsilon).$

Τότε έχουμε: $\frac{1}{(OKM)} + \frac{1}{(OKN)} =$

$$= \frac{(OKN) + (OKM)}{(OKM)(OKN)} = \frac{(OMN)}{(OKM)(OKN)} =$$

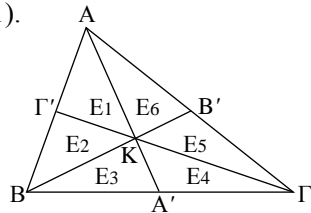
$$= \frac{\frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \eta\mu\omega}{\frac{1}{2} OM \cdot KA \cdot \frac{1}{2} ON \cdot KB} = \frac{2\eta\mu\omega}{KA \cdot KB} = \text{σταθερό.}$$



β) Σύμφωνα με το α) θεωρώντας τις τέμνουσες BKB' και $\Gamma K\Gamma'$ των πλευρών της \hat{A} έχουμε: $\frac{1}{E_1 + E_2} + \frac{1}{E_6} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_5 + E_6}$ (1).

Όμοια θεωρώντας τις τέμνουσες $\Gamma K\Gamma'$ και AKA' των πλευρών της \hat{B} βρίσκουμε:

$$\frac{1}{E_3 + E_4} + \frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_1 + E_2}$$
 (2).



Όμοια από τις τέμνουσες των πλευρών της $\hat{\Gamma}$

βρίσκουμε ότι: $\frac{1}{E_6 + E_5} + \frac{1}{E_4} = \frac{1}{E_3 + E_4} + \frac{1}{E_5}$ (3).

Με πρόσθεση των (1), (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.

2. Έστω τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Λ, ρ_α) στη γωνία A .

Φέρουμε τα τμήματα ΛA , ΛB και $\Lambda \Gamma$.

Σχηματίζονται τα τρίγωνα $\hat{\Lambda}B\hat{\Gamma}$, $\hat{\Lambda}\hat{\Gamma}A$

και $\hat{\Gamma}\hat{A}B$, που έχουν το ίδιο ύψος ρ_α .

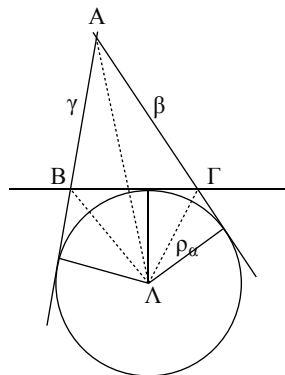
Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε:

$$(\hat{A}B\hat{\Gamma}) + (\hat{\Lambda}B\hat{\Gamma}) = (\hat{\Lambda}B\hat{A}) + (\hat{\Lambda}\hat{\Gamma}A) \quad \text{ή}$$

$$(\hat{A}B\hat{\Gamma}) = (\hat{\Lambda}B\hat{A}) + (\hat{\Lambda}\hat{\Gamma}A) - (\hat{\Lambda}B\hat{\Gamma}) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\rho_\alpha + \frac{1}{2}\beta\rho_\alpha - \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(\gamma + \beta - \alpha)\rho_\alpha = \frac{1}{2}(2\tau - \alpha - \alpha)\rho_\alpha = (\tau - \alpha)\rho_\alpha.$$



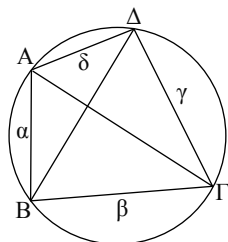
Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλοι τύποι.

3. Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του εγγράψιμου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τότε: $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta) =$

$$= \frac{\alpha\delta \cdot B\Delta}{4R} + \frac{\beta\gamma \cdot B\Delta}{4R} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{4R} B\Delta \quad (1)$$

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) =$$

$$= \frac{\alpha\beta \cdot A\Gamma}{4R} + \frac{\gamma\delta \cdot A\Gamma}{4R} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{4R} A\Gamma \quad (2)$$



Από (1) και (2) προκύπτει:

$$(\alpha\delta + \beta\gamma)B\Delta = (\alpha\beta + \gamma\delta)A\Gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{A\Gamma}{B\Delta}$$

§ 10.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Εφ' όσον τα τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις $\alpha = \alpha'$ έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{30}{(A'B'\Gamma')} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (A'B'\Gamma') = 20 \text{ τ.μ.}$$

2. Φέρουμε την διαγώνιο ΑΓ.

$$\text{Τότε } (AB\Gamma) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} = 10 \text{ m}^2.$$

Τα τρίγωνα $M\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$

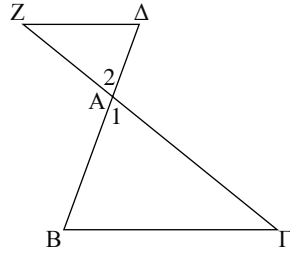
έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Γ, οπότε: $\frac{(MB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{MB}{AB} = \frac{MB}{2MB} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Άρα } (MB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) = 5 \text{ m}^2.$$

3. Τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ έχουν $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
ως κατακορυφήν και επομένως:

$$\frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{2}{3}AB \cdot \frac{1}{2}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A\Delta Z) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 \text{ τ.μ.}$$



4. Τα τρίγωνα $A\hat{E}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι όμοια ($EZ \parallel B\Gamma$)

$$\text{και επομένως: } \frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 \quad (1)$$

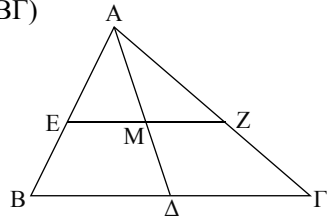
Όμως και τα τρίγωνα $A\hat{E}M$ και $A\hat{B}\Delta$

$$\text{είναι όμοια, οπότε: } \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{A\Delta} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\text{αφού } \frac{AM}{A\Delta} = \frac{3}{5}. \text{ Από (1) και (2)}$$

$$\text{βρίσκουμε: } \frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow (AEZ) = \frac{9}{25}(AB\Gamma) = \frac{9}{25} \cdot 75 = 27 \text{ τ.μ.,}$$

$$\text{οπότε: } (BEZ\Gamma) = 48 \text{ τ.μ.}$$



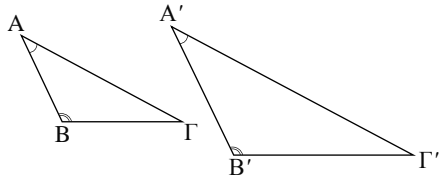
5. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} \quad (1)$$

Όμοια αφού $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$

$$\text{έχουμε: } \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1) και (2) προκύπτει: } \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} \Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta.$$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

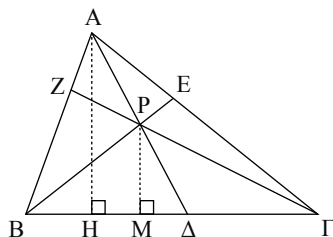
1. Τα τρίγωνα $\hat{P}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ έχουν κοινή βάση

$B\Gamma$ και επομένως αν φέρουμε τα ύψη PM και

$$AH \text{ αυτών θα έχουμε: } \frac{(B\hat{P}\hat{\Gamma})}{(A\hat{B}\hat{\Gamma})} = \frac{PM}{AH} \quad (1)$$

Όμοια τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{H}\hat{\Delta}$ και $\hat{P}\hat{M}\hat{\Delta}$

$$\text{είναι όμοια, οπότε: } \frac{PM}{AH} = \frac{P\Delta}{A\Delta} \quad (2)$$



Από (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή $\frac{(B\hat{P}\hat{\Gamma})}{(A\hat{B}\hat{\Gamma})} = \frac{P\Delta}{A\Delta}$.

$$\text{ii) Σύμφωνα με το i) έχουμε: } \frac{P\Delta}{A\Delta} = \frac{(B\hat{P}\hat{\Gamma})}{(A\hat{B}\hat{\Gamma})}, \frac{PE}{BE} = \frac{(A\hat{P}\hat{\Gamma})}{(A\hat{B}\hat{\Gamma})} \text{ και } \frac{PZ}{\hat{\Gamma}Z} = \frac{(A\hat{P}\hat{B})}{(A\hat{B}\hat{\Gamma})}.$$

Με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{P\Delta}{A\Delta} + \frac{PE}{BE} + \frac{PZ}{\hat{\Gamma}Z} = \frac{(B\hat{P}\hat{\Gamma}) + (A\hat{P}\hat{\Gamma}) + (A\hat{P}\hat{B})}{(A\hat{B}\hat{\Gamma})} = \frac{(A\hat{B}\hat{\Gamma})}{(A\hat{B}\hat{\Gamma})} = 1.$$

$$\text{iii) Έχουμε } \frac{PA}{A\Delta} = \frac{A\Delta - P\Delta}{A\Delta} = 1 - \frac{P\Delta}{A\Delta}.$$

Όμοια $\frac{PB}{BE} = 1 - \frac{PE}{BE}$ και $\frac{P\hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma}Z} = 1 - \frac{PZ}{\hat{\Gamma}Z}$, οπότε προσθέτοντας αυτές κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη την ii) προκύπτει το ζητούμενο.

2. Τα τρίγωνα $\hat{E}\hat{B}\hat{M}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$

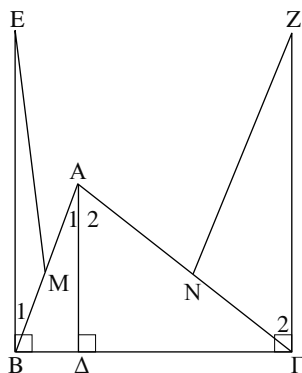
έχουν $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, $(A\Delta//BE)$, οπότε:

$$\frac{(E\hat{B}\hat{M})}{(A\hat{B}\hat{\Delta})} = \frac{BE \cdot BM}{A\Delta \cdot AB} = \frac{2A\Delta \cdot BM}{A\Delta \cdot 2BM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (E\hat{B}\hat{M}) = (A\hat{B}\hat{\Delta}) \quad (1)$$

Όμοια αφού $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2$ βρίσκουμε
ότι $(Z\hat{\Gamma}\hat{N}) = (A\hat{\Gamma}\hat{\Delta}) \quad (2)$.

Με πρόσθεση των (1), (2) προκύπτει
 $(E\hat{B}\hat{M}) + (Z\hat{\Gamma}\hat{N}) = (A\hat{B}\hat{\Delta} + A\hat{\Gamma}\hat{\Delta}) = (A\hat{B}\hat{\Gamma})$.



3. Έστω Κ το σημείο τομής των χορδών ΑΒ και ΓΔ, τότε:

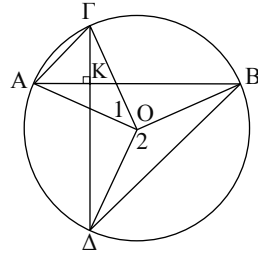
$$A\hat{K}\Gamma = \frac{1}{2}(\widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Delta}) \Leftrightarrow 1L = \frac{1}{2}(\widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Delta}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Delta} = 2L,$$

$$\text{οπότε: } \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = (\widehat{\Delta B}) + (\widehat{A\Gamma}) = 2L$$

$$\text{και επομένως: } \frac{(OAG)}{(OB\Delta)} = \frac{OA \cdot OG}{OD \cdot OB} = \frac{R \cdot R}{R \cdot R} = 1$$

(R η ακτίνα του κύκλου), δηλαδή $(OAG) = (OB\Delta)$.



4. Η αποδεικτέα ισότητα γράφεται:

$$\frac{(ABE)}{(ADE)} = \frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $A\hat{B}E$ και $A\hat{\Delta}E$ έχουν κοινό το ύψος

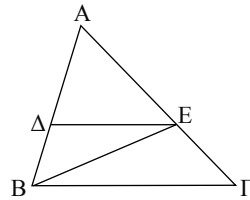
$$\text{από την κορυφή E, άρα: } \frac{(ABE)}{(ADE)} = \frac{AB}{A\Delta} \quad (2)$$

Επίσης τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{B}E$ έχουν κοινό το ύψος από την κορυφή B, άρα:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} = \frac{A\Gamma}{AE} \quad (3)$$

Επειδή όμως $DE \parallel B\Gamma$ είναι: $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE}$ (θεώρημα Θαλή), οπότε από τις (2)

και (3) προκύπτει η (1).



5. Είναι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$, οπότε:

$$\frac{(AMZ)}{(AB\Delta)} = \frac{AM \cdot AZ}{A\Delta \cdot AB} = 1 \text{ αφού } AM = A\Delta$$

και $AZ = AB$, ως πλευρές τετραγώνων και επομένως: $(AMZ) = (AB\Delta)$ (1).

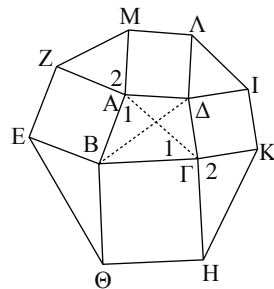
Όμοια προκύπτει ότι $(\Gamma HK) = (B\Gamma\Delta)$ (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει: $(AMZ) + (\Gamma HK) = (AB\Gamma\Delta)$ (3).

Όμοια, θεωρώντας τα τρίγωνα $B\hat{\Theta}E$, $A\hat{B}\Gamma$

και $\Delta\hat{I}\Lambda$, $A\hat{B}\Gamma$ βρίσκουμε ότι: $(B\Theta E) + (\Delta I \Lambda) = (AB\Gamma\Delta)$ (4).

Από (3) και (4) προκύπτει $(AMZ) + (\Gamma HK) = (B\Theta E) + (\Delta I \Lambda)$.



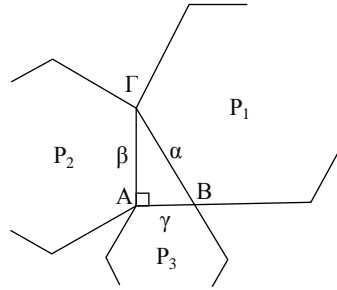
6. Επειδή τα πολύγωνα P_2 και P_1 είναι όμοια με ομόλογες πλευρές β , α ,

$$\text{αντίστοιχα έχουμε: } \frac{(P_2)}{(P_1)} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (1)$$

$$\text{Όμοια: } \frac{(P_3)}{(P_1)} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{(P_2) + (P_3)}{(P_1)} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow (P_2) + (P_3) = (P_1).$$



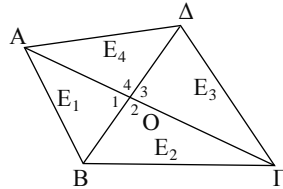
Σύνθετα Θέματα

1. Τα τρίγωνα $\hat{A}OB$ και $\hat{A}OD$

$$\text{έχουν: } \hat{O}_1 + \hat{O}_4 = 2L,$$

$$\text{οπότε: } \frac{E_1}{E_4} = \frac{OA \cdot OB}{OA \cdot OD} = \frac{OB}{OD},$$

$$\text{δηλαδή } \frac{E_1}{E_4} = \frac{OB}{OD} \quad (1)$$

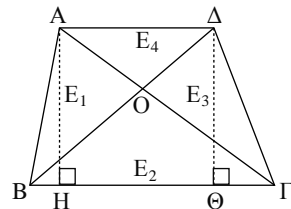


(τη σχέση (1) μπορούμε να τη συμπεράνουμε παρατηρώντας ότι τα τρίγωνα που θεωρήσαμε έχουν κοινό το ύψος από την κορυφή A).

$$\text{Όμοια, αφού } \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 2L \text{ προκύπτει ότι: } \frac{E_2}{E_3} = \frac{OB}{OD} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: } \frac{E_1}{E_4} = \frac{E_2}{E_3} \Leftrightarrow E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_4.$$

- i) Τα τρίγωνα $\hat{AB}\Gamma$ και $\hat{B}\Delta\Gamma$ έχουν κοινή βάση $B\Gamma$ και ίσα ύψη AH και ΔZ , ως αποστάσεις των παραλλήλων $A\Delta$ και $B\Gamma$, άρα $(AB\Gamma) = (\Delta B\Gamma) \Leftrightarrow E_1 + E_2 = E_2 + E_3 \Leftrightarrow E_1 = E_3$.



- ii) Επειδή $E_1 = E_3$ η σχέση που αποδείξαμε

$$E_1 E_3 = E_2 E_4 \text{ γίνεται } E_1^2 = E_2 E_4.$$

iii) Έχουμε:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = (E_1 + E_3) + E_2 + E_4$$

$$= 2E_1 + E_2 + E_4 \geq 2E_1 + 2\sqrt{E_2 E_4} \quad (x + y \geq 2\sqrt{xy}, \text{ για κάθε } x, y \geq 0)$$

$$= 2E_1 + 2E_1 \text{ (από το ii)}$$

$$= 4E_1, \text{ δηλαδή } E \geq 4E_1 \Leftrightarrow E_1 \leq \frac{1}{4}E.$$

Σχόλιο:

Το « \Leftrightarrow » ισχύει όταν

$$E_2 = E_4 \Leftrightarrow \frac{E_2}{E_4} = 1 \Leftrightarrow \frac{OB \cdot O\Gamma}{OA \cdot O\Delta} = 1 \Leftrightarrow OA \cdot O\Delta = OB \cdot O\Gamma \quad (3).$$

Επειδή όμως $\triangle A\hat{O}\Delta$ και $\triangle B\hat{O}\Gamma$ είναι

$$\text{όμοια, οπότε: } \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{O\Delta}{OB} \Leftrightarrow OA \cdot OB = O\Gamma \cdot O\Delta \quad (4).$$

Με πολλαπλασιασμό των (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$OA^2 = O\Gamma^2 \Leftrightarrow OA = O\Gamma \quad (5), \text{ οπότε η (3) δίνει } OB = O\Delta \quad (6).$$

Οι (5), (6) μας βεβαιώνουν πως το $\triangle AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

2. Επειδή από το Σ έχουμε φέρει παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, καθένα από τα τρίγωνα με εμβαδόν E_1, E_2, E_3 έχει ίσες γωνίες με το $\triangle AB\Gamma$ και επομένως είναι όμοιο με το $\triangle AB\Gamma$.

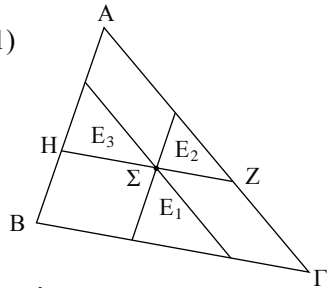
$$\text{Γι' αυτό έχουμε: } \frac{E_1}{E} = \left(\frac{\Delta E}{B\Gamma}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E}} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \quad (1)$$

$$\text{Όμοια: } \frac{\sqrt{E_3}}{\sqrt{E}} = \frac{\Sigma H}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{E_3}}{\sqrt{E}} = \frac{B\Delta}{B\Gamma} \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E}} = \frac{E\Gamma}{B\Gamma} \quad (3).$$

Με πρόσθεση των (1), (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3}}{\sqrt{E}} = \frac{\Delta E + B\Delta + E\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{B\Gamma} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3} = \sqrt{E}.$$

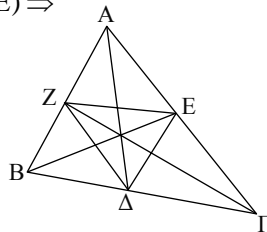


3. i) Επειδή τα Δ, Ε, Ζ, είναι εσωτερικά σημεία των πλευρών του τριγώνου έχουμε: $(\Delta EZ) = (AB\Gamma) - (AZE) - (BZ\Delta) - (\Delta GE) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = 1 - \frac{(AZE)}{(AB\Gamma)} - \frac{(BZ\Delta)}{(AB\Gamma)} - \frac{(\Delta GE)}{(AB\Gamma)} \quad (1).$$

Τα τρίγωνα $A\hat{Z}E$ και $A\hat{B}\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία \hat{A} και επομένως:

$$\frac{(AZE)}{(AB\Gamma)} = \frac{AZ \cdot AE}{AB \cdot \Gamma\Gamma}.$$



Επειδή όμως ΓΖ και ΒΕ διχοτόμοι είναι (παράγραφος 7.8)

$$AZ = \frac{\gamma\beta}{\alpha + \beta} \quad \text{και} \quad AE = \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma}, \quad \text{οπότε η προηγούμενη ισότητα δίνει:}$$

$$\frac{(AZE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\beta\gamma}{(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)} \quad (2). \quad \text{Όμοια βρίσκουμε ότι:}$$

$$\frac{(BZ\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma\alpha}{(\beta + \gamma) \cdot (\beta + \alpha)} \quad (3) \quad \text{και} \quad \frac{(\Delta ZE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\alpha\beta}{(\gamma + \alpha) \cdot (\gamma + \beta)} \quad (4).$$

Με αντικατάσταση των (2), (3) και (4) στην (1) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} &= 1 - \frac{\beta\gamma}{(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)} - \frac{\gamma\alpha}{(\beta + \gamma) \cdot (\beta + \alpha)} - \frac{\alpha\beta}{(\gamma + \alpha) \cdot (\gamma + \beta)} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \cdot (\gamma + \alpha) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \gamma\alpha(\gamma + \alpha) - \alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \cdot (\gamma + \alpha)} = \\ &= \frac{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta^2 + \beta\gamma) \cdot (\gamma + \alpha) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \gamma\alpha(\gamma + \alpha) - \alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \cdot (\gamma + \alpha)} = \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma - \alpha^2\beta + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta\gamma^2 + \alpha\beta\gamma - \beta^2\gamma - \beta\gamma^2 - \gamma^2\alpha - \gamma\alpha^2 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2}{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \cdot (\gamma + \alpha)} = \\ &= \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \cdot (\gamma + \alpha)} \quad (5). \end{aligned}$$

- ii) Σύμφωνα με την $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y \geq 0$

έχουμε: $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, $\beta + \gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma}$ και $\gamma + \alpha \geq 2\sqrt{\alpha\gamma}$ από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη βρίσκουμε:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \cdot (\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma, \quad \text{οπότε η (5) γίνεται:}$$

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} \leq \frac{2\alpha\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\Delta EZ) \leq \frac{1}{4}(AB\Gamma).$$

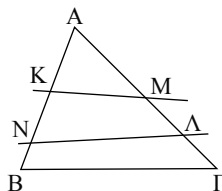
4. **Ανάλυση:** Έστω ΚΜ και ΛΝ οι ζητούμενες ευθείες.

$$\text{Τότε: } (AKM) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) \quad \text{ή} \quad \frac{(AKM)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \quad (1).$$

Αλλά τα τρίγωνα $\hat{A}KM$ και $\hat{A}\Gamma M$ έχουν κοινή την γωνία \hat{A} , οπότε η (1)

είναι ισοδύναμη με την $\frac{(AK)(AM)}{(AB)(A\Gamma)} = \frac{1}{3}$

$$\text{ή } \frac{3AK}{AB} = \frac{A\Gamma}{AM} \quad (2)$$



που σημαίνει ότι το AM είναι η τέταρτη ανάλογος των γνωστών τμημάτων $3AK$, AB και $A\Gamma$ και επομένως το M είναι γνωστό σημείο της $A\Gamma$.

$$\text{Όμοια } \frac{(AN\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{(AN)(A\Lambda)}{(AB)(A\Gamma)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3A\Lambda}{AB} = \frac{2A\Gamma}{AN}$$

δηλαδή το AN τέταρτη ανάλογος των τμημάτων $3A\Lambda$, AB και $2A\Gamma$ και επομένως AN γνωστό τμήμα.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τα τμήματα AM και AN (πρόβλημα 1 § 7.7) και έτσι βρίσκουμε τα σημεία M, N .

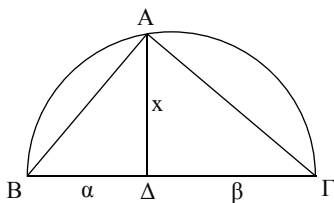
$$\text{Απόδειξη:} \text{ Είναι: } \frac{(AKM)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AK)(AM)}{(AB)(A\Gamma)} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AB}{3AK} = \frac{1}{3} \text{ από (2).}$$

Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει πάντα λύση.

§ 10.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν x η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου θα είναι $x^2 = \alpha\beta$. Για την κατασκευή επομένως του x θεωρούμε πάνω σε μια ευθεία τα σημεία B, Δ και Γ ώστε $B\Delta = \alpha$ και $\Delta\Gamma = \beta$.



Με διάμετρο τη $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο και φέρουμε την κάθετη της $B\Gamma$ στο Δ που τέμνει το ημικύκλιο του A . Επειδή $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ το $A\Delta$ είναι το ζητούμενο τμήμα x .

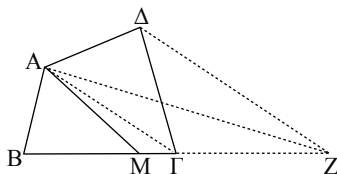
2. Αν x είναι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου τότε $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$ και επομένως το x είναι η υποτεινούσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β .
3. **Ανάλυση:** Έστω AM η ζητούμενη ευθεία, τότε $(AMB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ (1).

Από το Δ φέρουμε παράλληλο προς τη διαγώνιο $A\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο Z . Τότε είναι $(AB\Gamma\Delta) = (ABZ)$,

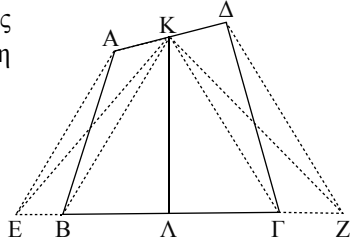
$$\text{οπότε η (1) γίνεται } (AMB) = \frac{1}{2}(ABZ)$$

$$\text{ή ισοδύναμα } (ABM) = (AMZ)$$

και επειδή τα τρίγωνα $\hat{A}BM$ και $\hat{A}MZ$ έχουν το ίδιο ύψος από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $BM = MZ$. Τα υπόλοιπα βήματα είναι απλά.



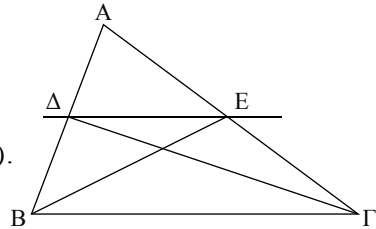
4. i) Από τα Α και Δ φέρουμε παράλληλες προς τις ΚΒ και ΚΓ που τέμνουν την προέκταση της ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Φέρουμε τις ΚΕ και ΚΖ. Τότε, όπως είναι γνωστό, $(ABK) = (KEB)$ και $(KΔΓ) = (KΓZ)$, οπότε $(ABΓΔ) = (KEZ)$.



- ii) Σύμφωνα με το i) αν Λ είναι το μέσο του ΕΖ θα είναι $(ΚΕΛ) = (ΚΛΖ)$ και επομένως $(ΚΑΒΛ) = (ΚΔΓΛ)$.

Γενικές Ασκήσεις

1. i) Τα τρίγωνα $B\hat{A}E$ και $\Gamma\hat{A}E$ έχουν κοινή βάση ΔΕ. Επειδή $B\Gamma // \Delta E$ έχουμε $(B\Delta E) = (\Gamma\Delta E)$.



- ii) Έχουμε $(BAE) = (\Gamma A\Delta) \Leftrightarrow (B\Delta E) + (A\Delta E) = (\Gamma\Delta E) + (A\Delta E) \Leftrightarrow (B\Delta E) = (\Gamma\Delta E)$ που ισχύει από το (i) ερώτημα.

- iii) Αν τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ τότε οι ΒΕ και ΓΔ είναι διάμεσοι του τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$,

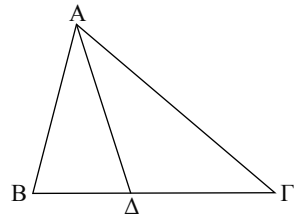
$$\text{οπότε } (BAE) = \frac{(AB\Gamma)}{2} \text{ και } (\Gamma A\Delta) = \frac{(AB\Gamma)}{2}.$$

$$\text{Άρα } (BAE) + (\Gamma A\Delta) = (AB\Gamma).$$

2. i) Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma$ έχουν τη γωνία \hat{B} κοινή,

$$\text{οπότε } \frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{BA \cdot B\Delta}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AB\Delta) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4} (AB\Gamma).$$



- ii) Έχουμε $(AB\Delta) \leq \frac{1}{4} (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4} (AB\Gamma) \leq \frac{1}{4} (AB\Gamma) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\lambda \leq \lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow 0 \leq (\lambda - 2)^2, \text{ που ισχύει.}$$

- iii) Είναι $(AB\Delta) + (A\Gamma\Delta) = (AB\Gamma)$ και αφού $(AB\Delta) \leq \frac{1}{4}(AB\Gamma)$
 προκύπτει ότι $(A\Gamma\Delta) \geq \frac{3}{4}(AB\Gamma)$.

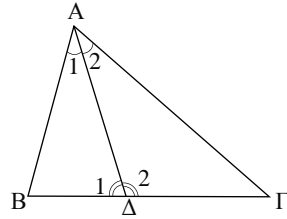
3. Επειδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ έχουμε $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{AB \cdot \Delta\Delta}{A\Gamma \cdot \Delta\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma}$ (1).

Επίσης επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$

έχουμε $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{\Delta B \cdot \Delta\Delta}{\Delta\Gamma \cdot \Delta\Delta} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$,

δηλαδή το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου.

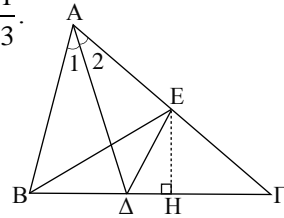


4. i) Έχουμε: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{AB \cdot \Delta\Delta}{A\Gamma \cdot \Delta\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{3\gamma} = \frac{1}{3}$.

Άρα $(AB\Delta) = \frac{1}{3}(A\Delta\Gamma)$.

ii) Έχουμε $(AB\Delta) \cdot (\Delta E\Gamma) = (A\Delta\Gamma) \cdot (BE\Delta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{(BE\Delta)}{(\Delta E\Gamma)} \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} \frac{(BE\Delta)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{1}{3}$.



Πράγματι τα τρίγωνα $B\hat{E}\Delta$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ έχουν κοινό ύψος EH,

οπότε $\frac{(BE\Delta)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ (θεώρημα διχοτόμου) $= \frac{1}{3}$.

iii) Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{\Gamma}$,

οπότε $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{\Gamma A \cdot \Gamma B}{\Gamma E \cdot \Gamma\Delta} = \frac{\Gamma A}{\Gamma E} \cdot \frac{\Gamma\Delta + \Delta B}{\Gamma\Delta} = 2 \left(1 + \frac{\Delta B}{\Gamma\Delta} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}$.

Άρα $3(AB\Gamma) = 8(\Delta E\Gamma)$ ή $(\Delta E\Gamma) = \frac{3}{8}(AB\Gamma)$.

5. i) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

ii) Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ έχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή,

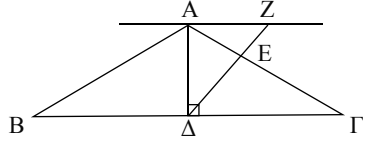
οπότε $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma E \cdot \Gamma \Delta}{\Gamma A \cdot \Gamma B}$.

Αλλά $\frac{\Gamma E}{\Gamma A} = \frac{2}{3}$ και $\frac{\Gamma \Delta}{\Gamma B} = \frac{1}{2}$ (AΔ ύψος και διάμεσος),

οπότε $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (\Delta E\Gamma) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

iii) Τα τρίγωνα $A\hat{E}Z$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι όμοια ($AZ \parallel \Delta\Gamma$),

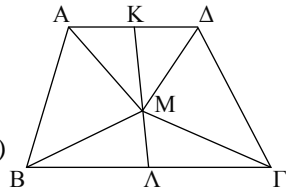
οπότε $\frac{(AZE)}{(\Delta E\Gamma)} = \left(\frac{AE}{E\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Άρα $(AZE) = \frac{1}{4}(\Delta E\Gamma) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.



6. i) Τα τραπέζια $AB\Lambda K$ και $K\Lambda\Gamma\Delta$ έχουν ίδιο ύψος υ και ίσες βάσεις ($AK = K\Delta$, $B\Lambda = \Lambda\Gamma$). Άρα $(AB\Lambda K) = (K\Lambda\Gamma\Delta)$.

ii) Είναι $(MAK) = (MK\Delta)$ και $(MB\Lambda) = (M\Lambda\Gamma)$ αφού K, Λ μέσα των $A\Delta, B\Gamma$.

Άρα $(AB\Lambda K) = (K\Lambda\Gamma\Delta) \Leftrightarrow (MAK) + (MAB) + (MB\Lambda) = (MK\Delta) + (M\Gamma\Delta) + (M\Lambda\Gamma) \Leftrightarrow (MAB) = (M\Gamma\Delta)$.

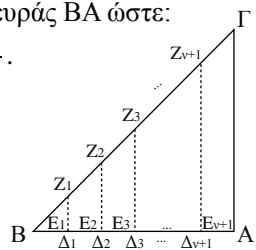


7. i), ii) Θεωρούμε τα σημεία $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{v-1}$, της πλευράς BA ώστε:

$B\Delta_1 = \Delta_1\Delta_2 = \Delta_2\Delta_3 = \dots = \Delta_{v-1}A = d$, όπου $d = \frac{\gamma}{v}$.

Φέρνοντας από τα $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{v-1}$ παράλληλες προς την $A\Gamma$ τα τρίγωνα

$B\hat{\Delta}_1 Z_1, B\hat{\Delta}_2 Z_2, \dots, B\hat{\Delta}_{v-1} Z_{v-1}$ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή,



οπότε έχουμε: $\Delta_1 Z_1 = d, \Delta_2 Z_2 = 2d, \Delta_3 Z_3 = 3d, \dots, \Delta_{v-1} Z_{v-1} = (v-1)d$.

Είναι:

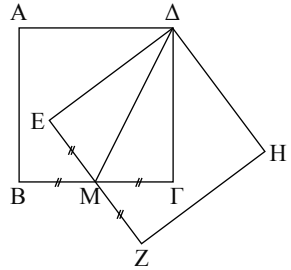
$E_1 = \frac{1}{2} d^2, E_2 = \frac{1}{2} (d + 2d)d = \frac{3}{2} d^2, \dots, E_v = \frac{1}{2} ((v-1)d + vd)d = \frac{2v-1}{2} d^2$,

οπότε η ισότητα: $E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_v = (AB\Gamma)$ δίνει:

$$\frac{1}{2}d^2 + \frac{3}{2}d^2 + \dots + \frac{2\nu-1}{2}d^2 = \frac{1}{2}(\nu d)(\nu d) = \frac{\nu^2}{2}d^2 \Leftrightarrow 1+3+5+\dots+(2\nu-1) = \nu^2$$

8. Κάθε τετράγωνο έχει πλευρά μήκους 6μ.μ. Είναι:

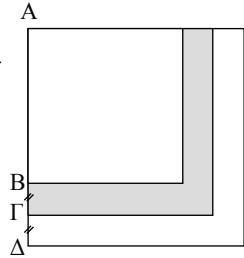
$$\begin{aligned} (ABMZH\Delta) &= (AB\Gamma\Delta) + (\Delta EZH) - (\Delta EM\Gamma) = \\ &= 36 + 36 - 2(\Delta EM) = \\ &= 72 - 2 \cdot \frac{1}{2} \Delta E \cdot EM = \\ &= 72 - 6 \cdot 3 = 72 - 18 = 54. \end{aligned}$$



9. Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής είναι:
 $A\Gamma^2 - AB^2 = 17 \Leftrightarrow (A\Gamma + AB)(A\Gamma - AB) = 171$ (1).

Επειδή $A\Gamma, AB$ ακέραιοι, $A\Gamma + AB > A\Gamma - AB$

και έχουμε:
$$\begin{cases} A\Gamma + AB = 17 \\ A\Gamma - AB = 1 \end{cases}$$



Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε $A\Gamma = 9$ και $AB = 8$,
 οπότε: $A\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta = A\Gamma + B\Gamma = A\Gamma + A\Gamma - AB = 18 - 8 = 10$,
 οπότε το μικρότερο τετράγωνο έχει εμβαδόν $AB^2 = 8^2 = 64$ τ.μ.
 και το μεγαλύτερο $A\Delta^2 = 10^2 = 100$ τ.μ.

10. Ανάλυση:

Έστω ΔE και ZH οι ζητούμενες ευθείες.

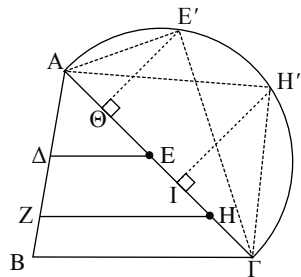
Τότε:
$$\frac{(A\Delta E)}{\lambda} = \frac{(\Delta EHZ)}{\kappa} = \frac{(ZH\Gamma B)}{\nu}$$
 ή

$$\frac{(A\Delta E)}{\lambda} = \frac{(AZH) - (A\Delta E)}{\mu} = \frac{(AB\Gamma) - (AZH)}{\nu} \quad (1)$$

Επειδή όμως τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}E, A\hat{Z}H$
 και $A\hat{B}\Gamma$ είναι όμοια μεταξύ τους θα έχουμε:

$$\frac{(A\Delta E)}{AE^2} = \frac{(AZH)}{AH^2} = \frac{(AB\Gamma)}{A\Gamma^2} = \kappa,$$

οπότε η (1) γίνεται:
$$\frac{AE^2}{\lambda} = \frac{AH^2 - AE^2}{\mu} = \frac{A\Gamma^2 - AH^2}{\nu} \quad (2).$$



Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου $A\Gamma$ και πάνω σ' αυτό παίρνουμε τα σημεία E' και H' ώστε $AE' = AE$ και $AH' = AH$ αντίστοιχα. Αν $E'\Theta, H'\Ι \perp A\Gamma$ από τα ορθογώνια τρίγωνα $E'\hat{A}\Gamma$ και $H'\hat{A}\Gamma$ παίρνουμε: $AE^2 = AE'^2 = A\Gamma \cdot A\Theta$

και $AH^2 = AH'^2 = AG \cdot AI$,

οπότε η (2) γίνεται: $\frac{AG \cdot A\Theta}{\lambda} = \frac{AG(AI - A\Theta)}{\mu} = \frac{AG(AG - AI)}{\nu}$

ή $\frac{A\Theta}{\lambda} = \frac{\Theta I}{\mu} = \frac{I\Gamma}{\nu}$ που σημαίνει ότι τα Θ, I διαιρούν την AG σε μέρη ανάλογα των λ, μ, ν .

Σύνθεση: Βρίσκουμε τα σημεία Θ, I διαιρώντας την AG σε μέρη $A\Theta, \Theta I, I\Gamma$ ανάλογα την λ, μ, ν . Από τα Θ, I φέρνουμε καθέτους στην AG που τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου AG στα E και H' αντίστοιχα. Γράφουμε τους κύκλους (A, AE') και (A, AH') που τέμνουν την AG στα E και H αντίστοιχα. Τότε οι ζητούμενες ευθείες είναι οι παράλληλες προς τη $B\Gamma$ που φέρνονται από τα E, H .

Απόδειξη: Ξεκινώντας από την

$$\frac{A\Theta}{\lambda} = \frac{\Theta I}{\mu} = \frac{I\Gamma}{\nu} \quad \text{ή} \quad \frac{A\Theta}{\lambda} = \frac{AI - A\Theta}{\mu} = \frac{AG - AI}{\nu}$$

και ακολουθώντας αντίστροφη πορεία από αυτήν της

$$\text{ανάλυσης καταλήγουμε στην} \quad \frac{(A\Delta E)}{\lambda} = \frac{(\Delta E H Z)}{\mu} = \frac{(Z H \Gamma B)}{\nu}.$$

Διερήνηση: Το πρόβλημα έχει πάντα λύση.

11. α) i) Δες Αποδεικτικές ασκήσεις 1. i) § 10.5.

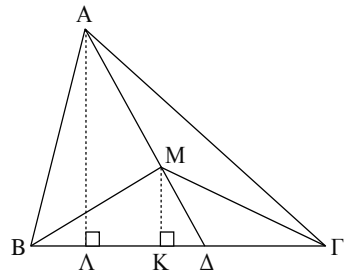
ii) Τα τρίγωνα $\hat{B}M\Gamma$ και $\hat{A}B\Gamma$ έχουν την ίδια βάση $B\Gamma$,

$$\text{οπότε:} \quad \frac{(BM\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{MK}{AL} \quad (1). \text{ Όμως}$$

τα τρίγωνα $\hat{M}K\Delta$ και $\hat{A}\Lambda\Delta$ είναι

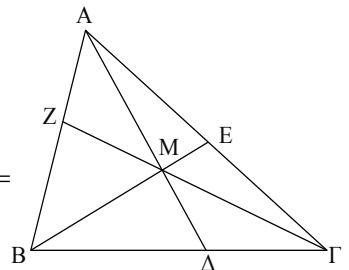
$$\text{όμοια και επομένως:} \quad \frac{MK}{AL} = \frac{M\Delta}{A\Delta} \quad (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.



β) Σύμφωνα με τα α) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{E\Gamma} + \frac{AZ}{ZB} &= \frac{(AMB)}{(BM\Gamma)} + \frac{(AM\Gamma)}{(BM\Gamma)} = \\ &= \frac{(AMB) + (AM\Gamma)}{(BM\Gamma)} = \\ &= \frac{(AB\Gamma) - (BM\Gamma)}{(BM\Gamma)} = \frac{(AB\Gamma)}{(BM\Gamma)} - 1 = \frac{A\Delta}{M\Delta} - 1 = \\ &= \frac{A\Delta - M\Delta}{M\Delta} = \frac{AM}{M\Delta}. \end{aligned}$$



11

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Σε κύκλο (O, R) ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{\nu} \Leftrightarrow \widehat{A\hat{O}B} = \frac{360^\circ}{\nu} \Leftrightarrow AB = \lambda_\nu \Leftrightarrow OK = \alpha_\nu,$$

όπου OK το απόστημα της χορδής AB .

(**Ασκήσεις:** § 11.3 Εμπέδωσης 3, Αποδεικτικές 2, Σύνθετα 1 - § 11.7 Σύνθετα 1).

- Κάθε κανονικό ν -γωνο $A_1A_2\dots A_\nu$. Αν το σχεδιάζουμε εγγεγραμμένο σε κύκλο (§ 11.2 θεώρημα I) και υπολογίζουμε τα ίσα τόξα.

$$\text{Είναι: } \widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots = \widehat{A_\nu A_1} = \frac{360^\circ}{\nu}.$$

(**Ασκήσεις:** § 11.2 Εμπέδωσης 7).

- Το κανονικό ν -γωνο, το περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) έχει απόστημα $\alpha'_\nu = R$.

(**Ασκήσεις:** § 11.2 Αποδεικτικές 5).

- Ένας κυκλικός τροχός κινητού σε μια πλήρη περιστροφή διανύει απόσταση ίση με το μήκος του L .

Όλοι οι τροχοί ενός κινητού διανύουν την ίδια απόσταση (αφού κινούνται ταυτόχρονα), αλλά –αν οι ακτίνες τους είναι άνισες– κάθε ένας κάνει **διαφορετικό** αριθμό στροφών.

(**Ασκήσεις:** § 11.4 Εμπέδωσης 4).

§ 11.1-11.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σύμφωνα με τον τύπο $\varphi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$

έχουμε: $\varphi_5 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$,

$\varphi_6 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

και όμοια $\varphi_{10} = 144^\circ$ και $\varphi_{12} = 150^\circ$.

Για την κεντρική γωνία ω_v , έχουμε τύπο $\omega_v = \frac{360^\circ}{v}$,

οπότε: $\omega_5 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, $\omega_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\omega_{10} = 36^\circ$ και $\omega_{12} = 30^\circ$.

2. Έστω v το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Τότε: $\varphi_v = 108^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} = 108^\circ \Leftrightarrow 72^\circ = \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow v = 5$,

άρα η σωστή απάντηση είναι η Δ.

3. Επειδή τα κανονικά αυτά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι

όμοια, οπότε έχουμε: $\frac{\alpha_5}{\alpha'_5} = \frac{R}{R'} = \frac{P_5}{P'_5} = \lambda = 2$ και ο λόγος των εμβαδών θα

είναι: $\frac{E_5}{E'_5} = \lambda^2 = 4$.

4. Αρκεί να δείξουμε ότι $v_1 = v_2$. Με το σχήμα Horner βρίσκουμε ότι η δοθείσα

εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $(v-5)(v^2 + 2v + 3) = 0 \Leftrightarrow v = 5$

ή $v^2 + 2v + 3 = 0$. Η εξίσωση $v^2 + 2v + 3 = 0$ είναι προφανώς αδύνατη στο \mathbb{N} ,

επομένως μοναδική ρίζα της δοθείσας εξίσωσης είναι η $v = 5$, άρα $v_1 = v_2 = 5$,

δηλαδή τα πολύγωνα έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών, άρα είναι όμοια.

5. Έστω κανονικό v -γωνο τέτοιο ώστε:

$\varphi_v < 90^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} < 90^\circ \Leftrightarrow 90^\circ < \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow v < 4$, άρα $v = 3$, δηλαδή

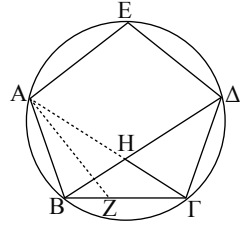
το μόνο κανονικό v -γωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.

6. i) Γνωρίζουμε ότι $\frac{\lambda_v^2}{4} + \alpha_v^2 = R^2$ και $\frac{\lambda_\mu^2}{4} + \alpha_\mu^2 = R^2$ από τις οποίες

$$\text{προκύπτει ότι: } \frac{\lambda_v^2}{4} + \alpha_v^2 = \frac{\lambda_\mu^2}{4} + \alpha_\mu^2 \Leftrightarrow \lambda_v^2 - \lambda_\mu^2 = 4(\alpha_\mu^2 - \alpha_v^2).$$

ii) Σύμφωνα με το i) έχουμε: $\lambda_v > \lambda_\mu \Leftrightarrow \lambda_v^2 > \lambda_\mu^2 \Leftrightarrow \lambda_v^2 - \lambda_\mu^2 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4(\alpha_\mu^2 - \alpha_v^2) > 0 \Leftrightarrow \alpha_\mu^2 > \alpha_v^2 \Leftrightarrow \alpha_\mu > \alpha_v.$

7. i) Επειδή τόξα $\widehat{AE} = \widehat{\Delta\Gamma}$ έχουμε $AE = \Delta E$,
 οπότε το $\triangle AED\Gamma$ είναι τραπέζιο και μάλιστα
 ισοσκελές αφού $AE = \Delta\Gamma$ ως πλευρές
 κανονικού πενταγώνου. Το τρίγωνο
 $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές αφού $AB = B\Gamma$.



ii) Έστω AZ η διχοτόμος της $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε: } \widehat{Z\hat{A}E} &= \widehat{Z\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{A}E} = \frac{1}{2}\widehat{B\hat{A}\Gamma} + \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma\Delta E}) = \frac{1}{4}(\widehat{B\Gamma}) + \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma\Delta E}) = \\ &= \frac{1}{4}72^\circ + \frac{1}{2}144^\circ = 18^\circ + 72^\circ = 90^\circ, \text{ άρα } AZ \perp AE. \end{aligned}$$

iii) Σύμφωνα με το i) είναι $A\Gamma \parallel E\Delta$ και $AE \parallel B\Delta$, οπότε το $\triangle AEDH$ είναι
 παραλληλόγραμμο. Το παραλληλόγραμμο αυτό έχει τις δύο διαδοχικές
 πλευρές AE και $E\Delta$ ίσες (πλευρές του n πολυγώνου), άρα είναι ρόμβος.
 Τα τρίγωνα $\triangle AB\hat{\Gamma}$, $\triangle B\hat{H}\Gamma$ είναι όμοια, γιατί έχουν τη $\hat{\Gamma}$ κοινή και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{B}\Delta}$
 ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα. Επομένως είναι:

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{H\Gamma} \Leftrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma \cdot H\Gamma \quad (1).$$

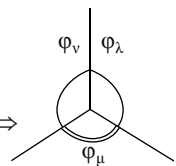
Αλλά $B\Gamma = AE$ και $AE = AH$ από το ρόμβο $\triangle AEDH$, οπότε $B\Gamma = AH$
 και η (1) γίνεται $AH^2 = A\Gamma \cdot H\Gamma$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

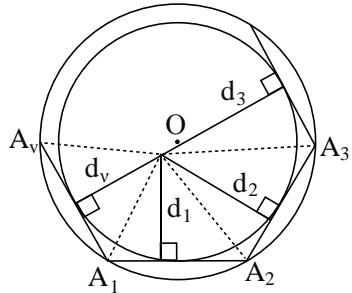
1. Η κάλυψη με τα πλακίδια θα είναι πλήρης όταν σε
 κάθε σημείο που είναι κοινή κορυφή και των τριών
 πλακιδίων δεν υπάρχουν κενά. Αυτό θα συμβαίνει όταν
 $\varphi_\lambda + \varphi_\mu + \varphi_\nu = 360^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{\lambda}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{\mu}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}\right) = 360^\circ \Leftrightarrow$$

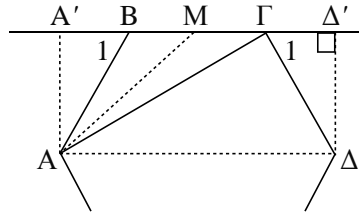
$$\Leftrightarrow \frac{360^\circ}{\lambda} + \frac{360^\circ}{\mu} + \frac{360^\circ}{\nu} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}$$



2. Έστω n -γωνο $A_1A_2\dots A_n$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και περιγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) ($R > \rho$). Οι πλευρές A_1A_2, A_2A_3, \dots του n -γώνου είναι χορδές του (O, R) που έχουν αποστάτηματα ίσα με ρ , άρα είναι ίσες, δηλαδή το πολύγωνο έχει ίσες τις πλευρές του. Επειδή πλέον οι χορδές $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ του (O, R) είναι ίσες και τα αντίστοιχα τόξα θα είναι ίσα, δηλαδή $\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots = \widehat{A_nA_1} = \widehat{\tau}$, οπότε και οι γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ είναι ίσες, αφού κάθε μια είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε τόξο $(n-2)\widehat{\tau}$. Άρα το $A_1A_2\dots A_n$ είναι κανονικό.



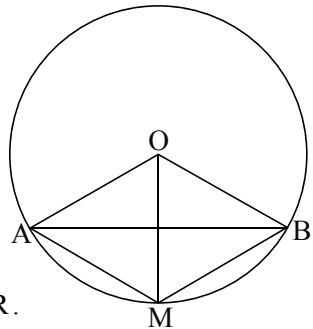
3. Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρνουμε $A'A \perp B\Gamma$. Με εφαρμογή του 2ου θεωρήματος διαμέσων στο $\triangle AB\Gamma$ παίρνουμε: $A\Gamma^2 - AB^2 = 2 \cdot B\Gamma \cdot A'M$ (1). Φέρνουμε επίσης $\Delta\Delta' \perp B\Gamma$.



Τα τρίγωνα $\triangle A'AB$ και $\triangle A'\Delta'\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$, άρα είναι ίσα, οπότε $A'B = \Gamma\Delta'$ και επομένως $A'M = M\Delta'$ (2). Από (1), (2) προκύπτει $A\Gamma^2 - AB^2 = B\Gamma \cdot A'\Delta' = B\Gamma \cdot A\Delta$ (το $\triangle AA'\Delta'$ είναι ορθογώνιο).

4. Έστω $AB = \lambda_n$ και M το μέσο του τόξου \widehat{AB} . Τότε $AM = \lambda_{2n}$ και $OM \perp AB$. Επειδή η $OM \perp AB$ το εμβαδόν του τετραπλεύρου $OAMB$ είναι $\frac{1}{2}(AB)(OM)$, δηλαδή $(OAMB) = \frac{1}{2}\lambda_n R$, οπότε:

$$E_{2n} = n(OAMB) = n \frac{1}{2}\lambda_n R = \frac{1}{2}(n\lambda_n)R = \frac{1}{2}P_n R.$$



5. Το κανονικό n -γωνο το περιγεγραμμένο στον (O, R) έχει πλευρά λ'_n και απόστημα R . Τα δύο αυτά πολύγωνα έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών, επομένως είναι όμοια, οπότε $\frac{\lambda'_n}{\lambda R} = \frac{\alpha_n}{R} \Leftrightarrow \lambda'_n R = \alpha_n \lambda'_n$.

6. Έστω $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ τα εμβαδά των κανονικών πολύγωνων με πλευρές τις $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα, αφού έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών, είναι όμοια.

Επομένως είναι: $\frac{E_\beta}{E_\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ και $\frac{E_\gamma}{E_\alpha} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες προκύπτει $\frac{E_\beta + E_\gamma}{E_\alpha} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}$ (1). Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, οπότε η (1) δίνει $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$.

Σύνθετα Θέματα

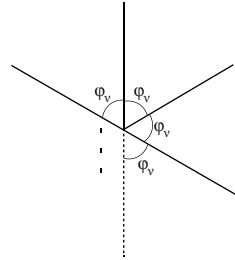
1. Έστω ότι χρειάζονται κ κανονικά v -γωνα για να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο, κορυφή των πολυγώνων. Τότε θα ισχύει:

$$\kappa \varphi_v = 360^\circ \Leftrightarrow \kappa \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{v} \right) = 360^\circ \Leftrightarrow$$

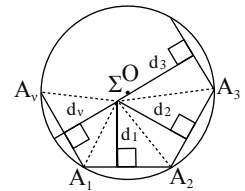
$$\Leftrightarrow \kappa \left(1 - \frac{2}{v} \right) = 2 \Leftrightarrow \kappa \frac{v-2}{v} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa = \frac{2v}{v-2} = \frac{2v-4+4}{v-2} = 2 + \frac{4}{v-2}, \text{ δηλαδή } \kappa = 2 + \frac{4}{v-2} \quad (1).$$

Επειδή το κ είναι ένας θετικός ακέραιος από την (1) προκύπτει ότι το $v-2$ είναι ένας θετικός διαιρέτης του 4, δηλαδή ότι: $v-2 = 1, 2, 4 \Leftrightarrow v = 3, 4, 6$. Άρα η κάλυψη πράγματι γίνεται μόνο με ισόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα ή κανονικά εξάγωνα.



2. Έστω $A_1 A_2 \dots A_v$ ένα κανονικό v -γωνο και d_1, d_2, \dots, d_v οι αποστάσεις ενός εσωτερικού σημείου Σ από τις πλευρές του $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_v A_1$ αντίστοιχα.



Επειδή το Σ είναι εσωτερικό σημείο έχουμε:

$$(\Sigma A_1 A_2) + (\Sigma A_2 A_3) + \dots + (\Sigma A_v A_1) = (A_1 A_2 \dots A_v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \lambda_v d_1 + \frac{1}{2} \lambda_v d_2 + \dots + \frac{1}{2} \lambda_v d_v = \frac{1}{2} P_v \alpha_v = \frac{1}{2} v \lambda_v \alpha_v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \lambda_v (d_1 + d_2 + \dots + d_v) = \frac{1}{2} \lambda_v v \alpha_v \Leftrightarrow d_1 + d_2 + \dots + d_v = v \alpha_v.$$

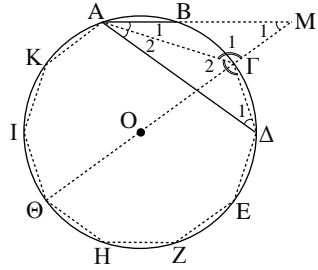
3. Επειδή οι κορυφές του κανονικού δεκαγώνου είναι ανά δύο αντιδιαμετρικά σημεία, η ακτίνα ΟΓ προεκτεινόμενη προς το Ο περνάει από την κορυφή Θ του πολυγώνου.

Είναι $\widehat{\Theta A} = 3 \cdot 36^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 36^\circ$,

οπότε: $\hat{M}_1 = \frac{1}{2}(\widehat{\Theta A} - \widehat{B\Gamma}) = \frac{1}{2}2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$.

Επίσης: $\hat{\Delta}_1 = \frac{1}{2}\widehat{A\Gamma} = \frac{1}{2}2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$

και επομένως $\hat{M}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1).



Εξάλλου $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (2) ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα. Από (1) και (2) προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{M}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ έχουν και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$. Έτσι στα προαναφερόμενα τρίγωνα έχουν ΑΓ: κοινή, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, άρα είναι ίσα, οπότε και $AM = A\Delta$.

§ 11.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ και $\alpha_3 = \frac{R}{2}$,

οπότε: $E_3 = \frac{1}{2}P_3\alpha_3 = \frac{1}{2}3\lambda_3\alpha_3 = \frac{3}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

(2ος τρόπος: $E_3 = \frac{\lambda_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$).

Επίσης $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$,

οπότε: $E_4 = \frac{1}{2}P_4\alpha_4 = \frac{1}{2}4\lambda_4\alpha_4 = 2R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2} = 2R^2$.

(2ος τρόπος: $E_4 = \lambda_4^2 = 2R^2$).

Είναι $\lambda_6 = R$ και $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$,

οπότε: $E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 = \frac{1}{2}6\lambda_6\alpha_6 = 3R\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.

2. Από την ισότητα $\frac{\lambda_v^2}{4} + \alpha_v^2 = R^2$ με αντικατάσταση των δεδομένων βρίσκουμε:

$$\frac{\lambda_v^2}{4} + 25 \cdot 3 = 100 \Leftrightarrow \lambda_v^2 = 4 \cdot 25 \Leftrightarrow \lambda_v = 10, \text{ δηλαδή}$$

$\lambda_v = R$, άρα το πολύγωνο είναι 6-γωνο, οπότε:

$$E_6 = \frac{1}{2} P_6 \alpha_6 = \frac{1}{2} 6 \lambda_6 \alpha_6 = 3 \lambda_6 \alpha_6 = 3 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

3. Από την ισότητα $\frac{\lambda_v^2}{4} + \alpha_v^2 = R^2$ με αντικατάσταση των δεδομένων προκύπτει:

$$\frac{64 \cdot 2}{4} + \alpha_v^2 = 64 \Leftrightarrow \alpha_v^2 = 32 = 16 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_v = 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

δηλαδή $\alpha_v = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, οπότε: $v = 4$ και επομένως:

$$E_4 = \frac{1}{2} P_4 \alpha_4 = \frac{1}{2} (4\lambda_4) \alpha_4 = 2\lambda_4 \alpha_4 = 2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{8} = 128 \text{ cm}^2.$$

4. Επειδή $\widehat{AB} = 60^\circ$ προκύπτει ότι: $AB = \lambda_6 = R$.

Όμοια αφού $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$ είναι: $B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$.

Επίσης, αφού $\widehat{\Gamma\Delta} = 120^\circ$ έχουμε ότι: $\Gamma\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Τέλος: $\widehat{A\Delta} = 360^\circ - \widehat{AB} - \widehat{B\Gamma} - \widehat{\Gamma\Delta} = 90^\circ$

και επομένως $A\Delta = \lambda_4 = R\sqrt{2}$.

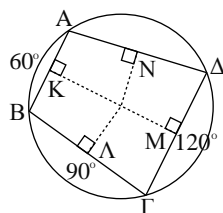
Για τους ίδιους αντίστοιχα λόγους είναι:

$$OK = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad OL = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad OM = \alpha_3 = \frac{R}{2} \quad \text{και} \quad ON = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

οπότε: $(AB\Gamma\Delta) = (OAB) + (OB\Gamma) + (O\Gamma\Delta) + (OAA) =$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot OK + \frac{1}{2} B\Gamma \cdot OL + \frac{1}{2} \Gamma\Delta \cdot OM + \frac{1}{2} A\Delta \cdot ON =$$

$$= \frac{1}{2} R \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} R\sqrt{2} \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} R\sqrt{3} \frac{R}{2} + \frac{1}{2} R\sqrt{2} \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2}{2} (2 + \sqrt{3}).$$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου n -πλευρών είναι $(2n - 4)$ ορθές, άρα: $2n - 4 = 8 \Leftrightarrow 2n = 12 \Leftrightarrow n = 6$, άρα πρόκειται για κανονικό εξάγωνο.

Επομένως:

$$E_6 = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} 6 \cdot \lambda_6 \alpha_6 = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} R \frac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow R^2 = 4 \Leftrightarrow R = 2.$$

2. Επειδή $AB \parallel \Delta\Gamma$ το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Εξάλλου: $AB = R = \lambda_6$ συνεπάγεται ότι $\widehat{AB} = 60^\circ$

και από $\Delta\Gamma = R\sqrt{3} = \lambda_3$ έπεται ότι $\widehat{\Delta\Gamma} = 120^\circ$.

Επομένως: $2\widehat{A\Delta} = 2\widehat{B\Gamma} = 360^\circ - 60^\circ - 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\Delta} = \widehat{B\Gamma} = 90^\circ$,

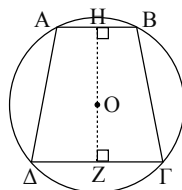
οπότε: $A\Delta = B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$.

Για το ύψος ZH του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$ZH = OZ + OH = \alpha_3 + \alpha_6 = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3}),$$

οπότε:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB + \Gamma\Delta)HZ = \frac{1}{2}(R + R\sqrt{3})\frac{R}{2}(1 + \sqrt{3}) = \frac{R^2}{4}(1 + \sqrt{3})^2.$$



3. Έστω $AB = \lambda_6$ και Γ το μέσο του τόξου \widehat{AB} .

Τότε $A\Gamma = \lambda_{12}$ και αν πάρουμε το αντιδιαμετρικό H του Γ θα είναι:

$\Gamma H \perp AB$ και $O\Delta = \alpha_6$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{H}\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχουμε:

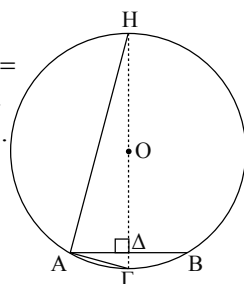
$$A\Gamma^2 = \Gamma H \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \lambda_{12}^2 = 2R(O\Gamma - O\Delta) = 2R(R - \alpha_6) =$$

$$= 2R\left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow \lambda_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Από την ισότητα:

$$\frac{\lambda_{12}^2}{4} + \alpha_{12}^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_{12}^2 = \frac{1}{4}(4R^2 - \lambda_{12}^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3})\right]^2 = \frac{1}{4}R^2(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow \alpha_{12} = \frac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$



4. Έστω $AB = \lambda_6$ και Γ το μέσο \widehat{AB} .

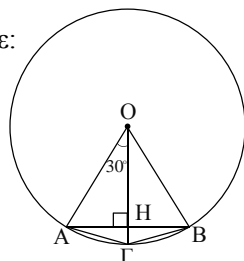
Το τετράπλευρο $OAGB$ έχει κάθετες διαγώνιες, οπότε:

$$(OAGB) = \frac{1}{2}AB \cdot O\Gamma = \frac{1}{2}\lambda_6 \cdot R = \frac{1}{2}R \cdot R = \frac{R^2}{2},$$

$$\text{δηλαδή } (OAGB) = \frac{R^2}{2} \quad (1).$$

Αλλά $E_{12} = 12(OAG) = 6(OAGB)$,

οπότε με τη βοήθεια της (1) προκύπτει ότι: $E_{12} = 3R^2$.



2ος τρόπος: Είναι $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Άρα $AH = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$.

Επομένως $(OAG) = \frac{1}{2} O\Gamma \cdot AH = \frac{1}{2} R \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{4}$ και $E_{12} = 12(OAG) = 3R^2$.

Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε $OA = OB = \alpha_3 = \frac{R}{2}$

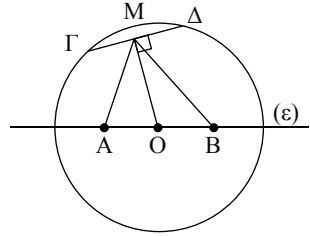
και $OM = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο $M\hat{A}B$ η MO είναι διάμεσος,

οπότε: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2R^2 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = (R\sqrt{2})^2 = \lambda_4^2$.

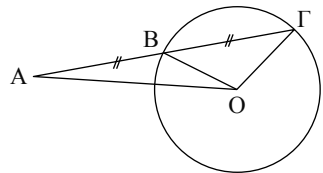


2. i) Επειδή $AB\Gamma$ τέμνουσα και A εξωτερικό σημείο του κύκλου είναι

$$AB \cdot A\Gamma = AO^2 - R^2 \Leftrightarrow AB \cdot 2AB =$$

$$= (R\sqrt{7})^2 - R^2 \Leftrightarrow AB^2 = 3R^2.$$

Άρα $AB = B\Gamma = R\sqrt{3} = \lambda_3$.



Σχόλιο:

Η $A\Gamma$ υπολογίζεται και από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $A\hat{O}\Gamma$.

ii) Επειδή OB διάμεσος στο τρίγωνο $A\hat{O}\Gamma$

έχουμε: $(AO\Gamma) = 2(BO\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} \lambda_3 \cdot \alpha_3 = R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

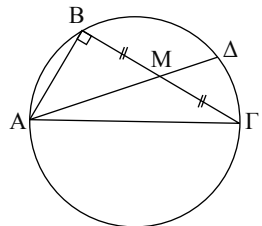
3. Έχουμε $AB = \lambda_6 \Leftrightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$

και $B\Gamma = \lambda_3 \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} = 120^\circ$.

Άρα $\widehat{A\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $\hat{B} = 90^\circ$. Επομένως

$AM^2 = AB^2 + BM^2 \Leftrightarrow AM^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{7R^2}{4} \Leftrightarrow AM = \frac{R\sqrt{7}}{2}$ (1).



Οι χορδές ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Μ, οπότε:

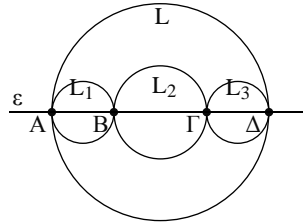
$$AM \cdot M\Delta = BM \cdot M\Gamma \Leftrightarrow M\Delta = \frac{BM \cdot M\Gamma}{AM} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} M\Delta = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{R\sqrt{7}}{2}} \Leftrightarrow M\Delta = \frac{3R\sqrt{7}}{14}.$$

§ 11.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + L_3 &= 2\pi \frac{AB}{2} + 2\pi \frac{B\Gamma}{2} + 2\pi \frac{\Gamma\Delta}{2} = \\ &= 2\pi \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} = 2\pi \frac{A\Delta}{2} = L. \end{aligned}$$



2. Ο κύκλος αυτός έχει ακτίνα το απόστημα α_6 του 6-γώνου.

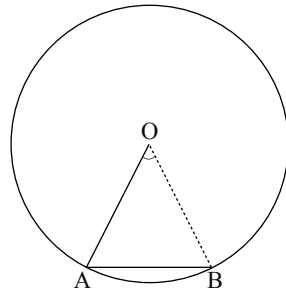
Είναι $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_6 = R$ και επειδή $\lambda_6 = 10$ προκύπτει $\alpha_6 = 5\sqrt{3}$, οπότε το ζητούμενο μήκος L του κύκλου είναι: $L = 2\pi\alpha_6 = 2\pi \cdot 5\sqrt{3} = 10\pi\sqrt{3}$.

3. Έστω $AB = \lambda_{10}$. Τότε: $\widehat{A\hat{O}B} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$,

οπότε το μήκος $\ell_{\widehat{AB}}$ του \widehat{AB} δίνεται

$$\text{από την: } \ell_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 36^\circ}{180^\circ} = \pi,$$

δηλαδή $\ell_{\widehat{AB}} = \pi \text{ cm}$.



4. Έστω L, ℓ τα μήκη των τροχών με ακτίνες R, ρ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε: $\nu L = 2\nu\ell \Leftrightarrow L = 2\ell \Leftrightarrow 2\pi R = 2 \cdot 2\pi \cdot \rho \Leftrightarrow R = 2\rho$.

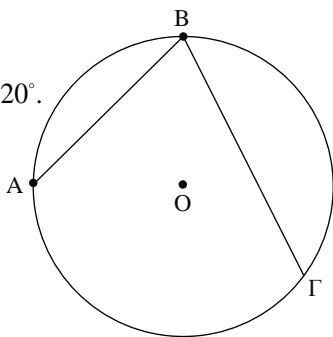
5. Έχουμε $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$, οπότε $\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

$$\text{Άρα } l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{2}.$$

Επίσης $B\Gamma = R\sqrt{3} = \lambda_3$, οπότε $\widehat{B\Gamma} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

$$\text{Άρα } l_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi R \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi R}{3}.$$

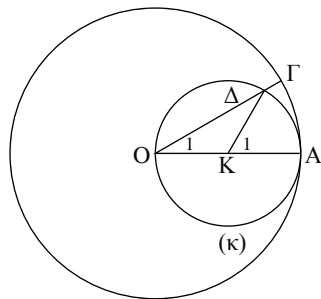
$$\text{Επομένως } l_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi R \cdot 150^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi R}{6}.$$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω μ° το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$. Τότε $(\hat{O}_1) = \mu^\circ$.

Αν K είναι το κέντρο του κύκλου (K) θα είναι $KO = K\Delta$, ως ακτίνες, οπότε το $\triangle KO\Delta$ είναι ισοσκελές και για την εξωτερική γωνία \hat{K}_1 αυτού θα έχουμε: $\hat{K}_1 = 2\hat{O}_1$, οπότε $(\hat{K}_1) = 2\mu^\circ$ και $(\widehat{A\Delta}) = 2\mu^\circ$.



$$\text{Επομένως: } l_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi R \mu^\circ}{180^\circ} \quad (1) \quad \text{και} \quad l_{\widehat{A\Delta}} = \frac{\pi \frac{R}{2} 2\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R \mu^\circ}{180^\circ} \quad (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι τα μήκη $l_{\widehat{A\Gamma}}$ και $l_{\widehat{A\Delta}}$ των τόξων $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{A\Delta}$ είναι ίσα.

2. Έστω O το κοινό κέντρο των κύκλων και Λ το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται σ' αυτούς. Για την περίπτωση του σχ. 1 έχουμε:

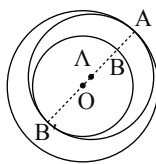
Επειδή οι κύκλοι (O, OA) και (Λ, LA) εφάπτονται εσωτερικά στο A ισχύει:

$$O\Lambda = OA - LA \quad (1).$$

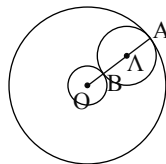
Όμοια, επειδή οι κύκλοι (O, OB) και (Λ, LA) εφάπτονται εσωτερικά στο B' ισχύει: $O\Lambda = \Lambda B' - OB' = LA - OB$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$OA - LA = LA - OB \Leftrightarrow 2LA = OA + OB \quad (3).$$



σχ. 1



σχ. 2

$$\begin{aligned} \text{Τότε: } L_1 + L_2 &= 2\pi(OA) + 2\pi(OB) = 2\pi(OA + OB) \stackrel{(3)}{=} \\ &= 2\pi \cdot 2\Lambda A = 2(2\pi \cdot \Lambda A) = 2L \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2). \end{aligned}$$

Για την περίπτωση του σχ. 2 έχουμε:

Οι κύκλοι (O, OA) και (Λ, ΛA) εφάπτονται εσωτερικά στο A, άρα:
 $OA = OA - \Lambda A$ (4).

Οι κύκλοι (O, OB) και (Λ, ΛA) εφάπτονται εξωτερικά στο B,
 οπότε: $OB = OB + \Lambda B = OB + \Lambda A$ (5).

Από (4), (5) προκύπτει: $OA - \Lambda A = OB + \Lambda A \Rightarrow 2\Lambda A = OA - OB$ (6).

$$\begin{aligned} \text{Τότε: } L_1 - L_2 &= 2\pi(OA) - 2\pi(OB) = 2\pi(OA - OB) \stackrel{(6)}{=} 2\pi \cdot 2\Lambda A = \\ &= 2(2\pi \cdot \Lambda A) = 2L \Rightarrow L = \frac{1}{2}(L_1 - L_2). \end{aligned}$$

3. Έχουμε $2\tau = 13 + 14 + 15 = 42 \Leftrightarrow \tau = 21$ και από τον τύπο του Ήρωνα

$$\text{έχουμε: } E = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ cm}^2.$$

Από τον τύπο $E = \tau \rho$ προκύπτει πλέον ότι $\rho = 4 \text{ cm}$ και επομένως το μήκος
 ℓ του εγγεγραμμένου κύκλου είναι: $\ell = 2\pi \rho = 8\pi \text{ cm}$.

$$\text{Από τον τύπο: } E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \text{ προκύπτει } R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{8 \cdot 84} = \frac{65}{4},$$

οπότε το μήκος L του περιγεγραμμένου κύκλου είναι: $L = 2\pi \frac{65}{4} = \frac{65}{2}\pi \text{ cm}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω x η ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται
 στα τρία θεωρούμενα ημικύκλια.

$$\text{Τότε: } OM = OG - MG = R - x, \quad OK = \frac{R}{2}$$

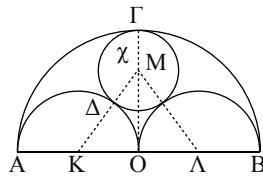
$$\text{και } KM = K\Delta + \Delta M = \frac{R}{2} + x.$$

Το τρίγωνο OKM είναι ορθογώνιο στο O, οπότε:

$$OK^2 + OM^2 = KM^2 \Leftrightarrow \frac{R^2}{4} + (R - x)^2 = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R^2}{4} + R^2 + x^2 - 2Rx = \frac{R^2}{4} + x^2 + Rx \Leftrightarrow 3Rx = R^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3},$$

οπότε το μήκος L του κύκλου κέντρου M είναι: $L = 2\pi x = 2\pi \frac{R}{3} = \frac{2\pi R}{3}$.



2. Έστω x η ακτίνα του κύκλου (c) και $R = OA$, τότε έχουμε: $ON = R - x$,

$$OA = MN = x, KN = \frac{R}{2} + x.$$

Στο τρίγωνο $\hat{O}KN$ είναι $\hat{O}_1 < 90^\circ$, οπότε έχουμε: $KN^2 = OK^2 + ON^2 - 2OK \cdot ON \Leftrightarrow$

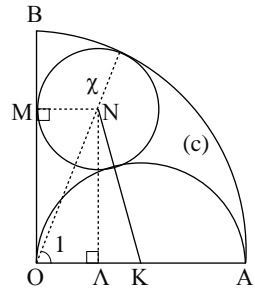
$$\Leftrightarrow \left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \frac{R^2}{4} + (R - x)^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R^2}{4} + x^2 + Rx = \frac{R^4}{4} + R^2 + x^2 - 2Rx - Rx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4Rx = R^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{4}, \text{ οπότε το μήκος του κύκλου (c) είναι:}$$

$$\ell = 2\pi x = 2\pi \frac{R}{4} = \pi \frac{R}{2} \quad (1). \text{ Αλλά και: } \ell_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{2} \quad (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει: $\ell = \ell_{\widehat{AB}}$, δηλαδή το ζητούμενο.



3. Είναι (βλέπε σχήμα βιβλίου)

$$AB = 5, K\Lambda^2 = BK^2 + B\Lambda^2 - 2B\Lambda \cdot B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = 1,2.$$

Εξάλλου με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων έχουμε

$$9^2 + 7^2 = 2\Gamma\Delta^2 + 8 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \sqrt{61}.$$

Το ημικύκλιο διαμέτρου ΔE έχει μήκος 2π . Από το ορθογώνιο τρίγωνο MZI προκύπτει $\Theta Z^2 = \Theta I \cdot \Theta M = 2 \cdot 8 = 16 \Leftrightarrow \Theta Z = 4$, οπότε το ημικύκλιο διαμέτρου EZ έχει μήκος 4π . Επομένως το συνολικό μήκος της γραμμής $AB\Gamma\Delta E Z$ είναι $6,2 + \sqrt{61} + 6\pi$.

§ 11.6-11.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

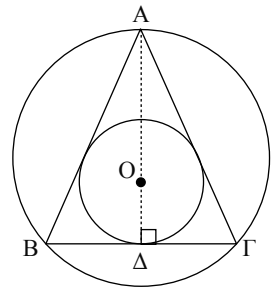
1. Η ακτίνα OA του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$ είναι $OA = \frac{1}{3}AA$

και επειδή AA ύψος του τριγώνου

$$\text{είναι } AA = \frac{(AB)\sqrt{3}}{2} = \frac{\lambda_3 \sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R$$

$$\text{αφού } AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}, \text{ οπότε } OA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}R = \frac{1}{2}R$$

$$\text{και επομένως το εμβαδόν του κύκλου είναι } \pi \cdot \frac{R^2}{4}.$$



2. Έστω R η ακτίνα του κύκλου (K).

$$\text{Το μήκος } \ell \text{ του τόξου } \widehat{AB} = 60^\circ \text{ είναι } \ell = \frac{\pi R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3},$$

οπότε $\ell = 4\pi \Leftrightarrow \frac{\pi R}{3} = 4\pi \Leftrightarrow R = 12$, οπότε το εμβαδόν E του κύκλου θα είναι: $E = \pi R^2 = 144\pi \text{ cm}^2$.

3. Τα τόξα $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ και $\widehat{\Delta\Lambda}$ είναι τόξα ίσων κύκλων και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες, 60° , επομένως είναι ίσα, άρα και τα μήκη τους θα είναι ίσα.

$$\text{Το μήκος του τόξου } \widehat{B\Gamma} \text{ είναι } \frac{\pi\alpha \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi\alpha}{3}, \text{ οπότε}$$

η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου $\Delta\Lambda\Gamma$

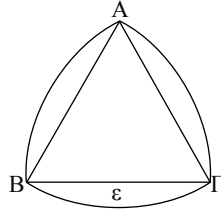
$$\text{είναι: } 3 \frac{\pi\alpha}{3} = \pi\alpha.$$

Έστω ε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος χορδής $B\Gamma$.

$$\text{Τότε: } \varepsilon = (\text{Ο}\widehat{B\Gamma}) - (\text{ΑΒ}\Gamma) = \frac{\pi\alpha^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν E του καμπυλογράμμου τριγώνου θα είναι πλέον:

$$E = (\text{ΑΒ}\Gamma) + 3\varepsilon = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\alpha^2.$$



4. Πρέπει $(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (k) = (\text{ΑΒ}\Gamma\Delta) \Leftrightarrow$

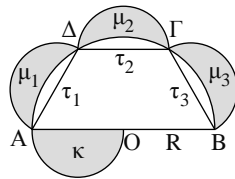
$$\Leftrightarrow [(\mu_1) + (\tau_1)] + [(\mu_2) + (\tau_2)] + [(\mu_3) + (\tau_3)] + (k) =$$

$$= (\text{ΑΒ}\Gamma\Delta) + (\tau_1) + (\tau_2) + (\tau_3)$$

ή 4 φορές το εμβαδόν ημικυκλίου διαμέτρου $AO =$

$=$ Εμβαδόν ημικυκλίου διαμέτρου AB

$$\text{ή } 4 \cdot \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2}, \text{ που ισχύει.}$$



5. Είναι φανερό ότι τα τόξα \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, οπότε έχουν και ίσα

μήκη. Το μήκος π.χ. του \widehat{AB} είναι $\frac{\pi R 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3}$, οπότε η περίμετρος του

καμπυλογράμμου τριγώνου είναι: $3 \frac{\pi R}{3} = \pi R$.

Έστω ε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.

Τότε: $\varepsilon = (\text{ΚΛΜ}) - 3(\widehat{M\hat{A}B})$ (1).

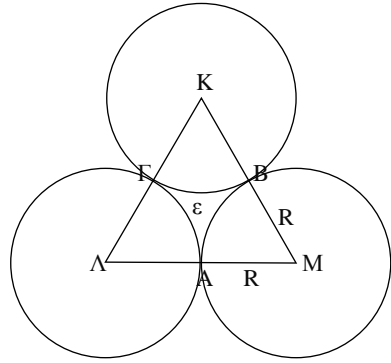
$$\text{Είναι } (\text{ΚΛΜ}) = \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \sqrt{3}$$

$$\text{και } (\widehat{M\hat{A}B}) = \frac{\pi R^2 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6},$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1)

βρίσκουμε:

$$\varepsilon = R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{R^2}{2} (2\sqrt{3} - \pi).$$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

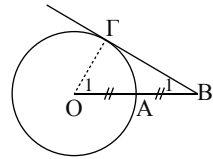
1. Επειδή από κατασκευή

$$\text{είναι: } OB = 2OA = 2OG \Leftrightarrow OG = \frac{1}{2}OB$$

και $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ η γωνία $\hat{B}_1 = 30^\circ$, οπότε $\hat{O}_1 = 60^\circ$

και επομένως το μήκος ℓ του τόξου $\widehat{A\hat{\Gamma}}$

$$\text{είναι: } \ell = \frac{\pi R 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3}.$$



Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο: $\hat{\Gamma}\hat{O}B$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$)

$$\text{έχουμε: } B\hat{\Gamma}^2 = OB^2 - O\hat{\Gamma}^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow B\hat{\Gamma} = R\sqrt{3},$$

οπότε το μεικτόγραμμο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ έχει περίμετρο:

$$P = AB + B\hat{\Gamma} + \ell = R + R\sqrt{3} + \frac{\pi R}{3} = R \left(1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right).$$

Εξάλλου για το εμβαδόν ε του μεικτογράμμου τριγώνου $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ έχουμε:

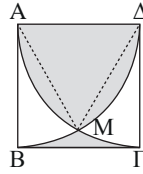
$$\varepsilon = (\text{ΟΓΒ}) - (\text{Ο}\widehat{A\hat{\Gamma}}) \text{ (1).}$$

$$\text{Είναι: } (\text{ΟΓΒ}) = \frac{1}{2} OG \cdot B\hat{\Gamma} = \frac{1}{2} R \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{και } (\text{Ο}\widehat{A\hat{\Gamma}}) = \frac{\pi R^2 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6},$$

$$\text{οπότε η (1) δίνει: } \varepsilon = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi).$$

2. Έστω M το κοινό σημείο των δύο τόξων. Είναι φανερό ότι τα μεικτόγραμμα μη γραμμοσκιασμένα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle A\Gamma M$ είναι ίσα, άρα και ισεμβαδικά. Έστω ε το εμβαδόν καθενός από τα τρίγωνα αυτά. Το ζητούμενο εμβαδόν E δίνεται από την: $E = (AB\Gamma\Delta) - 2\varepsilon = \alpha^2 - 2\varepsilon$ (1).



Αρκεί επομένως να βρούμε το ε . Έστω τ το εμβαδόν του τμήματος χορδής ΔM . Επειδή $\triangle AM\Delta$ ισόπλευρο πλευράς α , είναι: $\widehat{AM} = \widehat{M\Delta} = 60^\circ$ και $\widehat{M\Gamma} = 30^\circ$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\widehat{\Delta M\Gamma}) - \tau = \frac{\pi\alpha^2 30^\circ}{360^\circ} - [(\widehat{AM\Delta}) - (AM\Delta)] = \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{12} - \frac{\pi\alpha^2 60^\circ}{360^\circ} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{12} = \frac{\alpha^2}{12}(3\sqrt{3} - \pi), \end{aligned}$$

$$\text{οπότε με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε ότι: } E = \frac{\alpha^2}{6}(6 - 3\sqrt{3} + \pi).$$

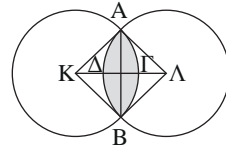
3. Παρατηρούμε ότι $R - R < R\sqrt{2} < R + R$

και επομένως οι κύκλοι τέμνονται.

Έστω A, B τα κοινά τους σημεία.

Επειδή $KA = AL = LB = BK = R$

το τετράπλευρο $KALB$ είναι ρόμβος.



$$\text{Όμως: } KA^2 + AL^2 = R^2 + R^2 = (R\sqrt{2})^2 = KL^2,$$

οπότε: $\widehat{K\Lambda} = 90^\circ$ και επομένως το $KALB$ είναι τετράγωνο.

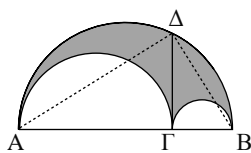
Το εμβαδόν του κοινού μέρους είναι το εμβαδόν δύο ίσων κυκλικών τμημάτων.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= 2(AB\Gamma) = 2[(\widehat{K\Lambda\Gamma B}) - (KAB)] = \\ &= 2\left[\frac{\pi R^2 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}R \cdot R\right] = 2\left[\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right] = \frac{\pi - 2}{2}R^2. \end{aligned}$$

4. Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων δίνεται από την:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AG}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{GB}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{8}\pi(AB^2 - AG^2 - GB^2) = \\ &= \frac{1}{8}\pi[(AG + GB)^2 - AG^2 - GB^2] = \frac{1}{8}\pi 2AG \cdot GB = \\ &= \frac{1}{4}\pi \cdot AG \cdot GB. \end{aligned}$$



Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle \hat{A}B$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έχουμε $AG \cdot GB = \Gamma\Delta^2$,
οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$E = \frac{1}{4}\pi\Gamma\Delta^2 = \pi\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2 = \text{εμβαδόν κύκλου διαμέτρου } \Gamma\Delta.$$

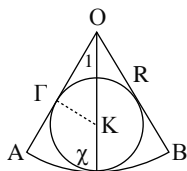
5. Έστω (K, x) ο κύκλος ο εγγεγραμμένος στον τομέα $O \cdot \widehat{AB}$ με $\widehat{AB} = 60^\circ$.

Τότε $OK = R - x$, $K\Gamma = x$ και $\hat{O}_1 = 30^\circ$,

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle \hat{O}K$ προκύπτει:

$$\Gamma K = \frac{OK}{2} \Leftrightarrow x = \frac{R - x}{2} \Leftrightarrow 3x = R \Leftrightarrow x = \frac{R}{3},$$

οπότε το εμβαδόν του κύκλου (K, x) είναι: $E = \pi \frac{R^2}{9}$.



Σύνθετα Θέματα

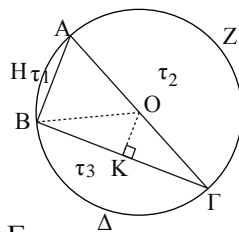
1. i) Επειδή $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$ προκύπτει ότι:

$\widehat{AB\Gamma} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, οπότε AG διάμετρος του κύκλου (O, R) , άρα $AG = 2R$.

- ii) Το τρίγωνο $\triangle \hat{A}B\Gamma$ έχει εμβαδόν: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB \cdot \Gamma B$

(αφού $\hat{B} = 90^\circ$) $= \frac{1}{2}R \cdot R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, οπότε αν E το εμβαδόν

του κύκλου θα είναι: $\frac{(AB\Gamma)}{E} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R^2}{\pi R^2} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$.



iii) Το κυκλικό τμήμα ΑΓΖ είναι προφανώς ημικυκλικός δίσκος, οπότε το εμβαδόν του $(\tau_2) = \frac{1}{2}\pi R^2$. Για το εμβαδόν (τ_3) του (ΒΓΔ) έχουμε:

$$(\tau_3) = (\widehat{O\ B\ \Gamma}) - (O\ B\ \Gamma) = \frac{\pi R^2 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Για το εμβαδόν, τέλος, του κ.τ. ΑΗΒ έχουμε:

$$(\tau_1) = (\widehat{O\ A\ H\ B}) - (O\ A\ B) = \frac{\pi R^2 60^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

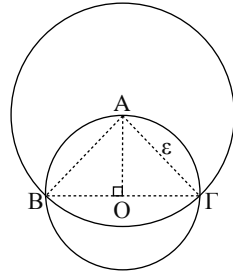
2. Επειδή $AB = AG = \lambda_4$, θα είναι $\widehat{AB} = \widehat{BG} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{B\ \Delta\ \Gamma} = 180^\circ$ και επομένως $\widehat{B\ \hat{A}\ \Gamma} = 90^\circ$. Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν, έστω Ε, θα είναι το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου $(\widehat{A\ B\ \Gamma})$ του κύκλου (Α, ΑΒ) αυξημένο κατά το διπλάσιο του εμβαδού ε ενός από τα ίσα κυκλικά τμήματα που ορίζουν οι ίσες χορδές ΑΒ και ΑΓ στον (Ο, R), δηλαδή

$$E = (\widehat{A\ B\ \Gamma}) + 2\varepsilon \quad (1). \text{ Είνα:}$$

$$(\widehat{A\ B\ \Gamma}) = \frac{1}{4}\pi \cdot AB^2 = \frac{1}{4}\pi(R\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad (2)$$

$$\varepsilon = (\widehat{O\ A\ \Gamma}) - (O\ A\ \Gamma) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \quad (3).$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) βρίσκουμε: $E = (\pi - 1)R^2$.



3. Παρατηρούμε ότι $R - R < R\sqrt{3} < R + R$, οπότε οι κύκλοι τέμνονται.

Έστω (K, R), (Λ, R) οι κύκλοι και ΑΒ η κοινή χορδή τους.

Επειδή ΚΑ = ΑΛ = ΑΒ = ΚΒ = R, το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι ρόμβος, οπότε:

$$KO = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \alpha_6.$$

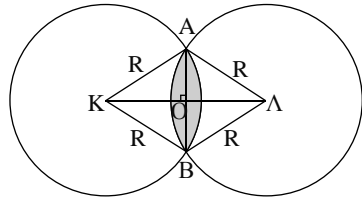
Άρα η χορδή ΑΒ του κύκλου (K, R)

είναι $AB = \lambda_6 = R$.

Το ζητούμενο εμβαδόν ε είναι το εμβαδόν δύο ίσων κυκλικών τμημάτων.

Επομένως: $\varepsilon = 2 \cdot E_{\text{κυκλικού τμήματος}}(KAB) =$

$$= 2 \left[(\widehat{K\ A\ B}) - (KAB) \right] = 2 \left(\frac{\pi R^2 60^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$



4. Έχουμε $\widehat{AB} = \widehat{GB} = 90^\circ$.

$$\text{Άρα } AG = BG = \lambda_4 = R\sqrt{2}.$$

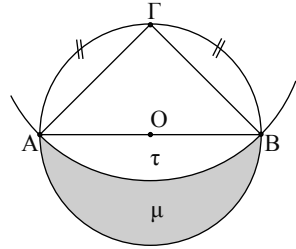
$$\text{Παρατηρούμε ότι: } \mu + \tau = \frac{\pi R^2}{2} \quad (1),$$

γιατί η AB είναι διάμετρος.

$$\text{Επίσης } (AB\Gamma) + \tau = (\Gamma \widehat{AB}) = \frac{\pi \cdot GA^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} =$$

$$= \frac{\pi(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mu + \tau = (AB\Gamma) + \tau$ ή $\mu = (AB\Gamma)$.



Γενικές Ασκήσεις

1. α) Έχουμε $OK = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Όμοια

$$OK = OL = OM = ON =$$

$$= OP = OS = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad (1).$$

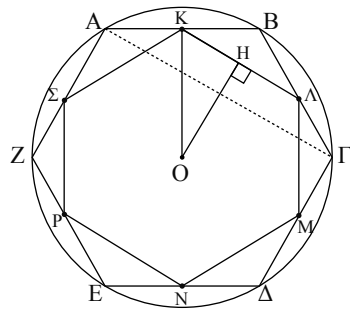
$$\text{Επίσης } K\Lambda = \frac{AG}{2} = \frac{\lambda_3}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{και όμοια: } K\Lambda = \Lambda M = MN = NP = P\Sigma = \Sigma K = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το ΚΛΜΝΡΣ είναι κανονικό εξάγωνο με κέντρο O.

β) Έχουμε $(AB\Gamma\Delta EZ) = 6(OAB) = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad (3)$, γιατί το τρίγωνο $O\hat{A}B$

είναι ισόπλευρο με πλευρά R.



$$\text{Επίσης } (\text{ΚΛΜΝΡΣ}) = 6(\text{ΟΚΛ}) = 6 \cdot \frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6}{4} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \quad (4),$$

γιατί το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ισόπλευρο με πλευρά $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι: $(\text{ΚΛΜΝΡΣ}) = \frac{3}{4}(\text{ΑΒΓΔΕΖ})$.

γ) Η ακτίνα ρ του κύκλου του εγγεγραμμένου στο ΚΛΜΝΡΣ είναι

$$\rho = \text{ΟΗ} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{4}. \text{ Άρα } L = 2\pi \cdot \rho = 2\pi \cdot \frac{3R}{4} = \frac{3\pi R}{2}.$$

2. α) Επειδή $AB = \lambda_v$ είναι $\widehat{ΑΟΒ} = \frac{360^\circ}{v}$.

Άρα

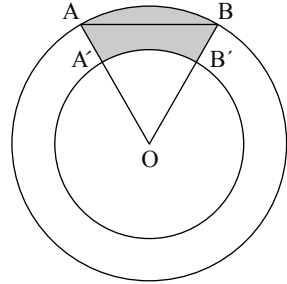
$$(\text{Ο} \widehat{Α'Β'}) = \frac{\pi \cdot \alpha_4^2 \cdot \frac{360^\circ}{v}}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{360^\circ}{v}}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot R^2}{2v} \quad (1).$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\text{Ο} \widehat{ΑΒ}) - (\text{Ο} \widehat{Α'Β'}) = \frac{\pi R^2 \cdot \frac{360^\circ}{v}}{360^\circ} - \frac{\pi R^2}{2v} = \\ &= \frac{\pi R^2}{v} - \frac{\pi R^2}{2v} = \frac{2\pi R^2}{2v} - \frac{\pi R^2}{2v} = \frac{\pi R^2}{2v} \quad (2). \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\varepsilon = (\text{Ο} \widehat{Α'Β'})$.

β) Είναι $\varepsilon = \frac{\pi R^2}{2v} \Leftrightarrow 2v\varepsilon = \pi R^2$, από το (α) ερώτημα.



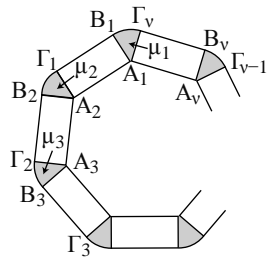
3. Έστω $A_1 A_2 \dots A_v$ ένα κυρτό v -γωνο.

Εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα ορθογώνια $A_1 A_2 \Gamma_1 B_1, A_2 A_3 \Gamma_2 B_2, \dots, A_v A_1 \Gamma_v B_v$ με ίδιο ύψος v και συνδέουμε τις εξωτερικές πλευρές αυτών με τόξα κύκλων που γράφουμε με κέντρα τις κορυφές και ακτίνα v .

Τότε οι κ. τομείς $A_1 \widehat{\Gamma_v B_1}, A_2 \widehat{\Gamma_1 B_2}, \dots,$

$A_v \widehat{\Gamma_{v-1} B_v}$ είναι τομείς ίσων κύκλων ακτίνας v .

Αν $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v$ είναι τα μέτρα των επικέντρων γωνιών $B_1 \hat{A}_1 \Gamma_v, B_2 \hat{A}_2 \Gamma_1, \dots, B_v \hat{A}_v \Gamma_{v-1}$ αντίστοιχα



και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ τα εμβαδά των αντίστοιχων κυκλικών τομέων

$$\text{έχουμε: } \varepsilon_1 = \frac{\pi \nu^2 \mu_1}{360^\circ}, \varepsilon_2 = \frac{\pi \nu^2 \mu_2}{360^\circ}, \dots, \varepsilon_n = \frac{\pi \nu^2 \mu_n}{360^\circ}$$

$$\text{από τις οποίες προκύπτει: } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = \frac{\pi \nu^2}{360^\circ} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) \quad (1).$$

$$\text{Αλλά } \mu_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}_1.$$

Όμοια $\mu_2 = 180^\circ - \hat{A}_2, \dots, \mu_n = 180^\circ - \hat{A}_n$, οπότε

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 180n - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n) = 180n - (180n - 360) = 360,$$

οπότε η (1) δίνει $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = \pi \nu^2$.

4. Έστω x η ακτίνα των κύκλων. Επειδή οι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους εξωτερικά και εφάπτονται επίσης στις πλευρές του τετραγώνου έχουμε: $4x = \alpha$, δηλαδή $x = \frac{\alpha}{4}$.

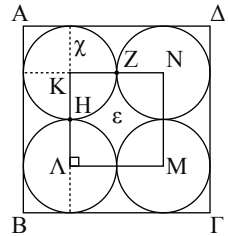
Αν K, Λ, M και N είναι τα κέντρα των

κύκλων τότε το $K\Lambda MN$ είναι τετράγωνο γιατί

$$K\Lambda = \Lambda M = M N = N K = 2x \text{ και } \hat{K} = 90^\circ$$

(η γωνία K έχει παράλληλες πλευρές με την $\hat{A} = 90^\circ$). Το ζητούμενο πλέον εμβαδόν ε θα δίνεται από την:

$$\varepsilon = (K\Lambda MN) - 4(K\widehat{H}Z) = (2x)^2 - 4 \frac{\pi x^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 4x^2 - \pi x^2 = (4 - \pi) \frac{\alpha^2}{16}.$$



5. α) $E = \lambda_4^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2 = 2 \cdot 1600 = 3200 \text{ m}^2$.

β) Αν ρ είναι η ακτίνα κάθε κυκλικής γλάστρας έχουμε:

$$2\rho = OA - OB = R - \alpha_4 = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = 40 - 20\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = 10(2 - \sqrt{2}), \text{ οπότε το εμβαδόν}$$

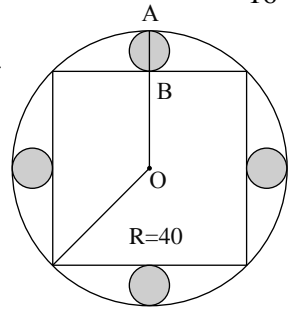
κάθε κυκλικής γλάστρας είναι

$$\varepsilon = \pi \rho^2 = 200\pi(3 - 2\sqrt{2}) \text{ m}^2 \text{ και το εμβαδόν}$$

του μέρους που καλύπτουν οι γλάστρες είναι $800\pi(3 - 2\sqrt{2}) \text{ m}^2$.

γ) Το εμβαδόν του μέρους που θα φυτευθεί με γκαζόν είναι:

$$\begin{aligned} \pi R^2 - \lambda_4^2 - 4\varepsilon &= \pi \cdot 1600 - (40\sqrt{2})^2 - 800\pi(3 - 2\sqrt{2}) = \\ &= 800\pi(2\sqrt{2} - 1) - 3200 \text{ m}^2. \end{aligned}$$



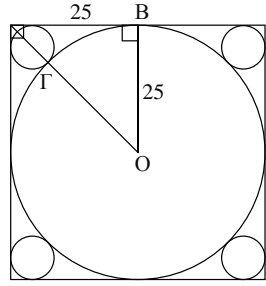
6. α) Ο εγγεγραμμένος κύκλος έχει προφανώς ακτίνα $\rho = 25\text{ m}$, επομένως το εμβαδόν του είναι $\pi\rho^2 = 25\pi\text{ m}^2$.

β) Αν x είναι η ακτίνα καθενός απ' αυτούς τους κύκλους και K το κέντρο ενός απ' αυτούς έχουμε: $AK = x\sqrt{2}$, $K\Gamma = x$, οπότε από την ισότητα $OA = O\Gamma + K\Gamma + KA$ προκύπτει:

$$25\sqrt{2} = 25 + x + x\sqrt{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 25(3 - 2\sqrt{2})$$

και επομένως:

$$E = \pi x^2 = 625(17 - 12\sqrt{2}) = 18,4\text{ m}^2.$$



7. Έστω AB και $\Gamma\Delta$ δύο πλευρές του 15-γώνου και ω η γωνία που σχηματίζουν οι προεκτάσεις αυτών. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ περιέχει v πλευρές του 15-γώνου, τότε το $\widehat{A\Delta}$ θα περιέχει $15 - v - 2 = 13 - v$ πλευρές και επομένως θα είναι $\widehat{B\Gamma} = v\tau$

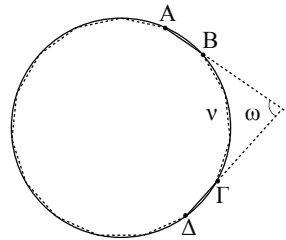
και $\widehat{A\Delta} = (13 - v)\tau$,

$$\text{όπου } \tau = \widehat{AB} = \frac{1}{15}360^\circ = 24^\circ.$$

Η γωνία ω είναι τότε:

$$\omega = \frac{1}{2}(\widehat{A\Delta} - \widehat{B\Gamma}) = \frac{1}{2}[(13 - v)\tau - v\tau] = \frac{1}{2}(13 - 2v)\tau = (13 - 2v) \cdot 12^\circ \quad (1).$$

Ο $13 - 2v$ είναι ένας θετικός ακέραιος και επομένως η ελάχιστη τιμή τους είναι το 1, οπότε $13 - 2v = 1 \Leftrightarrow v = 6$ και από την (1) προκύπτει πλέον ότι $\omega_{\min} = 1 \cdot 12^\circ = 12^\circ$.



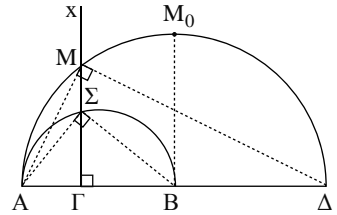
Σχόλιο:

Παραπάνω υποθέσαμε ότι $\widehat{A\Delta} > \widehat{B\Gamma} \Leftrightarrow 13 - \nu > \nu \Leftrightarrow \nu < \frac{13}{2}$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν $\widehat{A\Delta} < \widehat{B\Gamma}$,

τότε όμως $\omega = \frac{1}{2}(\widehat{B\Gamma} - \widehat{A\Delta})$.

8. α) Τα τρίγωνα $\triangle M\hat{A}\Delta$ και $\triangle \Sigma\hat{A}B$ είναι ορθογώνια στο M και Σ αντίστοιχα, οπότε έχουμε: $AM^2 = AG \cdot A\Delta$ και $A\Sigma^2 = AG \cdot AB$.
Με αντικατάσταση των AM^2 και $A\Sigma^2$ στην $AM^2 = 2A\Sigma^2$ προκύπτει $A\Delta = 2AB$.



- β) Επειδή $A\Delta = 2AB$, το $A\Delta$ είναι σταθερό τμήμα και αφού $\widehat{AM\Delta} = 90^\circ$, το M βρίσκεται σε ημικύκλιο διαμέτρου $A\Delta$.

Επειδή όμως το M ανήκει στη Γx και οι ακραίες θέσεις του Γ είναι A και B , ο γ.τ. του M είναι το τεταρτοκύκλιο $\widehat{AMM_0}$, όπου M_0 η τομή της καθέτου της AB στο B και του ημικυκλίου διαμέτρου $A\Delta$.

- γ) Το μήκος ℓ_1 του τόξου $\widehat{AM_0}$ είναι $\ell_1 = \frac{2\pi \cdot AB}{4} = \frac{1}{2}\pi \cdot AB$ και το μήκος ℓ_2

του ημικυκλίου διαμέτρου AB είναι $\ell_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot AB$ και επομένως $\ell_1 = \ell_2$.

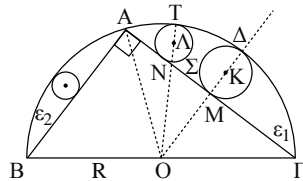
9. α) Έχουμε: $\varepsilon_1 = (O\widehat{A\Gamma}) - (O\Delta\Gamma)$ (1)

και $\varepsilon_2 = (O\widehat{A\Delta}) - (O\Delta B)$ (2).

Από τις (1), (2) παίρνοντας υπόψη ότι $(O\Delta\Gamma) = (O\Delta B)$ (γιατί η AO είναι διάμεσος στο $\triangle A\hat{B}\Gamma$) προκύπτει:

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (O\widehat{A\Gamma}) - (O\widehat{A\Delta})$ (3).

Επειδή όμως $\widehat{A\Delta} = \widehat{A\Delta}$ έχουμε ότι $(O\widehat{A\Delta}) = (O\widehat{A\Delta})$, οπότε η (3) γίνεται $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (O\widehat{\Gamma\Delta})$.



- β) Έστω (Λ, x) ένας εγγεγραμμένος κύκλος στο κυκλικό τμήμα χορδής AG και (K, KM) ο κύκλος ο εγγεγραμμένος που εφάπτεται στο μέσο M της

χορδής ΑΓ. Τότε: $2x = ΤΣ = ΟΤ - ΟΣ = R - (ON + ΝΣ) \leq R - ON$ και επειδή $ON \geq OM$ αφού OM κάθετη στην ΑΓ, έχουμε:

$2x \leq R - OM = ΟΔ - OM = ΜΔ \Leftrightarrow x \leq KM$, που είναι και το ζητούμενο.

- γ) i) Έστω ρ_1, ρ_2 οι ακτίνες των μεγίστων εγγεγραμμένων κύκλων στα κυκλικά τμήματα χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.

$$\text{Τότε: } 2\rho_1 = R - OM = R - \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \rho_1 = \frac{1}{2} \left(R - \frac{\gamma}{2} \right).$$

Όμοια: $\rho_2 = \frac{1}{2} \left(R - \frac{\beta}{2} \right)$, όπου $\beta = (ΑΓ)$ και $\gamma = (ΑΒ)$, οπότε:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= \pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2 = \frac{\pi}{4} \left[\left(R - \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \left(R - \frac{\beta}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[2R^2 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{4} - R(\beta + \gamma) \right] = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[2R^2 + R^2 - R(\beta + \gamma) \right] \quad (1) \text{ γιατί } \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 = 4R^2. \end{aligned}$$

Αλλά με τριγωνική ανισότητα στο ΑΒΓ παίρνουμε $\beta + \gamma > 2R$ και επειδή είναι δυνατόν το Α να συμπέσει με το Β έχουμε $\beta + \gamma \geq 2R$, οπότε από

την (1) προκύπτει ότι $E_1 + E_2 \leq \frac{\pi R^2}{4}$.

- ii) Όταν $\widehat{B\Delta} = 120^\circ$ είναι $\widehat{A\Delta} = 60^\circ$, οπότε: $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \gamma = R$
και $\widehat{A\Gamma} = 120^\circ$, οπότε $A\Gamma = \lambda_3 \Leftrightarrow \beta = R\sqrt{3}$.

Οι ακτίνες ρ_1, ρ_2 είναι τώρα $\rho_1 = \frac{R}{4}$ και $\rho_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} R$,

όπως προκύπτει από τις παραπάνω εκφράσεις των ρ_1, ρ_2 .

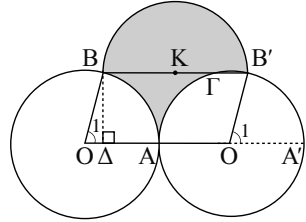
Έτσι έχουμε:

$$E_1 + (7 + 4\sqrt{3})E_2 = \frac{\pi}{16} \left[R^2 + (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})R^2 \right] = \frac{\pi R^2}{8}.$$

10. α) Επειδή $OB // O'B'$ είναι $\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ και αφού οι κύκλοι είναι ίσοι θα είναι $(\widehat{OAB}) = (\widehat{O'A'B'})$.

β) Είναι: $(\widehat{OAB}) + (\widehat{OAB'}) \stackrel{\alpha)}{=} (\widehat{O'A'B'}) + (\widehat{O'AB'}) = (\widehat{O'AA'})$.

γ) Επειδή $OB // O'B'$ το $OBB'O'$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $BB' = OO'$, άρα $BB' = AA'$ και επομένως $(\widehat{O'AA'}) = (\widehat{KBB'})$, οπότε από το β) προκύπτει το ζητούμενο.



δ) Προσθέτουμε και στα δύο μέλη του γ) το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και στη συνέχεια αφαιρούμε και από τα δύο μέλη της προκύπτουσας το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος χορδής $\Gamma B'$, οπότε προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Τέλος, για να γίνει μέγιστο το ε , αρκεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $(OBB'O') = OO' \cdot B\Delta$ να γίνει μέγιστο, το οποίο συμβαίνει όταν η ακτίνα OB γίνει κάθετη στην OO' . Έτσι τα ζητούμενα σημεία B, B' είναι τα σημεία των κύκλων $(O), (O')$ αντίστοιχα για τα οποία $OB, O'B' \perp OO'$.

12

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

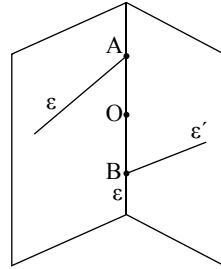
- Σε κάθε επίπεδο του χώρου ισχύουν οι προτάσεις της επιπεδομετρίας. Επομένως μπορούμε να συγκρίνουμε τρίγωνα, γωνίες, ευθύγραμμα τμήματα ή άλλα σχήματα που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή σε διαφορετικά επίπεδα του χώρου. (§ 12. 4 Αποδ. Ασκ. 1, 2, 3 Συνθ. θεμ. 3. Γεν. Ασκ. 4, 5, 6, 7)
- Αν δύο ευθείες είναι ασύμβατες, τότε όλα τα επίπεδα που περνάνε από την μία πλην ενός τέμνονται από την άλλη. (§ 12.3 Ασκ. Εμπ. 1, 2 Αποδ. Ασκ. 4)
- Τρεις ευθείες στον χώρο περνάνε από το ίδιο σημείο αν οι ευθείες είναι τομές τριών επιπέδων ανά δύο. (§ 12.3 Αποδ. Ασκ. 5, § 12.4 Σύνθ. θεμ. 1, 2).
- Επίπεδα που περνάνε από δύο ευθείες παράλληλες τέμνονται σε ευθεία παράλληλη σε αυτές. Επίσης, παράλληλα επίπεδα τέμνονται από τρίτο κατά ευθείες παράλληλες. (§ 12.4 Ασκ. Εμπ. 5, 6, 10, Αποδ. Ασκ. 2)
- Τα σημεία του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ανήκουν στο μεσοκάθετο επίπεδο του τμήματος. (§ 12.5 Ασκ. Εμπ. 2 § 12.6 Ασκ. Εμπ. 1, 2, 7, 8 § 12.7 Ασκ. Εμπ. 3).
- Χρήσιμα για την λύση ασκήσεων είναι επίσης το θεώρημα των τριών καθέτων, οι συνθήκες καθετότητας ευθείας και επιπέδου και το θεώρημα του Θαλή. (§ 12.4 Αποδ. Ασκ. 4. § 12.5 Ασκ. Εμπ. 2, § 12.6 Ασκ. Εμπ. 3, 6, Αποδ. Ασκ. 1, 2).

§ 12.3

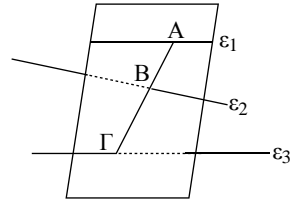
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν ε_1 και ε_2 είναι οι ασύμβατες ευθείες και O το σταθερό σημείο, τα επίπεδα (ε_1, O) και (ε_2, O) έχουν κοινό το O , άρα τέμνονται σε μία ευθεία, έστω ε , που περνάει από το O . Η ε τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B .

Διερεύνηση: Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ε_1 ή στην ε_2 τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα παράλληλες στην ε διότι τότε θα ήταν συμβατές.

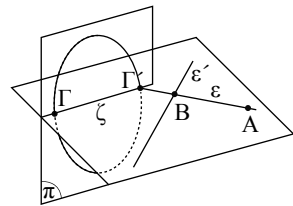


2. Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 είναι οι τρεις ασύμβατες ανά δύο ευθείες, θεωρώ τυχαίο επίπεδο π που περνάει από την ε_1 και τέμνει τις ε_2 και ε_3 στα σημεία B, Γ . Η ευθεία $B\Gamma$ τέμνει την ε_1 στο σημείο A γιατί οι ε_1 και $B\Gamma$ είναι συνεπίπεδες. Η $AB\Gamma$ είναι η ζητούμενη ευθεία. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες ευθείες όσα και τα επίπεδα που περνάνε από την ε_1 και τέμνουν τις ε_2 και ε_3 .

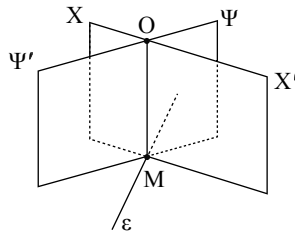


3. Θεωρούμε το επίπεδο $\pi = (A, \varepsilon')$, το οποίο τέμνει το επίπεδο του κύκλου κατά την ευθεία ζ η οποία με την σειρά της τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, τα Γ και Γ' . Η ευθεία $A\Gamma$ ή η $A\Gamma'$ είναι η ζητούμενη ευθεία.

Διερεύνηση: Εάν το επίπεδο π τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, υπάρχουν δύο από τις ζητούμενες ευθείες. Εάν ο κύκλος εφάπτεται στο επίπεδο π τότε υπάρχει μία τέτοια ευθεία και αν ο κύκλος δεν έχει κοινό σημείο με το επίπεδο τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

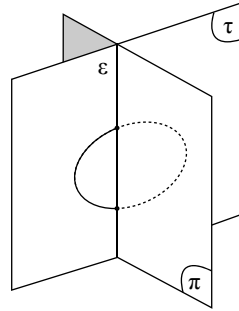


4. Θεωρούμε τα επίπεδα (M, X, X') και (M, Ψ, Ψ') . Τα επίπεδα αυτά έχουν δύο κοινά σημεία, τα M και O , που είναι τομή των ευθειών XX' και $\Psi\Psi'$. Επομένως τα επίπεδα τέμνονται κατά την ευθεία MO . Αν το M κινείται πάνω στην ευθεία ε , τότε οι ευθείες MO βρίσκονται στο επίπεδο (O, ε) .

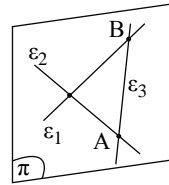


Αποδεικτικές Ασκήσεις

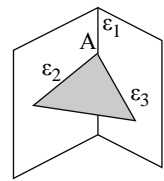
1. Έστω π το δοσμένο επίπεδο και τ το επίπεδο του κύκλου. Τα επίπεδα π και τ ή είναι παράλληλα, οπότε ο κύκλος και το π δεν έχουν κοινό σημείο, ή τέμνονται κατά ευθεία ε . Η ευθεία ε μπορεί να έχει, κατά τα γνωστά από την γεωμετρία του επιπέδου, δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο, ανάλογα με την απόστασή της από το κέντρο του.



2. i) Θεωρούμε τρεις ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 που τέμνονται ανά δύο, χωρίς να περνάνε από το ίδιο σημείο. Δύο από αυτές, έστω οι ε_1 και ε_2 , ως τεμνόμενες, ορίζουν επίπεδο $\pi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.



(α)



(β)

Η τρίτη ευθεία, ε_3 , τέμνει στα σημεία A και B τις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Τα δύο αυτά σημεία είναι διαφορετικά του κοινού σημείου, σύμφωνα με την υπόθεση. Τότε, η ευθεία ε_3 έχει δύο σημεία της στο επίπεδο π , άρα κείται σε αυτό.

- ii) Έστω A το κοινό σημείο των ε_2 και ε_3 . Οι ευθείες ε_1 και ε_2 , ως τεμνόμενες, ορίζουν το επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Επίσης, οι ευθείες ε_1 και ε_3 , ως τεμνόμενες, ορίζουν το επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. Τα επίπεδα αυτά έχουν κοινή την ευθεία ε_1 , δεν ταυτίζονται όμως διότι τότε οι τρεις ευθείες θα ήταν συνεπίπεδες. Έχουμε, δηλαδή, δύο τεμνόμενα επίπεδα, την ευθεία ε_2 στο ένα και την ευθεία ε_3 στο άλλο. Επιπλέον οι ε_2 και ε_3 έχουν κοινό το σημείο A, άρα αυτό είναι σημείο της τομής τους, δηλαδή της ευθείας ε_1 .

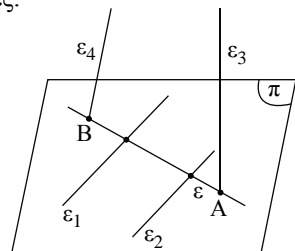
3. Εάν υπήρχε επίπεδο που να περιέχει τις ευθείες ΑΓ και ΒΔ, τότε αυτό θα περιείχε τις ευθείες ε_1 και ε_2 , που είναι άτοπο. Αφού λοιπόν δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει, αυτές είναι ασύμβατες.

4. **Ανάλυση:** Αν ε είναι η ευθεία που τέμνει και τις τέσσερις, αυτή τέμνει τις συνεπίπεδες ευθείες ε_1 και ε_2 , άρα κείται στο επίπεδό τους.

Κατασκευή: Θεωρώ το επίπεδο π των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2 . Αυτό τέμνεται από τις άλλες δύο ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Η ευθεία AB είναι η ζητούμενη.

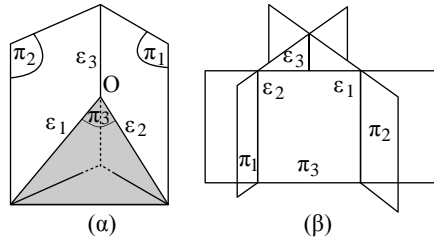
Απόδειξη: Η ευθεία AB τέμνει τις ευθείες ε_3 και ε_4 από την κατασκευή. Επειδή



όμως βρίσκεται στο επίπεδο των παραλλήλων ευθειών τέμνει και αυτές.

Διερεύνηση: Εάν η ευθεία AB είναι παράλληλη στις ϵ_1 και ϵ_2 τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

5. Έστω π_1, π_2 και π_3 τρία επίπεδα που τέμνονται ανά δύο στις ευθείες $\epsilon_1 = (\pi_2, \pi_3), \epsilon_2 = (\pi_1, \pi_3)$ και $\epsilon_3 = (\pi_1, \pi_2)$. Το επίπεδο π_3 τέμνεται από τα επίπεδα π_1 και π_2 στις ευθείες ϵ_2 και ϵ_1 αντίστοιχα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

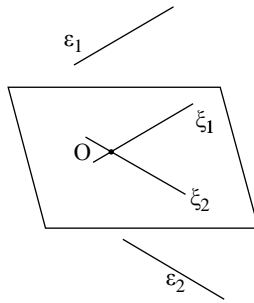


- i) οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται. Αν O το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 , αυτό είναι σημείο και των τριών επιπέδων, άρα από αυτό θα διέρχεται και η τρίτη ευθεία ϵ_3 .
- ii) οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Τότε και η τρίτη ευθεία ϵ_3 τομής των επιπέδων π_1 και π_2 είναι παράλληλη σε αυτές. Διότι, αν έτεμνε μία από αυτές, έστω την ϵ_2 , τότε τα τρία επίπεδα θα είχαν ένα κοινό σημείο και από αυτό θα περνούσε και η ευθεία ϵ_1 , που είναι άτοπο, διότι είναι παράλληλη στην ϵ_2 .

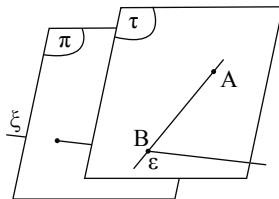
§ 12.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

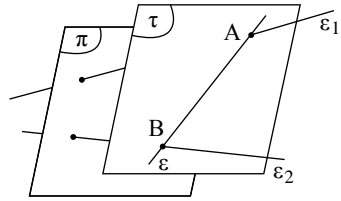
1. Από το σημείο O φέρουμε ευθείες ξ_1 και ξ_2 παράλληλες στις ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα. Το επίπεδο (ξ_1, ξ_2) είναι το ζητούμενο.



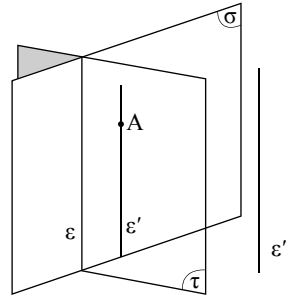
2. Από το δοθέν σημείο A φέρουμε επίπεδο τ , παράλληλο στο π . Επειδή η ευθεία ξ τέμνει το επίπεδο π θα τέμνει και το παράλληλό του τ σε σημείο B. Η ευθεία AB είναι η ζητούμενη ευθεία.



3. Φέρουμε τυχαίο επίπεδο τ , παράλληλο στο π . Το τ τέμνεται από τις ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 , διότι αυτές τέμνουν το παράλληλο επίπεδο π . Αν A και B τα σημεία τομής, η ευθεία AB είναι η ζητούμενη. Επειδή η επιλογή του επιπέδου τ είναι τυχαία, υπάρχει απειρία επιπέδων, επομένως και ευθειών που ικανοποιούν το πρόβλημα.

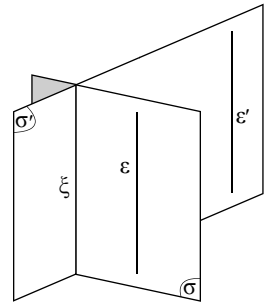


4. Έστω σ και τ δύο επίπεδα που τέμνονται στην ευθεία ε και ε' ευθεία παράλληλη στην ε . Έστω ότι η ευθεία ε' δεν έχει κοινό σημείο με τα επίπεδα σ και τ . Τότε η ευθεία ε' είναι παράλληλη στο επίπεδο σ διότι είναι παράλληλη σε μία ευθεία του, την ε . Για τον ίδιο λόγο, είναι παράλληλη και στο τ .

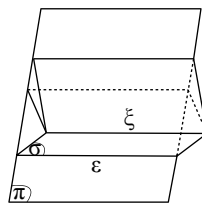


Έστω τώρα ότι η ευθεία ε' έχει κοινό το σημείο A με το επίπεδο τ . Επειδή οι ευθείες ε και ε' είναι παράλληλες, η ε ανήκει στο τ και η ε' έχει ένα σημείο της στο τ , τότε η ε' βρίσκεται στο τ . Αν η ευθεία ε' έχει ένα κοινό σημείο και με το σ τότε ανήκει και στο σ . Δεν μπορεί όμως να ανήκει και στα δύο επίπεδα, διότι τότε θα ταυτιζόταν με την κοινή ευθεία ε .

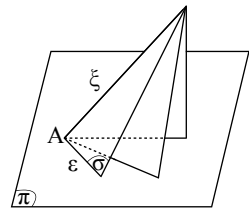
5. Έστω ε και ε' δύο παράλληλες ευθείες και σ και σ' τα επίπεδα, που περιέχουν τις ε και ε' αντίστοιχα. Η ευθεία ε είναι παράλληλη στο σ' , διότι είναι παράλληλη στην ε' . Από την υπόθεση, τα επίπεδα σ και σ' τέμνονται σε μία ευθεία ξ . Θα αποδείξουμε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι η ξ είναι παράλληλη στις ε και ε' . Έστω ότι η ξ τέμνει την ε . Τότε, το κοινό σημείο των δύο ευθειών είναι και κοινό σημείο της ε και του σ' , που είναι άτοπο. Άρα η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ξ . Όμοια αποδεικνύεται ότι και η ε' είναι παράλληλη στην ξ .



6. i) Έστω επίπεδο σ που περνάει από την ευθεία ξ και τέμνει το επίπεδο π κατά ευθεία ε . Οι ευθείες ε και ξ είναι παράλληλες, διότι αν τέμονταν τότε η ευθεία ξ θα είχε κοινό σημείο με το επίπεδο π , που είναι άτοπο. Οι ευθείες



(α)

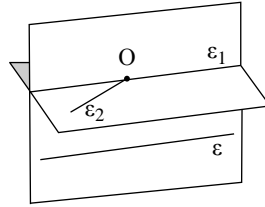


(β)

που προκύπτουν από την τομή του π με τα επίπεδα σ είναι παράλληλες στην ξ , άρα και μεταξύ τους παράλληλες.

ii) Έστω A το σημείο τομής της ευθείας ξ με το επίπεδο π και σ τυχόν επίπεδο που περιέχει την ξ . Τα επίπεδα σ και π έχουν κοινό το σημείο A , άρα τέμνονται κατά ευθεία που περιέχει το σημείο A .

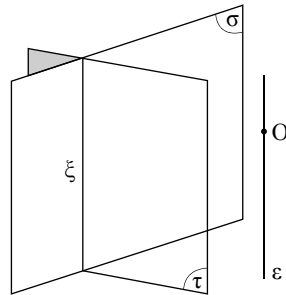
7. Στο επίπεδο (O, ε) κατασκευάζουμε την ευθεία ε_1 , παράλληλη στην ε , που περνάει από το σημείο O . Θεωρούμε επίσης μία ευθεία ε_2 , που περνάει από το σημείο O και δεν τέμνει την ευθεία ε . Το επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ είναι το ζητούμενο επίπεδο.



Απόδειξη: Το επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε διότι περιέχει την ευθεία ε_1 παράλληλη στην ε . Επίσης, περνάει από το σημείο O εκ κατασκευής.

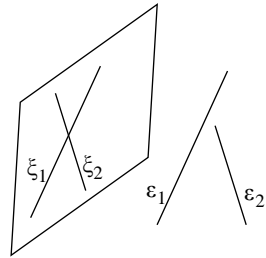
Διερεύνηση: Υπάρχει απειρία λύσεων.

8. Έστω σ και τ δύο δοσμένα επίπεδα και σημείο O εκτός αυτών. Τα επίπεδα σ και τ τέμνονται σε ευθεία ξ . Η ζητούμενη ευθεία ε είναι η παράλληλη στην ξ που περνάει από το O , διότι ως παράλληλη στην κοινή ευθεία είναι παράλληλη στα επίπεδα σ και τ .



9. Έστω ε_1 και ε_2 δύο ευθείες και O σημείο εκτός αυτών. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

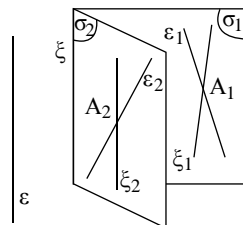
i) οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες. Δηλαδή είναι είτε τεμνόμενες είτε ασύμβατες. Από το σημείο O κατασκευάζουμε τις ευθείες ξ_1 και ξ_2 παράλληλες στις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Το επίπεδο (ξ_1, ξ_2) είναι το ζητούμενο.



ii) οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Θεωρούμε τα τυχόντα σημεία A_1 και A_2 αντίστοιχα στις ευθείες ε_1 και ε_2 . Από το σημείο O κατασκευάζουμε τις ευθείες ξ_1 και ξ_2 παράλληλες στις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Το επίπεδο (ξ_1, ξ_2) είναι το ζητούμενο.

10. Από τυχόν σημείο A_1 της ε_1 φέρουμε την $\xi_1 // \varepsilon$ και από τυχαίο σημείο A_2 της ε_2 φέρουμε την $\xi_2 // \varepsilon$. Τα επίπεδα (ε_1, ξ_1) και (ε_2, ξ_2) είναι τα ζητούμενα.

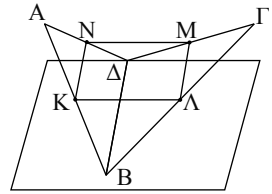
Απόδειξη: Τα επίπεδα (ε_1, ξ_1) και (ε_2, ξ_2) περνάνε από τις ευθείες ξ_1 και ξ_2 που είναι παράλληλες, επομένως, σύμφωνα με την άσκηση 5, η τομή τους ξ είναι παράλληλη στην ε . Επίσης περιέχουν τις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.



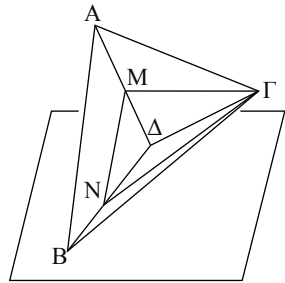
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν K, Λ, M, N είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, στο τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$ το τμήμα KN συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών, άρα είναι:
- $$KN // \frac{B\Delta}{2}$$
- Από το τρίγωνο $\Gamma\hat{B}\Delta$, για τον ίδιο λόγο, έχουμε: $\Lambda M // \frac{B\Delta}{2}$.

Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε: $KN // \Lambda M$, άρα το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.



2. Από την αναλογία $\frac{\Delta M}{MA} = \frac{\Delta N}{NB}$ προκύπτει ότι στο επίπεδο (A, B, Δ) έχουμε: $MN // AB$. Τα επίπεδα (M, N, Γ) και (A, B, Γ) έχουν το Γ κοινό, άρα τέμνονται σε ευθεία. Επίσης, περνάνε από τις παράλληλες ευθείες MN και AB αντίστοιχα. Άρα η τομή τους είναι παράλληλη σ' αυτές (δες άσκ. 5, Άσκ. Εμπέδ.).

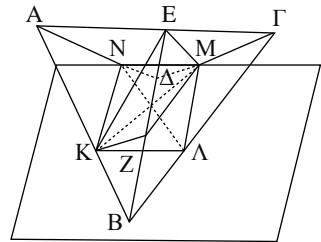


3. Αν K, Λ, M, N, E, Z είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, A\Gamma, B\Delta$, θα αποδείξουμε ότι τα τμήματα $KM, \Lambda N$ και EZ διχοτομούνται. Τα δύο πρώτα τμήματα είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $K\Lambda MN$ (άσκ. 1), άρα διχοτομούνται.

Από τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ έχουμε:

$$KE // \frac{B\Gamma}{2} \text{ και } ZM // \frac{B\Gamma}{2}$$

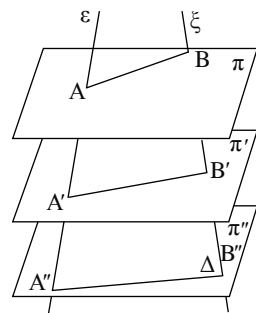
Συνάγεται ότι το $EKZM$ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του MK και EZ διχοτομούνται. Συνεπώς, και τα τρία ευθύγραμμα τμήματα $KM, \Lambda N$ και EZ διχοτομούνται.



4. Θεωρούμε τρία επίπεδα π, π' και π'' , παράλληλα στις ασύμβατες ευθείες AB και $A'B'$, που το πρώτο περιέχει την AB , το δεύτερο την $A'B'$ και το τρίτο περνάει από το σημείο A'' και τέμνει την ευθεία ξ έστω στο σημείο Δ .

$$\text{Από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει: } \frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'\Delta}$$

Αλλά απ' αυτήν την σχέση και την δοθείσα έχουμε:



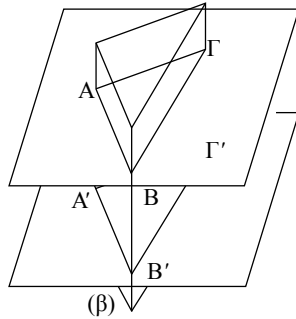
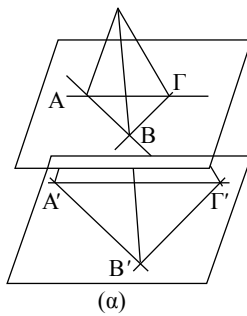
$$\frac{BB'}{B'B''} = \frac{BB'}{B'\Delta} \Leftrightarrow B'B'' = B'\Delta \Leftrightarrow B'' \equiv \Delta.$$

Δηλαδή, το επίπεδο π'' περνάει από το B'' , άρα τα τμήματα AB , $A'B'$ και $A''B''$ βρίσκονται σε τρία επίπεδα παράλληλα.

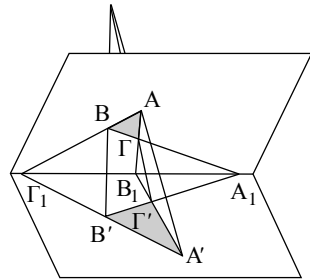
Σύνθετα Θέματα

1. Τα ζεύγη των παραλλήλων πλευρών των δύο τριγώνων ορίζουν τρία επίπεδα, τα $(B\Gamma, B'\Gamma')$, $(A\Gamma, A'\Gamma')$ και $(AB, A'B')$. Επομένως, σύμφωνα με την άσκηση 5 της § 12.3 των Αποδ.

Ασκ., οι τρεις ευθείες AA' , BB' και $\Gamma\Gamma'$ κατά τις οποίες τέμνονται ανά δύο αυτά τα επίπεδα, διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες.



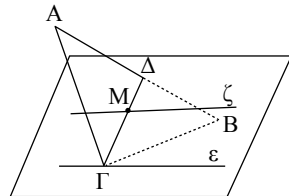
2. i) Τα ζεύγη των πλευρών των δύο τριγώνων τέμνονται ανά δύο στα σημεία $A_1 = (B\Gamma, B'\Gamma')$, $B_1 = (A\Gamma, A'\Gamma')$ και $\Gamma_1 = (AB, A'B')$. Τα σημεία αυτά κείνται στα επίπεδα των δύο τριγώνων, άρα είναι σημεία της τομής των δύο επιπέδων, δηλ. κείνται επ' ευθείας.



- ii) Τα συνεπίπεδα ζεύγη των πλευρών $(B\Gamma, B'\Gamma')$, $(A\Gamma, A'\Gamma')$ και $(AB, A'B')$ ορίζουν τρία επίπεδα. Επομένως, σύμφωνα με την άσκηση 5 της § 12.3 των Αποδ. Ασκ., οι τρεις ευθείες AA' , BB' και $\Gamma\Gamma'$ είτε διέρχονται από το ίδιο σημείο είτε είναι παράλληλες.

3. Έστω M το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και Δ η διάμεσος. Το μέσον Δ του τμήματος AB είναι σταθερό σημείο του χώρου και για το σημείο M ισχύει η σχέση: $\frac{\Delta M}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{3}$.

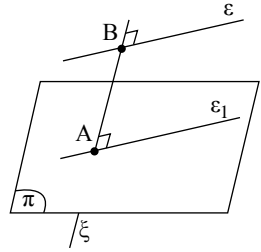
Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται σε επίπεδο γεωμετρικό τόπο και είναι ευθεία ζ παράλληλη στην ε , στο $\frac{1}{3}$ της απόστασής της ε από το Δ .



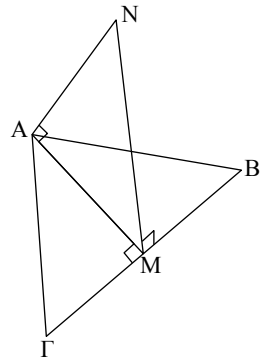
§ 12.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

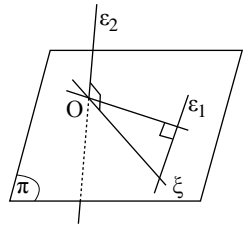
1. Αν ε και π είναι η ευθεία και το επίπεδο που είναι κάθετα στην ευθεία ξ και A, B τα σημεία τομής, τότε το επίπεδο (ε, ξ) τέμνει το π σε ευθεία ε_1 παράλληλη στην ε , διότι οι ε και ε_1 είναι κάθετες στην AB . Αλλά τότε η ε είναι παράλληλη σε μία ευθεία του π , άρα είναι παράλληλη στο π .
Αν το σημείο B ταυτίζεται με το A τότε η ευθεία ε ταυτίζεται με την ε_1 και βρίσκεται επί του π .



2. Θεωρούμε την ευθεία AM . Έχουμε:
- η NA είναι κάθετη στην AM , διότι είναι κάθετη στο επίπεδο του $AB\Gamma$. Η AM είναι κάθετη στην $B\Gamma$, ως ύψος ισοσκελούς τριγώνου, άρα η MN είναι κάθετη στην $B\Gamma$ (Θ . τριών καθέτων).
 - Για το δεύτερο ερώτημα έχουμε ότι η ευθεία $B\Gamma$ είναι κάθετη στην AM και NM , άρα είναι κάθετη στο επίπεδο που αυτές ορίζουν, δηλαδή το (A, M, N) .

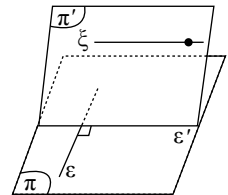


3. Έστω ε_1 και ε_2 οι ορθογώνιες ευθείες και π επίπεδο που περιέχει την ε_1 και είναι κάθετο στην ε_2 . Η ε_2 τέμνει το επίπεδο π στο σημείο O . Κάθε ευθεία ξ του π που περνάει από το O είναι κάθετη στην ε_2 . Μία από τις ευθείες αυτές είναι κάθετη και στην ε_1 . Τότε αυτή είναι κάθετη και στις δύο. Άρα, το επίπεδο π ορίζεται από την ε_1 και την κοινή κάθετη των δύο ευθειών.



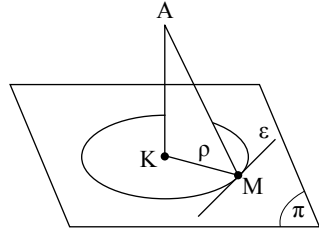
Αντίστροφα: το επίπεδο που ορίζεται από την ε_1 και την κοινή κάθετη των δύο ασύμβατων είναι κάθετο στην ε_2 , διότι περιέχει δύο ευθείες η μία κάθετη και η άλλη ορθογώνια στην ε_2 .

4. Από το O κατασκευάζουμε το επίπεδο π' , το κάθετο στην ε . Τα επίπεδα π και π' τέμνονται κατά την ευθεία ε' . Από το O φέρουμε την παράλληλη ξ στην ε' . Αυτή είναι παράλληλη στο π διότι είναι παράλληλη σε μία ευθεία του π και είναι ορθογώνια στην ε διότι είναι παράλληλη στην ε' .

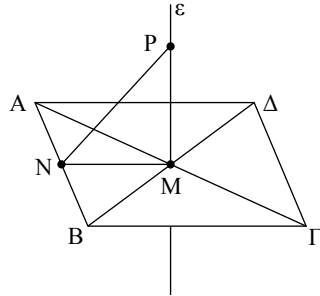


Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Η ευθεία AK είναι κάθετη στο επίπεδο π , από την κατασκευή. Η KM είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ε του κύκλου (K, ρ) στο σημείο M . Επομένως η ευθεία AM είναι κάθετη στην ε (από το θεώρημα των τριών καθέτων).



2. Η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο του ορθογώνιου. Η ευθεία MN είναι κάθετη στην πλευρά AB , επομένως η PN είναι κάθετη στην AB , από το θεώρημα των τριών καθέτων. Επειδή η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη στην AB τότε η PN είναι ορθογώνια στη $\Gamma\Delta$.



3. i) $A\Sigma \perp \pi$ από κατασκευή, $AM \perp BM$ γιατί η γωνία AMB βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $\Sigma M \perp MB$ από το θεώρημα των τριών καθέτων.

ii) Τα τρίγωνα $\Sigma \hat{A} M$ και $\Sigma \hat{A} B$ είναι ορθογώνια στο Σ και τα AN και AG είναι τα ύψη τους. Επομένως ισχύουν οι σχέσεις: $\Sigma A^2 = \Sigma M \cdot \Sigma N = \Sigma B \cdot \Sigma \Gamma$.

- iii) Τα τρίγωνα $\Sigma \hat{\Gamma} N$ και $\Sigma \hat{M} B$ έχουν μια κοινή γωνία και από το προηγούμενο

$$\text{ερώτημα ισχύει } \frac{\Sigma M}{\Sigma B} = \frac{\Sigma \Gamma}{\Sigma N}.$$

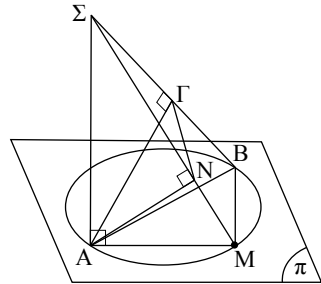
Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια και επειδή η γωνία $\Sigma \hat{M} B = 90^\circ$, έχουμε:

- iv) $\Sigma \hat{\Gamma} N = 90^\circ$.

v) ευθεία $\Sigma\Gamma$ είναι κάθετη στις ευθείες ΓN και AG . Επομένως η $\Sigma\Gamma$ είναι κάθετη στο επίπεδο που αυτές ορίζουν.

- vi) Η ευθεία $\Sigma\Gamma$ είναι κάθετη στο επίπεδο (A, N, Γ) . Η ευθεία ΣN είναι κάθετη στην AN από την κατασκευή, επομένως η ΓN είναι κάθετη στην AN από το θεώρημα των τριών καθέτων (έκφραση ii).

- vii) Το τρίγωνο $A \hat{\Gamma} N$ είναι ορθογώνιο στο N και βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στην σταθερή ευθεία ΣB στο Γ . Επομένως το N γράφει κύκλο διαμέτρου AG που βρίσκεται πάνω σε αυτό το επίπεδο.

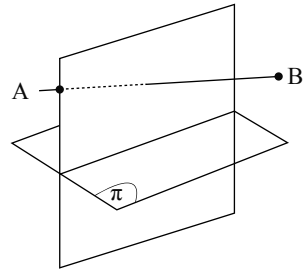


§ 12.6

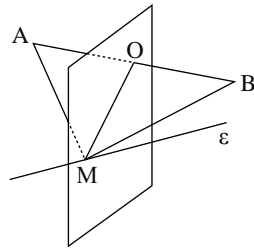
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Ως γνωστό, τα σημεία του χώρου που ισαπέχουν από δύο σημεία A και B είναι το μεσοκάθετο επίπεδο στο τμήμα AB . Άρα, ο ζητούμενος τόπος είναι τα κοινά σημεία του μεσοκαθέτου επιπέδου και του δοθέντος επιπέδου π , δηλ. η τομή των επιπέδων.

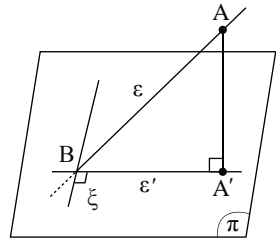
Εάν η ευθεία AB είναι κάθετη στο επίπεδο π , τότε αυτό θα είναι παράλληλο στο μεσοκάθετο, επομένως το πρόβλημα δεν έχει λύση.



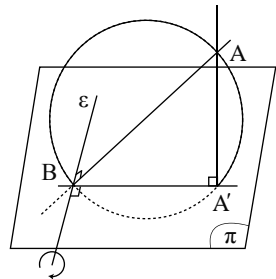
2. Ας υποθέσουμε ότι είναι γνωστό το M . Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AMB$ προκύπτει ότι $MA = MB$. Δηλαδή, το σημείο M είναι σημείο τομής του μεσοκαθέτου επιπέδου στο AB με την ευθεία ε . Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στο μεσοκάθετο επίπεδο, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.



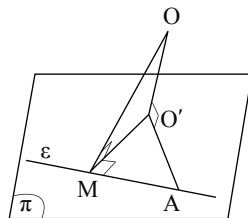
3. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ευθεία του π , η οποία είναι κάθετη στην ε . Προβάλλουμε την ευθεία ε στο π και έστω ε' η προβολή της. Στο ίχνος B της ε φέρουμε ευθεία ξ κάθετη στην ε' που να βρίσκεται στο π . Η ευθεία ξ είναι κάθετη στην ε , διότι αν A τυχαίο σημείο της ε και A' η προβολή του, έχουμε: την AA' κάθετη στο π , την $A'B$ κάθετη στην ξ , άρα η AB είναι κάθετη στην ξ , σύμφωνα με το Θεώρημα των τριών καθέτων. Η ευθεία ε είναι μοναδική, διότι αν υπήρχε και δεύτερη, τότε η ε θα ήταν κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου π , δηλ. θα ήταν κάθετη στο π , που είναι άτοπο.



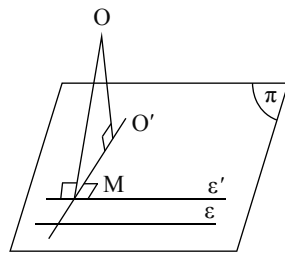
4. Έστω B η προβολή του A' στην ευθεία ε . Από το Θ . των τριών καθέτων προκύπτει ότι το B είναι η προβολή του A στην ευθεία ε , άρα είναι σταθερό σημείο. Το τρίγωνο $\triangle AA'B$ είναι ορθογώνιο στο A' και το επίπεδό του είναι κάθετο στην ε . Άρα, το σημείο A' γράφει κύκλο διαμέτρου AB , που κείται στο επίπεδο που είναι κάθετο στην ε στο A .



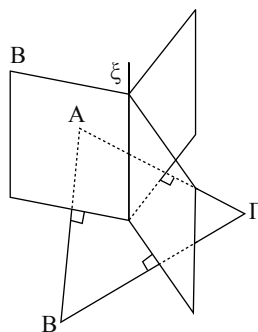
5. Έστω O' η προβολή του O στο π , ε τυχούσα ευθεία του π που περνάει από το A και M η προβολή του O στην ευθεία ε . Από το Θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι η $O'M$ είναι κάθετη στην ε . Άρα, το M βρίσκεται σε κύκλο διαμέτρου $O'A$.



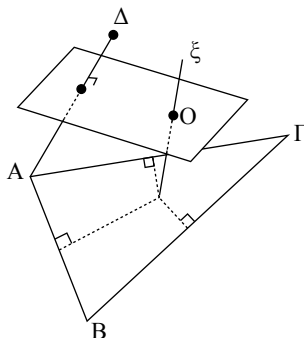
6. Έστω O' και M οι προβολές του O στο π και στην τυχούσα ευθεία ε' του π που είναι παράλληλη στην ε . Η ευθεία $O'M$ είναι κάθετη στην ε' , από το Θεώρημα των τριών καθέτων. Η ευθεία $O'M$ είναι όμως κάθετη και στην ε , που είναι παράλληλη στην ε' . Επομένως ο ζητούμενος τόπος είναι η ευθεία η κάθετη στην ε από το O' .



7. Έστω $AB\Gamma$ το τρίγωνο. Τα σημεία του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα της πλευράς AB ανήκουν στο μεσοκάθετο επίπεδο του AB . Επίσης, τα σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα της πλευράς $B\Gamma$ είναι στο μεσοκάθετο επίπεδο του $B\Gamma$. Τα δύο επίπεδα τέμνονται σε ευθεία ξ διότι είναι κάθετα σε δύο τεμνόμενες ευθείες, τις AB και $B\Gamma$. Τα σημεία της ευθείας ξ ισαπέχουν και από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Άρα και το μεσοκάθετο επίπεδο στην $A\Gamma$ περνάει από την ξ . Η ευθεία τομής τους ξ είναι κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου, διότι η ξ είναι ορθογώνια στις AB και $B\Gamma$. Οι τομές των μεσοκαθέτων επιπέδων με το επίπεδο του τριγώνου είναι οι μεσοκάθετες στις πλευρές AB και $B\Gamma$ του τριγώνου. Άρα η ευθεία ξ περνάει από το περίκεντρο του $\triangle AB\Gamma$.

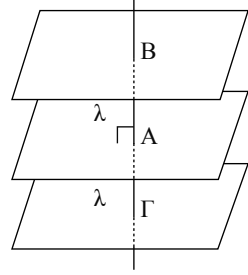


8. Σύμφωνα με την άσκ. 7, τα σημεία του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $B\Gamma$ και ΓA είναι η ευθεία ξ που είναι κάθετη στο επίπεδο (A, B, Γ) , στο περίκεντρο του $AB\Gamma$. Θεωρούμε τώρα το μεσοκάθετο επίπεδο στο τμήμα $A\Delta$, που τέμνει την ευθεία ξ στο σημείο O . Το O ισαπέχει από τα τέσσερα σημεία A, B, Γ και Δ .

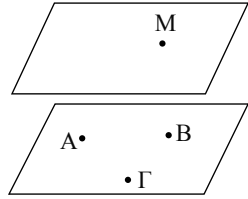


9. Τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο π και βρίσκονται εκατέρωθεν του π σε απόσταση λ είναι ο ζητούμενος τόπος.

Αντίστροφα: έστω σημείο M σε απόσταση λ από το π . Αυτό θα βρίσκεται σε ένα από τα δύο επίπεδα που αναφέραμε.



10. Τα σημεία A, B και Γ ορίζουν επίπεδο (A, B, Γ) . Άρα ζητείται να κατασκευασθεί επίπεδο που περνάει από το M και είναι παράλληλο στο (A, B, Γ) .



Αποδεικτικές Ασκήσεις

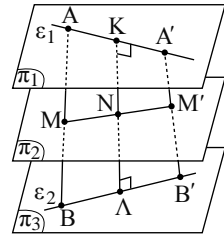
1. Έστω A και A' δύο τυχαία σημεία της ε_1 και B και B' δύο τυχαία σημεία της ε_2 . Στα ευθύγραμμα τμήματα AA' και BB' ορίζουμε σημεία M και M' αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A'}{M'B'} = \lambda \quad (1)$$

Τότε, σύμφωνα με το αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή, οι ευθείες AA', MM' και BB' βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα. Επειδή όμως οι ευθείες $\varepsilon_1 = AA'$ και $\varepsilon_2 = BB'$ είναι ασύμβατες, υπάρχει μοναδικό ζεύγος παραλλήλων επιπέδων που τις περιέχει, άρα το τρίτο επίπεδο που περιέχει την MM' είναι παράλληλο σε αυτά και περνάει από το σημείο N της κοινής κάθετης KL για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{NK}{NL} = \lambda \quad (2)$$

Αντίστροφα: αν θεωρήσουμε το ζεύγος των παραλλήλων επιπέδων που περιέχουν τις ε_1 και ε_2 και KL είναι η κοινή κάθετη των ασύμβατων,

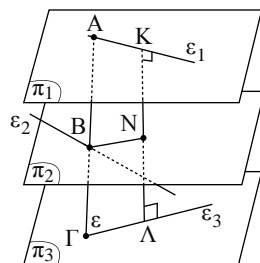


κατασκευάζουμε το επίπεδο που είναι παράλληλο στα δύο άλλα και περνάει από το σημείο N της ΚΛ για το οποίο ισχύει η (2), τότε για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB που έχει άκρα στις ε_1 και ε_2 θα ισχύει το Θεώρημα του Θαλή, άρα ισχύει η σχέση:

$$\frac{NK}{NA} = \frac{MA}{MB} = \lambda$$

2. Κατασκευάζουμε, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, επίπεδα π_1 και π_3 παράλληλα, που περιέχουν τις ε_1 και ε_3 αντίστοιχα και επίπεδο π_2 παράλληλο στα δύο άλλα τέτοιο ώστε η κοινή κάθετη στις ε_1 και ε_2 να το τέμνει σε σημείο N τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{KN}{NA} = \lambda \quad (1)$$

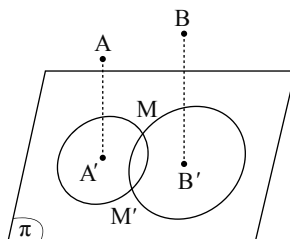


Η ευθεία ε_2 , ως ασύμβατη με τις ε_1 και ε_3 , τέμνει το επίπεδο π_2 σε σημείο B. Από το B κατασκευάζουμε ευθεία που τέμνει τις ασύμβατες ε_1 και ε_3 στα σημεία A και Γ, κατά τα γνωστά (δες άσκ. 1, Άσκ. Εμπ. § 12.3). Αυτή είναι η ζητούμενη ευθεία, διότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{KN}{NA} = \lambda \quad (2)$$

σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή.

3. Ως γνωστό, τα σημεία του επιπέδου π που απέχουν από σημείο A εκτός αυτού απόσταση μ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο την προβολή A' του A στο επίπεδο και ακτίνα $\rho = \sqrt{\mu^2 - AA'^2}$. Όμοια για το B, έχουμε κύκλο (B', ρ') , όπου $\rho' = \sqrt{\nu^2 - BB'^2}$.



Γράφουμε τους δύο κύκλους και ένα από τα σημεία τομής είναι το ζητούμενο.

Διερεύνηση: Οι δύο κύκλοι μπορεί να τέμνονται, οπότε το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, μπορεί να εφάπτονται, οπότε το πρόβλημα έχει μοναδική λύση και τέλος μπορεί να μην έχουν κοινό σημείο, οπότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Σύνθετα Θέματα

1. Αν A και B είναι τα δύο σημεία, O το μέσον του AB και M σημείο του π τέτοιο ώστε το τρίγωνο $\hat{A}MB$ να είναι ορθογώνιο στο M , τότε η OM είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της υποτείνουσας AB . Άρα, το σημείο M απέχει από το σταθερό

σημείο O απόσταση ίση με $\frac{AB}{2}$.

Επομένως, το M γράφει κύκλο με κέντρο O' την προβολή του O στο π και

$$\text{ακτίνα } \rho = \sqrt{\frac{AB^2}{4} - OO'^2}.$$

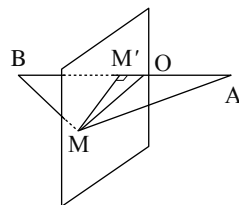
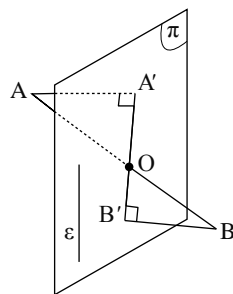
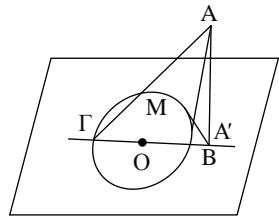
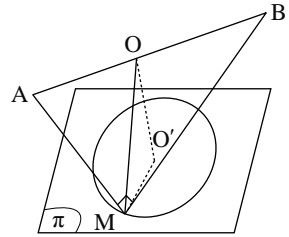
2. Έστω A' η προβολή του A στο επίπεδο. Η ευθεία OA' , όπου O το κέντρο του κύκλου, τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, τα B και Γ . Αν το $A'B < A'\Gamma$, τότε και η απόσταση $AB < A\Gamma$. Τα AB και $A\Gamma$ είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη απόσταση του A από τον κύκλο, διότι κάθε άλλο τμήμα AM , όπου M σημείο του κύκλου, έχει προβολή $A'M$ μεταξύ των $A'B$ και $A'\Gamma$. Αν η προβολή A' του A στο επίπεδο ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου, τότε όλα τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν από το σημείο A .

3. Θεωρούμε το μέσον O του τμήματος AB . Το επίπεδο (ε, O) είναι το ζητούμενο. Διότι, αν από τα A και B φέρουμε τις κάθετες στο επίπεδο αυτό και A' και B' οι προβολές τους, σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα, τα $\hat{A}A'O$ και $\hat{B}B'O$ που έχουν $OA = OB$ και $\hat{A} = \hat{B}$ διότι $AA' \parallel BB'$. Τα τρίγωνα είναι ίσα και επομένως $AA' = BB'$.

4. Έστω M τυχαίο σημείο για το οποίο ισχύει $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$, O είναι το μέσον του AB και M' η προβολή του M στο AB .

Τότε, από το τρίγωνο $\hat{M}AB$ έχουμε:

$$MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot OM' = \lambda^2 \quad (1)$$



που λύνεται ως προς OM' : $OM' = \frac{\lambda^2}{2AB}$ (2).

Αλλά τότε το σημείο M προβάλλεται στο σταθερό σημείο M' που προκύπτει από τη σχέση (2), άρα βρίσκεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στην AB στο σημείο M' και απέχει από το μέσον O απόσταση $\frac{\lambda^2}{2AB}$.

Αντίστροφα: αν M τυχόν σημείο που κείται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο AB στο σημείο M' για το οποίο ισχύει η σχέση (2). Αλλά τότε, από το Θεώρημα της διαμέσου ισχύει και η (1).

5. Αν τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια, τότε η AB κείται σε επίπεδο κάθετο στην $\Gamma\Delta$, στο σημείο M που προκύπτει αν από τα A και B φέρουμε κάθετες στην $\Gamma\Delta$. Τότε από τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AM\Gamma$ και $\triangle BM\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 \quad (1)$$

$$B\Gamma^2 = BM^2 + M\Gamma^2 \quad (2)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = AM^2 - BM^2 \quad (3)$$

Αλλά, από τα επίσης ορθογώνια τρίγωνα

$\triangle MA\Delta$ και $\triangle MB\Delta$, έχουμε:

$$\Delta A^2 = AM^2 + M\Delta^2 \quad (4)$$

$$\Delta B^2 = BM^2 + M\Delta^2 \quad (5)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\Delta A^2 - \Delta B^2 = AM^2 - BM^2 \quad (6).$$

Από τις (3) και (6) προκύπτει το ζητούμενο:

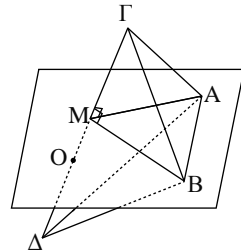
$$\Delta A^2 - \Delta B^2 = \Gamma A^2 - \Gamma B^2 \quad (7).$$

Αντίστροφα: έστω ότι ισχύει η (7), η οποία γράφεται:

$$\Gamma A^2 - \Delta A^2 = \Gamma B^2 - \Delta B^2 = \lambda^2 \quad (8)$$

Τότε, από την άσκηση 4, προκύπτει ότι το σημείο A κείται στο επίπεδο το κάθετο στο $\Gamma\Delta$ στο σημείο M το οποίο απέχει απόσταση $OM = \frac{\lambda^2}{2\Gamma\Delta}$ από το μέσον O του $\Gamma\Delta$.

Επίσης, το σημείο B κείται στο κάθετο επίπεδο του $\Gamma\Delta$ στο ίδιο σημείο, άρα τα επίπεδα ταυτίζονται. Δηλαδή τα σημεία A και B κείνται σε επίπεδο κάθετο στην $\Gamma\Delta$.



6. Αν τα δύο πρώτα ζεύγη είναι ορθογώνια, έχουμε:

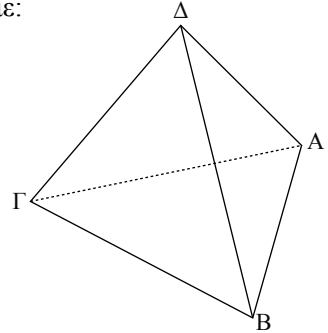
$$\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2$$

$$\text{και } \Delta A^2 - \Delta \Gamma^2 = \text{BA}^2 - \text{B}\Gamma^2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\Gamma A^2 - \Gamma \Delta^2 = \text{BA}^2 - \text{B}\Delta^2, \text{ που σημαίνει ότι}$$

και το τρίτο ζεύγος είναι ορθογώνιο.



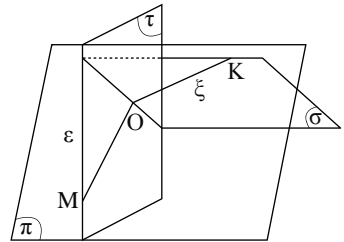
7. Τα μεσοκάθετα επίπεδα στα τμήματα AB, AD και AG τέμνονται σ' ένα σημείο O, διότι είναι κάθετα σε τρία τεμνόμενα τμήματα. Για το O ισχύει: $OA = OB = OD = OG$.

Δηλαδή, απέχει εξ ίσου από τα σημεία A, B, Γ και Δ, άρα κείται στα μεσοκάθετα επίπεδα όλων των τμημάτων που αυτά ορίζουν ανά δύο.

8. Οι ευθείες OM ορίζουν το επίπεδο $\tau = (O, \varepsilon)$.

Στο O φέρουμε την ευθεία ξ , κάθετη στο επίπεδο τ , που τέμνει το π στο σημείο K εφ' όσον το επίπεδο τ δεν είναι κάθετο στο π . Αυτό είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο. Διότι η ευθεία ξ ως κάθετη στο τ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία OM του τ .

Αντίστροφα: κάθε επίπεδο διά της ξ είναι κάθετο στο τ και περιέχει τα σημεία O και K. Τότε υπάρχει σημείο M της ε τέτοιο ώστε η OM να είναι κάθετη σ' αυτό το επίπεδο.

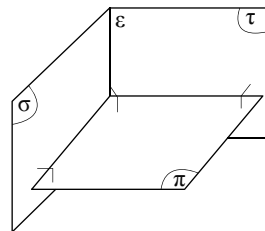


§ 12.7

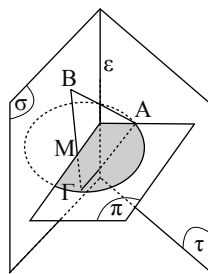
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Προβάλλουμε το σημείο O στο π και έστω O' η προβολή του. Κάθε επίπεδο που περιέχει την ευθεία OO' είναι κάθετο στο π και περιέχει το σημείο O. Άρα υπάρχει απειρία λύσεων στο πρόβλημα.

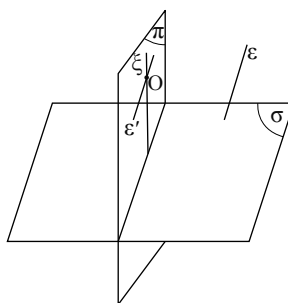
2. Έστω $\varepsilon(\sigma, \tau)$ διέδρη γωνία και επίπεδο π κάθετο στην ε . Το επίπεδο σ περιέχει την ε που είναι κάθετη στο π , άρα το σ είναι κάθετο στο π . Για τον ίδιο λόγο και το τ είναι κάθετο στο π .



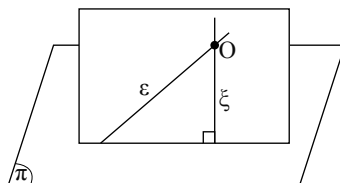
3. Τα σημεία του χώρου που ισαπέχουν από τα σημεία Β και Γ βρίσκονται στο μεσοκάθετο επίπεδο π στο τμήμα ΒΓ. Άρα τα σημεία αυτού του επιπέδου με τα Β και Γ δίνουν ισοσκελή τρίγωνα. Θέλουμε επιπλέον αυτά να είναι και ορθογώνια. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται στο μεσοκάθετο επίπεδο, σε κύκλο (Μ, ΜΑ), όπου Μ το μέσον του ΒΓ. Αλλά $MA = MB = MG$. Τέλος τα σημεία τομής του κύκλου αυτού με το επίπεδο τ είναι τα ζητούμενα σημεία. Αυτά τα σημεία είναι το πολύ δύο, όσα και τα σημεία τομής του κύκλου με το επίπεδο.



4. Το ζητούμενο επίπεδο π για να είναι κάθετο στο σ πρέπει να περιέχει μια ευθεία κάθετη στο σ . Γι' αυτό φέρουμε από το Ο την ευθεία ξ , κάθετη στο σ . Επίσης, το επίπεδο π για να είναι παράλληλο στην ευθεία ϵ πρέπει η ϵ να είναι παράλληλη σε μία ευθεία του. Γι' αυτό φέρουμε από το Ο την ευθεία ϵ' παράλληλη στην ϵ . Το ζητούμενο επίπεδο π είναι αυτό που ορίζεται από τις ευθείες ξ και ϵ' .



5. Από ένα σημείο Ο της ϵ φέρουμε ευθεία κάθετη στο π . Το επίπεδο (ϵ , ξ) είναι το ζητούμενο.

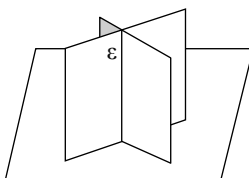


§ 12.8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

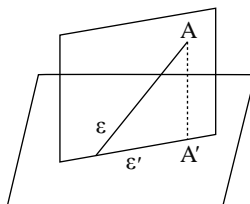
1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Η ευθεία ϵ είναι κάθετη στο επίπεδο π . Τότε κάθε επίπεδο που την περιέχει είναι κάθετη στο π .



(α)

ii) Η ευθεία ϵ δεν είναι κάθετη στο π . Προβάλλουμε την ευθεία ϵ στο επίπεδο π και ϵ' η προβολή της.



(β)

Οι τεμνόμενες ευθείες ϵ και ϵ' ορίζουν επίπεδο τ , κάθετο στο π , διότι αυτό περιέχει μία ευθεία, π.χ. την AA' που είναι κάθετη στο π .

2. Αν A', B', M' είναι οι προβολές των σημείων A, B, M στο επίπεδο π , που δεν είναι κάθετο στην AB , οι ευθείες AB και $A'B'$ ορίζουν επίπεδο τ στο οποίο οι ευθείες AB και $A'B'$ τέμνονται από τις παράλληλες AA', BB', MM' σε μέρη ανάλογα, κατά το Θεώρημα

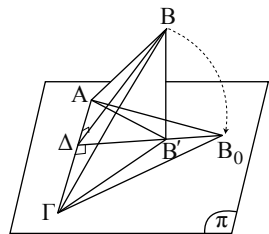
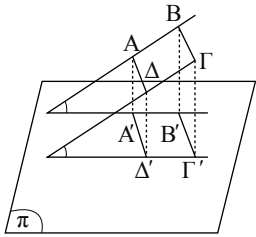
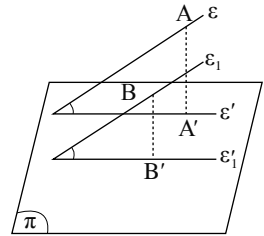
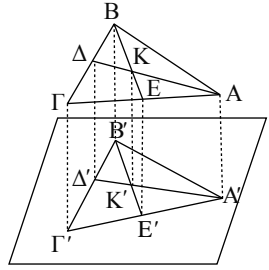
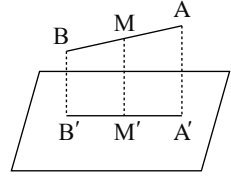
$$\text{του Θαλή, και έχουμε: } \frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$$

3. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma$ προβάλλονται στα μέσα των πλευρών του $A'B'\Gamma'$. Επομένως, οι διάμεσοι προβάλλονται σε διαμέσους, άρα το σημείο τομής τους K προβάλλεται στο K' .

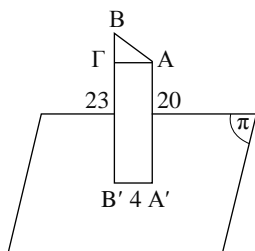
4. Έστω ε και ε_1 δύο παράλληλες ευθείες και ε' και ε_1' οι προβολές τους σε ένα επίπεδο π , το οποίο δεν είναι κάθετο σε αυτές. Αν A και B είναι σημεία των ε και ε_1 αντίστοιχα και A' και B' οι προβολές τους, τότε τα επίπεδα (ε, AA') και (ε_1, BB') είναι παράλληλα διότι δύο τεμνόμενες ευθείες του ενός είναι παράλληλες στο άλλο. Επομένως τέμνονται από το επίπεδο π σε ευθείες παράλληλες, τις ε' και ε_1' .

5. Οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες και προβάλλονται στο π ως παράλληλες. Επίσης, οι ευθείες $B\Gamma$ και $A\Delta$ είναι παράλληλες και προβάλλονται ως παράλληλες. Το τετράπλευρο, λοιπόν, $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχει τα δύο ζεύγη απέναντι πλευρών παράλληλα, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

6. Έστω ορθή γωνία $\hat{A}B\Gamma$, B' η προβολή της κορυφής B στο επίπεδο π , το οποίο τέμνεται από τις πλευρές της στα A και B . Θα αποδείξουμε ότι $\hat{A}B'\Gamma > \hat{A}B\Gamma$. Φέρουμε το ύψος $B\Delta$ του τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$. Το $B'\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $\hat{A}B'\Gamma$ (Θεώρημα τριών καθέτων). Στην προέκταση του $\Delta B'$ λαμβάνουμε σημείο B_0 τέτοιο ώστε $\Delta B_0 = \Delta B$, (το τμήμα ΔB είναι μεγαλύτερο από την προβολή του, γι' αυτό το B_0 κείται στην προέκταση). Τα τρίγωνα $\hat{A}B\Gamma$ και $\hat{A}B_0\Gamma$ είναι ίσα εκ κατασκευής, επομένως αρκεί να συγκρίνουμε τις γωνίες \hat{B}_0 και \hat{B}' . Οι γωνίες $\hat{A}B'\Delta$ και $\hat{\Delta}B'\Gamma$ είναι μεγαλύτερες από τις $\hat{A}B_0\Delta$ και $\hat{\Delta}B_0\Gamma$, άρα $\hat{A}B'\Gamma > \hat{A}B_0\Gamma$.



7. Από το Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην Α'Β' που τέμνει την ΒΒ' στο Γ. Το ΑΑ'Β'Γ είναι ορθογώνιο. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $AB^2 = AG^2 + BG^2$. Αλλά $AG = A'B' = 4$ και $BG = BB' - AA' = 3$. Επομένως $AB = 5$.

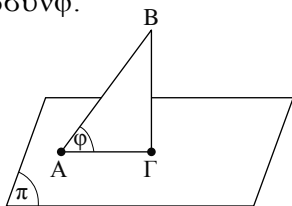


8. Η προβολή του ΑΒ στο επίπεδο π είναι ΑΓ = ΑΒ sin φ.

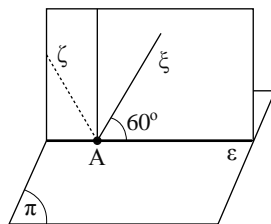
i) $\varphi = 30^\circ \Rightarrow AG = AB \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\varphi = 45^\circ \Rightarrow AG = AB \frac{\sqrt{2}}{2}$

iii) $\varphi = 60^\circ \Rightarrow AG = AB \frac{1}{2}$

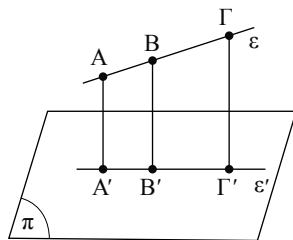


9. Στο σημείο Α του επιπέδου π κατασκευάζουμε ευθεία ζ κάθετη στο π. Στο επίπεδο (ε, ζ) κατασκευάζουμε ευθεία που να σχηματίζει γωνία 60° με την ε. Αυτή είναι η ζητούμενη ευθεία. Το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, τις δύο συμμετρικές ευθείες ως προς την ζ που σχηματίζουν ευθεία 60° με την ε.



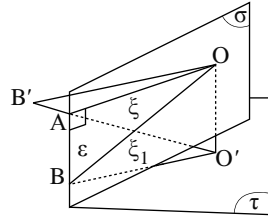
10. Θεωρούμε τα σημεία Α, Β και Γ της ευθείας ε του χώρου και Α'Β' και Γ' οι προβολές τους στο επίπεδο π. Οι ευθείες ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' είναι παράλληλες, ως κάθετες στο επίπεδο π. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή της Γεωμετρίας του επιπέδου στο επίπεδο (ε, ε') έχουμε τις ευθείες ε και ε' να τέμνονται από τις παράλληλες ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' σε μέρη ανάλογα.

Άρα έχουμε: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$.

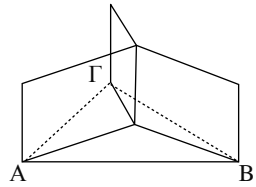


Αποδεικτικές Ασκήσεις

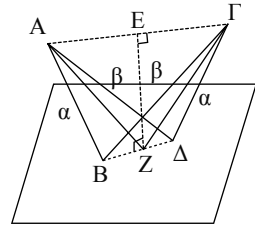
1. Θεωρούμε στο επίπεδο σ δύο ευθείες, την κάθετη ξ στην κοινή ευθεία ε και μία πλάγια ευθεία ξ_1 που περνάνε από το O και τέμνουν στα A και B αντίστοιχα την ε . Αν O' η προβολή του O στο τ , οι γωνίες $\widehat{OAO'}$ και $\widehat{OBO'}$ είναι οι γωνίες των ξ και ξ_1 ως προς το σ . Έχουμε: $O'A < O'B$, γιατί $O'A \perp \varepsilon$. Στην προέκταση του OA λαμβάνουμε σημείο B' τέτοιο ώστε $O'B' = O'B$. Στο τρίγωνο $O\hat{A}B'$ η γωνία $\widehat{OAO'}$ είναι εξωτερική, άρα μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική. Επομένως $\widehat{OBO'} < \widehat{OAO'}$.



2. Τα επίπεδα που περιέχουν τις διχοτόμους ενός τριγώνου έχουν ένα κοινό σημείο στο επίπεδο του τριγώνου, το σημείο τομής των διχοτόμων, άρα τέμνονται σε ευθεία, που περνάει από αυτό το σημείο και είναι κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου.



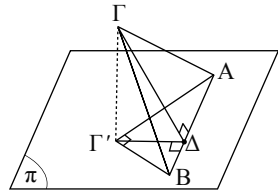
3. Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Delta}B$ είναι ίσα επειδή έχουν τρεις πλευρές ίσες, άρα έχουν διαμέσους ίσες, δηλ. $AZ = \Gamma Z$. Τότε το τρίγωνο $A\hat{Z}\Gamma$ είναι ισοσκελές και η ZE που είναι διάμεσος είναι και ύψος. Άρα $EZ \perp A\Gamma$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $EZ \perp B\Delta$.



4. **Ανάλυση:** Έστω ότι κατασκευάσαμε επίπεδο π , που να διέρχεται από την AB τέτοιο ώστε η γωνία $\widehat{A\Gamma'B}$ να είναι ορθή, όπου Γ' είναι η προβολή του Γ στο π . Αν $\Gamma\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε η $\Gamma'\Delta$ είναι κάθετη στην AB από το θεώρημα των τριών καθέτων. Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο $\widehat{A\Gamma'B}$ έχουμε: $\Gamma'\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta A$. Άρα το τμήμα $\Gamma'\Delta$ κατασκευάζεται.

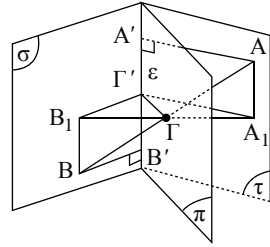
Κατασκευή: Φέρουμε το ύψος $\Gamma\Delta$ στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε μήκος $\Gamma'\Delta$ από την παραπάνω σχέση $\Gamma'\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta A$. Στο επίπεδο που περνάει από το Γ και είναι κάθετο στην AB κατασκευάζουμε

ορθογώνιο τρίγωνο $\widehat{\Gamma\Delta\Gamma'}$ τέτοιο ώστε η $\Gamma\Delta$ να είναι υποτείνουσα και η $\Gamma'\Delta$ η μία κάθετη πλευρά. Επομένως ορίζεται η κορυφή Γ' στο χώρο. Τέλος το ζητούμενο επίπεδο π διέρχεται από το Γ' και την AB .



5. Έστω ϵ (σ , τ) η διεδρική γωνία και π το διχοτόμο επίπεδο της που τέμνεται από το τμήμα AB στο σημείο Γ . Τα σημεία A' , B' και Γ' είναι οι προβολές των A , B και Γ αντίστοιχα στην ακμή ϵ .

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AA'}{BB'}$.



Στο σημείο Γ' θεωρούμε το κάθετο επίπεδο στην ευθεία ϵ και προβάλλουμε πάνω σε αυτό τα σημεία A , Γ και B . Το σημείο A προβάλλεται στο σημείο A_1 , το σημείο B προβάλλεται στο B_1 ενώ το σημείο Γ βρίσκεται πάνω σε αυτό. Τα τρίγωνα $B\hat{B}_1\Gamma$ και $A\hat{A}_1\Gamma$ είναι όμοια επειδή έχουν $BB_1 // AA_1$, άρα

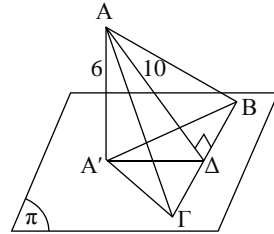
έχουμε: $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A_1\Gamma}{B_1\Gamma}$ (1).

Αλλά στο τρίγωνο $B_1\hat{\Gamma}'A_1$, η $\Gamma\Gamma'$ είναι διχοτόμος, άρα ισχύει: $\frac{\Gamma B_1}{\Gamma A_1} = \frac{B_1\Gamma'}{A_1\Gamma_1}$.

Τέλος, επειδή τα $BB_1\Gamma'B'$ και $AA_1\Gamma'A'$ είναι ορθογώνια έχουμε $B_1\Gamma' = BB'$ και $\Gamma'A_1 = AA'$.

Επομένως η (1) γράφεται $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A_1\Gamma}{B_1\Gamma} = \frac{A_1\Gamma'}{B_1\Gamma'} = \frac{AA'}{BB'}$.

6. Έστω A' η προβολή του A στο επίπεδο π και $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Από το θεώρημα των τριών καθέτων το τμήμα $A'\Delta$ είναι το ύψος στο τρίγωνο $A'\hat{B}\Gamma$.

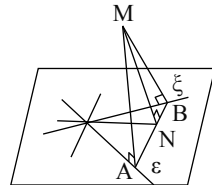


Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{A}'\Delta$ υπολογίζουμε την πλευρά $A'\Delta$, γνωρίζοντας τις δύο άλλες.

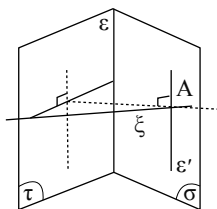
Άρα $A'\Delta = 8$ και έχουμε $\frac{(AB\Gamma)}{(A'\hat{B}\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}B\Gamma \cdot A\Delta}{\frac{1}{2}B\Gamma \cdot A'\Delta} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Γενικές Ασκήσεις

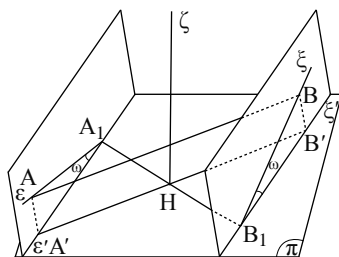
1. Έστω M σημείο που ισαπέχει από δύο τεμνόμενες ευθείες, ϵ και ξ . Αν A και B είναι οι προβολές του M στις ευθείες, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η διάμεσός του MN είναι ύψος και διχοτόμος. Δηλαδή, τα σημεία M προβάλλονται στο επίπεδο (ϵ, ξ) στις διχοτόμους των γωνιών. Άρα ο γ.τ. είναι τα επίπεδα τα κάθετα στο (ϵ, ξ) που διχοτομούν τις γωνίες των ευθειών ϵ και ξ . Το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα.



2. Έστω σ και τ τα τεμνόμενα επίπεδα στην ϵ και ξ ευθεία κάθετη στο σ . Οι ευθείες ϵ και ξ είναι ορθογώνιες. Από το ίχνος A της ξ στο σ φέρουμε ευθεία ϵ' παράλληλη στην ϵ . Η γωνία (ξ, ϵ') είναι ορθή και έχει μία πλευρά της, την ϵ' , παράλληλη στο τ . Άρα προβάλλεται στο τ ως ορθή. Επίσης, οι ευθείες ϵ και ϵ' είναι παράλληλες, άρα προβάλλονται ως παράλληλες. Επομένως, η προβολή της ξ στο τ είναι ευθεία κάθετη στην ϵ .



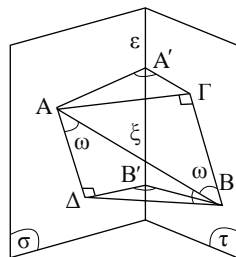
3. Έστω ϵ' και ξ' οι προβολές των ϵ και ξ στο π . Τα επίπεδα (ϵ, ϵ') και (ξ, ξ') είναι παράλληλα μεταξύ τους και κάθετα στο π . Έστω επίσης μία ευθεία τέμνουσα τις ϵ και ξ στα A και B , παράλληλη στο π . Προβάλλουμε τα A και B στο π και έστω A' και B' οι προβολές τους. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AA'A_1$ και $\triangle BB'B_1$



είναι ίσα διότι έχουν $AA' = BB'$ και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. Άρα $A'A_1 = B'B_1$.

Τα σημεία A' και B' κείνται εκατέρωθεν της A_1B_1 στο επίπεδο π , διότι οι ευθείες ϵ και ξ ισοκλίνουν χωρίς να είναι παράλληλες. Επομένως οι ευθείες A_1B_1 και $A'B'$ τέμνονται σε σημείο H που είναι το μέσον της A_1B_1 , διότι τα τρίγωνα $\triangle A_1HA'$ και $\triangle B_1HB'$ είναι ίσα. Επομένως, η προβολή της τυχούσας ευθείας AB που τέμνει τις ϵ και ξ και είναι παράλληλη στο π περνάει από το μέσον της A_1B_1 , άρα η ευθεία ζ που είναι κάθετη στο π στο σημείο H τέμνει όλες τις ευθείες AB .

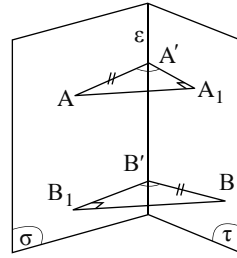
4. Έστω διέδρη γωνία $\epsilon(\sigma, \tau)$, ευθεία ξ τέμνουσα τις έδρες σ, τ στα σημεία A, B αντίστοιχα και A', B' οι προβολές των A, B στην ϵ και Γ, Δ οι προβολές των A, B στις έδρες τ και σ αντίστοιχα. Αν $AA' = BB'$ θα αποδείξουμε ότι η ευθεία AB σχηματίζει ίσες γωνίες με τα επίπεδα σ και τ . Τα τρίγωνα $\triangle BB'\hat{A}$ και $\triangle AA'\hat{\Gamma}$ είναι ίσα διότι έχουν $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 1L$, $BB' = AA'$ και $\hat{B}' = \hat{A}'$ ως επίπεδη της διέδρης. Επομένως, $A\Gamma = B\Delta$.



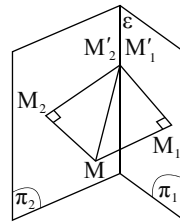
Τα τρίγωνα $\triangle AB\hat{\Gamma}$ και $\triangle AB\hat{\Delta}$ είναι επίσης ίσα διότι έχουν την AB κοινή, $A\Gamma = B\Delta$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 1L$. Άρα $B\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma$.

Αντιστρέφοντας τους συλλογισμούς αποδεικνύεται το αντίστροφο.

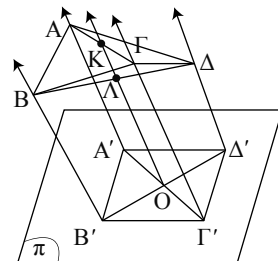
5. Καλούμε σ, τ τα επίπεδα $(\varepsilon, A), (\varepsilon, B), A_1$ και B_1 τις προβολές των A και B στα τ και σ αντίστοιχα και A', B' τις προβολές των A, B στην ε . Έστω ότι $AA' = BB'$. Από τα τρίγωνα $\hat{A} \hat{A}' A_1$ και $\hat{B} \hat{B}' B_1$ που έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 1L$, $AA' = BB'$ και $\hat{A}' = \hat{B}'$ ως επίπεδη της διέδρης προκύπτει ότι $AA_1 = BB_1$. Αντιστρέφοντας τον συλλογισμό προκύπτει το αντίστροφο.



6. Έστω ότι οι προβολές των σημείων M_1 και M_2 στην ακμή ε της διέδρης $\varepsilon(\pi_1, \pi_2)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία, M'_1 και M'_2 αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα των τριών καθέτων, έχουμε ότι: $MM_1 \perp M_1M'_1$ και $M_1M'_1 \perp \varepsilon$, άρα $MM_1 \perp \varepsilon$. Για τον ίδιο λόγο, έχουμε ότι $MM_2 \perp \varepsilon$. Επομένως, στο επίπεδο (ε, M) άγονται δύο κάθετες από το M στην ε , που είναι άτοπο. Άρα τα σημεία M'_1 και M'_2 συμπίπτουν.



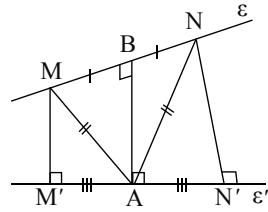
7. **Ανάλυση:** Έστω ότι βρέθηκαν τέσσερις ευθείες που προβάλλουν το στρεβλό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ στο παραλληλόγραμμο $A'B'\Gamma'\Delta'$. Οι διαγώνιοι $A'\Gamma'$ και $B'\Delta'$ του παραλληλογράμμου διχοτομούνται στο σημείο O . Άρα το O είναι προβολή των μέσων K και Λ των $A\Gamma$ και $B\Delta$, διότι οι OK και $O\Lambda$ είναι μεσοπαράλληλες στα τραπέζια $AA'\Gamma\Gamma'$ και $BB'\Delta'\Delta$ αντίστοιχα.



Σύνθεση: Φέρουμε την ευθεία που ορίζουν τα μέσα K και Λ των $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα και τις παράλληλες σ' αυτήν από τις κορυφές A, B, Γ και Δ που τέμνουν το π στα σημεία A', B', Γ' και Δ' .

Απόδειξη: Τα ευθύγραμμα τμήματα $A'\Gamma'$ και $B'\Delta'$ διχοτομούνται στο O , άρα είναι διαγώνιοι παραλληλογράμμου.

8. Έστω AB η κοινή κάθετη των ασυμβάτων ε και ε' και M' και N' οι προβολές των M και N στην ε' . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι το σημείο A είναι μέσον του $M'N'$ διότι το B είναι μέσον του MN και τα τμήματα MM' , BA και NN' βρίσκονται σε επίπεδα παράλληλα (ως κάθετα στην ευθεία ε'). Επίσης, στο τρίγωνο $\triangle MAN$ η AB είναι διάμεσος και ύψος, άρα είναι ισοσκελές. Τα



ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AMM'$ και $\triangle ANN'$ έχουν $AM' = AN'$ και $AM = AN$, επομένως $MM' = NN'$.

Αντίστροφα: έστω ότι $MM' = NN'$, A το μέσον του MN και AB η κάθετη στην ε . Θα αποδείξουμε ότι η AB είναι η κοινή κάθετη. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AMM'$ και $\triangle ANN'$ έχουν $AM' = AN'$ και $MM' = NN'$, άρα $AM = AN$. Το τρίγωνο $\triangle MAN$ είναι ισοσκελές και η AB είναι διάμεσος, άρα και ύψος.

13

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το εμβαδόν της κάθετης τομής του επί το μήκος της ακμής του ή με το εμβαδόν της βάσης του επί το ύψος. Επομένως μετακινήσεις των βάσεων στα επίπεδά τους ή των ακμών στους φορείς τους δεν αλλάζουν τον όγκο του πρίσματος. (§ 13.4 Ασκ. Εμπ. 4, 5, 7, 8, 9, 10, Αποδ. Ασκ. 1, 2, 3).
- Ο όγκος πυραμίδας ισούται με το εμβαδόν της βάσης επί το τρίτο του ύψους της. Επομένως, αν η κορυφή της πυραμίδας μετακινηθεί στο επίπεδο που περνάει από την κορυφή της και είναι παράλληλο στην βάση ο όγκος δεν αλλάζει. (§ 13.9 Ασκ. Εμπ. 9, Αποδ. Ασκ. 1, 2, 3, Σύνθ. Θέμ. 1, 3).
- Για τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου του κυλίνδρου, του κώνου και της σφαίρας χρησιμοποιούμε τους αντίστοιχους τύπους. Για τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου που δημιουργούνται κατά την περιστροφή επίπεδης τεθλασμένης γραμμής γύρω από άξονα που κείται στο επίπεδό της, χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα του Πάππου.

§ 13.1-4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Το ύψος είναι η απόσταση των δύο βάσεων ενώ η ακμή είναι πλάγιο τμήμα ως προς τα επίπεδα των βάσεων.
2. Οι παράλληλες τομές στη βάση ενός πρίσματος είναι ίσες. Άρα, οι κάθετες τομές και η βάση ορθού πρίσματος είναι ίσες. Επίσης, οι παράπλευρες ακμές ορθού πρίσματος είναι κάθετες στις βάσεις, άρα είναι και ύψη.
3. Οι ακμές ενός πρίσματος και οι προβολές τους στο επίπεδο της βάσης σχηματίζουν ίσα ορθογώνια τρίγωνα, άρα σχηματίζουν ίσες γωνίες με το επίπεδο της βάσης.

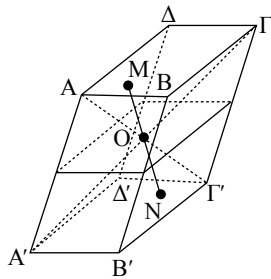
4. Με απλή εφαρμογή των τύπων έχουμε: $E = \alpha^2 \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $V = \frac{\sqrt{3}}{4} \alpha^3$.

5. Με απλή εφαρμογή των τύπων έχουμε:

$$E_3 = 3\sqrt{3}\rho \left(\frac{\rho}{2} + \upsilon \right), \quad E_4 = 4\rho(\rho + \sqrt{2}\upsilon), \quad E_6 = 3\rho(\sqrt{3}\rho + 2\upsilon),$$

$$V_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho^2\upsilon, \quad V_4 = 2\rho^2\upsilon, \quad V_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^2\upsilon.$$

6. Έστω MN ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα σε δύο απέναντι έδρες παραλληλεπιπέδου και περνάει από το κέντρο του O. Όπως γνωρίζουμε, το O είναι μέσον των διαγωνίων. Επομένως, αν από το O θεωρήσουμε επίπεδο παράλληλο στις έδρες στις οποίες έχει τα άκρα του το τμήμα MN, θα έχουμε τρία επίπεδα παράλληλα, που διχοτομούν δύο διαγωνίους, τις AG και AΓ', άρα διχοτομούν κάθε τμήμα που έχει άκρα σ' αυτά τα επίπεδα (Θεώρημα Θαλή), δηλαδή και το MN.

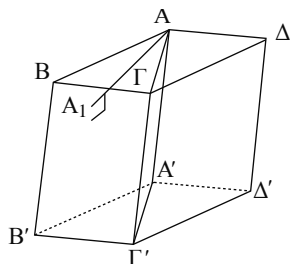


7. Η επιφάνεια του κύβου είναι: $E = 6\alpha^2$. Άρα η ακμή του κύβου είναι 6 μ.
8. $\delta = 4\sqrt{29}$ $E = 832$ $V = 1.536$
9. $E = 6\alpha^2 = 3\beta^2 = 2\delta^2$, όπου $\alpha =$ ακμή, $\beta =$ διαγώνιος βάσης και $\delta =$ διαγώνιος κύβου.
10. Ακμή $\alpha = 5$, όγκος $V = 150$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν $AB\Gamma-A'B'\Gamma'$ είναι ένα τριγωνικό πρίσμα και AA_1 η απόσταση της κορυφής A από την απέναντι έδρα, θα αποδείξουμε ότι ο όγκος του πρίσματος είναι $V = \frac{1}{2}(B\Gamma\Gamma'B') \cdot AA_1$.

Από τις ακμές $\Gamma\Gamma'$ και AA' φέρουμε επίπεδα παράλληλα στις απέναντι έδρες του πρίσματος, τα οποία τέμνονται στην ακμή $\Delta\Delta'$ και σχηματίζεται ένα παραλληλεπίπεδο, ο όγκος του οποίου είναι $(B\Gamma\Gamma'B') \cdot AA_1$. Άρα, για το πρίσμα που είναι το μισό του παραλληλεπιπέδου ισχύει το ζητούμενο.

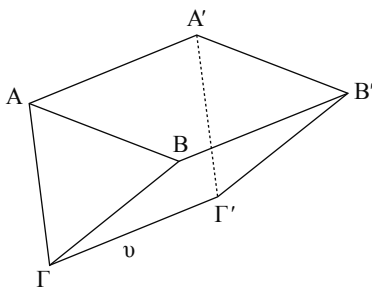


2. Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται: $V = \mathbf{B} \cdot \alpha$, όπου α η ακμή του πρίσματος και \mathbf{B} η κάθετη τομή του πρίσματος που είναι περιγεγραμμένη σε κύκλο ακτίνας ρ . Άρα το εμβαδόν της είναι: $\mathbf{B} = \tau\rho$, όπου τ η ημιπερίμετρος και ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

$$\text{Άρα } V = \tau \cdot \rho \cdot \alpha = \frac{1}{2} 2\tau \cdot \alpha \cdot \rho = E \cdot \frac{\rho}{2}.$$

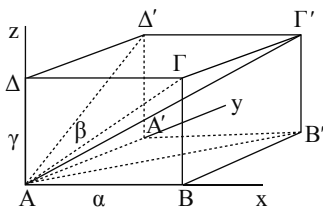
3. Αν $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \nu$, τότε ο όγκος του πρίσματος είναι $V = \mathbf{B} \cdot \nu$, όπου \mathbf{B} το εμβαδόν της κάθετης τομής. Επειδή η κάθετη τομή είναι ανεξάρτητη από την θέση των τμημάτων AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ αλλά καθορίζεται μόνο από την θέση των παραλλήλων, ο όγκος είναι σταθερός.

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου μιας κάθετης τομής επί ν , άρα και αυτό είναι ανεξάρτητο.



4. Έστω AG' ένα ευθύγραμμο τμήμα και Ax , Ay και Az τρεις ευθείες ανά δύο κάθετες. Από το σημείο Γ' φέρουμε τα επίπεδα τα παράλληλα στα xAy , yAz και zAx και σχηματίζεται το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $AB\Gamma\Delta-A'B'\Gamma'\Delta'$ που έχει την AG' διαγώνιο. Γνωρίζουμε ότι η διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από την σχέση:

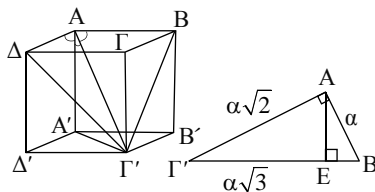
$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ και } \gamma \text{ οι προβολές του } AG' \text{ στους τρεις άξονες.}$$



5. Έστω AG' ευθύγραμμο τμήμα (σχ. άσκησης 4). Από το σημείο A φέρουμε τρία επίπεδα ανά δύο κάθετα και από το σημείο Γ' φέρουμε τρία επίπεδα παράλληλα σ' αυτά. Σχηματίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και έχουμε:
- $$AG^2 + AB'^2 + AD'^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + AB^2 + AA'^2 + AD^2 + AA'^2 =$$
- $$= 2(AB^2 + AD^2 + AA'^2) = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

6. i) Έστω AG' η διαγώνιος ενός κύβου.

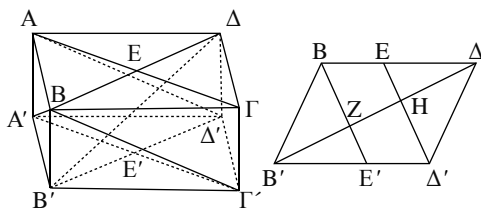
Θα αποδείξουμε ότι οι γωνίες που σχηματίζει η AG' με τις AB , AD και AA' είναι ίσες. Τα τρίγωνα $\triangle AG'B$, $\triangle AG'A'$ και $\triangle AG'\Delta$ είναι ίσα διότι έχουν κοινή την AG' , είναι ορθογώνια και έχουν τις AB , AD και AA' ίσες. Άρα οι γωνίες που σχηματίζει η διαγώνιος με τις ακμές αυτές είναι ίσες. Το ίδιο συμβαίνει και στο άλλο άκρο Γ' .



- ii) Το τρίγωνο $\triangle AG'E$ έχει πλευρές α , $\alpha\sqrt{2}$ και $\alpha\sqrt{3}$. Έστω E η προβολή του B στην υποτείνουσα. Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle G'EB$ έχουμε:

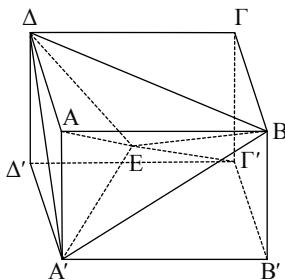
$$BE = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \text{ και } \Gamma'E = \Gamma'B - EB = 2\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

7. Θεωρούμε το διαγώνιο επίπεδο $BB'\Delta'\Delta$, το οποίο τέμνει τα δύο επίπεδα που δίνονται κατά τα τμήματα $\Delta'E$ και BE' και ζητείται να αποδείξουμε ότι η διαγώνιος $\Delta B'$ τριχοτομείται από τα σημεία Z και H (γνωστή άσκηση επιπέδομετρίας).



Σύνθετα Θέματα

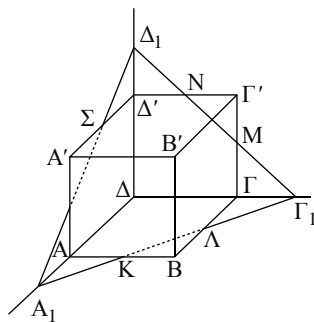
1. Σε κύβο $AB\Gamma\Delta-A'B'\Gamma'\Delta'$ θεωρούμε τις ακμές AB , AD και AA' και το επίπεδο (A', B, Δ) , που τέμνει τον κύβο κατά τα τμήματα $A'B$, $A'\Delta$ και $B\Delta$. Τα τμήματα αυτά είναι διαγώνιοι των αντιστοιχών εδρών και επομένως είναι ίσα.



2. Έστω κύβος $AB\Gamma\Delta-A'B'\Gamma'\Delta'$. Θα αποδείξουμε ότι οι διέδρες $AG'(A', B)$, $AG'(A', \Delta)$ και $AG'(B, \Delta)$ έχουν ίσες επίπεδες γωνίες. Τα σημεία A', B και Δ προβάλλονται στην διαγώνιο στο ίδιο σημείο E (άσκ. 6, Αποδ. Άσκ.), διότι έχουν ίσα μήκη και οι γωνίες που σχηματίζουν οι ακμές με την διαγώνιο είναι ίσες. Άρα το E είναι το κέντρο του ισοπλεύρου τριγώνου $A'\hat{B}\Delta$ και επομένως οι γωνίες $A'\hat{E}B$, $A'\hat{E}\Delta$ και $B\hat{E}\Delta$ είναι ίσες.

3. Έστω K, Λ και M τα μέσα των $AB, B\Gamma$ και $\Gamma\Gamma'$.

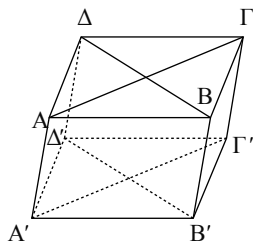
Η ευθεία $K\Lambda$ τέμνει τις προεκτάσεις των ΔA και $\Delta\Gamma$ στα σημεία A_1 και Γ_1 . Η ευθεία $\Gamma_1 M$ βρίσκεται στην έδρα $\Delta\Gamma\Gamma'\Delta'$ και τέμνει την $A\Gamma'$ στο N και την $\Delta\Delta'$ στο Δ_1 . Η ευθεία $A_1\Delta_1$ βρίσκεται στην έδρα $A\Delta\Delta'A'$ και τέμνει τις AA' και $A'\Delta'$ στα Σ και P . Θα αποδείξουμε ότι τα N, P και Σ είναι μέσα των αντιστοίχων ακμών. Το τρίγωνο $B\hat{K}\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές εκ κατασκευής, άρα και το $\Lambda\hat{\Gamma}\Gamma_1$ είναι ορθογώνιο



και ισοσκελές. Επομένως $\Gamma\Gamma_1 = \frac{1}{2}\alpha$. Αλλά και $\Gamma M = \frac{1}{2}\alpha$, άρα το τρίγωνο

$\Gamma\hat{\Gamma}_1 M$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Τότε και το $M\hat{\Gamma}'N$ ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα N μέσον της $\Gamma'\Delta'$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και τα P και Σ είναι μέσα. Άρα το σχήμα $K\Lambda M N P \Sigma$ είναι εξάγωνο με πλευρές ίσες με $\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha$. Τέλος, ανά δύο οι διαδοχικές γωνίες του είναι ίσες, ως παρά την βάση ισοσκελούς τραπεζίου. Άρα είναι κανονικό εξάγωνο.

4. Είναι γνωστό από την επιπεδομετρία ότι: το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών του. Εφαρμόζουμε το θεώρημα αυτό στα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta, A'B'\Gamma'\Delta', A\Gamma\Gamma'A'$ και $B\Delta\Delta'B'$ του παραλληλεπίπεδου $AB\Gamma\Delta-A'B'\Gamma'\Delta'$ και έχουμε το ζητούμενο.



§ 13.5-9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Το ύψος $υ$ κανονικής πυραμίδας, το απόστημα $α'$ της βάσης και το απόστημα $α$ της πυραμίδας σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο, άρα ισχύει: $\alpha^2 = \upsilon^2 + \alpha'^2$. Επίσης, η ακμή λ , το απόστημα $α$ της πυραμίδας και το μισό της πλευράς

της βάσης, $\frac{\mu}{2}$, σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο, άρα ισχύει: $\lambda^2 = \alpha^2 + \frac{1}{4}\mu^2$.

Εφαρμόζοντας αυτές τις σχέσεις έχουμε:

$$v_3 = \sqrt{\frac{3\lambda^2 - \mu^2}{3}}, v_4 = \sqrt{\frac{2\lambda^2 - \mu^2}{2}}, v_6 = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{4}}.$$

2. Η αντίστοιχη επίπεδη της διέδρης που σχηματίζεται από τις έδρες κανονικής πυραμίδας με την βάση είναι η γωνία που σχηματίζει το απόστημα α της πυραμίδας με το απόστημα α' της βάσης. Αυτά όμως μαζί με το ύψος v σχηματίζουν γνωστό ορθογώνιο τρίγωνο. Άρα η γωνία των διέδρων είναι σταθερή.

3. $E_\pi = 24\sqrt{2}$, $E_o = 24\sqrt{5} + 16$.

4. Πλευρά $\mu = 10$, εμβαδόν βάσης $B = 100$.

5. $E_\pi = 87561$ τ.μ., $V = 2.664.792$ κ.μ.

6. $E_\pi = \mu^2\sqrt{7}$, $V = \frac{\mu^3}{\sqrt{6}}$.

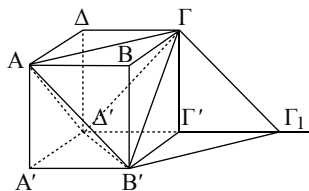
7. i) $\frac{1}{3}$, ii) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

8. $3\sqrt{6}$.

9. $V = \frac{7\sqrt{3}}{16}\alpha^2v$, $E = \frac{9\alpha}{4}\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4} + v^2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω το παραλληλεπίπεδο $AB\Gamma\Delta-A'B'\Gamma'\Delta'$ και το εγγεγραμμένο σ' αυτό τετράεδρο $A\Gamma\Delta'B'$. Είναι γνωστό ότι αν μετακινήσουμε την κορυφή μιας πυραμίδας παράλληλα με το επίπεδο της βάσης, ο όγκος της δεν μεταβάλλεται, διότι το ύψος παραμένει σταθερό.



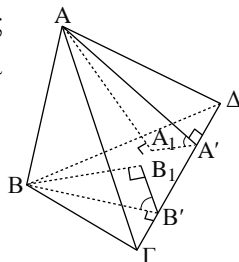
Θεωρούμε το τετράεδρο ως πυραμίδα με κορυφή το σημείο Γ και βάση $AB'\Delta'$ και μετακινούμε την κορυφή Γ κατά τμήμα παράλληλο και ίσο με την ακμή AB' . Έστω Γ_1 η νέα θέση του Γ . Το σημείο Γ_1 είναι σημείο της προέκτασης της $\Delta'\Gamma'$ και ισχύει: $\Delta'\Gamma' = \Gamma'\Gamma_1$. Ο όγκος του αρχικού τετραέδρου ισούται με τον όγκο του $\Gamma_1.A\Delta'B'$ ή το ίδιο $A.B'\Delta'\Gamma_1$. Αλλά το εμβαδόν του τριγώνου $B'\Delta'\Gamma_1$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $A'B'\Gamma'\Delta'$. Δηλαδή το τετράεδρο και το παραλληλεπίπεδο έχουν κοινό ύψος και βάσεις ισοδύναμες, άρα έχουν λόγο όγκων 1:3.

2. Έστω $AB\Gamma\Delta$ τετράεδρο, A_1 και B_1 οι προβολές των κορυφών A και B στις απέναντι έδρες και A' , B' οι προβολές των A_1 και B_1 στην ακμή $\Gamma\Delta$. Οι γωνίες $\widehat{B\hat{B}'B_1}$ και $\widehat{A\hat{A}'A_1}$ είναι οι αντίστοιχες της διέδρης με ακμή $\Gamma\Delta$, άρα είναι ίσες. Τα τρίγωνα $\triangle AA_1A_1$ και $\triangle BB_1B_1$ είναι όμοια και προκύπτει:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AA'}{BB'} \Leftrightarrow AA_1 \cdot BB' = BB_1 \cdot AA' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AA_1 \cdot BB' \cdot \Gamma\Delta = BB_1 \cdot AA' \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AA_1 \cdot \text{εμβ}(B\Gamma\Delta) = BB_1 \cdot \text{εμβ}(A\Gamma\Delta) = 3V.$$



3. Αν $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράεδρο και η ακμή $\Gamma\Delta$ μετακινηθεί παραμένουσα στον φορέα της χωρίς να αλλάζει μήκος, τότε ο όγκος μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο του ύψους από το A επί το εμβαδόν της βάσης $B\Gamma\Delta$. Το ύψος δεν αλλάζει, αλλά ούτε και το εμβαδόν της βάσης, άρα ο όγκος παραμένει σταθερός.

4. Έστω $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma\Delta$ δύο τετράεδρα που οι κορυφές A' και B' του δεύτερου ανήκουν στις έδρες $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ του πρώτου.

Τα τετράεδρα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma\Delta$ έχουν κοινό ύψος από το B , άρα ισχύει:

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma\Delta)} = \frac{(A\Gamma\Delta)}{(A'\Gamma\Delta)}.$$

Επίσης: $\frac{(A'B'\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma\Delta)} = \frac{(B\Gamma\Delta)}{(B'\Gamma\Delta)}$, διότι τα τετράεδρα $A'B'\Gamma\Delta$

και $A'B'\Gamma\Delta$ έχουν κοινό ύψος από το A .

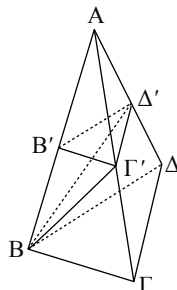
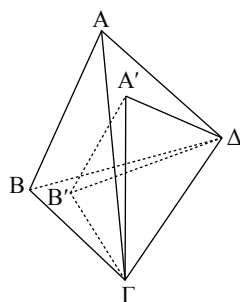
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma\Delta)} = \frac{(A\Gamma\Delta)}{(A'\Gamma\Delta)} \cdot \frac{(B\Gamma\Delta)}{(B'\Gamma\Delta)}.$$

5. Έστω τα τετράεδρα $AB\Gamma\Delta$ και $AB'\Gamma'\Delta'$, όπου τα B' , Γ' και Δ' κείνται επί των ακμών AB , $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε την άσκηση 4 στα ζεύγη τετραέδρων $(AB\Gamma\Delta, AB'\Gamma'\Delta')$ και $(AB'\Gamma'\Delta', AB'\Gamma'\Delta')$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(AB'\Gamma'\Delta')} = \frac{(AB\Gamma)}{(AB'\Gamma')} \cdot \frac{(AB\Delta)}{(AB'\Delta')} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma'} \cdot \frac{AB \cdot A\Delta}{AB \cdot A\Delta'} = \frac{A\Gamma \cdot A\Delta}{A\Gamma' \cdot A\Delta'},$$

με κοινή την ακμή AB των τετραέδρων.



$$\text{Επίσης, } \frac{(AB\Gamma'\Delta')}{(AB'\Gamma'\Delta')} = \frac{(AB\Gamma')}{(AB'\Gamma')} \cdot \frac{(A\Gamma'\Delta')}{(A\Gamma'\Delta')} = \frac{(AB\Gamma')}{(AB'\Gamma')} = \frac{AB}{AB'}$$

με κοινή ακμή των τετραέδρων την ΑΓ'. Τέλος, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, έχουμε το ζητούμενο.

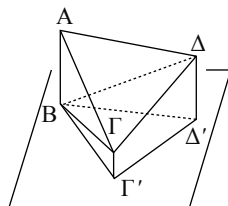
$$6. \text{ Εφαρμόζουμε την άσκηση 5, και έχουμε: } \frac{(OA'B'\Gamma')}{(OAB\Gamma)} = \frac{OA' \cdot OB' \cdot O\Gamma'}{OA \cdot OB \cdot O\Gamma} = \frac{1}{8}.$$

7. Η τριγωνική πυραμίδα έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α που έχει ύψος $\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$ και εμβαδόν $\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2$. Το τρίγωνο $OO'A$, όπου O' η προβολή του O στη βάση, είναι ορθογώνιο, έχει μία γωνία 60° και μία κάθετη πλευρά ίση με $\frac{2}{3}$ του ύψους της βάσης.

Άρα το ύψος της πυραμίδας είναι: $υ = \alpha$. Ο όγκος είναι: $V = \frac{\sqrt{3}}{12}\alpha^3$.

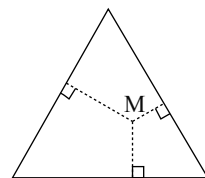
Σύνθετα Θέματα

1. Αν $B\Gamma'\Delta'$ είναι η προβολή τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ σε επίπεδο κάθετο στην ακμή AB , έχουμε: $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma\Delta')$, μετακινώντας την κορυφή Δ στο Δ' , παράλληλα στην βάση. Επίσης: $(AB\Gamma\Delta') = (AB\Gamma'\Delta')$ μετακινώντας την κορυφή Γ στο Γ' .



Επομένως, $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma'\Delta') = \frac{1}{3}(B\Gamma'\Delta') \cdot AB$.

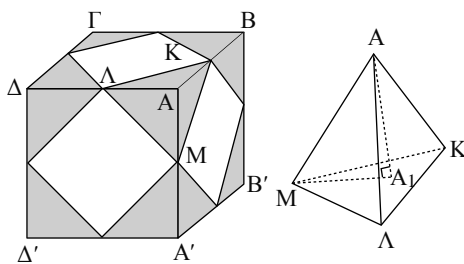
2. Αν η κάθετη τομή πρίσματος είναι ισόπλευρο τρίγωνο, τότε το τυχόν εσωτερικό σημείο M και οι προβολές του στις έδρες σχηματίζουν επίπεδο κάθετο στις ακμές, το οποίο τέμνει την παράπλευρη επιφάνεια κατά ισόπλευρο τρίγωνο. Στο επίπεδο του τριγώνου έχουμε ένα σημείο και τις αποστάσεις του από τις πλευρές του τριγώνου.



Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου αυτού από τις πλευρές του τριγώνου είναι σταθερό. Επίσης, το άθροισμα των αποστάσεων του εσωτερικού σημείου από τις βάσεις του πρίσματος ισούται με το ύψος.

3. Το πολύεδρο που σχηματίζεται προκύπτει από τον κύβο αν αφαιρέσουμε οκτώ τετράεδρα ίσα με το $AK\Lambda M$, ένα για κάθε κορυφή του κύβου.

Το τετράεδρο αυτό έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha$.



Ο υπολογισμός του ύψους γίνεται από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{A}_1M$, όπου

$$A_1 \text{ η προβολή του } A \text{ στη βάση, άρα } \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{6}\alpha \text{ και } (AK\Lambda M) = \frac{\alpha^3}{48}.$$

Επομένως, ο όγκος του στερεού είναι: $\frac{5\alpha^3}{6}$.

§ 13.10-12

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- $E_{\kappa} = 2\pi$, $E_{\circ} = 4\pi$, $V = \pi$.
- $E_{\kappa} = 240\pi$, $E_{\circ} = 690\pi$, $V = 1800\pi$.
- $E_{\kappa} = 4\pi\rho^2$, $E_{\circ} = 6\pi\rho^2$, $V = 2\pi\rho^3$.
- $V = 10\pi$ λίτρα ανά εκατοστό ύψους.
- $\rho = 2$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

$$1. E_{\circ} = \frac{2V}{\upsilon} + 2\sqrt{V\upsilon\pi}.$$

2. Αν $AB = \alpha$ και $B\Gamma = \upsilon$, έχουμε

$$V = \pi\alpha^2 - \frac{1}{2}\pi\alpha^2 = \frac{3}{4}\pi\alpha^2\upsilon = \frac{3}{4}\pi\alpha^3.$$

Έστω x η απόσταση AM . Το διπλάσιο του όγκου που παράγεται από το $AMN\Delta$ ισούται με τον όγκο που παράγεται από το τετράγωνο.

$$\text{Άρα έχουμε: } 2\pi x^2 = \pi\upsilon^2 \Leftrightarrow 2x^2 = \alpha^2.$$

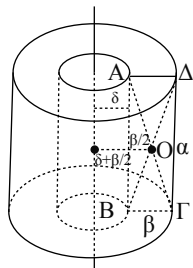
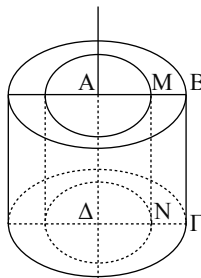
3. Ο όγκος V του παραγόμενου στερεού δίνεται από την αφαίρεση δύο κυλίνδρων και έχουμε:

$$V = \pi\alpha(\delta + \beta)^2 - \pi\alpha\delta^2 = 2\pi\left(\delta + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \alpha\beta.$$

Για την επιφάνεια έχουμε:

$$E = 2\pi\alpha\delta + 2\pi\alpha(\beta + \delta) + 2(\pi(\beta + \delta)^2 - \pi\delta^2) = 2\pi\left(\delta + \frac{\beta}{2}\right)(2\alpha + 2\beta),$$

όπου α , β οι πλευρές του ορθογωνίου και δ η απόσταση της πλησιέστερης πλευράς του ορθογωνίου από τον άξονα.



§ 13.13-15

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. $V = 12\pi$. Για το εμβαδόν υπολογίζουμε την γενέτειρα λ και έχουμε:
 $\lambda^2 = v^2 + \rho^2 = 25$, άρα $\lambda = 5$. Η παράπλευρη επιφάνεια δίνεται από την
 σχέση: $E_{\kappa} = \frac{1}{3}\pi \cdot 9,5 = 15\pi$.

Η συνολική επιφάνεια είναι: $E_0 = 3\pi(3 + 5) = 24\pi$.

2. Με εφαρμογή του τύπου της παράπλευρης επιφάνειας και του Πυθαγορείου θεωρήματος μεταξύ ύψους, ακτίνας και γενέτειρας, έχουμε: $\rho = \sqrt{2}$.

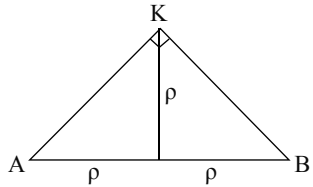
3. Υπολογίζουμε το ύψος από το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές το ύψος, την ακτίνα και την γενέτειρα και έχουμε:

$$v = \rho\sqrt{3}, E_{\kappa} = \pi\rho \cdot 2\rho = 2\pi\rho^2, V = \frac{1}{3}\pi\rho^2v = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\rho^3.$$

4. Έστω A, B τα σημεία διαμέτρου της βάσης κώνου (KO, ρ). Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\hat{A}B$ έχουμε:

$$2\lambda^2 = 4\rho^2, \text{ δηλαδή } \lambda = \rho\sqrt{3}. \text{ Επίσης, } v = \rho.$$

$$\text{Όγκος: } V = \frac{1}{3}\pi\rho^3, \text{ εμβαδόν: } E_{\kappa} = \sqrt{2}\pi\rho^2.$$



5. Από την σχέση $\pi\rho(\lambda + \rho) = \pi\alpha^2$ υπολογίζουμε το λ . Οπότε έχουμε:
 $E_{\kappa} = \pi\rho\lambda = \pi(\alpha^2 - \rho^2)$. Για τον υπολογισμό του όγκου βρίσκουμε το v από
 την σχέση: $v^2 = \lambda^2 - \rho^2 = \frac{\alpha^2}{\rho^2}(\alpha^2 - 2\rho^2)$ και αντικαθιστώντας στον τύπο

$$\text{του όγκου έχουμε: } V = \frac{1}{3}\pi\rho\alpha\sqrt{\alpha^2 - 2\rho^2}.$$

6. Η γενέτειρα λ είναι: $\lambda = \rho\sqrt{5}$. Αν E_{β} είναι το εμβαδόν της βάσης του κώνου

$$\text{έχουμε: } \frac{E_{\kappa}}{E_{\beta}} = \frac{\pi\rho\lambda}{\pi\rho^2} = \frac{\lambda}{\rho} = \sqrt{5}.$$

7. $\frac{E_{\kappa\lambda}}{E_{\kappa\omega}} = \frac{2\pi\rho v}{\pi\rho\lambda} = \frac{2v}{\sqrt{\rho^2 + v^2}}$.

8. Υπολογίζουμε την γενέτειρα λ του κώνου χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε $\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2 = 15\rho^2 + \rho^2 = 16\rho^2$. Άρα $\lambda = 4\rho$. Από τον τύπο του αναπτύγματος έχουμε $\varphi = \frac{\rho}{\lambda} 360^\circ = \frac{\rho}{4\rho} 360^\circ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Άρα το ζητούμενο ανάπτυγμα αντιστοιχεί σε γωνία 90° .

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν χωρίσουμε κώνο ακτίνας ρ και γενέτειρας λ με επίπεδο παράλληλο στη βάση έτσι ώστε ο μικρός κώνος που απομένεται να έχει βάση ακτίνας ρ' και γενέτειρα λ' και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του να είναι το μισό της αντίστοιχης επιφάνειας του αρχικού, θα έχουμε: $\pi\rho\lambda = 2\pi\rho'\lambda'$. (1)

Έστω κ ο λόγος ομοιότητας της μεγάλης προς τη μικρή βάση και έχουμε:

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} = \kappa.$$

Αντικαθιστώντας τα ρ και λ στην (1) προκύπτει $\kappa = \sqrt{2}$.

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για τους όγκους που συνδέονται με την

σχέση: $\frac{\pi\rho^2\upsilon}{3} = 2\frac{\pi\rho'^2\upsilon'}{3}$, η οποία δίνει $\kappa = \sqrt[3]{2}$.

2. Ο όγκος $V_{\text{AB}\Gamma}$ που παράγεται από το ισόπλευρο

τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ κατά την περιστροφή του γύρω από τον άξονα ξ δίνεται από την σχέση:

$$V_{\text{AB}\Gamma} = V_{\text{AMK}} - V_{\text{ΓK}\Lambda} - V_{\text{BM}\Lambda\Gamma}.$$

Όμως V_{AMK} και $V_{\text{ΓK}\Lambda}$ είναι όγκοι κώνων και $V_{\text{BM}\Lambda\Gamma}$ είναι όγκος κώλου κώνου.

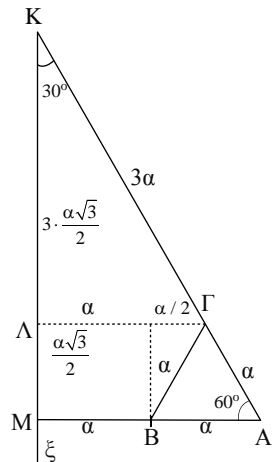
Έχουμε λοιπόν:

$$V_{\text{KMA}} = \frac{1}{3}\pi(2\alpha)^2 \cdot 2\sqrt{3}\alpha = \frac{\pi\alpha^3 8\sqrt{3}}{3}$$

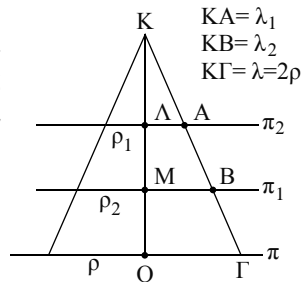
$$V_{\text{K}\Lambda\Gamma} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha = \frac{\pi\alpha^3 9\sqrt{3}}{8}$$

$$V_{\text{MB}\Lambda\Gamma} = \frac{1}{3}\pi \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2 + \frac{3\alpha}{2} \cdot \alpha \right] = \frac{\pi\alpha^3 \sqrt{3} \cdot 19}{24}.$$

$$\text{Άρα } V_{\text{AB}\Gamma} = \frac{3\sqrt{3}\pi\alpha^3}{4}.$$



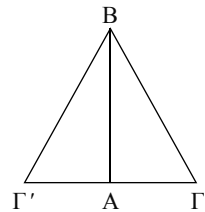
3. Έστω (KO, ρ) ο κώνος και π_1, π_2 δύο επίπεδα παράλληλα στη βάση π του κώνου τέτοια, ώστε οι κυρτές επιφάνειες του μικρού κώνου και των δύο κόλυρων κώνων στους οποίους χωρίζεται ο αρχικός κώνος να έχουν ισοδύναμες κυρτές επιφάνειες. Δηλαδή η κάθε μία κυρτή επιφάνεια να έχει εμβαδόν ίσο με το $1/3$ του αρχικού κώνου. Επομένως έχουμε $\pi r_1 \lambda_1 = \frac{1}{3} \pi r \lambda$. Αλλά $\lambda = 2\rho$ και $\lambda_1 = 2\rho_1$ από την ομοιότητα των βάσεων.



Άρα έχουμε $\rho_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho$. Θεωρούμε τώρα τον κώνο (KM, ρ_2) ο οποίος έχει κυρτή επιφάνεια ίση με τα $2/3$ του αρχικού κώνου. Άρα έχουμε $\pi r_2 \lambda_2 = \frac{2}{3} \pi r \lambda$. Αλλά και πάλι έχουμε $\lambda_2 = 2\rho_2$ και $\lambda = 2\rho$.

Επομένως έχουμε $\rho_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \rho$. Γνωρίζοντας τα ρ_1 και ρ_2 υπολογίζουμε τα ύψη και βρίσκουμε $K\Lambda = \rho$ και $KM = \sqrt{2}\rho$ με τα οποία προσδιορίζονται τα επίπεδα π_1 και π_2 .

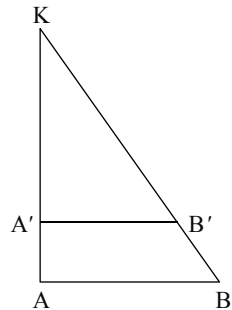
4. Έστω κώνος που παράγεται από την περιστροφή του ορθογωνίου τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$ γύρω από την κάθετη πλευρά του AB . Τότε έχουμε $\text{εμβ}(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma$. Άρα $V = \frac{1}{3} 2\pi A\Gamma \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{v}{3} \rho^2$, όπου V ο όγκος του κώνου.



5. Αν KAB και $KA'B'$ είναι δύο όμοια τρίγωνα με λόγο ομοιότητας μ θα έχουμε

$$\mu = \frac{A'B'}{AB} = \frac{KB'}{KB}. \text{ Επομένως } \frac{\pi A'B' \cdot KB'}{\pi AB \cdot KB} = \frac{A'B'^2}{AB^2}.$$

6. Αφού το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου ισούται με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας a , έχουμε $\pi r \lambda = \pi a^2 \Rightarrow r \lambda = a^2$. Αν γνωρίζουμε το ρ από αυτή τη σχέση υπολογίζουμε το λ . Επίσης, υπολογίζουμε το ύψος του κώνου και έχουμε $v = \sqrt{\lambda^2 - \rho^2} = \frac{\sqrt{a^4 - \rho^4}}{\rho}$.



i) Ο όγκος του κώνου δίνεται από τη σχέση $V = \frac{1}{3}\pi r\rho^2 = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{\alpha^4 - \rho^4}$.

ii) Για $\alpha = 1$ και $\rho = \frac{2}{3}$ έχουμε $V = \frac{2\sqrt{65}}{81}\pi$.

§ 13.16-18

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η ακτίνα ρ θα είναι: $\rho = \sqrt{50^2 - 20^2} = 10\sqrt{21}$.

2. Αν ρ' η ακτίνα της τομής, δ η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο και ρ η ακτίνα της σφαίρας, έχουμε: $\pi\rho'^2 = 900\pi \Leftrightarrow \rho' = 30$. Η απόσταση δ είναι: $\delta = \sqrt{\rho^2 - \rho'^2} = 10\sqrt{7}$.

3. Αν διαιρέσουμε την ακτίνα της σφαίρας σε δύο ίσα τμήματα, η ακτίνα της τομής δίνεται από την σχέση: $\rho'^2 = \rho^2 - \frac{1}{4}\rho^2 \Leftrightarrow \rho' = \frac{\rho\sqrt{3}}{2}$. Το εμβαδόν του κύκλου της τομής είναι: $E = \pi\rho'^2 = \frac{3}{4}\pi\rho^2$.

4. Το εμβαδόν E του κύκλου ($\Gamma, \Gamma\Lambda$) δίνεται από την σχέση: $E = \pi\rho'^2$, όπου $\rho' = \Gamma\Lambda$.

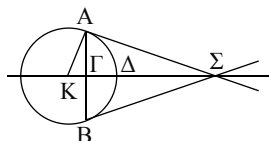
Αλλά $K\Gamma = \frac{\rho^2}{\delta}$, όπως προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{K}\overset{\Delta}{\Sigma}$.

Επίσης, $\rho' = \Lambda\Gamma = \sqrt{AK^2 - K\Gamma^2} = \rho\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}$.

Επομένως, $E = \pi\rho' = \pi\rho'^2 = \pi\rho^2\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}$.

5. $E = 4\pi\rho^2 = 400\pi$.

6. $\frac{E}{E'} = \frac{4\pi\rho^2}{4\pi\rho'^2} = \lambda^2$.

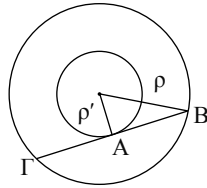


7. Απλή εφαρμογή του τύπου: $V = \frac{4}{3}\pi\rho^3 = 36\pi$.

$$8. \frac{V}{V'} = \frac{4\pi\rho^3/3}{4\pi\rho'^3/3} = \lambda^3.$$

9. Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο την ΒΓ δίνεται από τη σχέση: $E = \pi(AB)^2$.

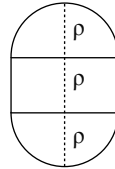
Αλλά $AB^2 = \rho^2 - \rho'^2$. Άρα: $E = \pi(\rho^2 - \rho'^2)$.



10. Ο συνολικός όγκος του σχήματος είναι το άθροισμα κυλίνδρου με ακτίνα ρ και ύψος ρ και μιας σφαίρας ακτίνας ρ .

Άρα έχουμε: $V = \frac{4}{3}\pi\rho^3 + \pi\rho^2 \cdot \rho = \frac{7}{3}\pi\rho^3$.

Αλλά έχουμε: $\frac{7}{3}\pi\rho^3 = 63\pi \Leftrightarrow \rho^3 = 27 \Leftrightarrow \rho = 3$.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

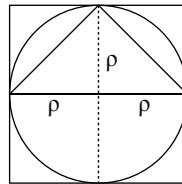
1. Από τους τύπους

$$V_{\sigma\phi} = \frac{4}{3}\pi\rho^3, \quad V_{\kappa\upsilon} = \frac{1}{3}\pi\rho^3, \quad V_{\kappa\lambda} = 2\pi\rho^3$$

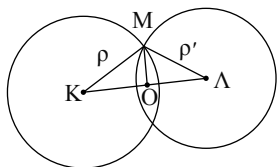
$$\text{και } E_{\sigma\phi} = 4\pi\rho^2 \text{ και } E_{\kappa\lambda} = 4\pi\rho^2 + 2\pi\rho^2$$

προκύπτουν αμέσως τα ζητούμενα.

Αυτές τις σχέσεις απέδειξε πρώτος ο Αρχιμήδης.



2. Αν (K, ρ) και (Λ, ρ') είναι δύο δοσμένες σφαίρες και M ένα κοινό σημείο των δύο σφαιρών, θεωρούμε το επίπεδο που ορίζεται από τα κέντρα τους και το σημείο M . Το επίπεδο αυτό τέμνει τις σφαίρες κατά μέγιστους κύκλους. Έστω O η προβολή του σημείου M στην διάκεντρο $K\Lambda$.

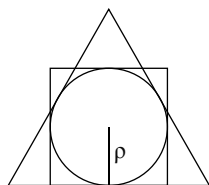


Στο τρίγωνο $K\Lambda M$ οι τρεις πλευρές είναι γνωστές, επομένως είναι γνωστή (και σταθερή) η θέση του σημείου O πάνω στην $K\Lambda$, (Θεώρημα διαμέσων) και το μήκος MO .

Επειδή οι σφαίρες σχηματίζονται από την περιστροφή ενός μεγίστου κύκλου, έπεται ότι το σημείο M είναι σημείο κύκλου που κείται σε επίπεδο κάθετο στην διάκεντρο $K\Lambda$ στο σημείο O , με κέντρο το O και ακτίνα MO .

3. Ο όγκος σφαίρας ακτίνας ρ είναι $V_1 = \frac{4}{3}\pi\rho^3$. Ο

όγκος V_2 κυλίνδρου ακτίνας ρ και ύψους 2ρ είναι $V_2 = \pi\rho^2 \cdot 2\rho = 2\pi\rho^3$. Τέλος, ο όγκος κώνου V_3 με διάμετρο ίση με ακμή έχει ακτίνα βάσης $\rho\sqrt{3}$ και ύψος 3ρ , άρα: $V_3 = \pi \cdot 3\rho^2 \cdot 3\rho = 9\pi\rho^3$. Οι λόγοι $V_3:V_1$ και $V_2:V_1$ είναι αντίστοιχα 9:4 και 6:4.



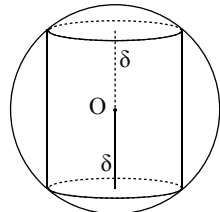
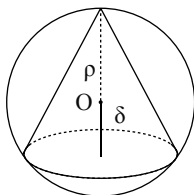
Σύνθετα Θέματα

1. Αν η επιφάνεια σφαίρας ακτίνας ρ και η επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας ρ και ύψους u είναι ίσες, έχουμε την σχέση: $4\pi\rho^2 = 2\pi\rho u \Leftrightarrow 2\rho = u$. Δηλαδή το ύψος είναι ίσο με την διάμετρο της σφαίρας.
2. Αν δ είναι η απόσταση της βάσης του εγγεγραμμένου κώνου στη σφαίρα από το κέντρο της, τότε έχει ύψος $u = \rho + \delta$ και ακτίνα $\sqrt{\rho^2 - \delta^2}$, όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας.

Ο όγκος V του κώνου είναι:

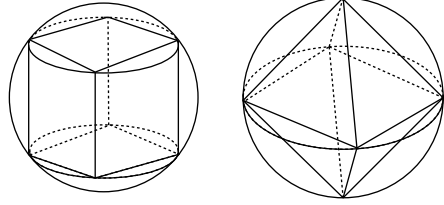
$$V = \kappa\rho(\rho^2 - \delta^2)(\rho + \delta),$$

όπου κ σταθερά. Για να βρούμε το μέγιστο του όγκου μηδενίζουμε την παράγωγο ως προς δ (κατά τα γνωστά) και βρίσκουμε $3\delta = \rho$.



Για τον κύλινδρο έχουμε: $V = 2\pi\delta(\rho^2 - \delta^2)$, και κατά τα γνωστά βρίσκουμε $\delta\sqrt{3} = \rho$.

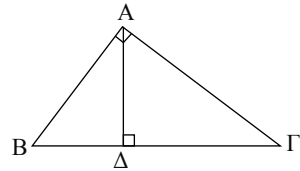
3. i) Η διαγώνιος του κύβου που είναι εγγεγραμμένος στη σφαίρα είναι ίση με την διάμετρο της σφαίρας. Επομένως έχουμε: $2\rho = \alpha\sqrt{3}$. Άρα ο λόγος των όγκων της σφαίρας και του κύβου είναι:
- $$\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$



- ii) Το κανονικό οκτάεδρο αποτελείται από δύο τετραγωνικές πυραμίδες με ύψος ίσο με την ακτίνα ρ της σφαίρας και διαγώνιο της τετραγωνικής βάσης ίση με 2ρ . Επομένως, ο όγκος του τετραέδρου ισούται με: $\frac{2}{3}\rho^2\rho = \frac{2}{3}\rho^3$. Άρα ο λόγος των όγκων της σφαίρας και του οκταέδρου είναι: $1:\pi$.

4. Οι επιφάνειες της σφαίρας, του κυλίνδρου και του κώνου είναι: $E_1 = 4\pi\rho^2$, $E_2 = 4\pi\rho^2$, $E_3 = 4\pi\rho^2$, δηλαδή οι επιφάνειες είναι ίσες. Οι όγκοι είναι: $V_1 = \frac{4}{3}\pi\rho^3$, $V_2 = 2\pi\rho^3$, $V_3 = \frac{2}{3}\pi\rho^3$, άρα οι λόγοι είναι 3:2 και 1:2.

5. Έστω $\triangle AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο, A' , B' , Γ' τα μέσα των πλευρών του, α , β , γ τα μήκη τους και $A\Delta = \nu$ το ύψος. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα II, παρ. 13.18, υπολογίζουμε τους παραγόμενους όγκους από το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, όταν αυτό περιστραφεί γύρω από τις τρεις πλευρές του. Έχουμε:



$$V_\beta = E_\beta \cdot A\Delta = 2\pi\alpha \cdot A'B' \cdot A\Delta = \pi\alpha\gamma\nu,$$

$$V_\gamma = E_\gamma \cdot A\Delta = 2\pi\alpha \cdot A'B' \cdot \Gamma\Delta = \pi\alpha\beta\nu \text{ και}$$

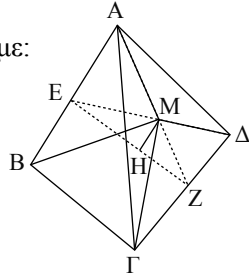
$$V_\alpha = E_\alpha \cdot AB = 2\pi \cdot A'B' \cdot \Gamma\Delta \cdot AB = 2\frac{\gamma}{\alpha}\pi\beta^2.$$

Σχηματίζουμε τις ποσότητες $1/V_\alpha^2$, $1/V_\beta^2$ και $1/V_\gamma^2$ και έχοντας υπόψη τη σχέση $\alpha^2\nu^2 = \beta^2\gamma^2$, αποδεικνύεται το ζητούμενο. Για το λόγο V_β/V_γ έχουμε: $V_\beta/V_\gamma = \pi\alpha\gamma\nu/\pi\alpha\beta\nu = \gamma/\beta$.

Γενικές Ασκήσεις

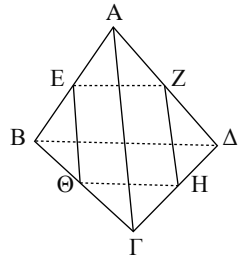
1. Έστω $AB\Gamma\Delta$ τετράεδρο και E, Z και H τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$ και EZ και M τυχαίο σημείο. Εφαρμόζοντας επανειλημμένα το Θεώρημα της διαμέσου, έχουμε:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 &= \\ &= 2ME^2 + \frac{1}{2}AB^2 + 2MZ^2 + \frac{1}{2}\Gamma\Delta^2 = \\ &= 2(ME^2 + MZ^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + \Gamma\Delta^2) = \\ &= 2(2MH^2 + \frac{1}{2}EZ^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + \Gamma\Delta^2). \end{aligned}$$



Αλλά στην τελευταία σχέση, όλα τα τμήματα είναι σταθερά εκτός από το MH , επομένως το άθροισμα των τετραγώνων γίνεται ελάχιστο αν $MH = 0$, δηλαδή όταν το M ταυτίζεται με το H .

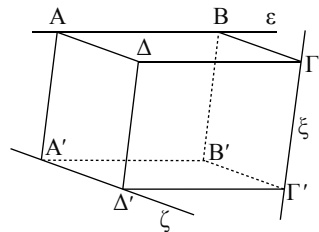
2. Έστω επίπεδο π , παράλληλο στις ακμές $A\Gamma$ και $B\Delta$ τετράεδρου $AB\Gamma\Delta$, που βρίσκεται μεταξύ τους. Το επίπεδο π τέμνει τις ακμές $AB, A\Delta, \Gamma\Delta$ και ΓB στα σημεία E, Z, H και Θ αντίστοιχα. Επειδή το π είναι παράλληλο στην $A\Gamma$, οι $E\Theta$ και ZH είναι παράλληλες στην $A\Gamma$. Επίσης, επειδή το π είναι παράλληλο στην $B\Delta$, οι EZ και ΘH είναι παράλληλες στην $B\Delta$. Το τετράπλευρο $EZH\Gamma$ έχει δύο ζεύγη απέναντι πλευρών παράλληλα, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



3. **Ανάλυση:** Έστω ότι $AB\Gamma\Delta - A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι το ζητούμενο παραλληλεπίπεδο. Παρατηρούμε ότι το επίπεδο $AB\Gamma\Delta$ είναι γνωστό, διότι περιέχει την ϵ και είναι παράλληλο στην ζ .

Κατασκευή: Φέρουμε επίπεδο που να περιέχει την ευθεία ϵ , παράλληλο στην ζ . Αυτό τέμνει την ξ στο σημείο Γ .

Επίσης, φέρουμε επίπεδο που περιέχει την ξ και είναι παράλληλο στην ϵ . Αυτό τέμνει την ζ στο Δ' . Τέλος, από την ευθεία ζ φέρουμε επίπεδο παράλληλο στην ξ που τέμνει την ϵ στο A . Τα τρία αυτά επίπεδα έχουν κοινό το σημείο Δ . Οι υπόλοιπες κορυφές κατασκευάζονται φέροντας τις κατάλληλες παράλληλες στις ευθείες ϵ, ζ και ξ από τα σημεία που βρήκαμε.



4. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ένα τετράεδρο και E το σημείο που το διχοτόμο επίπεδο της διέδρης γωνίας με ακμή $A\Gamma$ τέμνει την απέναντι ακμή. Το διχοτόμο επίπεδο

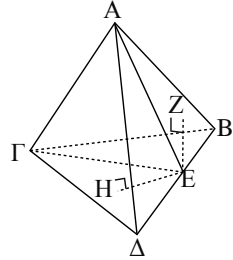
(A, Γ, E) χωρίζει το τετράεδρο σε δύο ισοϋψή τετράεδρα, τα A.BΓE και A.EΓΔ, επομένως ο λόγος των όγκων τους είναι ίσος με το λόγο των βάσεων. Οι βάσεις BΓE και EΓΔ έχουν ίσα ύψη, επομένως ο λόγος τους ισούται με τον λόγο των βάσεων, δηλαδή EB και EΔ.

$$\text{Άρα, } \frac{(ABΓE)}{(AEΓΔ)} = \frac{(BΓE)}{(EΓΔ)} = \frac{BE}{EΔ} \quad (1).$$

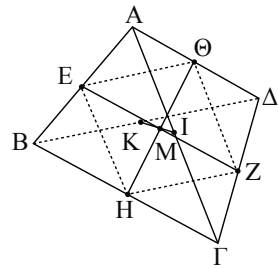
Τα τετράεδρα E.ABΓ και E.AΓΔ έχουν λόγο όγκων:

$$\frac{(ABΓE)}{(AEΓΔ)} = \frac{(ABΓ)}{(AΓΔ)} \frac{ZE}{EH} = \frac{(ABΓ)}{(AΓΔ)} \quad (2)$$

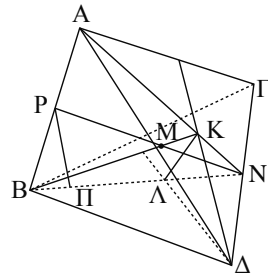
διότι το σημείο E, ως σημείο του διχοτόμου επιπέδου, ισαπέχει από τις έδρες της διέδρης. Από τις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.



5. Έστω ABΓΔ τετράεδρο και E, Z, H, Θ, I και K τα μέσα των AB, ΓΔ, BΓ, AΔ, AΓ και BΔ αντίστοιχα. Τα τμήματα EΘ και HZ είναι ίσα και παράλληλα με το μισό της BΔ. Άρα, το EHZΘ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Επομένως, τα τμήματα EZ και HΘ διχοτομούνται. Για το ίδιο λόγο, το EIZK είναι παραλληλόγραμμο, άρα και τα EZ και IK διχοτομούνται. Άρα και τα τρία τμήματα διχοτομούνται. Τα τμήματα αυτά λέγονται διδιάμεσοι του τετραέδρου.



6. Έστω ABΓΔ τετράεδρο, N το μέσον της ΓΔ και K, Λ τα κέντρα βάρους των εδρών AΓΔ και BΓΔ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι οι διάμεσοι AΛ και BK τέμνονται σε σημείο M που τις χωρίζει σε λόγο 1:3. Τα κέντρα βάρους K και Λ των εδρών AΓΔ και BΓΔ είναι σημεία των διαμέσων τους AN και BN που είναι συνεπίδες. Επομένως, οι διάμεσοι του AΛ και BK του τετραέδρου τέμνονται σε σημείο M. Τα K και Λ χωρίζουν τις AN και BN σε λόγο 2:1, επομένως έχουμε:
- $$\frac{AK}{KN} = \frac{BL}{LN}, \text{ άρα } AB // KΛ, \text{ που συνεπάγεται: } \frac{AM}{MΛ} = \frac{BM}{MK} = \frac{AB}{KΛ} = \frac{AN}{KN} = \frac{3}{1}.$$

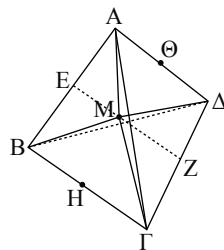


Αποδείξαμε ότι δύο διάμεσοι τέμνονται στο σημείο M που τις χωρίζει σε λόγο 3:1. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και οι άλλες διάμεσοι τέμνουν

την ΑΛ στο ίδιο σημείο Μ. Άρα διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και χωρίζονται σε λόγο 3:1.

7. Έστω ΝΠ η διδιάμεσος του τετραέδρου ΑΒΓΔ η οποία τέμνει την διάμεσο ΑΛ σε σημείο Μ' και έστω ΡΠ//ΑΛ, όπου Ρ σημείο την ΒΝ. Επειδή Π μέσον της ΑΒ και ΡΠ//ΑΛ το Ρ είναι μέσον του ΒΛ και Λ μέσον του ΡΝ. Έχουμε: $2\Lambda M' = \text{ΡΠ}$. Όμως, $2\text{ΡΠ} = \text{ΑΛ}$. Άρα $4M'\Lambda = \text{ΑΛ}$. Δηλαδή το Μ' ταυτίζεται με το Μ.

8. Έστω ΑΒΓΔ το δοσμένο τετράεδρο και σημείο Μ εσωτερικό, τέτοιο ώστε ΜΑΓΔ και ΜΒΓΔ να είναι ισοδύναμα. Τα τετράεδρα αυτά έχουν κοινή βάση το τρίγωνο ΜΓΔ, άρα έχουν ίσα τα ύψη από τις κορυφές Α και Β που βρίσκονται εκατέρωθεν της βάσης ΜΓΔ. Επομένως το επίπεδο (Μ, Γ, Δ) περνάει από το μέσον Ε του ΑΒ. Το Μ επομένως ανήκει στο επίπεδο (Ε, Γ, Δ).



Θεωρούμε τα δύο άλλα τετράεδρα, ΜΓΑΒ και ΜΔΑΒ, και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το Μ είναι σημείο του επιπέδου ΖΑΒ, όπου Ζ το μέσον του ΓΔ. Το Μ ανήκει σε δύο επίπεδα, άρα ανήκει στην τομή τους, δηλαδή στην ΕΖ. Συνδυάζοντας διαφορετικά τα τετράεδρα και με τους ίδιους ακριβώς συλλογισμούς αποδεικνύεται ότι το Μ είναι σημείο και της ΗΘ, όπου Η και Θ είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ. Επομένως, το Μ είναι το σημείο τομής των διδιαμέσων του τετραέδρου, δηλαδή είναι το κέντρο βάρους του τετραέδρου.

Απόδειξη: Αν Μ είναι το σημείο τομής των διδιαμέσων του τετραέδρου, το επίπεδο (Μ, Γ, Δ) περνάει από το μέσον Ε της ΑΒ, άρα τα Α και Β ισαπέχουν από αυτό, άρα τα τετράεδρα είναι ισοδύναμα. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται ότι και τα υπόλοιπα τετράεδρα είναι ισοδύναμα.

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΕΚΔΟΣΕΩΝ



(01) 000000 0 22 0240 2

Κωδικός βιβλίου: 0-22-0240
ISBN 978-960-06-5318-2