ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Βρυώνης   Σπυρίδων Δουκάκης   Βασιλική Καρακώστα
Γεώργιος Μπαραλής   Ιωάννα Σταύρου

Μαθηματικά

Ε΄ Δημοτικού

α΄
τεύχος

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Μαθηματικά

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

α΄ τεύχος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Κωνσταντίνος Βρυώνης,** Εκπαιδευτικός ΠΕ70 **Σπυρίδων Δουκάκης,** Εκπαιδευτικός ΠΕ03 **Βασιλική Καρακώστα,** Εκπαιδευτικός ΠΕ70 **Γεώργιος Μπαραλής,** Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ **Ιωάννα Σταύρου,** Εκπαιδευτικός ΠΕ70
ΚΡΙΤΕΣ–ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Δέσποινα Πόταρη,** Καθηγήτρια ΕΚΠΑ **Δημήτριος Ζυμπίδης,** Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ70 **Μαρία Λάτση,** Εκπαιδευτικός ΠΕ70
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Σοφία Στασινοπούλου** **Γλυκερία Τσιμούρτου**
ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Δημήτριος Μπόντης**
ΟΡΓΑΝΩΣΗ & ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΙΕΠ	**Αθανάσιος Σκούρας,** Σύμβουλος Α΄ ΥΠΠΕΘ
ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗΣ	**Κλεοπάτρα Μουρσελά,** Εισηγήτρια ΙΕΠ ΠΕ08
ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ - ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	**Ευάγγελος Συρίγος**, Ειδικός Σύμβουλος ΙΕΠ
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Ιουλιανή Βρούτση,** Εκπαιδευτικός ΠΕ02
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	**ΙΤΥΕ “ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ”**

Το παρόν εκπονήθηκε με την υπ. αρ. 21/16-06-2016 Πράξη του Δ.Σ. του ΙΕΠ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γεράσιμος Κουζέλης
Πρόεδρος του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Βρυώνης   Σπυρίδων Δουκάκης   Βασιλική Καρακώστα
Γεώργιος Μπαραλής   Ιωάννα Σταύρου

Μαθηματικά

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

α΄ τεύχος

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ενότητα 1

Κεφ. 1 Υπενθύμιση – Α΄ μέρος 7
Κεφ. 2 Υπενθύμιση – Β΄ μέρος 9
Κεφ. 3 Πώς λύνουμε ένα πρόβλημα 11
Κεφ. 4 Οι φυσικοί αριθμοί 13
Κεφ. 5 Αξία θέσης ψηφίου στους φυσικούς αριθμούς 15
Κεφ. 6 Σύγκριση και διάταξη στους φυσικούς αριθμούς 17
Κεφ. 7 Στρογγυλοποίηση στους φυσικούς αριθμούς 19
1ο επαναληπτικό κεφάλαιο 21

ενότητα 2

Κεφ. 8 Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους φυσικούς αριθμούς 25
Κεφ. 9 Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς 27
Κεφ. 10 Πολλαπλάσια και διαιρέτες 29
Κεφ. 11 Κριτήρια διαιρετότητας 31
Κεφ. 12 Η διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς 33
2ο επαναληπτικό κεφάλαιο 35

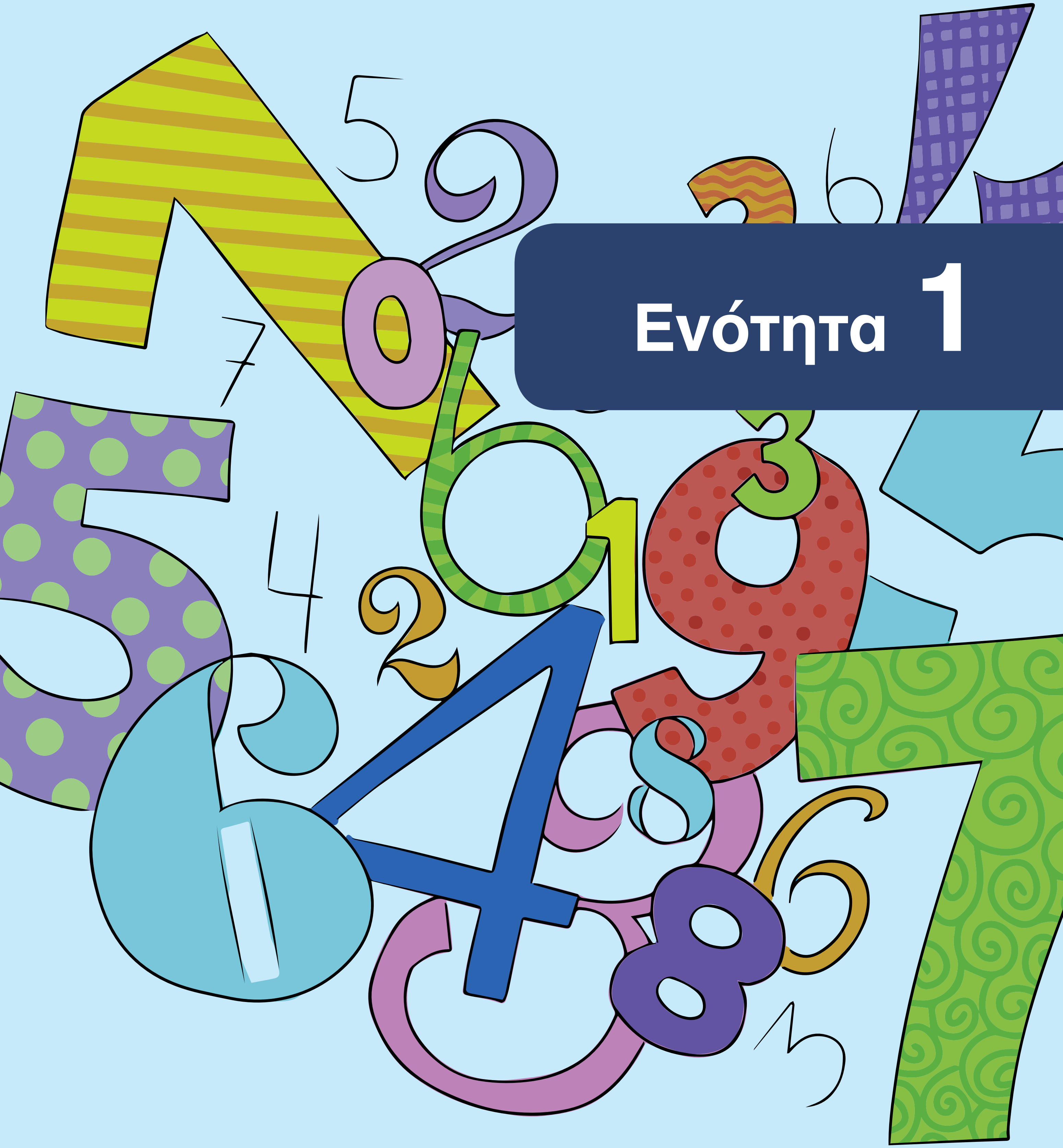
ενότητα 3

Κεφ. 13 Οι κλασματικοί αριθμοί 39
Κεφ. 14 Κλάσματα μεγαλύτερα της ακέραιης μονάδας 41
Κεφ. 15 Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης 43
Κεφ. 16 Ισοδυναμία κλασμάτων – Απλοποίηση κλασμάτων 45
Κεφ. 17 Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων 47
Κεφ. 18 Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων 49
Κεφ. 19 Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα-Αντίστροφοι αριθμοί 51
Κεφ. 20 Διαίρεση κλασμάτων 53
Κεφ. 21 Αναγωγή στην κλασματική μονάδα 55
3ο επαναληπτικό κεφάλαιο 57

ενότητα 4

Κεφ. 22 Συλλογή οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων 61
Κεφ. 23 Χαρακτηριστικές τιμές δεδομένων – Μέση τιμή 63
Κεφ. 24 Πιθανότητες 65
4ο επαναληπτικό κεφάλαιο 67

Ενότητα 1



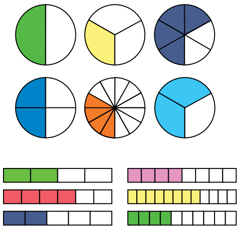
Υπενθύμιση - Α΄ μέρος

1

Τι θυμόμαστε από τα Μαθηματικά των προηγούμενων τάξεων

Αριθμοί 	● Μετράμε από το 999.980 ως το 1.000.000. ● Γράφουμε τον μεγαλύτερο πενταψήφιο αριθμό: _ _ _ _ _ ● Γράφουμε τον μικρότερο τετραψήφιο αριθμό: _ _ _ _ ● Γράφουμε τον προηγούμενο και τον επόμενο του αριθμού: _________ < 198.090 < _______ ● Γράφουμε <, > ή = στα ζευγάρια των αριθμών: 345.180 __ 43.854 94.894 __ 98.494 890.182 __ 890.182	
Πρόσθεση 2 9 7 5 + □ 2 □ 8 9 □ 8 □ **και αφαίρεση** 1 5 □ 9 4 - 6 3 □ 7 □ 7 7 □	8.000 + 4.000 = 129.999 + 356.001 = 45.700 + 239.135 + 3.300 = 3.600 - 1.700 = 642.800 - 4.800 = 640.090 - 300.080 =	Προσθέτουμε κάθετα τους αριθμούς: 14.287 + 36 + 4.002 +369 = Αφαιρούμε κάθετα τους αριθμούς: 1.000.000 - 345.804 =
Πολλαπλασιασμός □ 1 5 x 1 □ 6 9 □ + □ 1 □ □ 8 4 0	2 x 500.000 = 4 x 250.000 = 8 x 125.000 = 12 x 50.000 = 150 x 600 =	Πολλαπλασιάζουμε κάθετα τους αριθμούς: 378 x 19 = 206 x 54 =
Διαίρεση τέλεια (υ=0) 7 8 3 □ | 1 8 - 7 2 | 4 3 □ 6 3 - 5 □ 9 0 - 9 0 □ **και ατελής (υ≠0)** 7 8 □ 2 | □ 8 - 7 □ | 4 3 □ 6 5 - 5 □ 1 1 2 - 1 □ 8 4	480.000 : 4 = 480.000 : 12 = 480.000 : 10.000 = 480.000 : 160 = 480.000 : 12.000 = Το υπόλοιπο της διαίρεσης 2.502 : 5 είναι ...	Διαιρούμε κάθετα τους αριθμούς: 84.900 : 6= 107.352 : 18= 450.000 : 7 =

Κλάσματα

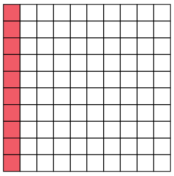


Γράφουμε πώς διαβάζουμε τα κλάσματα:

$\frac{1}{2}$ .... $\frac{1}{4}$ .... $\frac{3}{4}$ ....

$\frac{5}{7}$ .... $\frac{1}{10}$ .... $\frac{1}{100}$............................

Δεκαδικοί αριθμοί

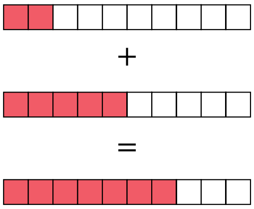


$\frac{1}{10} = 0,1$

Γράφουμε πώς διαβάζουμε τους δεκαδικούς αριθμούς:

0,9		0,12		0,123	
1,9		1,26		12,306	

Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς



0,2 + 0,5 = 0,7

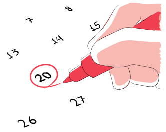
4,8 + 1 =
4,8 + 0,1 =
4,8 + 0,01 =
4,8 + 0,001 =

Προσθέτουμε κάθετα τους αριθμούς:
36 + 3,6 + 0,36 + 3

4,8 – 1 =
4,8 - 0,1 =
4,8 - 0,01 =
4,8 - 0,001 =

Αφαιρούμε κάθετα τους αριθμούς:
100,02 - 23,65 =

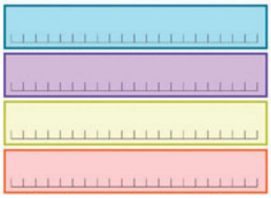
Συμμιγείς αριθμοί



2018 έτ. 9 μήν. 12 ημ.

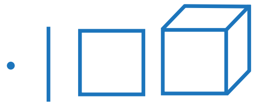
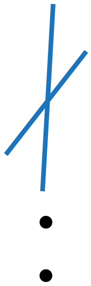
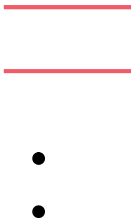
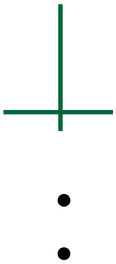
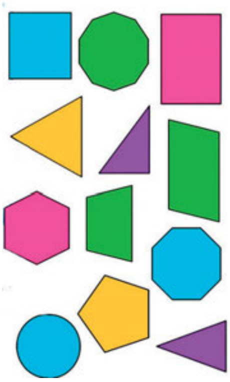
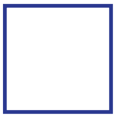
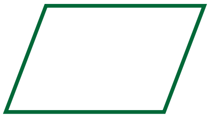
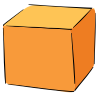
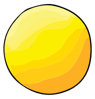
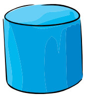
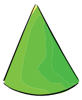
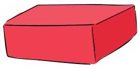
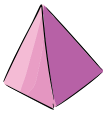
Μετατρέπουμε τους δεκαδικούς αριθμούς σε συμμιγείς:
1,248 μ.
3,600 κ.
1,5 ώρ.

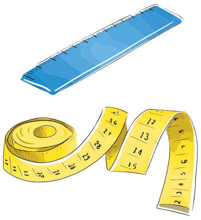
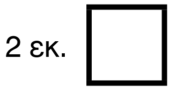
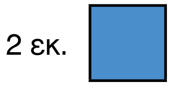
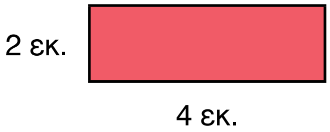
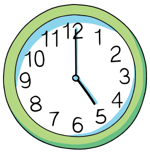
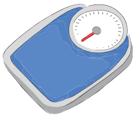
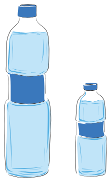
Αριθμογραμμή



Συμπληρώνουμε τους αριθμούς στην αριθμογραμμή:

Τι θυμόμαστε από τα Μαθηματικά των προηγούμενων τάξεων

Γεωμετρία 	Αντιστοιχίζουμε τις ευθείες με τις ονομασίες τους:    παράλληλες τεμνόμενες κάθετες
Γεωμετρικά σχήματα 	Αναγνωρίζουμε τα γεωμετρικά σχήματα:     .... Καθένα από τα παραπάνω γεωμετρικά σχήματα έχει: α. τέσσερις ______________ β. τέσσερις ______________ γ. τέσσερις ______________ Γράφουμε ποια από τα παραπάνω γεωμετρικά σχήματα έχουν: α. όλες τις πλευρές τους ίσες: ______________________ β. όλες τις γωνίες τους ορθές: ______________________
Γεωμετρικά στερεά	Αναγνωρίζουμε τα γεωμετρικά στερεά:  ______  ______  ______  ______  ______  ______

<table>
<tr><td>Μετρήσεις</td><td>Αναφέρουμε γνωστά μας μεγέθη και τις αντίστοιχες μονάδες με τις οποίες τα μετράμε.</td></tr>
<tr><td>Μετράμε το μήκος
</td><td>Υπολογίζουμε την περίμετρο των παρακάτω σχημάτων.
<table>
<tr><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td>Περίμετρος τετραγώνου =</td><td>Περίμετρος ορθογωνίου =</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Μετράμε την επιφάνεια
</td><td>Υπολογίζουμε το εμβαδό των παρακάτω σχημάτων.
<table>
<tr><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td>Εμβαδό τετραγώνου =</td><td>Εμβαδό ορθογωνίου =</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Μετράμε τον χρόνο
</td><td>Γράφουμε τι ώρα θα δείχνει το ρολόι της εικόνας 2 ώρες και 45 λεπτά μετά: ....
Γράφουμε τι ώρα έδειχνε το ρολόι της εικόνας πριν από 1 ώρα και 15 λεπτά: ....</td></tr>
<tr><td></td><td>Τα σχολεία κλείνουν 15 Ιουνίου και ανοίγουν 11 Σεπτεμβρίου.
Υπολογίζουμε πόσες ημέρες είναι οι καλοκαιρινές διακοπές μας.
____</td></tr>
<tr><td>Μετράμε το βάρος
</td><td>Γράφουμε το βάρος μας: ....
Μετράμε με ακρίβεια το βάρος μας σε: .... και ....</td></tr>
<tr><td>Μετράμε τη χωρητικότητα
</td><td>Γράφουμε τη χωρητικότητα την οποία έχει συνήθως:
• ένα μεγάλο μπουκάλι νερό: ....
• ένα μικρό μπουκάλι νερό: ....</td></tr>
</table>

Διερεύνηση

Ένα κατάστημα αθλητικών ειδών πούλησε 200 μπάλες. Οι 80 ήταν μπάλες του μπάσκετ και οι υπόλοιπες ήταν του βόλεϊ και του ποδοσφαίρου. Οι μπάλες του βόλεϊ ήταν διπλάσιες από αυτές του ποδοσφαίρου. Πόσες μπάλες του βόλεϊ και πόσες του ποδοσφαίρου πούλησε το κατάστημα;

1. Διαβάζουμε προσεκτικά το πρόβλημα, έτσι ώστε να διακρίνουμε:

Τι προσπαθούμε να βρούμε;	Τι γνωρίζουμε;

2. Προτείνουμε στρατηγικές με τις οποίες νομίζουμε ότι μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα.

Επιλέγουμε τη στρατηγική με την οποία θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα.

Παρουσιάζουμε με δικό μας τρόπο το πρόβλημα και το πώς θα το λύσουμε.

3. Συζητάμε με ποιες μαθηματικές σχέσεις μπορούμε να εκφράσουμε αυτά που γνωρίζουμε και πώς μπορούμε να βρούμε αυτό το οποίο ζητάμε.

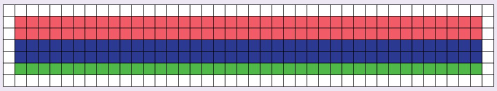
4. Απαντάμε στο πρόβλημα.

5. Συζητάμε πώς μπορούμε να ελέγξουμε την απάντησή μας.

<table>
<tr><th>Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες</th><th>Παραδείγματα</th></tr>
<tr><td>Όταν λύνουμε ένα πρόβλημα, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:
1. Διαβάζουμε και διακρίνουμε:
• **Τι προσπαθούμε να βρούμε;**
• **Τι γνωρίζουμε;**</td><td>Πόσες μπάλες του βόλεϊ και πόσες του ποδοσφαίρου πούλησε το κατάστημα;
• 200 μπάλες συνολικά
• 80 μπάλες μπάσκετ
• μπάλες βόλεϊ διπλάσιες από ποδοσφαίρου</td></tr>
<tr><td>**2. Σχεδιάζουμε** πώς θα λύσουμε το πρόβλημα:
• Ποια στρατηγική ή στρατηγικές θα χρησιμοποιήσουμε;
• Ποιο εργαλείο ή ποια εργαλεία θα χρησιμοποιήσουμε;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Στρατηγικές</th><th></th><th>Εργαλεία</th></tr>
<tr><td>✔</td><td>Παρουσιάζω το πρόβλημα</td><td>✔</td><td>ζωγραφιά</td></tr>
<tr><td></td><td>Δοκιμάζω, ελέγχω, αναθεωρώ</td><td></td><td>πίνακας</td></tr>
<tr><td></td><td>Αναζητώ ένα μοτίβο</td><td></td><td>κατάλογος</td></tr>
<tr><td></td><td>Επιχειρηματολογώ</td><td></td><td>διάγραμμα</td></tr>
<tr><td></td><td>Εργάζομαι αντίστροφα</td><td></td><td>θεατρικό παιχνίδι</td></tr>
<tr><td></td><td>Λύνω ένα πιο απλό πρόβλημα</td><td></td><td>αντικείμενο</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>**3. Λύνουμε** το πρόβλημα:
Με ποιες μαθηματικές σχέσεις μπορούμε να εκφράσουμε και να βρούμε τη λύση του προβλήματος;</td><td>Οι μπάλες του βόλεϊ και του ποδοσφαίρου είναι 200 - 80=120. Επειδή οι μπάλες του βόλεϊ είναι διπλάσιες από τις μπάλες του ποδοσφαίρου, σε μία μπάλα ποδοσφαίρου και μία μπάλα βόλεϊ αντιστοιχούν τρεις μπάλες ποδοσφαίρου. Επομένως, οι μπάλες του ποδοσφαίρου είναι 120 : 3 = 40 και οι μπάλες του βόλεϊ είναι 2 x 40 = 80.</td></tr>
<tr><td>**4. Απαντάμε** στο πρόβλημα.</td><td>Το κατάστημα πούλησε 80 μπάλες του βόλεϊ και 40 μπάλες του ποδοσφαίρου.</td></tr>
<tr><td>**5. Αναστοχαζόμαστε.**</td><td>Το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι λογικό, γιατί 80 + 40 + 80=200 μπάλες συνολικά. Οι πράξεις που κάναμε είναι σωστές και η απάντησή μας σαφής.</td></tr>
</table>

Εφαρμογή

Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας τετραγωνισμένο χαρτί.
Κάθε κουτί στο τετραγωνισμένο χαρτί αντιστοιχεί σε μία μπάλα. Από τις 200 μπάλες, οι 80 είναι του μπάσκετ (🟥). Σε κάθε δύο μπάλες του βόλεϊ (🟦) αντιστοιχεί μία ποδοσφαίρου (🟩).



Από το σχέδιο στο τετραγωνισμένο χαρτί φαίνεται ότι το κατάστημα πούλησε ____ μπάλες του βόλεϊ και ___ μπάλες του ποδοσφαίρου.

Αναστοχασμός

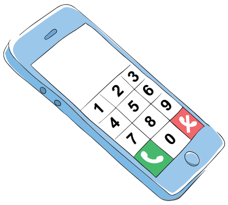
1. Ο Νίκος στο ίδιο πρόβλημα έγραψε την απάντηση: «Το κατάστημα πούλησε 80 και 40». Εξηγούμε γιατί είναι λανθασμένη η απάντησή του.
2. Συζητάμε γιατί σε κάθε πρόβλημα γράφουμε τη λύση και την απάντησή του.
3. Η Αγγελική υποστηρίζει ότι ο τρόπος με τον οποίο λύνουμε τα προβλήματα στα Μαθηματικά μάς βοηθά να λύσουμε και τα προβλήματα που συναντάμε στη ζωή μας. Συμφωνείτε μαζί της; Ναι ή όχι και γιατί;

Διερεύνηση

Εξετάζουμε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι φυσικοί αριθμοί και δικαιολογούμε την απάντησή μας.

....

Αναγνωρίζουμε τη συσκευή που δείχνει η κάθε εικόνα και παρατηρούμε τα πληκτρολόγιά τους.



1. Πόσα πλήκτρα με αριθμούς έχει το πληκτρολόγιο κάθε συσκευής; ....
2. Ποια είναι και πώς ονομάζουμε τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για να γράψουμε τους φυσικούς αριθμούς;...
3. Στην αριθμομηχανή τσέπης της διπλανής εικόνας έχουν σβηστεί τα ψηφία από ορισμένα πλήκτρα. Χρησιμοποιούμε μόνο μία φορά κάθε ψηφίο από αυτά που δεν έχουν σβηστεί και γράφουμε:
   - τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό: ....
   - τον μικρότερο φυσικό αριθμό: ....

Συζητάμε ποιος είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός και γιατί δεν υπάρχει ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

- Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100, ..., ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί.**
- Καθένας από τους φυσικούς αριθμούς εκφράζει ολόκληρες μονάδες, εκτός από το 0.
- Γράφουμε τους φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τα **δέκα ψηφία:**
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9.
- Κάθε φυσικός αριθμός έχει **έναν επόμενο** και **έναν προηγούμενο** φυσικό αριθμό, εκτός από τον αριθμό 0, ο οποίος έχει μόνον επόμενο, τον αριθμό 1.
- Ο αριθμός 0 είναι ο **μικρότερος** φυσικός αριθμός.
- **Μεγαλύτερος** φυσικός αριθμός δεν υπάρχει γιατί για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ο επόμενός του.

- Οι **άρτιοι** φυσικοί αριθμοί είναι:
  0, 2, 4, 6, 8 , ...,
- Οι **περιττοί** φυσικοί αριθμοί είναι:
  1, 3, 5, 7, ...,

Παραδείγματα

3 βιβλία, 183 μαθήτριες, 165.000 €

Προηγούμενος αριθμός	**Αριθμός**	**Επόμενος αριθμός**
	0	1
59.779	59.780	59.781
999.999	1.000.000	1.000.001
10.000.008	10.000.009	10.000.010

138, 66.000, 1.357.192

269, 258.021, 10.200.865

Εφαρμογή

Να βρείτε τη σχέση με την οποία δημιουργείται κάθε αριθμητικό μοτίβο και να συμπληρώσετε τους αριθμούς που λείπουν. ΄Επειτα να δείξετε τη σχέση αυτή για κάθε αριθμητικό μοτίβο στην αριθμογραμμή.

α. 0, 1, 2, 3, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, 12, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, 21.

β. 0, 2, 4, 6, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, 24, ___, ___, ___, 32.

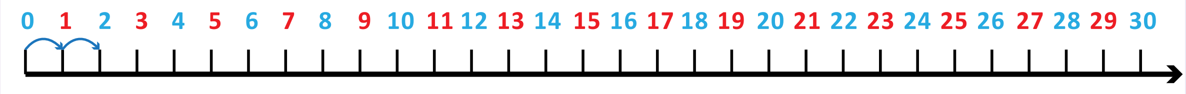
γ. 1, 3, 5, 7, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, 25, ___, ___, 31.

Σε καθένα από τα παραπάνω αριθμητικά μοτίβα εξετάζουμε τη σχέση την οποία έχει ο δεύτερος αριθμός με τον πρώτο, ο τρίτος με τον δεύτερο κ.ο.κ. ΄Ετσι έχουμε:

α. 1= 0+1, 2=1+1, 3=2+1, ...

β. 2=0+2, ...

γ. ....



Αναστοχασμός

1. Ο επόμενος φυσικός αριθμός του 1.000 είναι ο:
   α. 1.010 β. 1.001 γ. 1.100
2. Ο προηγούμενος αριθμός του 10.000.000 είναι ο:
   α. 99.999.999 β. 9.999.999 γ. 9.099.999
3. Η Αγγελική υποστηρίζει ότι, αν ένας φυσικός αριθμός γράφεται χρησιμοποιώντας μόνο το ψηφίο 9, τότε ο επόμενός του έχει ένα παραπάνω ψηφίο. ΄Εχει δίκιο η Αγγελική;
4. Γράφουμε έναν φυσικό αριθμό κι εξηγούμε πώς βρίσκουμε τον προηγούμενο και τον επόμενό του.

Αξία θέσης ψηφίου στους φυσικούς αριθμούς

5

Διερεύνηση

Συζητάμε πώς μπορούμε να διαβάζουμε και να γράφουμε πολυψήφιους αριθμούς

Η Κίνα είναι η χώρα με τον μεγαλύτερο πληθυσμό σε όλο τον κόσμο. Σύμφωνα με την Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της την 1η Ιουλίου του 2016 ο πληθυσμός της ήταν περίπου 1.400.000.000 κάτοικοι.

1. Πόσα και ποια είναι τα διαφορετικά ψηφία στον αριθμό που δείχνει τον πληθυσμό της Κίνας;

....

2. Τοποθετούμε τον αριθμό που δείχνει τον πληθυσμό της Κίνας στον παρακάτω πίνακα αξίας θέσης. Εξηγούμε πώς εργαστήκαμε.

3. Ποιο είναι το ψηφίο με τη μεγαλύτερη αξία στον παραπάνω αριθμό;

....

Ποια είναι η αξία του; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.

....

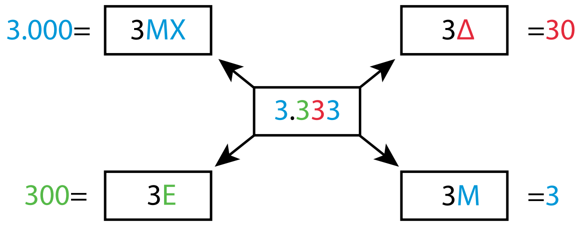
4. Ποιο είναι το άθροισμα της αξίας των ψηφίων του παραπάνω αριθμού;

....

5. Σύμφωνα με τις προβλέψεις του ΟΗΕ, το 2050 η χώρα με τον μεγαλύτερο πληθυσμό σε όλο τον κόσμο θα είναι η Ινδία, που θα έχει 300 εκατομμύρια περίπου περισσότερους κατοίκους από αυτούς που είχε η Κίνα τον Ιούλιο του 2016.
Εξηγούμε πώς μπορούμε να βρούμε ποιος θα είναι ο πληθυσμός της Ινδίας το 2050 και έπειτα τον γράφουμε στον πίνακα αξίας θέσης.

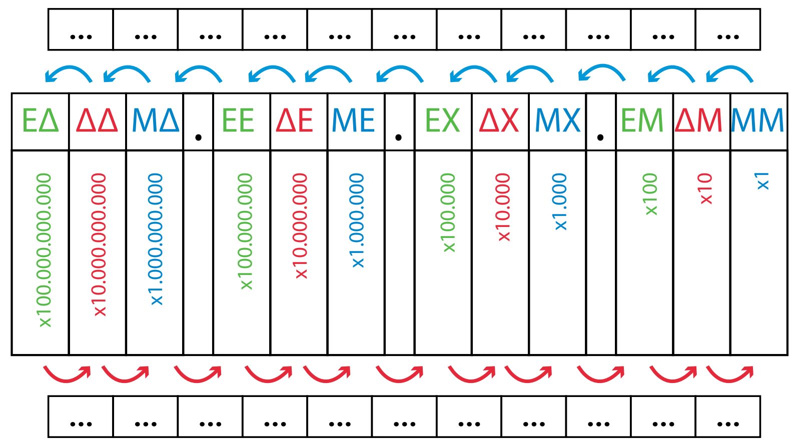
Πηγή:

	ΔΙΣΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			•	ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			•	ΧΙΛΙΑΔΕΣ			•	ΜΟΝΑΔΕΣ		
	Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ
	x100.000.000.000	x10.000.000.000	x1.000.000.000		x100.000.000	x10.000.000	x1.000.000		x100.000	x10.000	x1.000		x100	x10	x1
Πληθυσμός Κίνας 1-7-16															
Πληθυσμός Ινδίας 2050															

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Η **αξία** των ψηφίων ενός φυσικού αριθμού εξαρτάται από τη **θέση** των ψηφίων στον αριθμό.	
Μπορούμε να γράψουμε έναν αριθμό: ● με **ψηφία**	**Γράφουμε:** 1.400.000.000 χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 4 και 0.
● με **λέξεις**	**Διαβάζουμε:** ένα δισεκατομμύριο τετρακόσια εκατομμύρια
Μπορούμε **να αναλύσουμε** έναν αριθμό σε άθροισμα της αξίας των ψηφίων του.	Η αξία του ψηφίου 1 στον αριθμό 1.400.000.000 είναι 1ΜΔ=1.000.000.000 και του 4 είναι 4ΕΕ= 400.000.000. **Αναλύουμε:** 1.000.000.000+400.000.000

Εφαρμογή

Ποια είναι η σχέση που έχει η αξία κάθε θέσης με την αμέσως προηγούμενη και την αμέσως επόμενή της;



ΕΔ	ΔΔ	ΜΔ	.	ΕΕ	ΔΕ	ΜΕ	.	ΕΧ	ΔΧ	ΜΧ	.	ΕΜ	ΔΜ	ΜΜ
x100.000.000.000	x10.000.000.000	x1.000.000.000		x100.000.000	x10.000.000	x1.000.000		x100.000	x10.000	x1.000		x100	x10	x1

10 = ... x 1

100 = ... x 10

1.000 = ... x 100

10.000 = ... x 1.000

....

Η αξία κάθε θέσης είναι .... από την αμέσως προηγούμενή της και .... από την αμέσως επόμενή της.

Αναστοχασμός

1. Στον αριθμό 356.723.156 το ψηφίο 7 είναι στη θέση των:
   Α. Εκατοντάδων Εκατομμυρίων Β. Εκατοντάδων Χιλιάδων Γ. Δεκάδων Χιλιάδων
2. Στην ανάλυση του αριθμού 6.752.180=6.000.000+700.000+...+2.000+100+80 λείπει το:
   Α. 500.000 Β. 50.000 Γ. 5.000
3. Ο Αντρέι έγραψε τον αριθμό τρία δισεκατομμύρια τετρακόσιες πενήντα χιλιάδες έξι ως εξής: 3.450.006.000. Είναι σωστό ή λάθος ό,τι έγραψε και γιατί;

   ....

Διερεύνηση

Στον διπλανό πίνακα αναφέρεται το πλήθος των τουριστών από κάθε ήπειρο που επισκέφτηκαν την Ελλάδα το 2015, σύμφωνα με τον Ελληνικό Οργανισμό Τουρισμού.

Ήπειρος	Πλήθος τουριστών
Ευρώπη	20.715.664
Ασία	1.515.386
Αφρική	61.685
Αμερική	1.094.750
Ωκεανία	211.970

α. Συμπληρώνουμε τον πίνακα αξίας θέσης και τοποθετούμε τους παραπάνω αριθμούς.

1. Από ποια ήπειρο ήταν οι περισσότεροι τουρίστες οι οποίοι επισκέφτηκαν την Ελλάδα το 2015;

....

2. Από ποια ήπειρο ήταν οι λιγότεροι;

....

3. Πόσο περισσότεροι ήταν οι τουρίστες από την Ασία σε σύγκριση με τους τουρίστες από την Αμερική;

....

Συζητάμε πώς συγκρίνουμε πολυψήφιους αριθμούς:

α. με διαφορετικό πλήθος ψηφίων:

....

β. με ίσο πλήθος ψηφίων:

....

β. Βάζουμε στη σειρά τους αριθμούς του πίνακα με το πλήθος των τουριστών από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

__________ < __________ < __________ < __________ < __________

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Όταν θέλουμε να **συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμούς,** μετράμε το πλήθος των ψηφίων τους.	
α. Αν οι δύο φυσικοί αριθμοί έχουν **διαφορετικό** πλήθος ψηφίων, μεγαλύτερος είναι αυτός ο οποίος έχει τα πιο πολλά ψηφία.	α. διαφορετικό πλήθος ψηφίων 16.230.010 > 6.513.010 οκτώ ψηφία επτά ψηφία
β. Αν οι δύο φυσικοί αριθμοί έχουν **ίσο** πλήθος ψηφίων, συγκρίνουμε τα ψηφία τους ξεκινώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά. Μεγαλύτερος είναι αυτός ο οποίος έχει το μεγαλύτερο ψηφίο στην ίδια θέση.	β. ίσο πλήθος ψηφίων 16.230.010 > 15.130.109 γιατί 6>5 στις Μονάδες Εκατομμυρίων

Εφαρμογή

Να γράψετε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 7 και 9 από μία φορά το καθένα. Έπειτα να τους συγκρίνετε και να τους τοποθετήσετε πάνω στην αριθμογραμμή.

Οι τριψήφιοι αριθμοί που γράφονται με τα ψηφία 2, 7 και 9 είναι:

....

Η σειρά τους, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, είναι:

....

Αναστοχασμός

1. Η Αγγελική έγραψε: 2.397.726 < 235.987. Ποιο είναι το λάθος της;
2. Εξηγούμε γιατί 2.398.726 > 2.397.726.
3. Ο Νίκος υποστηρίζει ότι ο μεγαλύτερος πενταψήφιος αριθμός είναι ο 99.990. Έχει δίκιο; Ναι ή όχι και γιατί;
4. Βρίσκουμε όλους τους τριψήφιους άρτιους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 882.
5. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 0 και 8, μία φορά το καθένα, η Δανάη βρήκε έξι αριθμούς που υποστηρίζει ότι είναι τριψήφιοι. Έχει δίκιο; Ναι ή όχι και γιατί;

Διερεύνηση

1. Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται οι πέντε μεγαλύτερες πόλεις της Ελλάδας και οι αριθμοί των κατοίκων τους με βάση την απογραφή του 2011:
- με ακρίβεια και
- μετά τη στρογγυλοποίηση.

Πόλεις	**Πλήθος κατοίκων με ακρίβεια**	**Πλήθος κατοίκων μετά τη στρογγυλοποίηση**
Αθήνα	3.218.218	3.218.000
Θεσσαλονίκη	1.012.597	1.013.000
Πάτρα	168.202	168.000
Ηράκλειο	153.653	154.000
Λάρισα	144.651	145.000

Συγκρίνουμε τους αριθμούς που δείχνουν το πλήθος των κατοίκων κάθε πόλης πριν από τη στρογγυλοποίηση και μετά τη στρογγυλοποίηση.

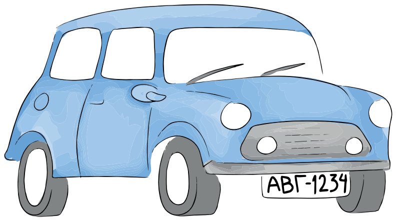
Ποια ψηφία και σε ποια θέση έχουν αλλάξει σε κάθε αριθμό;

Συζητάμε σε ποια θέση κάθε αριθμού έχει γίνει η στρογγυλοποίηση.

2. Αναφέρουμε περιπτώσεις από την καθημερινή μας ζωή στις οποίες μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε φυσικούς αριθμούς.

....

Συζητάμε άλλες περιπτώσεις αριθμών στις οποίες δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης.



Εξηγούμε γιατί ο αριθμός κυκλοφορίας ενός αυτοκινήτου αναφέρεται πάντα με ακρίβεια.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Η **στρογγυλοποίηση** είναι μια διαδικασία με την οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε έναν αριθμό με κάποιον λίγο μικρότερο ή λίγο μεγαλύτερό του.

Η στρογγυλοποίηση γίνεται ως εξής:
1.Προσδιορίζουμε τη **θέση** του ψηφίου του αριθμού στην οποία θα κάνουμε τη στρογγυλοποίηση.
2.Εξετάζουμε το ψηφίο που βρίσκεται στην **αμέσως επόμενη** δεξιά θέση. Αν είναι:

- **0, 1, 2, 3 ή 4,** τότε **αντικαθιστούμε** το ψηφίο αυτό και όλα όσα είναι δεξιά του με το 0 και **αφήνουμε ίδιο** το ψηφίο της θέσης στην οποία κάνουμε τη στρογγυλοποίηση.
- **5, 6, 7, 8 ή 9,** τότε **αντικαθιστούμε** το ψηφίο αυτό και όλα όσα είναι δεξιά του με το 0 και **αυξάνουμε κατά μία μονάδα** το ψηφίο της θέσης στην οποία κάνουμε τη στρογγυλοποίηση.

Παραδείγματα

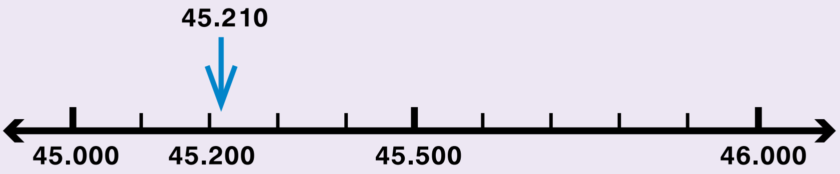
Στρογγυλοποίηση των αριθμών 1.252.678 και 1.256.990:

Δ.Χ.	1.252.678	1.250.000
Ε.Μ.	1.256.940	1.256.900

Δ.Χ.	1.256.990	1.260.000
Ε.Μ.	1.252.678	1.252.700

Εφαρμογή

Να δείξετε τη στρογγυλοποίηση του αριθμού 45.210 στις Εκατοντάδες με τη βοήθεια της αριθμογραμμής:



Ο φυσικός αριθμός 45.210 στην αριθμογραμμή βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 45.000 και 46.000 και, συγκεκριμένα, είναι πιο κοντά στο 45.000 από ό,τι στο 46.000. Η στρογγυλοποίησή του στις Εκατοντάδες δίνει τον αριθμό 45.200.

Αναστοχασμός

1. Εξηγούμε πώς η στρογγυλοποίηση στις ΕΧ του 83.456.057 δίνει τον αριθμό 83.500.000.
2. Η Αγγελική υπολόγισε ότι το άθροισμα 5.134 + 6.237 είναι περίπου 11.000. Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να σκέφτηκε.
3. Η Δανάη υπολόγισε πως η διαφορά 8.978 - 4.209 είναι περίπου 4.800. Σε ποια θέση στρογγυλοποίησε;
4. Ο Νίκος υπολόγισε πως το γινόμενο 190 x 110 είναι περίπου 20.000. Σε ποια θέση στρογγυλοποίησε τους παράγοντες του γινομένου;
5. Ο Αντρέι υπολόγισε πως το πηλίκο 3.565 : 6 είναι περίπου 600. Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να σκέφτηκε.

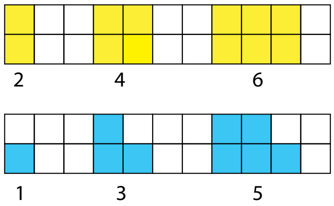
επαναληπτικό 1

Κεφάλαια 1 - 7

Στα κεφάλαια αυτά έμαθα:

- ✓ να διαβάζω, να γράφω και να αναγνωρίζω φυσικούς αριθμούς,
- ✓ να αναγνωρίζω την αξία θέσης κάθε ψηφίου στους φυσικούς αριθμούς,
- ✓ να αναλύω και να συνθέτω φυσικούς αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους ,
- ✓ να διατάσσω και να συγκρίνω φυσικούς αριθμούς,
- ✓ να στρογγυλοποιώ και να κάνω νοερούς υπολογισμούς,
- ✓ να λύνω προβλήματα με φυσικούς αριθμούς.

Ασκήσεις



Γράφουμε ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί:

____

Γράφουμε ποιοι είναι οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί:

____

Γράφουμε ποιοι είναι οι περιττοί φυσικοί αριθμοί:

____

ΔΙΣΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			•	ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			•	ΧΙΛΙΑΔΕΣ			•	ΜΟΝΑΔΕΣ		
Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ
x100.000.000.000	x10.000.000.000	x1.000.000.000		x100.000.000	x10.000.000	x1.000.000		x100.000	x10.000	x1.000		x100	x10	x1

Αναλύουμε τον αριθμό 2.709.036:

____

Γράφουμε τον αριθμό που έχει 3ΔΕ 6ΕΧ 3ΔΧ 9Μ:

____

διαφορετικό πλήθος ψηφίων

16.230.010 > 6.513.010

οκτώ ψηφία εππά ψηφία

ίσο πλήθος ψηφίων

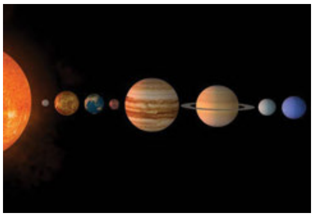
16.230.010 > 15.130.109

γιατί 6>5 στις Μονάδες Εκατομμυρίων

Βάζουμε στη σειρά τους αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο:

3.508.970, 350.890, 459.810, 45.890.000, 45.258

____



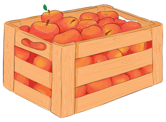
Στρογγυλοποιούμε τον αριθμό 12.453.089:

στις Δ	
στις ΜΧ	
στις ΕΧ	
στις ΔΕ	

1ο Πρόβλημα

Ο Αντρέι φτιάχνει με τουβλάκια μια σκάλα. Για το πρώτο σκαλοπάτι χρησιμοποιεί ένα τουβλάκι, για το δεύτερο δύο τουβλάκια, για το τρίτο τρία, ... Πόσα τουβλάκια χρειάζεται, για να φτιάξει με τον ίδιο τρόπο μια σκάλα με 10 σκαλοπάτια;

2ο Πρόβλημα



Σε 3 τελάρα χωράνε 12 κιλά μήλα. Πόσα κιλά μήλα χωράνε σε 246 τελάρα;

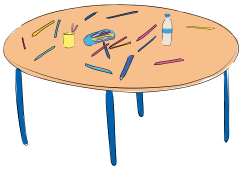
3ο Πρόβλημα

Η Δανάη ανοίγει τον κουμπαρά της και βρίσκει 146 κέρματα των 50 λεπτών του €. Με αυτά αγοράζει μία μπλούζα των 15 €, ένα παντελόνι των 20 € κι ένα μπουφάν. Με πόσα € αγοράζει το μπουφάν χωρίς να πάρει ρέστα;

4ο Πρόβλημα

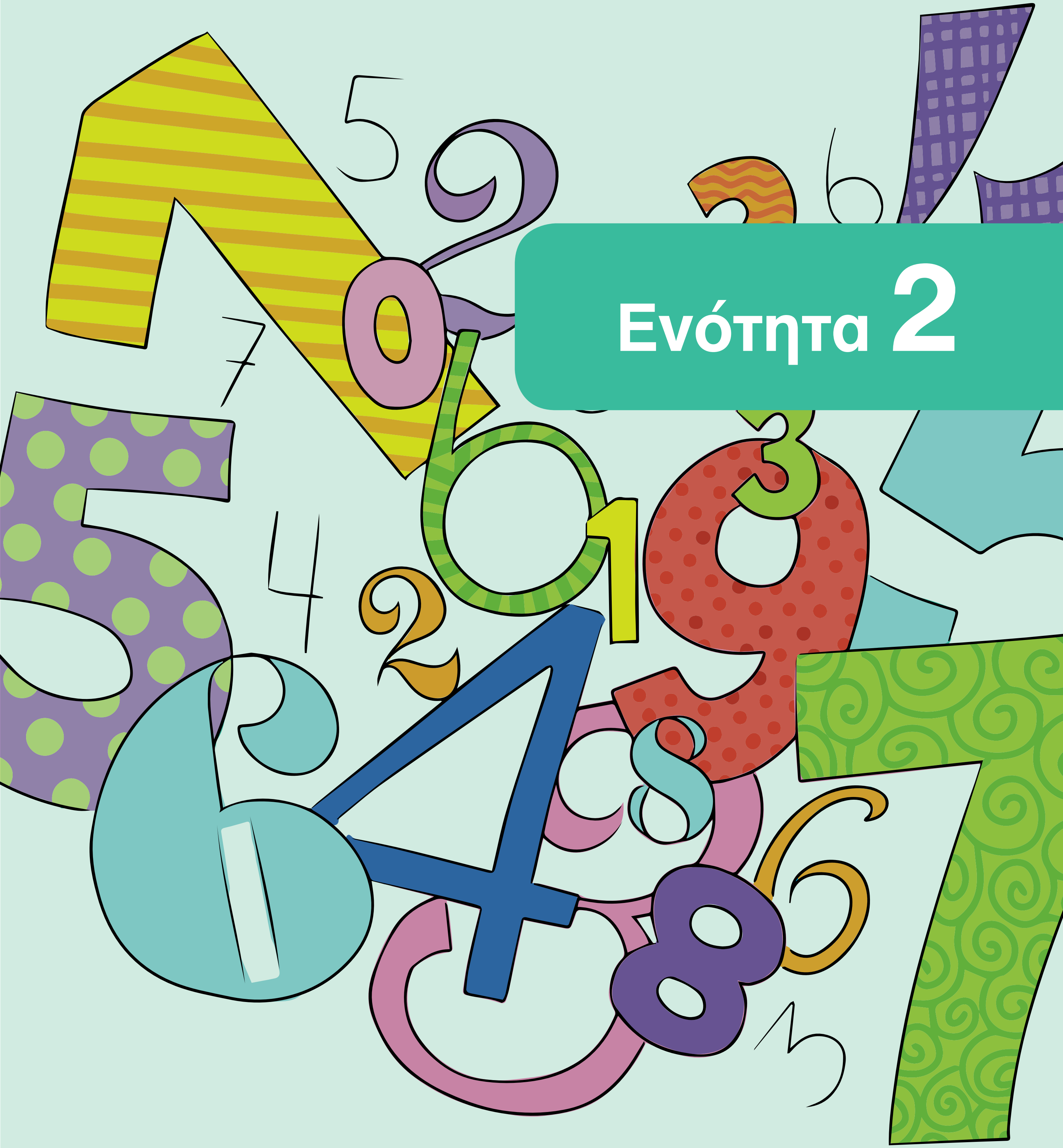
Η κυρία Μαρία την πρώτη ημέρα μάζεψε από την πορτοκαλιά της 8 πορτοκάλια, τη δεύτερη ημέρα τριπλάσια πορτοκάλια από την πρώτη, την τρίτη διπλάσια από τη δεύτερη και την τέταρτη ημέρα τόσα πορτοκάλια, όσα είχε μαζέψει όλες τις προηγούμενες ημέρες. Πόσα πορτοκάλια μάζεψε από την πορτοκαλιά της η κυρία Μαρία και τις τέσσερις ημέρες;

5ο Πρόβλημα



Τα παιδιά της Ε΄ τάξης κάθονται γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι σε καρέκλες που είναι τοποθετημένες σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις και αριθμημένες ως εξής: 1, 2, 3, ... Ο Νίκος κάθεται στην καρέκλα με τον αριθμό 7 και απέναντί του κάθεται η Δανάη στην καρέκλα με τον αριθμό 18. Πόσα είναι τα παιδιά της Ε΄ τάξης;

Ενότητα 2



Διερεύνηση

Συζητάμε τι είναι η πρόσθεση και τι η αφαίρεση

Το Μουσείο της Ακρόπολης άρχισε να λειτουργεί τον Ιούνιο του 2009. Από τότε προσελκύει πολλούς επισκέπτες από όλο τον κόσμο.

Μουσείο Ακρόπολης

Έτος λειτουργίας	Πλήθος επισκεπτών
πρώτο	1.950.539
δεύτερο	1.309.859
τρίτο	1.143.886
τέταρτο	1.036.059
πέμπτο	1.161.555
έκτο	1.460.135
έβδομο	1.425.100

Διατυπώνουμε και λύνουμε με βάση τον πίνακα:
α. ένα πρόβλημα πρόσθεσης:

____

____

Λύση

Απάντηση:____

Συμπληρώνουμε τα κενά με τις λέξεις: **προσθετέοι και άθροισμα**
Στο πρόβλημα πρόσθεσης, από δύο ή περισσότερους φυσικούς αριθμούς, τους οποίους ονομάζουμε ...., βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό, τον οποίο ονομάζουμε ....

β. ένα πρόβλημα αφαίρεσης:

____

____

Λύση

Απάντηση:____

Συμπληρώνουμε τα κενά με τις λέξεις: **μειωτέος, αφαιρετέος και διαφορά**
Στο πρόβλημα αφαίρεσης, από δύο φυσικούς αριθμούς, τον .... και τον ...., βρίσκουμε έναν αριθμό, τον οποίο ονομάζουμε .... Αν προσθέσουμε τη .... στον ...., παίρνουμε ως άθροισμα τον ....

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

- **Πρόσθεση** είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό, ο οποίος λέγεται **άθροισμα.**
- Οι αριθμοί οι οποίοι προστίθενται λέγονται **προσθετέοι.**

Παραδείγματα

$$\overbrace{120.900 + 25.086}^{\textbf{προσθετέοι}} = 145.986 \ \textbf{άθροισμα}$$

$$\begin{array}{rl} {\scriptstyle 1\ \ } & \\ 185 & \\ 28 & \\ +\ \ 12.570 & \left.\right\} \textbf{προσθετέοι} \\ \hline 12.783 & \textbf{άθροισμα} \end{array}$$

Επειδή 8+5=13, αναομαδοποιούμε τις 13 Μονάδες σε 1 Δεκάδα και 3 Μονάδες.

- **Αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς, τον **μειωτέο** και τον **αφαιρετέο**, βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό, που λέγεται **διαφορά.**

μειωτέος - αφαιρετέος = διαφορά

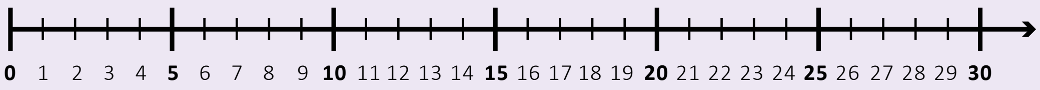
90.639 - 80.325 = 10.314

$$\begin{array}{rl} {\scriptstyle 4\ 11\ \ } & \\ 647.516 & \text{μειωτέος} \\ -\ \ 26.125 & \text{-αφαιρετέος} \\ \hline 621.391 & \text{διαφορά} \end{array}$$

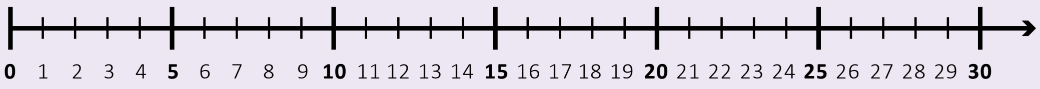
Επειδή στη θέση των Δεκάδων το 2 δεν αφαιρείται από το 1, αναομαδοποιούμε μία Εκατοντάδα σε 10 Δεκάδες.

Εφαρμογή

1. Τα αγόρια της τάξης μας είναι .... και τα κορίτσια .... Να δείξετε στην παρακάτω αριθμογραμμή πόσα είναι τα παιδιά της τάξης.



2. Τα παιδιά της τάξης μας είναι .... Από αυτά τα .... είναι αγόρια. Να δείξετε πόσα είναι τα κορίτσια της τάξης.



Αναστοχασμός

1. Ο Αντρέι έγραψε: 12.382 + 12.258=12.258 + 12.382. Εξηγούμε πώς σκέφτηκε.
2. Αναφέρουμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επαληθεύσουμε μια πρόσθεση και τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επαληθεύσουμε μια αφαίρεση.
3. Η Αγγελική έγραψε: 12.382 - 12.258=12.258 - 12.382. Εξηγούμε ποιο είναι το λάθος της.
4. Εξηγούμε για ποιον λόγο στην κάθετη πρόσθεση και την κάθετη αφαίρεση γράφουμε τους αριθμούς έτσι ώστε οι Μονάδες να είναι κάτω από τις Μονάδες, οι Δεκάδες κάτω από τις Δεκάδες, κ.ο.κ.

Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς

9

Διερεύνηση

1. Ο πίνακας του πολλαπλασιασμού είναι γνωστός και ως προπαίδεια. Συζητάμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τον συμπληρώσουμε.

α. Ποιο είναι το γινόμενο του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού με το 1;

....

β. Ποιο είναι το γινόμενο του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού με το 0;

....

γ. Ποιο είναι το γινόμενο του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού με τον εαυτό του;

....

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

δ. Γράφουμε πολλαπλασιασμούς στους οποίους το γινόμενο είναι:

- πολλαπλάσιο του 2: ....
- πολλαπλάσιο του 10: ....

ε. Ποιο μοτίβο μάς βοηθά να θυμόμαστε ή να βρίσκουμε την προπαίδεια του 9;

....

στ. Ποια μοτίβα χρησιμοποιούμε, για να συμπληρώσουμε τον πίνακα του πολλαπλασιασμού;

2. Διατυπώνουμε και λύνουμε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικούς διψήφιους αριθμούς:

....

....

....

Συζητάμε:

- **Πότε σε ένα πρόβλημα κάνουμε πολλαπλασιασμό;**
- **Ποιες στρατηγικές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, για να πολλαπλασιάσουμε διψήφιους αριθμούς;**

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό, ο οποίος λέγεται **γινόμενο** των αριθμών αυτών.

Οι αριθμοί οι οποίοι πολλαπλασιάζονται λέγονται **παράγοντες του γινομένου.**

Παραδείγματα

$$\overbrace{8 \text{ x } 9}^{\textbf{παράγοντες}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \textbf{γινόμενο}}}{72}$$

$$\textbf{παράγοντες} \left\{ \begin{array}{r} 4\;3\;6 \\ \text{x}\;\;2\;7 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 3\;0\;5\;2 \\ +\;8\;7\;2\;\;\; \\ \hline \textbf{γινόμενο} \leftarrow 1\;1\;7\;7\;2 \end{array}$$

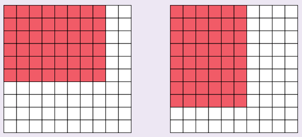
Ένας υπάλληλος παίρνει για κάθε εβδομάδα που εργάζεται 250 €. Πόσα € παίρνει τον μήνα;
4 x 250 € = 1.000 €

Η Μαρία έχει 6 βόλους. Ο Γιάννης έχει διπλάσιους βόλους από τη Μαρία. Πόσους βόλους έχει ο Γιάννης;
2 x 6 βόλοι = 12 βόλοι

Εφαρμογή

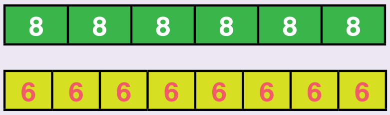
1. Να δείξετε ότι στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς.

α. με τετραγωνισμένο χαρτί:



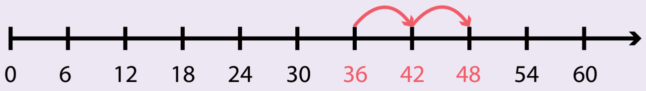
6 x 8 = 8 x 6

β. με ράβδους:

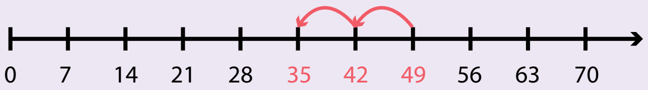


6 x 8 = 8 x 6

2. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο 6x8 στην αριθμογραμμή;
Ξεκινάμε με το διπλό γινόμενο 6 x 6 = 36, οπότε 6 x 8 = 36 + 6 + 6 = 48



Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο 5x7 στην αριθμογραμμή;
Ξεκινάμε με το διπλό γινόμενο 7 x 7 = 49, οπότε 5 x 7 = 49 - 7 - 7 = 35



Αναστοχασμός

1. Ο Νίκος γνωρίζει ότι 4 x 4 =16. Πώς μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό το γινόμενο, για να βρει πόσο κάνει 4 x 7;...

2. Η Δανάη βρήκε το γινόμενο 8 x 9 πολλαπλασιάζοντας 8x10 και αφαιρώντας το 8. Εξηγούμε και γενικεύουμε τη στρατηγική της Δανάης ....

Πολλαπλάσια και διαιρέτες

10

Διερεύνηση

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1. Χρωματίζουμε στον πίνακα του πολλαπλασιασμού τα πολλαπλάσια του 2 με κόκκινο και γράφουμε το μοτίβο:

....

Χρωματίζουμε στον πίνακα του πολλαπλασιασμού τα πολλαπλάσια του 5 με μπλε και γράφουμε το μοτίβο:

....

Ποιοι αριθμοί είναι χρωματισμένοι με μοβ;

....

....

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που είναι χρωματισμένος με μοβ;

....

2. Επιλέγουμε έναν άλλο αριθμό από το 1 ως το 10 και χρωματίζουμε με κίτρινο τα πολλαπλάσιά του στον πίνακα του πολλαπλασιασμού. Γράφουμε το μοτίβο:

....

Επιλέγουμε κι άλλον έναν αριθμό από το 1 ως το 10 και χρωματίζουμε με γαλάζιο τα πολλαπλάσιά του στον πίνακα του πολλαπλασιασμού. Γράφουμε το μοτίβο:

....

Ποιοι αριθμοί είναι χρωματισμένοι με πράσινο;

....

....

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που είναι χρωματισμένος με πράσινο;

....

Συζητάμε:

α. Ποια ζευγάρια αριθμών έχουν γινόμενο τον αριθμό 8;..

Ποιοι αριθμοί διαιρούν το 8; ....

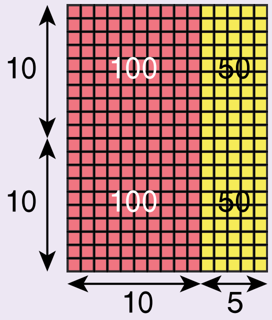
β. Ποια ζευγάρια αριθμών έχουν γινόμενο τον αριθμό 12;..

Ποιοι αριθμοί διαιρούν το 12;..

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού είναι όλοι οι αριθμοί που σχηματίζονται από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.	0 x 3, 1 x 3, 2 x 3, 3 x 3,..., δηλαδή 0, 3, 6, 9,...
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αριθμών που είναι διαφορετικοί από το 0 ονομάζεται το μικρότερο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών, εκτός από το 0.	Πολλαπλάσια του 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ... Πολλαπλάσια του 5: 0, 5, 10, 15, 20, 25, ... Κοινά Πολλαπλάσια του 2 και του 5: 0, 10, 20, ... Ε.Κ.Π. (2,5) = 10
Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.	Οι διαιρέτες του αριθμού 8 είναι: 1, 2, 4 και 8 γιατί 8 : 1 = 8, 8 : 2 = 4, 8 : 4 = 2 και 8 : 8 = 1.
Οι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι μικρότεροι ή ίσοι του αριθμού.	Οι διαιρέτες του αριθμού 12 είναι: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Εφαρμογή

Να γράψετε έναν πολλαπλασιασμό και μια διαίρεση που δείχνει το παρακάτω σχήμα.



....

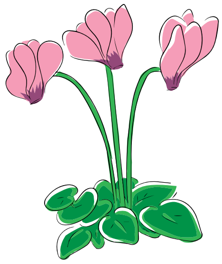
....

Αναστοχασμός

1. Η Δανάη υποστηρίζει ότι κάθε πολλαπλάσιο του 5 τελειώνει σε 5. Έχει δίκιο; Ναι ή όχι και γιατί;
2. Αναφέρουμε παραδείγματα που δείχνουν ότι κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλον είναι πολλαπλάσιό του.
3. Ο Νίκος υποστηρίζει ότι το 0 είναι πολλαπλάσιο όλων των φυσικών αριθμών. Έχει δίκιο; Ναι ή όχι;
4. Ο Αντρέι υποστηρίζει ότι, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο φυσικό αριθμό, θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του. Αναφέρουμε παραδείγματα που δικαιολογούν την άποψή του.

Διερεύνηση

Ένας ανθοπώλης έχει 4.32 ☐ κυκλάμινα και φτιάχνει ανθοδέσμες, που καθεμιά έχει ίσο αριθμό κυκλάμινων χωρίς να περισσεύει κανένα. Συζητάμε ποιο είναι το ψηφίο που λείπει, έτσι ώστε κάθε ανθοδέσμη να περιέχει:



- 2 κυκλάμινα:

  ....

- 5 κυκλάμινα:

  ....

- 10 κυκλάμινα:

  ....

- 3 κυκλάμινα:

  ....

- 9 κυκλάμινα:

  ....

Συζητάμε ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο των φυσικών αριθμών που διαιρούνται με:

- το 2: ....
- το 5: ....
- το 10: ....

Συζητάμε ποιο είναι το άθροισμα των ψηφίων των φυσικών αριθμών που διαιρούνται με:

- το 3: ....
- το 9: ....

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Για να διαπιστώσουμε αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με έναν άλλο, χωρίς να κάνουμε διαίρεση, χρησιμοποιούμε ορισμένους κανόνες, που τους ονομάζουμε **κριτήρια διαιρετότητας.**	Το κριτήριο διαιρετότητας του 2 είναι ο κανόνας που μας πληροφορεί πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2.
Ένας φυσικός αριθμός **διαιρείται με:** α. το **2**, όταν το τελευταίο του ψηφίο είναι: 0, 2, 4, 6 ή 8.	Ο αριθμός 3.256 διαιρείται με το 2, γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι 6.
β. το **5,** όταν το τελευταίο του ψηφίο είναι: 0 ή 5.	Ο αριθμός 654.385 διαιρείται με το 5, γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι 5.
γ. το **10**, όταν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0.	Ο αριθμός 2.649.350 διαιρείται με το 10, γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι 0.
δ. το **3**, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.	Ο αριθμός 26.163 διαιρείται με το 3, γιατί 2+6+1+6+3=18, που διαιρείται με το 3.
ε. το **9**, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.	Ο αριθμός 85.356 διαιρείται με το 9, γιατί 8+5+3+5+6=27, που διαιρείται με το 9.

Εφαρμογή

Να συμπληρώσετε στα τετράγωνα τα ψηφία που λείπουν, έτσι ώστε ο αριθμός που προκύπτει να διαιρείται με το 2 και το 9.

3 ☐ 5 ☐

Για να διαιρείται με το 2, το τελευταίο ψηφίο μπορεί να είναι: _, _, _, _ ή _.

Αν είναι 0, τότε το ψηφίο στο πρώτο τετράγωνο είναι το 1, οπότε ο αριθμός είναι: __________

Αν είναι 2, τότε το ψηφίο στο πρώτο τετράγωνο είναι το 8, οπότε ο αριθμός είναι: __________

Αν είναι 4, τότε το ψηφίο στο πρώτο τετράγωνο είναι το 6, οπότε ο αριθμός είναι: __________

Αν είναι 6, τότε το ψηφίο στο πρώτο τετράγωνο είναι το 4, οπότε ο αριθμός είναι: __________

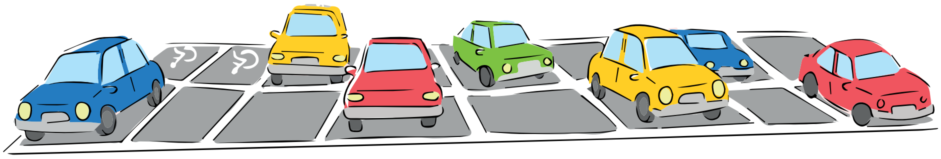
Αν είναι 8, τότε το ψηφίο στο πρώτο τετράγωνο είναι το 2, οπότε ο αριθμός είναι: __________

Οι αριθμοί που προκύπτουν είναι: ______________________________

Αναστοχασμός

1. Ένας άρτιος ή ένας περιττός αριθμός διαιρείται με το 2; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.
2. Ο Νίκος υποστηρίζει ότι ο αριθμός 1 είναι διαιρέτης όλων των φυσικών αριθμών. Εξηγούμε πώς μπορεί να σκέφτηκε.
3. Η Αγγελική υποστηρίζει ότι ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο ενός άλλου, αν η διαίρεσή τους είναι τέλεια. Εξηγούμε πώς μπορεί να σκέφτηκε.
4. Εξηγούμε γιατί, αν ένας αριθμός διαιρείται με το 3, ο αριθμός που προκύπτει, αν αλλάξουμε τη σειρά των ψηφίων του, διαιρείται κι αυτός με το 3.
5. Συζητάμε τη χρησιμότητα των κριτηρίων διαιρετότητας.

Διερεύνηση



1. Ένας χώρος στάθμευσης έχει 21 σειρές, καθεμιά από τις οποίες έχει 8 θέσεις.
Πόσες θέσεις έχει συνολικά ο χώρος στάθμευσης;
Λύνουμε το παραπάνω πρόβλημα και, με βάση αυτό, διατυπώνουμε προβλήματα διαίρεσης.

Λύση

....

....

Πρόβλημα

....

....

....

Συζητάμε πόσα προβλήματα διαίρεσης μπορούμε να διατυπώσουμε με βάση το παραπάνω πρόβλημα.

α. Σε τι μοιάζουν αυτά τα προβλήματα;

β. Σε τι διαφέρουν αυτά τα προβλήματα;

2. Σε πόσες σειρές του παραπάνω χώρου σταθμεύουν 152 αυτοκίνητα;

Σε πόσες σειρές του σταθμεύουν 156 αυτοκίνητα;

Συζητάμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να δείξουμε το πηλίκο καθεμιάς από τις παραπάνω διαιρέσεις με τη βοήθεια:

α. τετραγωνισμένου χαρτιού

β. υλικού δεκαδικής βάσης

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες | Παραδείγματα

Όταν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς Δ και δ, τότε μπορούμε να βρούμε δύο άλλους μοναδικούς φυσικούς αριθμούς π και υ, έτσι ώστε να ισχύει:
Δ = δ x π + υ.

Ο αριθμός Δ ονομάζεται **Διαιρετέος**, ο δ **διαιρέτης**, ο π **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Το υπόλοιπο είναι πάντα αριθμός μικρότερος από τον διαιρέτη και μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός.

$$\begin{array}{r|l} \textbf{Διαιρετέος} & \textbf{διαιρέτης} \\ 1\;3\;5 & 7 \\ \cline{2-2} -\;7 & 1\;9\;\;\textbf{πηλίκο} \\ \cline{1-1} 6\;5 & \\ -\;6\;3 & \\ \cline{1-1} 2 & \\ \textbf{υπόλοιπο} & \end{array}$$

Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση:** Δ = δ x π

$$\begin{array}{r|l} 1\;9\;2 & 1\;2 \\ \cline{2-2} -\;1\;2 & 1\;6 \\ \cline{1-1} 7\;2 & \\ -\;\;7\;2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

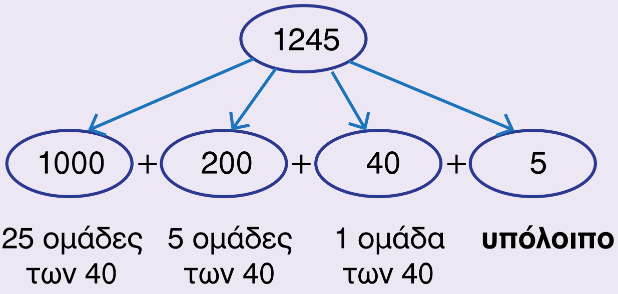
Η διαίρεση της μορφής Δ = δ x π +υ λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση.**

135 = 7 x 19 + 2
192 = 12 x 16 + 0

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε το πηλίκο της διαίρεσης 1.245:40.

Μπορούμε να αναλύσουμε τον αριθμό, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



1.245 = 40 x (... + ... + ...) + 5 = 40 x ... + 5

Το πηλίκο της διαίρεσης 1.245:40 είναι ... και η διαίρεση είναι ατελής.

Αναστοχασμός

1. Προτείνουμε έναν τρόπο επαλήθευσης της διαίρεσης: 249 : 20.
2. Ποιο είναι το πηλίκο μιας διαίρεσης, όταν ο Διαιρετέος είναι ίσος με τον διαιρέτη;
3. Ποιο είναι το πηλίκο μιας διαίρεσης, όταν ο διαιρέτης είναι ο αριθμός 1;
4. Ποιο είναι το πηλίκο μιας διαίρεσης, όταν ο Διαιρετέος είναι 0;
5. Αναφέρουμε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι η τέλεια διαίρεση είναι αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.

επαναληπτικό 2

Κεφάλαια 8 - 12

Στα κεφάλαια αυτά έμαθα:

- ✓ να αναγνωρίζω και να παρουσιάζω με διαφορετικούς τρόπους καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης,
- ✓ να αναγνωρίζω, να διατυπώνω και να εφαρμόζω στρατηγικές νοερών υπολογισμών,
- ✓ να κάνω πράξεις με πολυψήφιους φυσικούς αριθμούς,
- ✓ να βρίσκω τα πολλαπλάσια, τα κοινά πολλαπλάσια, το Ε.Κ.Π. και τους διαιρέτες ενός αριθμού,
- ✓ να διατυπώνω και να εφαρμόζω τα κριτήρια διαιρετότητας των αριθμών: 2, 5, 10, 3 και 9,
- ✓ να λύνω προβλήματα με φυσικούς αριθμούς.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ασκήσεις

Προσθέτουμε τους φυσικούς αριθμούς:

41.785	59.183

539.815	4.082	5.808.075

Αφαιρούμε τους φυσικούς αριθμούς:

41.785	59.183

Ελέγχουμε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης με δύο διαφορετικούς τρόπους.

α.

β.

Πολλαπλασιάζουμε τους φυσικούς αριθμούς:

4 x 25 x 36.984 =

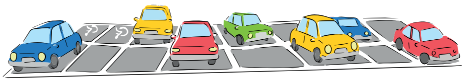
8 x 459.895 x 125=

Γράφουμε τα πολλαπλάσια του 12 και του 15 ως το 120.

Γράφουμε τους διαιρέτες του 24 και του 60.

Συμπληρώνουμε τα ψηφία που λείπουν, έτσι ώστε ο αριθμός που προκύπτει να διαιρείται με το 3 και με το 5:

67☐ ☐



Συμπληρώνουμε τους αριθμούς που λείπουν:

45.600=____x ____ +_______

επαναληπτικό 2

Κεφάλαια 8 - 12

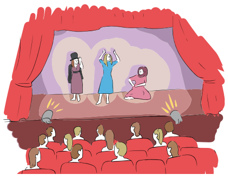
1ο Πρόβλημα

Ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής έφτιαξε τη μια ημέρα 684 σοκολατάκια και την άλλη 536. Θέλει να τα συσκευάσει σε κουτιά που καθένα χωράει 20 σοκολατάκια. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

2ο Πρόβλημα

Η Δανάη έχει στη συλλογή της 457 γραμματόσημα. Αν ο Νίκος τής δώσει 39 από τα γραμματόσημά του, τότε θα έχουν τον ίδιο αριθμό γραμματοσήμων. Πόσα γραμματόσημα έχει ο Νίκος;

3ο Πρόβλημα

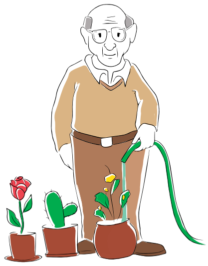


Σε μια θεατρική παράσταση η τιμή του εισιτηρίου είναι για τους ενήλικες 18 € και για τα παιδιά 2 € λιγότερα. Πόσα € θα πληρώσει μια οικογένεια με τρία παιδιά, για να παρακολουθήσει την παράσταση;

4ο Πρόβλημα

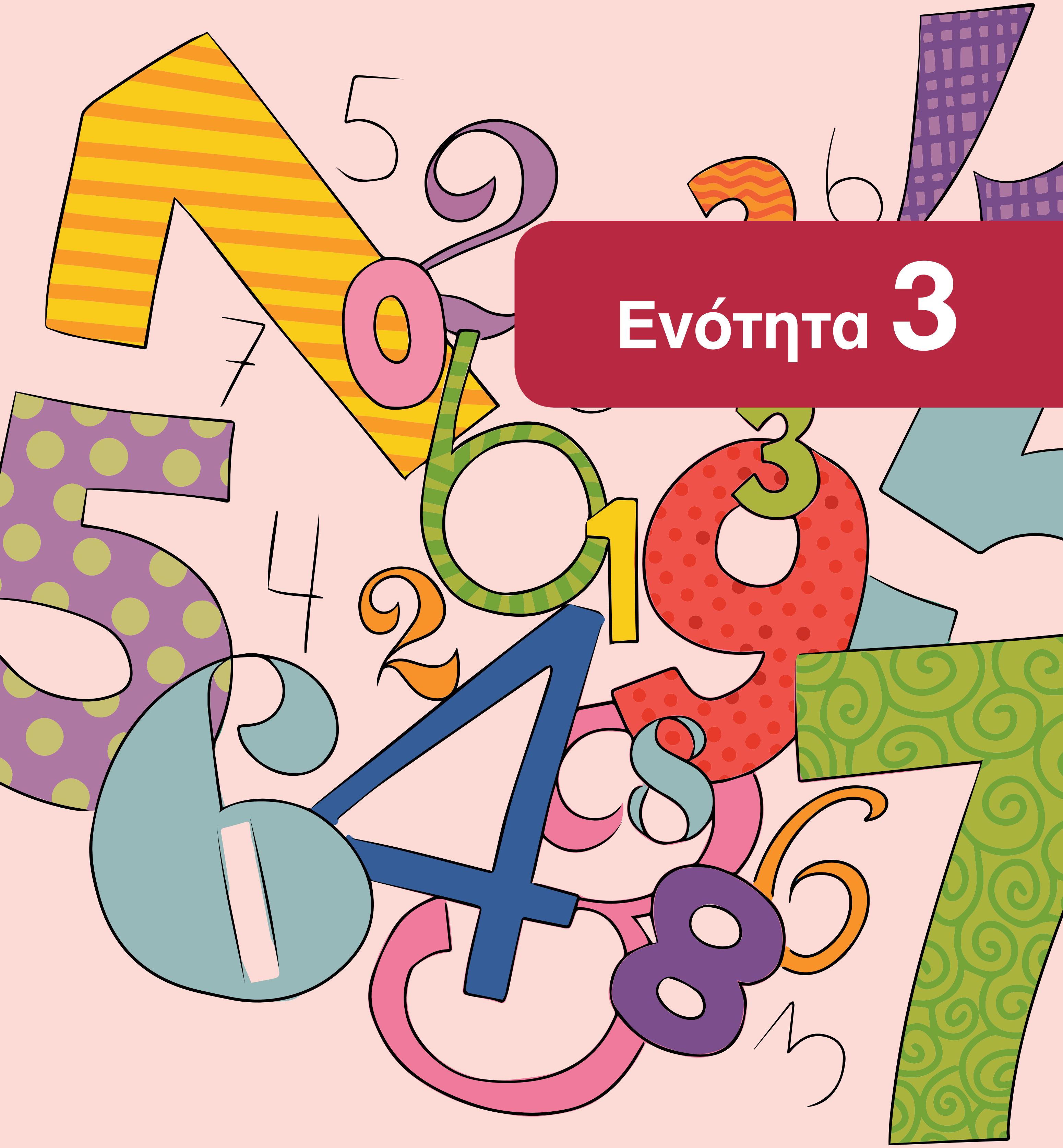
Ο Αντρέι, για να φτιάξει το γλυκό που του αρέσει, χρειάζεται ακριβώς ένα λίτρο νερό. Βρήκε στην κουζίνα ένα δοχείο των 5 λίτρων κι ένα δοχείο των 3 λίτρων. Πώς μπορεί να μετρήσει με αυτά τα δοχεία το νερό που χρειάζεται;

5ο Πρόβλημα



Ο παππούς του Νίκου έχει στο μπαλκόνι του μια τριανταφυλλιά, μια γαριφαλιά κι έναν κάκτο. Η τριανταφυλλιά χρειάζεται πότισμα κάθε 2 ημέρες, η γαριφαλιά κάθε 3 και ο κάκτος κάθε 5. Σήμερα πότισε και τις τρεις γλάστρες. Πόσες ημέρες μετά θα ποτίσει ξανά και τις τρεις;

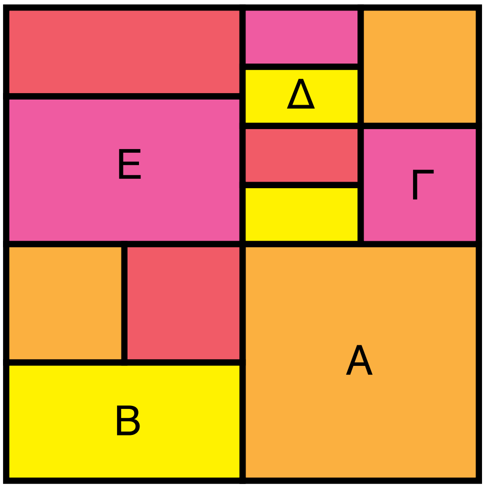
Ενότητα 3



Διερεύνηση

1. Τα παιδιά της τάξης ύστερα από επίσκεψή τους σε ένα μουσείο με έργα του Ολλανδού ζωγράφου Μοντριάν, δημιούργησαν τους δικούς τους πίνακες. ΄Ενας από αυτούς είναι και ο παρακάτω.

Κόβουμε τα κομμάτια του πίνακα από το παράρτημα και με τη βοήθεια τους υπολογίζουμε.



Γράφουμε με αριθμό το μέρος του πίνακα που καλύπτουν τα γεωμετρικά σχήματα:

Α =

Β =

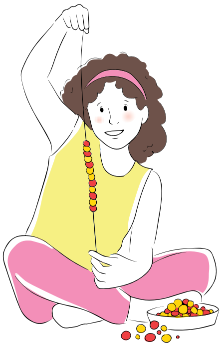
Γ =

Δ =

Ε =

Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε το μέρος που καλύπτει το σχήμα Ε.

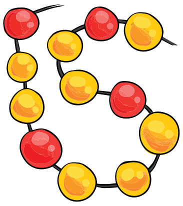
2. Η Δανάη διάλεξε τις χάντρες της εικόνας, για να φτιάξει ένα βραχιόλι.



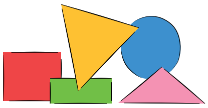
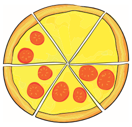
Γράφουμε με αριθμό το μέρος από τις συνολικές χάντρες που είναι:

α. κίτρινες: ....

β. κόκκινες: ....



Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να εκφράσουμε το μέρος των κίτρινων και κόκκινων χαντρών.

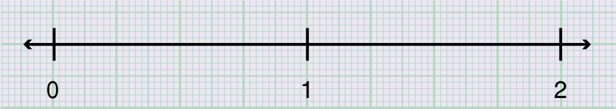
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Κάθε **κλάσμα** είναι ένας αριθμός. Σχηματίζεται από τον **αριθμητή** και τον **παρονομαστή,** που λέγονται όροι του κλάσματος και χωρίζονται με τη **γραμμή κλάσματος.**	$\frac{3}{4}$ αριθμητής γραμμή κλάσματος παρονομαστής όροι του κλάσματος **Διαβάζουμε:** τρία τέταρτα
Ένα **κλάσμα** μπορεί να εκφράζει μια ποσότητα από κάτι ολόκληρο, **το μέρος ενός όλου**. Το ολόκληρο ή όλο το λέμε **ακέραιη μονάδα.**	 Τα $\frac{2}{5}$ από το σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων είναι τρίγωνα.
Όταν το κλάσμα δείχνει **το μέρος ενός όλου** τότε: • ο παρονομαστής δείχνει **σε πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε** το όλο. • Ο αριθμητής δείχνει **πόσα από αυτά τα ίσα μέρη παίρνουμε.**	 **Μέρος του όλου** Τα $\frac{4}{6}$ της πίτσας έχουν ντομάτα **Παρονομαστής:** 6, σε τόσα ίσα κομμάτια χωρίζουμε **Αριθμητής:** 4, τόσα κομμάτια έχουν ντομάτα
Όταν ο **παρονομαστής** είναι **ίσος** με τον **αριθμητή,** το κλάσμα είναι ίσο με την ακέραιη μονάδα.	$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\cdots=\frac{15}{15}=\cdots=1$

Εφαρμογή Κλάσματα στην αριθμογραμμή

Να τοποθετήσετε πάνω στην αριθμογραμμή τα κλάσματα: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{4}$

1ο βήμα: Χωρίζουμε κάθε μονάδα στην αριθμογραμμή σε ....

....



....

2ο βήμα: Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή την κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$.

3ο βήμα: Για να τοποθετήσουμε το κλάσμα $\frac{3}{4}$, επαναλαμβάνουμε 3 φορές την κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$. Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{3}{4}$.

4ο βήμα: Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{4}{4}$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{4}{4}$ = ...

Αναστοχασμός

1. Γράφουμε με κλάσμα το μέρος των παιδιών της τάξης μας που έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό:

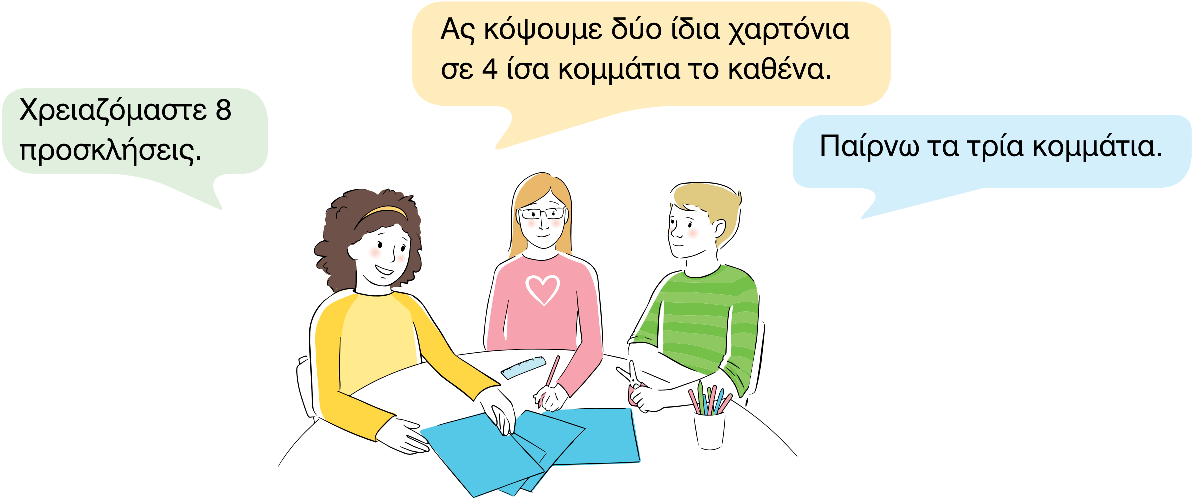
   ....

2. Βρίσκουμε κλάσματα μικρότερα, ίσα και μεγαλύτερα της μονάδας.
3. Δημιουργούμε μία έντυπη ή ψηφιακή αφίσα και καταγράφουμε σε αυτήν τρεις εκφράσεις από την καθημερινή μας ζωή στις οποίες χρησιμοποιούμε κλάσματα. Σχεδιάζουμε εικόνες, για να αναπαραστήσουμε τα κλάσματα αυτά.

Κλάσματα μεγαλύτερα της ακέραιης μονάδας 14

Διερεύνηση

Η Δανάη, η Αγγελική και ο Αντρέι φτιάχνουν προσκλήσεις για τη γιορτή του σχολείου τους.



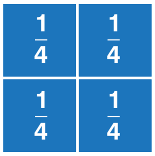
α΄ τρόπος: Σχεδιάζουμε τα κομμάτια από τα χαρτόνια που έχουν τα κορίτσια. Γράφουμε κάτω από κάθε κομμάτι το κλάσμα που εκφράζει το μέρος του χαρτονιού.

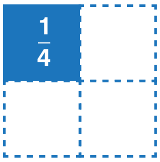
Γράφουμε με κλάσμα το μέρος από το χαρτόνι που έχουν συνολικά τα κορίτσια: $\frac{\square}{\square}$

Παρατηρούμε ότι στο κλάσμα αυτό ο αριθμητής είναι .... από τον παρονομαστή.

β΄ τρόπος: Σχεδιάζουμε τα κομμάτια και γράφουμε με κλάσματα το χαρτόνι που έχουν τα κορίτσια, σχηματίζοντας:

τα ολόκληρα χαρτόνια και τα μέρη του χαρτονιού που έμειναν.





$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = 1 + \frac{\square}{\square} = 1\frac{\square}{\square}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\square}{\square} = 1\frac{\square}{\square}$

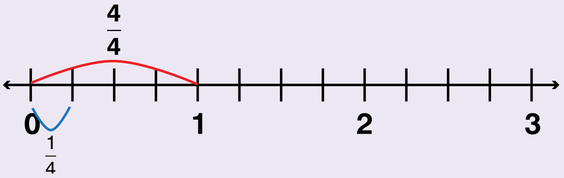
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Τα **κλάσματα** στα οποία ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή είναι **μεγαλύτερα από τον αριθμό 1.**	$\frac{5}{3} > 1$
Τα κλάσματα αυτά μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε **μεικτούς αριθμούς** γράφοντας χωριστά τις ακέραιες μονάδες τους.	$\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ **(μεικτός)**

Εφαρμογή Μετατροπή ενός κλάσματος σε μεικτό αριθμό και αντίστροφα

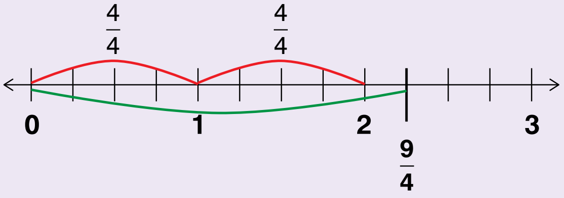
1. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{9}{4}$ σε μεικτό αριθμό.

1. Ο παρονομαστής δείχνει ότι χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα σε ……… ίσα μέρη.

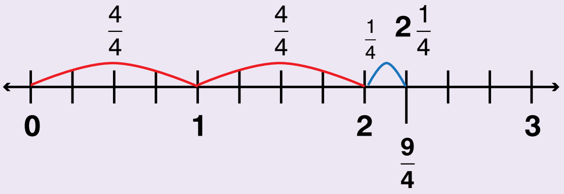
   Το κάθε μέρος της είναι το $\frac{\square}{\square}$.



2. Ο αριθμητής δείχνει ότι παίρνουμε ………. ίσα μέρη.
   Πρέπει να χωρίσουμε και άλλες ακέραιες μονάδες.



3. Συνολικά παίρνουμε 2 ακέραιες μονάδες και το $\frac{1}{4}$ της επόμενης.



Άρα: $\frac{9}{4} = \frac{\;}{\;} + \frac{\;}{\;} + \frac{\;}{\;} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

2. Να μετατρέψετε τον μεικτό αριθμό $2\frac{1}{4}$ σε κλάσμα.

Ο παρονομαστής δείχνει ότι χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα σε ……… ίσα μέρη.

Η ακέραιη μονάδα είναι ίση με $\frac{\;}{\;}$.

Άρα: $2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{\;}{\;} + \frac{\;}{\;} + \frac{\;}{\;} = \frac{9}{4}$

Αναστοχασμός

Αν το κλάσμα $\frac{α}{3}$ είναι μεγαλύτερο της ακέραιης μονάδας, ποιος αριθμός μπορεί να είναι το α;

Τι συμπεραίνουμε; . ……………………………………………………………..

Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης 15

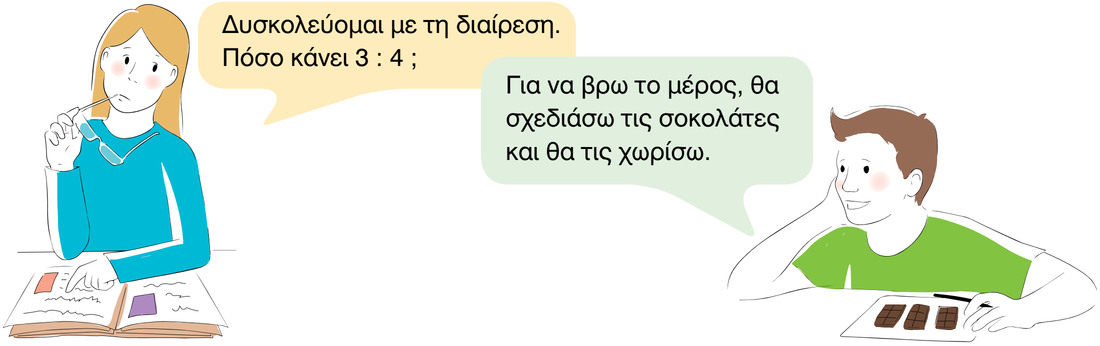
Διερεύνηση

Η γιαγιά θέλει να μοιράσει εξίσου μερικές σοκολάτες στα 4 εγγόνια της.

α. Αν οι σοκολάτες είναι 8, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;
Γράφουμε την πράξη και υπολογίζουμε: ....

Όταν μοιράζουμε, το αποτέλεσμα είναι πάντοτε φυσικός αριθμός; Συζητάμε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές μας.

β. Αν οι σοκολάτες είναι 3, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;



Εργαζόμαστε με τον τρόπο τον οποίο μας προτείνει ο Νίκος.

Κάθε παιδί θα πάρει της σοκολάτας. $\frac{\square}{\square}$

Παρατηρούμε το σχέδιο και συζητάμε τι δείχνουν οι όροι του κλάσματος.

Αριθμητής: ....

Παρονομαστής: ....

....

Άρα $\square : \square = \frac{\square}{\square}$

γ. Αν οι σοκολάτες είναι 5, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;

Εργαζόμαστε σχεδιάζοντας και χωρίζοντας τις σοκολάτες

Κάθε παιδί θα πάρει σοκολάτες. $\square\frac{\square}{\square}$ ή $\frac{\square}{\square}$

Άρα $\square : \square = \frac{\square}{\square}$

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Κάθε κλάσμα εκφράζει το **πηλίκο της διαίρεσης** του αριθμητή διά του παρονομαστή.	$\frac{3}{4} = 3{:}4$, $\frac{24}{5} = 24{:}5$
Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί με τη μορφή κλάσματος.	$5 = 5{:}1 = \frac{5}{1}$ ή $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ κλπ.

Στρατηγικές διαχείρισης αριθμών

1. Μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό.

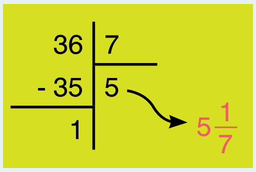
Μετατρέπουμε ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή του.

Π.χ. α. $\frac{3}{10} = 3{:}10 = 0{,}3$ β. $\frac{3}{5} = 3{:}5 = 0{,}6$ γ. $\frac{7}{9} = 7{:}9 = 0{,}777...$ δ. $\frac{9}{2} = 9{:}2 = 4{,}5$

Σημείωση: *Χρησιμοποιούμε την αριθμομηχανή τσέπης, για να βρούμε το αποτέλεσμα.*

2. Μετατροπή ενός κλάσματος μεγαλύτερου της μονάδας σε μεικτό αριθμό.

π.χ. Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{36}{7}$ σε μεικτό αριθμό.



1. Διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος με τον παρονομαστή, γιατί $\frac{36}{7} = 36{:}7$.
2. Ο ακέραιος του μεικτού αριθμού είναι το πηλίκο της διαίρεσης και δείχνει πόσες επτάδες χωράνε στο 36.
3. Το κλάσμα του μεικτού έχει: α. αριθμητή το υπόλοιπο της διαίρεσης και β. παρονομαστή τον διαιρέτη. Άρα $\frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$

Εφαρμογή

Ο Νίκος και οι 4 φίλοι του μοιράστηκαν εξίσου 6 μήλα.
Τι μέρος από τα μήλα πήρε το κάθε παιδί;

Θέλουμε να μοιράσουμε τα 6 μήλα στα 5 παιδιά.

α΄ τρόπος: Χωρίζουμε κάθε μήλο σε 5 ίσα μέρη, όσα είναι τα παιδιά. Κάθε κομμάτι είναι το $\frac{1}{5}$.

Κάθε παιδί θα πάρει 6 τέτοια κομμάτια, όσα είναι τα μήλα, δηλαδή $6 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

β΄ τρόπος: Θα κάνουμε διαίρεση $6{:}5 = \frac{6}{5}$. Κάθε παιδί πήρε τα $\frac{6}{5}$ ή $1\frac{1}{5}$ των μήλων.

Αναστοχασμός

1. Ο παρονομαστής ενός κλάσματος μπορεί να είναι μηδέν;
2. Κάθε κλάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης. Φτιάχνουμε ένα πρόβλημα διαίρεσης. Τι δείχνει ο αριθμητής και τι ο παρονομαστής;

Ισοδυναμία κλασμάτων – Απλοποίηση κλασμάτων

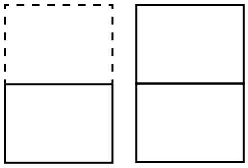
16

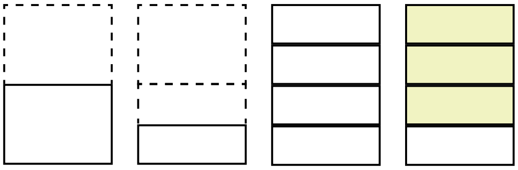
Διερεύνηση

1. Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Ε΄ τάξης κάνουν συλλογή από γραμματόσημα. Παρατηρούμε την παρακάτω σελίδα.

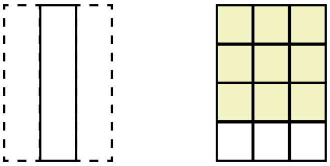
Συζητάμε ποιο παιδί έχει δίκιο.

1. Διπλώνουμε κατάλληλα μια σελίδα Α4 και χρωματίζουμε τα $\frac{3}{4}$ της σελίδας.





2. Διπλώνουμε ξανά την ίδια σελίδα και χρωματίζουμε τα $\frac{9}{12}$ αυτής.



Συγκρίνουμε τα δύο κλάσματα.

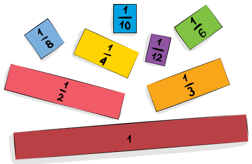
$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

Τα δυο κλάσματα εκφράζουν το .... μέρος της σελίδας.

Πώς προκύπτουν οι όροι του κλάσματος $\frac{9}{12}$ από τους όρους του κλάσματος $\frac{3}{4}$;

....

2. Εκφράζουμε το κλάσμα $\frac{6}{12}$ με κλάσματα που έχουν μικρότερους όρους χρησιμοποιώντας τις ράβδους κλασμάτων του παραρτήματος.



$$\frac{6}{12} = \frac{}{6} = \frac{}{4} = \frac{}{2}$$

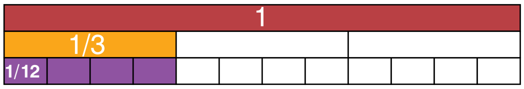
Πώς προκύπτουν οι όροι των κλασμάτων που βρήκαμε από τους όρους του $\frac{6}{12}$;

....

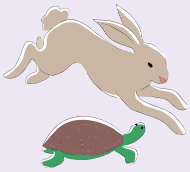
....

....

Ποιο κλάσμα έχει τους μικρότερους όρους; ....

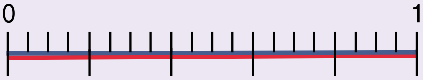
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Τα **κλάσματα** που εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός όλου λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα.**	 $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$
Αν **πολλαπλασιάσουμε** τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό.	$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$
Αν **διαιρέσουμε** τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό, με μικρότερους όρους. Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση**.	$\frac{16}{24} = \frac{16 : 8}{24 : 8} = \frac{2}{3}$
Τα κλάσματα που οι όροι τους δεν απλοποιούνται λέγονται **ανάγωγα**.	$\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{8}$

Εφαρμογή



1. Ο λαγός και η χελώνα τρέχουν την ίδια διαδρομή. Ο λαγός έχει διανύσει τα $\frac{8}{20}$ της διαδρομής και η χελώνα τα $\frac{2}{5}$ της. Να τοποθετήσετε τα δύο κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή. Τι παρατηρείτε;

Τοποθετούμε τα κλάσματα στην αριθμογραμμή, την οποία χωρίζουμε κάθε φορά κατάλληλα.
Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα βρίσκονται στο .... σημείο της αριθμογραμμής.



Επαλήθευση: Απλοποιούμε το κλάσμα $\frac{8}{20}$, ώστε να γίνει ανάγωγο.

$\frac{8}{20} = \frac{8 : \square}{20 : \square} = \frac{\square}{\square}$ ή $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{2}{5}$ Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα $\frac{8}{20}$ και $\frac{2}{5}$ είναι ....

2. Να βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ των κλασμάτων $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.

Βρίσκουμε για καθένα από τα παραπάνω κλάσματα ένα ισοδύναμό του. $\frac{1}{3} = \frac{1 \times \square}{3 \times \square} = \frac{\square}{\square}$ και $\frac{2}{3} = \frac{2 \times \square}{3 \times \square} = \frac{\square}{\square}$

Ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\square}{\square}$ και $\frac{\square}{\square}$ που δημιουργήσαμε, βρίσκεται το κλάσμα $\frac{\square}{\square}$.

Αναστοχασμός

1. Πόσα ισοδύναμα κλάσματα έχει κάθε κλάσμα;
2. Χρησιμοποιούμε τις ράβδους κλασμάτων του παραρτήματος και δημιουργούμε κλάσματα ισοδύναμα με το $\frac{6}{8}$.

Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων

17

Διερεύνηση

Τα παιδιά έχουν χωριστεί σε ζευγάρια και παίζουν ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι.

α. Ο ήρωας του Νίκου έχει καλύψει τα $\frac{4}{7}$ της πίστας-διαδρομής και του Αντρέι τα $\frac{5}{7}$.

β. Ο ήρωας της Αγγελικής έχει καλύψει τα $\frac{2}{17}$ της πίστας-διαδρομής και της Δανάης τα $\frac{2}{19}$.

γ. Ο ήρωας του Ορέστη έχει καλύψει το $\frac{1}{2}$ της πίστας-διαδρομής και της Κέλλυ τα $\frac{17}{31}$.

δ. Ο ήρωας του Σπύρου έχει καλύψει τα $\frac{16}{27}$ της πίστας-διαδρομής και της Λίας τα $\frac{18}{24}$.

Ποιος ήρωας έχει καλύψει τη μεγαλύτερη διαδρομή σε κάθε ζευγάρι;

Συγκρίνουμε τα κλάσματα (<, =, >) και περιγράφουμε τη στρατηγική που χρησιμοποιήσαμε σε κάθε περίπτωση.

α΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

β΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

γ΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

δ΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

Στρατηγικές σύγκρισης	Εξήγηση των στρατηγικών
Στα κλάσματα που έχουν **ίσους παρονομαστές**, μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.	$\boxed{\frac{5}{7} > \frac{4}{7}}$ Τα 5 είναι περισσότερα από τα 4 μέρη του ίδιου μεγέθους **(έβδομα)**.
Στα κλάσματα που έχουν **ίσους αριθμητές**, μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει μικρότερο παρονομαστή.	$\boxed{\frac{9}{5} > \frac{9}{6}}$ Παίρνουμε ίδιο αριθμό από μέρη (9), αλλά τα **πέμπτα** είναι μεγαλύτερα σε μέγεθος μέρη από τα **έκτα**.
Ένα κλάσμα που έχει **μεγαλύτερο αριθμητή και μικρότερο παρονομαστή** από ένα άλλο κλάσμα είναι μεγαλύτερο από αυτό.	$\boxed{\frac{18}{24} > \frac{16}{27}}$ Παίρνουμε και περισσότερα μέρη (18) και μεγαλύτερου μεγέθους, αφού τα εικοστά τέταρτα είναι μεγαλύτερα από τα εικοστά έβδομα.
Μπορούμε να συγκρίνουμε κλάσματα χρησιμοποιώντας **ένα κοινό σημείο αναφοράς**.	$\boxed{\frac{12}{13} > \frac{8}{9}}$ Τα δύο κλάσματα είναι μικρότερα από το 1. Το $\frac{12}{13}$ βρίσκεται πιο κοντά στο 1, γιατί απέχει $\frac{1}{13}$, το οποίο είναι λιγότερο από το $\frac{1}{9}$ που απέχει το $\frac{8}{9}$.

Εφαρμογή

Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{3}{7}$ και $\frac{5}{8}$.

α΄ τρόπος: Μετατρέπουμε σε ισοδύναμα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή.

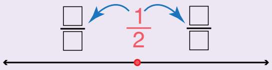
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών: Ε.Κ.Π. (7,8) = ...
- Δημιουργούμε κλάσματα ισοδύναμα με τα αρχικά με παρονομαστή ίδιο με το Ε.Κ.Π. (7,8).

Έχουμε: $\frac{3}{7} = \frac{3 \times \square}{7 \times \square} = \frac{\square}{\square}$ και $\frac{5}{8} = \frac{5 \times \square}{8 \times \square} = \frac{\square}{\square}$.

- Συγκρίνουμε τους αριθμητές των δύο νέων κλασμάτων, άρα $\frac{\square}{\square} \quad \frac{\square}{\square}$.

β΄ τρόπος: Συγκρίνουμε ως προς ένα κοινό σημείο αναφοράς.

- Επιλέγουμε το $\frac{1}{2}$ ως σημείο αναφοράς, για να συγκρίνουμε τα δύο κλάσματα.
- Συγκρίνουμε το $\frac{5}{8}$ με το $\frac{1}{2}$. Το $\frac{1}{2}$ είναι ισοδύναμο με το $\frac{4}{8}$. Είναι $\frac{5}{8} > \frac{4}{8}$, άρα $\frac{5}{8} \square \frac{1}{2}$.
- Συγκρίνουμε το $\frac{3}{7}$ με το $\frac{1}{2}$. Το $\frac{1}{2}$ είναι ισοδύναμο με το $\frac{3}{6}$. Είναι $\frac{3}{7} < \frac{3}{6}$, άρα $\frac{3}{7} \square \frac{1}{2}$.
- Επομένως , έχουμε τελικά: $\frac{\square}{\square} \quad \frac{\square}{\square}$.



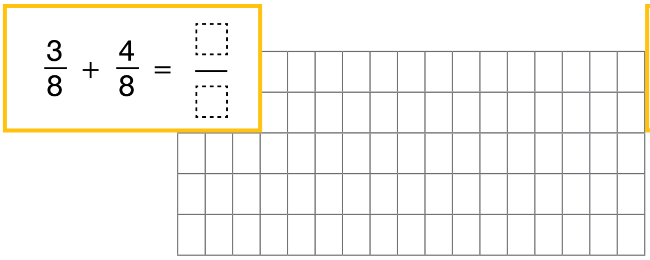
Αναστοχασμός

1. Βρίσκουμε κλάσματα που είναι μικρότερα από το $\frac{1}{2}$.
2. Τα κλάσματα $\frac{13}{15}$ και $\frac{17}{19}$ είναι ισοδύναμα ή όχι; Αιτιολογούμε την απάντησή μας.
3. Βρίσκουμε κλάσματα όσο γίνεται πιο κοντά στο 1.

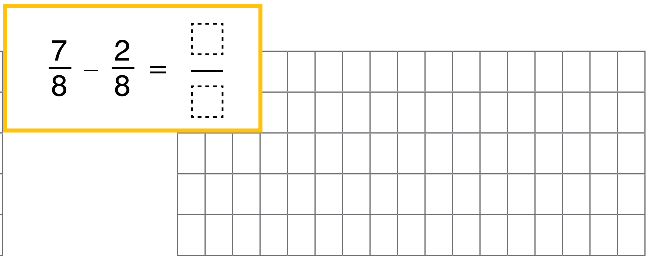
Διερεύνηση

1. Χρησιμοποιούμε το τετραγωνισμένο χαρτί, για να αναπαραστήσουμε με ράβδους ή ορθογώνια τα κλάσματα και να υπολογίσουμε τα αθροίσματα και τις διαφορές:

α. $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$ β. $\frac{7}{8} - \frac{2}{8}$.

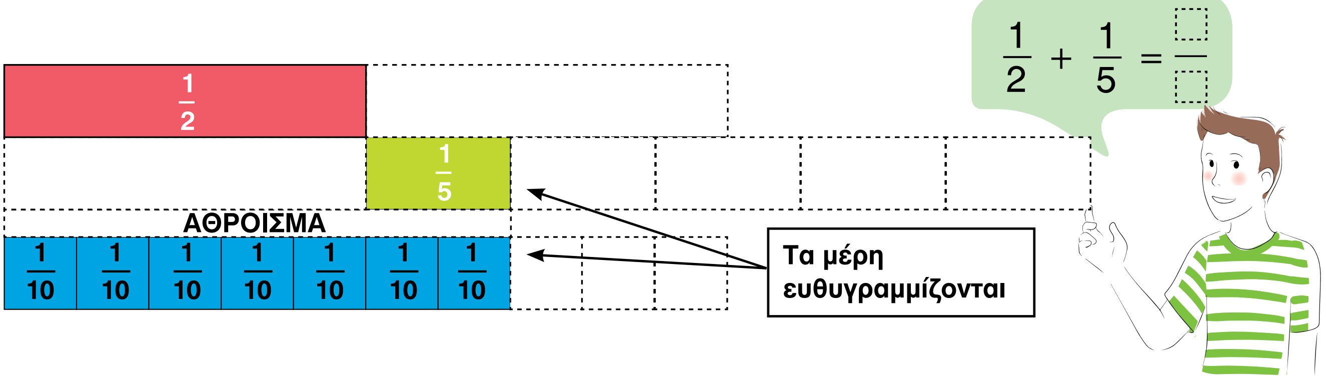


$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{\square}{\square}$



$\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{\square}{\square}$

2. Χρησιμοποιούμε ράβδους κλασμάτων, για να αναπαραστήσουμε και να υπολογίσουμε αθροίσματα και διαφορές κλασμάτων.



$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{\square}{\square}$

α. Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε ο Νίκος και έπειτα συμπληρώνουμε το άθροισμα.

....

....

β. Θα μπορούσε ο Νίκος, αντί για τις ράβδους $\frac{1}{10}$, να χρησιμοποιήσει τις ράβδους $\frac{1}{8}$;

Εξηγούμε: ....

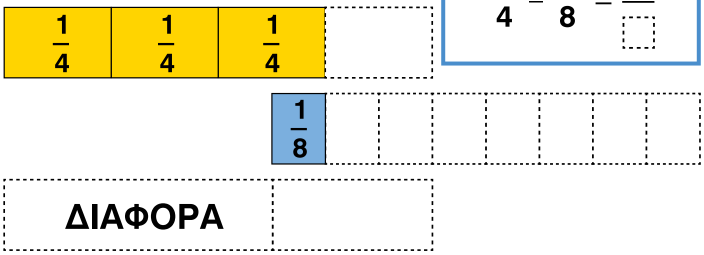
γ. Χρησιμοποιούμε τις ράβδους για να βρούμε τη διαφορά $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$.
Εξηγούμε τον τρόπο εργασίας μας.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$

....

....

....



δ. Ποιες άλλες ράβδους θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να αναπαραστήσουμε τη διαφορά; ....

Συζητάμε με ποιον τρόπο προσθέτουμε και αφαιρούμε κλάσματα με ίδιους (ομώνυμα) και με διαφορετικούς (ετερώνυμα) παρονομαστές.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Τα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**, ενώ τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερώνυμα**.	$\frac{2}{5}, \frac{7}{5}$ ομώνυμα $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{9}{4}$ ετερώνυμα
Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε **ετερώνυμα κλάσματα** τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και στη συνέχεια προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές, ενώ παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο. Στο τέλος, κάνουμε απλοποίηση.	• $\frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 2}{6 \times 2} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ • $\frac{4}{3} - \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} - \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{20}{15} - \frac{9}{15} = \frac{11}{15}$

Εφαρμογή

1. **Να βρείτε το άθροισμα: $6\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}$**

α΄ τρόπος: Μετατρέπουμε τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα.

$6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} =$ ....

β΄ τρόπος: Προσθέτουμε χωριστά τις ακέραιες μονάδες από τα κλάσματα.

$6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} = 8 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$ ....

Σε κάθε περίπτωση, στο τέλος, μετατρέπουμε πάλι σε μεικτό αριθμό και, αν γίνεται, κάνουμε και απλοποίηση.

2. **Με τη βοήθεια του μοντέλου , να κάνετε την παρακάτω αφαίρεση: $3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{4}$**

....

....

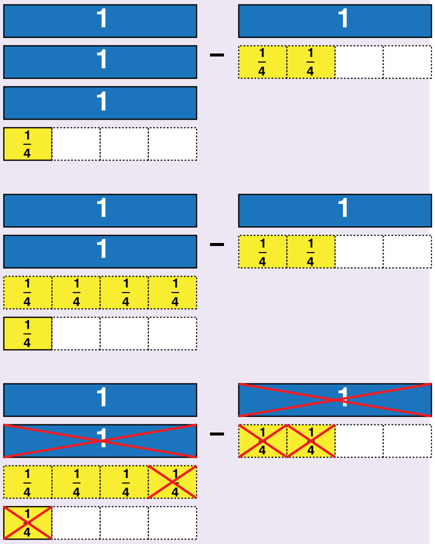
....

....

Περιγράφουμε τη διαδικασία:..

....

....



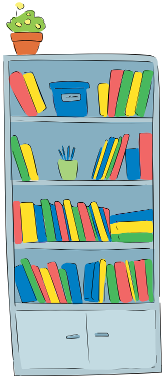
Αναστοχασμός

1. Επιλέγουμε δύο κλάσματα των οποίων η διαφορά είναι $\frac{1}{4}$ και ο παρονομαστής τους είναι διαφορετικός από το 4. ....
2. Πώς θα μπορούσε να μας βοηθήσει το Ε.Κ.Π. στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων;
3. Γιατί στην πρόσθεση πρέπει να μετατρέπουμε τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα;

Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα – Αντίστροφοι αριθμοί

19

Διερεύνηση

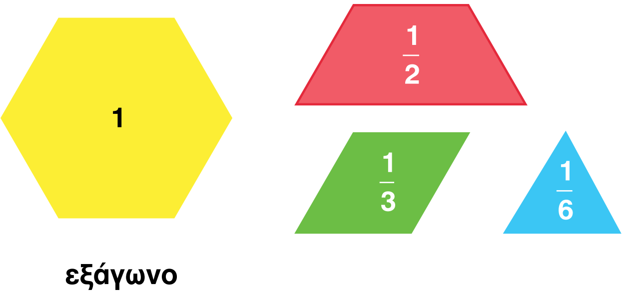


1. Κάθε ξύλινο ράφι της βιβλιοθήκης της τάξης έχει μήκος $\frac{2}{3}$ μ.

Πόσα μέτρα ξύλου θα χρειαστεί, για να αντικατασταθούν 3 ράφια;

2. Χρησιμοποιούμε τα γεωμετρικά σχήματα του παραρτήματος, για να βρούμε τα παρακάτω γινόμενα, αν το εξάγωνο είναι η ακέραιη μονάδα.

α.	$3 \times \frac{1}{2} =$	$4 \times \frac{1}{2} =$
β.	$2 \times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{6} \times 2 =$
γ.	$6 \times \frac{1}{6} =$	$3 \times \frac{1}{3} =$



Τι παρατηρούμε σε κάθε περίπτωση στα παραπάνω γινόμενα;

3. Τα $\frac{2}{3}$ ενός οικοπέδου είναι κήπος. Στο $\frac{1}{5}$ του κήπου αυτού φυτέψαμε λουλούδια.

Τι μέρος του οικοπέδου καλύπτεται από λουλούδια;

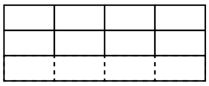
Πρέπει να βρούμε το $\frac{1}{5}$ των $\frac{2}{3}$ του κήπου, δηλαδή το $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$.

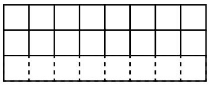
Σχεδιάζουμε στο παραπάνω σχήμα και υπολογίζουμε:

4. Βρίσκουμε τα γινόμενα με τη βοήθεια των μοντέλων αναπαράστασης.

α.  $1 \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

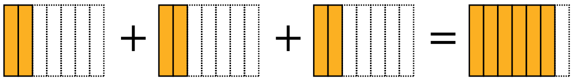
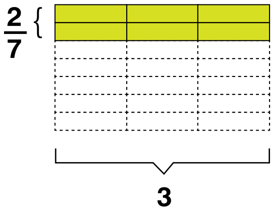
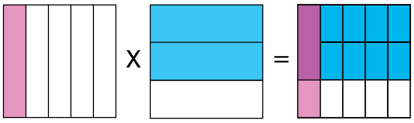
β.  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

γ.  $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

δ.  $\frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

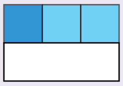
Τι θα συμβεί, αν πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα με ακόμα μικρότερες κλασματικές μονάδες;

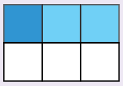
Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα – Αντίστροφοι αριθμοί

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Στον πολλαπλασιασμό ενός **φυσικού αριθμού** με ένα κλάσμα, ο φυσικός αριθμός μάς δείχνει πόσες φορές προσθέτω το κλάσμα με τον εαυτό του. Στον πολλαπλασιασμό, αν αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων, το γινόμενο παραμένει το ίδιο.	 $3 \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}$
Το **γινόμενο φυσικού αριθμού με κλάσμα** ή κλάσματος με φυσικό αριθμό είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή με τον φυσικό αριθμό και παρονομαστή τον παρονομαστή του κλάσματος.	 $\frac{2}{7} \times 3 = 3 \times \frac{2}{7}$
Όταν ζητάμε ένα **μέρος ενός αριθμού, φυσικού ή κλασματικού**, κάνουμε **πολλαπλασιασμό**.	
Το **γινόμενο δυο κλασμάτων** είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.	$\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$ Βρίσκουμε το $\frac{1}{5}$ του $\frac{2}{3}$.
Αντίστροφοι αριθμοί λέγονται δυο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 1.	$\frac{1}{5} \times 5 = \frac{1}{5} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{5} = 1, \frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{35} = 1$

Εφαρμογή

A 

B 

Γ 

1. Να βρείτε το $\frac{1}{3}$ από το $\frac{1}{2}$ μιας σοκολάτας.

α΄ τρόπος: α. Αναπαριστάνουμε τη σοκολάτα με ένα ορθογώνιο. Χρωματίζουμε το $\frac{1}{2}$. β. Χωρίζουμε το $\frac{1}{2}$ σε 3 ίσα μέρη και από αυτά χρωματίζουμε το 1. γ. Χωρίζουμε όμοια και το υπόλοιπο ορθογώνιο. Παρατηρούμε ότι το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{2}$ του ορθογωνίου είναι το $\frac{1}{6}$ του ορθογωνίου.

β΄ τρόπος: Βρίσκουμε το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{2}$ με πολλαπλασιασμό: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$

2. Να βρείτε το γινόμενο $2 \times 1\frac{1}{4}$.

α΄ τρόπος: $2 \times 1\frac{1}{4} = 2 \times (1 + \frac{1}{4}) = (2 \times 1) + (2 \times \frac{1}{4}) = 2 + \frac{2}{4} = 2\frac{2}{4}$

β΄ τρόπος: μετατροπή μεικτού σε κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας : $2 \times 1\frac{1}{4} = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{2}{4}$

Αναστοχασμός

1. Το γινόμενο $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το $\frac{1}{2}$;
2. Τι θα προτιμούσαμε; Τα $\frac{3}{4}$ της μισής πίτσας ή το $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$ της ίδιας πίτσας;
3. Όταν πολλαπλασιάζουμε δυο κλάσματα μικρότερα από το 1, το γινόμενό τους είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το καθένα κλάσμα; Δίνουμε ένα παράδειγμα.

Διαίρεση κλασμάτων 20

Διερεύνηση

Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Ε΄ τάξης φτιάχνουν στο μάθημα των εικαστικών αφίσες και προσκλήσεις για τις εκδηλώσεις τους.

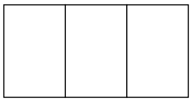
α. Τα κορίτσια φτιάχνουν προσκλήσεις με τα $\frac{2}{3}$ του χαρτονιού. Για καθεμιά χρησιμοποιούν το $\frac{1}{6}$ του χαρτονιού. Πόσες προσκλήσεις φτιάχνουν;

1. Βάζουμε ✔ στη μαθηματική πράξη που μας οδηγεί στο αποτέλεσμα:

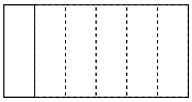
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{6} : \frac{2}{3}$ ☐ $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ ☐

2. Χρωματίζουμε :

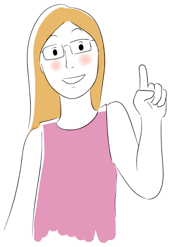
τα $\frac{2}{3}$ του χαρτονιού



το $\frac{1}{6}$ του χαρτονιού.

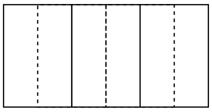


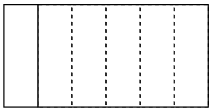
Πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{6}$ στα $\frac{2}{3}$ της ακέραιης μονάδας;



3. Ξαναχρωματίζουμε, έτσι ώστε τα δύο κλάσματα να έχουν κοινούς παρονομαστές **(ομώνυμα)** και επαναδιατυπώνουμε την ερώτηση:

«Πόσες φορές χωράει ....»





Οι κοινοί παρονομαστές δείχνουν ότι έχουμε ίδιου μεγέθους μέρη (έκτα). Αρκεί, επομένως, να διαιρέσουμε μόνο τους αριθμητές.

Κάνουμε την πράξη: $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = \square \div \square = \square$.

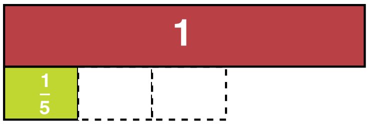
Άρα τα κορίτσια θα φτιάξουν .... προσκλήσεις.

β. Τα αγόρια έχουν 3 ίδια χαρτόνια για να φτιάξουν αφίσες. Για καθεμιά χρησιμοποιούν τα $\frac{3}{5}$ του χαρτονιού. Πόσες αφίσες φτιάχνουν;

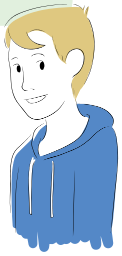
1. Βάζουμε ✔ στη μαθηματική πράξη που μας οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$3 \cdot \frac{3}{5}$ ☐ $3 : \frac{3}{5}$ ☐ $\frac{3}{5} : 3$ ☐

2. Χρησιμοποιούμε τις ράβδους κλασμάτων:



Πόσες φορές χωράει το $\frac{3}{5}$ στις 3 ακέραιες μονάδες;



Κάνουμε την πράξη: $3 \div \frac{3}{5} = \frac{}{5} \div \frac{3}{5} = \square \div \square = \square$.

Άρα τα αγόρια θα φτιάξουν .... αφίσες.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Για να διαιρέσουμε δυο **ομώνυμα κλάσματα**, διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = 3 : 4 = \frac{3}{4}$, $\frac{6}{8} : \frac{3}{8} = 6 : 3 = 2$
Για να **διαιρέσουμε** δυο **ετερώνυμα κλάσματα**, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{2}{3} : \frac{6}{5} = \frac{10}{15} : \frac{18}{15} = 10 : 18 = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
Όταν σε μια διαίρεση οι αριθμοί είναι διαφορετικής μορφής, τους μετατρέπουμε όλους στην ίδια μορφή.	$2{,}5 : 3\frac{1}{2} = \frac{25}{10} : \frac{7}{2} = \frac{25}{10} : \frac{35}{10} = 25 : 35 = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

Πρόσθετη μαθηματική ιδέα

Ένας άλλος τρόπος για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα είναι να αντιστρέψουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και, αντί για διαίρεση, να κάνουμε πολλαπλασιασμό.

π.χ. $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$,

$6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$

Εξήγηση του κανόνα

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Π.χ. Μοιράζω 6 μπαλόνια σε 3 παιδιά.

α. Κάνω διαίρεση: 6 : 3 = 2 μπαλόνια.

β. Κάνω πολλαπλασιασμό: Αφού τα παιδιά είναι 3, το καθένα θα πάρει το $\frac{1}{3}$ των μπαλονιών:

$6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$ *μπαλόνια.*

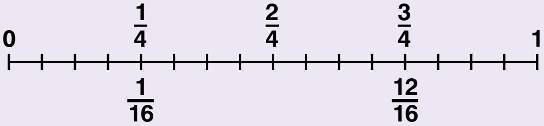
γ. Επομένως: $6 : 3 = 6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$

Σημείωση: *Ο διαιρετέος μπορεί να είναι και κλάσμα.*

Εφαρμογή

Στη γιορτή της Δανάης οι καλεσμένοι μοιράστηκαν εξίσου τα $\frac{3}{4}$ ενός ταψιού με μουσακά. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι, αν κάθε κομμάτι μουσακά ήταν $\frac{1}{16}$ του ταψιού;

α΄ τρόπος: Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής



Στην αριθμογραμμή, από το 0 έως το 1 αντιστοιχεί ολόκληρο το ταψί. Βρίσκουμε τα $\frac{3}{4}$. Χωρίζουμε την αριθμογραμμή σε ... ίσα μέρη και παίρνουμε τα .... . Κάθε κομμάτι είναι το $\frac{1}{16}$ του ταψιού, γι' αυτό ξαναχωρίζουμε την αριθμογραμμή σε ... ίσα μέρη. Μετράμε πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{16}$ είναι στα $\frac{3}{4}$. Βρίσκουμε .... κομμάτια, άρα οι καλεσμένοι είναι 12.

β΄ τρόπος: Δημιουργία ομώνυμων κλασμάτων: $\frac{3}{4} : \frac{1}{16} = \frac{\quad}{\quad} : \frac{\quad}{\quad} =$ .... καλεσμένοι.

γ΄ τρόπος: Αντιστροφή του διαιρέτη και πολλαπλασιασμός: $\frac{3}{4} : \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{48}{\quad} =$ .... καλεσμένοι

Αναστοχασμός

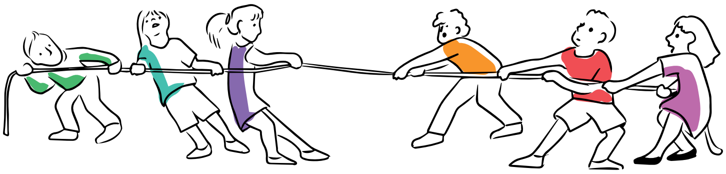
1. Μοιράζουμε το $\frac{1}{2}$ μιας σοκολάτας σε 4 παιδιά. Τι μέρος της σοκολάτας θα πάρει το κάθε παιδί;
2. Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα. Δημιουργούμε μια αφίσα με τους τρόπους αυτούς.

Αναγωγή στην κλασματική μονάδα

21

Διερεύνηση

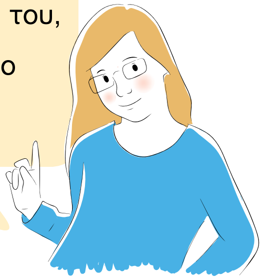
1. Τα παιδιά στην αυλή του σχολείου έπαιξαν το παιχνίδι «διελκυστίνδα». Είχαν ένα σκοινί μήκους 20 μέτρων. Για να παίξουν το παιχνίδι, χρησιμοποίησαν τα $\frac{2}{5}$ του σκοινιού. Πόσα μέτρα σκοινιού χρησιμοποίησαν;



Συζητάμε τους δύο τρόπους τους οποίους μας προτείνουν τα παιδιά.

Θέλουμε να βρούμε
ένα μέρος του σκοινιού.
Κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Γνωρίζουμε το μήκος όλου του σκοινιού. Για να βρούμε τα $\frac{2}{5}$ του, μπορούμε να βρούμε πρώτα το μήκος του $\frac{1}{5}$.



Τα $\frac{5}{5}$ του σκοινιού είναι ☐ μέτρα.

Το $\frac{1}{5}$ του σκοινιού είναι ☐ : 5= 4 μέτρα.

Τα $\frac{2}{5}$ του σκοινιού είναι ☐ x ☐ = 8 μέτρα.

Χρησιμοποίησαν ...... μέτρα σκοινιού.

2. Φτιάχνουμε **ένα αντίστροφο** με το παραπάνω **πρόβλημα** και το λύνουμε.

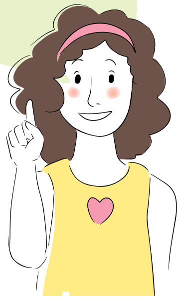
....

....

....

....

Γνωρίζουμε το μέρος του σκοινιού που χρησιμοποίησαν και αναζητούμε το μήκος όλου του σκοινιού.



Τα $\frac{2}{5}$ του σκοινιού είναι .... μέτρα.

Το $\frac{1}{5}$ του σκοινιού είναι .... : 2= .... μέτρα.

Τα $\frac{5}{5}$ του σκοινιού είναι .... x .... = ... μέτρα.

Όλο το σκοινί είχε μήκος ...... μέτρα.

Στρατηγική επίλυση προβλήματος

Χρησιμοποιούμε **τη μέθοδο της αναγωγής στην κλασματική μονάδα**, όταν :

1. Γνωρίζουμε το όλο και θέλουμε να βρούμε ένα κλασματικό του μέρος.
2. Γνωρίζουμε ένα κλασματικό μέρος του όλου και θέλουμε να βρούμε:
   α) το όλο ή
   β) ένα άλλο κλασματικό μέρος του όλου.

Παραδείγματα

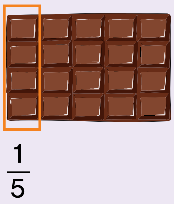
1. Πόσα γραμμάρια είναι τα $\frac{4}{10}$ του κιλού;

2α. Τα $\frac{3}{5}$ του σχολείου μας είναι 93 παιδιά. Πόσα παιδιά φοιτούν στο σχολείο μας;

2β. Τα $\frac{2}{5}$ μιας σοκολάτας ζυγίζουν 50 γραμμάρια. Ο Μπιλ έφαγε τα $\frac{3}{5}$ αυτής. Πόσα γραμμάρια της σοκολάτας έφαγε;

Εφαρμογή Υπολογίζω το κλασματικό μέρος του όλου, όταν γνωρίζω κάποιο άλλο κλασματικό του μέρος.

Τα $\frac{2}{5}$ μιας σοκολάτας ζυγίζουν 50 γραμμάρια. Ο Νίκος έφαγε τα $\frac{3}{5}$ αυτής. Πόσα γραμμάρια της σοκολάτας έφαγε;



Σκέψη

- Γνωρίζουμε ότι τα $\frac{2}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζουν 50 γραμμάρια και θέλουμε να βρούμε πόσα γραμμάρια ζυγίζουν τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας.
- Βρίσκουμε πρώτα την τιμή της κλασματικής μονάδας, δηλαδή του $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας. Αφού ξέρουμε τα $\frac{2}{5}$ και ζητάμε το $\frac{1}{5}$, διαιρούμε με το 2.
- Βρίσκουμε πόσο ζυγίζουν τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας.

Αφού ξέρουμε το $\frac{1}{5}$ και ζητάμε τα $\frac{3}{5}$, πολλαπλασιάζουμε με το 3.

Λύση

- Τα $\frac{2}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζουν .... γραμμάρια.
- Το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζει .... : .... = ... γραμμάρια.
- Τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζουν ..... x ...... = ... γραμμάρια.

Απάντηση: Ο Νίκος έφαγε τα .... γραμμάρια της σοκολάτας.

Αναστοχασμός

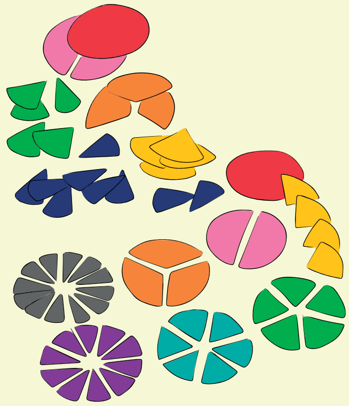
Γιατί η παραπάνω στρατηγική επίλυσης προβλήματος ονομάζεται **μέθοδος αναγωγής στην κλασματική μονάδα**;

επαναληπτικό 3

Κεφάλαια 13 - 21

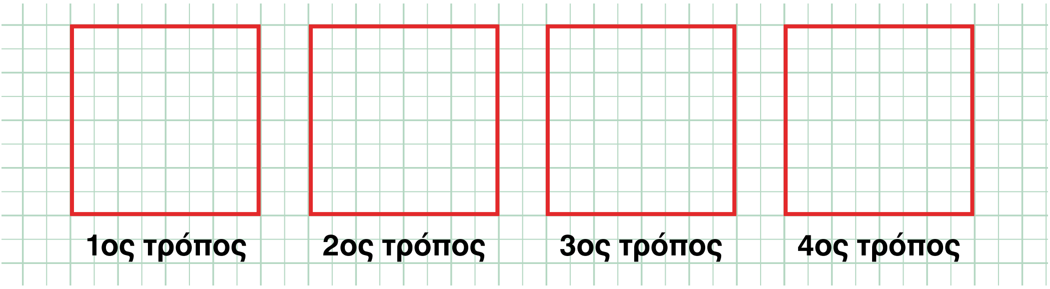
Στα κεφάλαια αυτά έμαθα:

- ✓ **να εκφράζω: α) το μέρος ενός όλου με κλάσμα, β) το πηλίκο μιας διαίρεσης με κλάσμα,**
- ✓ **να τοποθετώ κλασματικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή,**
- ✓ **να διατάσσω και να συγκρίνω κλασματικούς αριθμούς,**
- ✓ **να αναγνωρίζω, να κατασκευάζω και να απλοποιώ ισοδύναμα κλάσματα,**
- ✓ **να κάνω πράξεις με κλάσματα και με μεικτούς αριθμούς,**
- ✓ **να λύνω προβλήματα με κλασματικούς αριθμούς.**



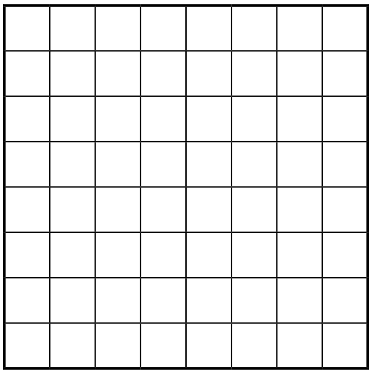
1η Άσκηση

α. Χωρίζουμε τα παρακάτω τετράγωνα σε τέσσερα ίσα μέρη με διαφορετικό τρόπο το καθένα.



β. Χρωματίζουμε στο διπλανό τετράγωνο:

- ➢ το $\frac{1}{2}$ του τετράγωνου κίτρινο
- ➢ το $\frac{1}{8}$ του τετράγωνου μπλε
- ➢ το $\frac{1}{4}$ του τετράγωνου κόκκινο
- ➢ το $\frac{1}{16}$ του τετράγωνου πράσινο



- Τι μέρος του τετραγώνου έμεινε αχρωμάτιστο; ....

2η Άσκηση

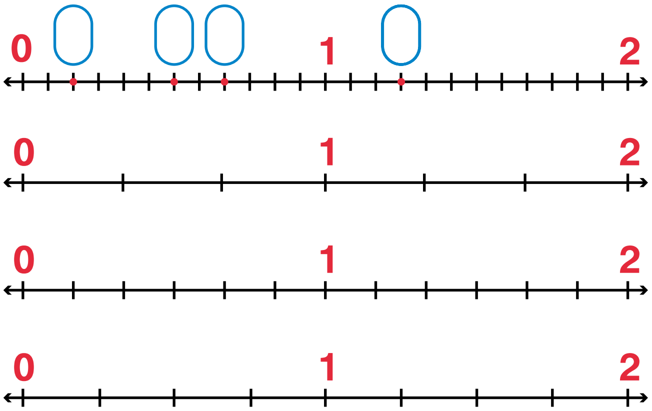
Βρίσκουμε τρία κλάσματα μεγαλύτερα από το $\frac{1}{7}$ και μικρότερα από το $\frac{2}{7}$.

....

....

3η Άσκηση

α. Συμπληρώνουμε στα κουτάκια τους κλασματικούς αριθμούς που βρίσκονται στα σημεία πάνω στην πρώτη αριθμογραμμή.



β. Τοποθετούμε στην κατάλληλη αριθμογραμμή το ισοδύναμο ανάγωγο κλάσμα για κάθε κλασματικό αριθμό που γράψαμε.

4η Άσκηση

Βρίσκουμε τον αμέσως προηγούμενο και επόμενο φυσικό αριθμό σε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα και μεικτούς αριθμούς.

☐	$\frac{2}{8}$	☐
☐	$\frac{11}{5}$	☐
☐	$\frac{21}{6}$	☐
☐	$3\frac{1}{4}$	☐

1ο Πρόβλημα

Διαβάζουμε σε μια συνταγή τα υλικά και τις ποσότητες που θα χρειαστούμε, ώστε να φτιάξουμε μπισκότα με τους φίλους και τις φίλες μας.
Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις θα φτιάξουμε μεγαλύτερη ποσότητα μπισκότων; Υπογραμμίζουμε τη σωστή απάντηση και εξηγούμε την επιλογή μας.

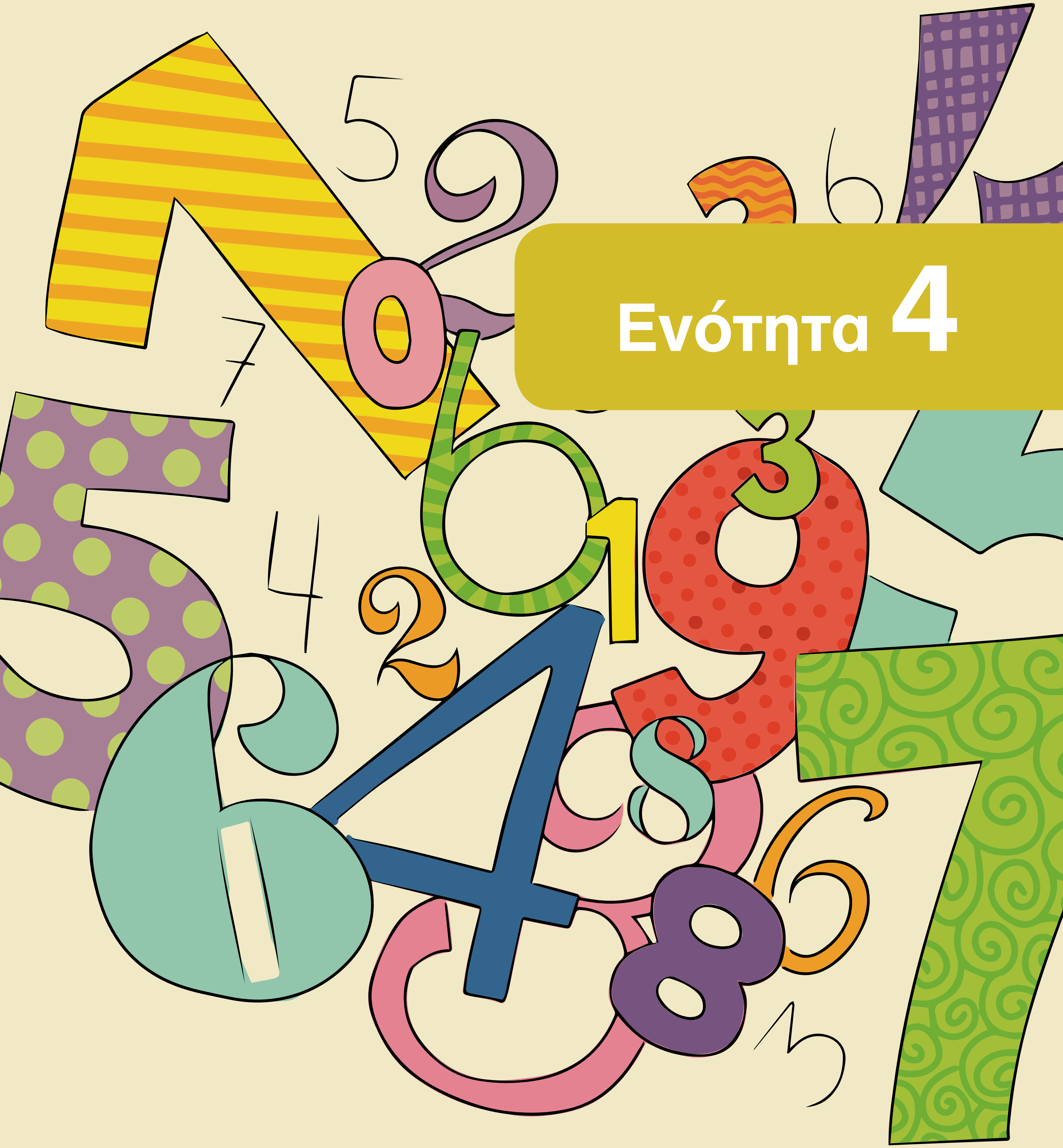
α. Όταν πολλαπλασιάσουμε την ποσότητα των υλικών με το $\frac{1}{2}$.

β. Όταν πολλαπλασιάσουμε την ποσότητα των υλικών με το 2.

γ. Όταν διαιρέσουμε την ποσότητα των υλικών με το $\frac{1}{3}$.

δ. Όταν διαιρέσουμε την ποσότητα των υλικών με το 3.

Ενότητα 4



Διερεύνηση

Τα παιδιά της Ε΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου στην Αθήνα έκαναν μια έρευνα, στην οποία κατέγραψαν τις ώρες παιχνιδιού και ξεκούρασης που έχουν συνολικά τις καθημερινές της εβδομάδας.

Ε΄ τάξη σχολείου της Αθήνας

Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας

4	5	10	10	5	15	5	10
5	10	6	15	5	5	5	5
5	5	9	7	14	5	6	11

Κάνουμε στην τάξη μας μια αντίστοιχη έρευνα και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΩΡΑ

Η τάξη μας

Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας

1. Συμπληρώνουμε τον πίνακα.

Κάθε αριθμός αντιπροσωπεύει την απάντηση ενός συμμαθητή μας ή μιας συμμαθήτριάς μας.

2. Οργανώνουμε τα δεδομένα μας συμπληρώνοντας τους πίνακες συχνοτήτων.

Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές	Ε΄ τάξη σχολείου της Αθήνας		Η τάξη μας	
	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό
0 – 4 ώρες		1		
5 – 9 ώρες	𝍸 𝍸 𝍸			
10 – 14 ώρες		6		
15 – 20 ώρες				
άλλο				

3. Αναπαριστάνουμε τα δεδομένα σε διπλό ραβδόγραμμα.

Με κόκκινο χρώμα φτιάχνουμε τις ράβδους του σχολείου μας δίπλα από τις ράβδους του σχολείου της Αθήνας.

- Πόσα παιδιά έλαβαν μέρος σε κάθε έρευνα;
- Τι δείχνει το ύψος των ράβδων;
- Πόσες ώρες για ξεκούραση έχουν τα περισσότερα παιδιά του σχολείου μας τις καθημερινές;

Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο ερευνών.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Η συλλογή, η οργάνωση, η επεξεργασία, η αναπαράσταση και η ερμηνεία ενός συνόλου **αριθμητικών δεδομένων** μάς βοηθά να βγάζουμε συμπεράσματα, να κάνουμε προβλέψεις και να παίρνουμε αποφάσεις.

Η **συλλογή** δεδομένων γίνεται με μετρήσεις, πειράματα, έρευνες κ.λπ., ενώ η **οργάνωση** και η **αναπαράσταση** τους με πίνακες και διαγράμματα.

Ο **πίνακας συχνοτήτων** μάς δείχνει πόσο συχνά εμφανίζεται κάθε δεδομένο στην καταγραφή μας.

Υπάρχουν πολλοί **τύποι διαγραμμάτων** για την αναπαράσταση των δεδομένων:
π.χ. ραβδόγραμμα, εικονόγραμμα, σημειόγραμμα, διάγραμμα γραμμής.

Παραδείγματα

α. Σε πόσο χρόνο τρέχεις τα 100 μέτρα;

Σε πόσα δευτερόλεπτα τρέχεις τα 100 μέτρα;							
14,8	14,9	15,3	15,7	15,5	16	15,2	15,2
16,1	15,6	15,5	14,8	15,3	14,9	17	15,1
15,3	15,6	14,8	16,2	15,6	15,2	15,5	15,3

Πίνακας συχνοτήτων

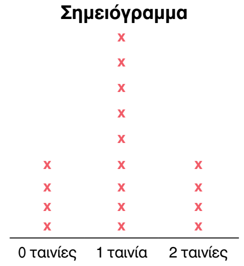
Πόσες ταινίες είδαν οι μαθητές τον τελευταίο μήνα

Ταινίες	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα
0	IIII	4
1	𝍸 IIII	9
2	IIII	4


Διάγραμμα Γραμμής
Πυρετός Ασθενούς

Εικονόγραμμα

Εικονόγραμμα	
0 ταινίες	○ ○
1 ταινία	○○ ○ ○◐
2 ταινίες	○ ○
Κάθε ○ αντιστοιχεί σε 2 μαθητές	


Σημειόγραμμα

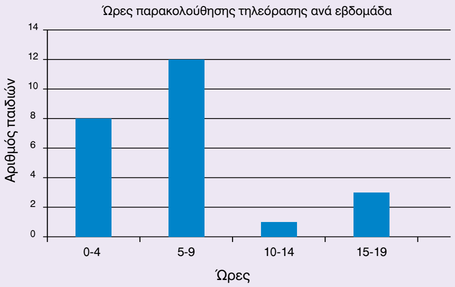
Εφαρμογή Πίνακας συχνοτήτων - ραβδόγραμμα

Τα παιδιά μιας Ε΄ τάξης ερεύνησαν πόσες ώρες παρακολουθούν τηλεόραση κάθε εβδομάδα.

Αποτελέσματα έρευνας						**0**	**5**	**7**	**9**	**8**	**2**	**2**	**15**	**5**
16	**5**	**8**	**0**	**3**	**9**	**1**	**7**	**15**	**9**	**13**	**4**	**8**	**4**	**8**

1. **Οργανώνουμε** τα δεδομένα που **συλλέξαμε** στον πίνακα συχνοτήτων, στον οποίο **καταμετρούμε** πόσες φορές εμφανίζεται κάθε δεδομένο. Επειδή στα δεδομένα εμφανίζονται πολλές διαφορετικές τιμές, τα ομαδοποιούμε: 0-4, 5-9, 10-14 και 15-19 ώρες.
2. **Παρουσιάζουμε** τα δεδομένα με ένα ραβδόγραμμα, στο οποίο βάζουμε τίτλο. Κάθε άξονας χωρίζεται σε ίσα διαστήματα.

Ώρες	Καταμέτρηση	Συχνότητα
0 - 4	𝍸 III	8
5 - 9	𝍸 𝍸 II	12
10 - 14	I	1
15 - 19	III	3


Ώρες παρακολούθησης τηλεόρασης ανά εβδομάδα

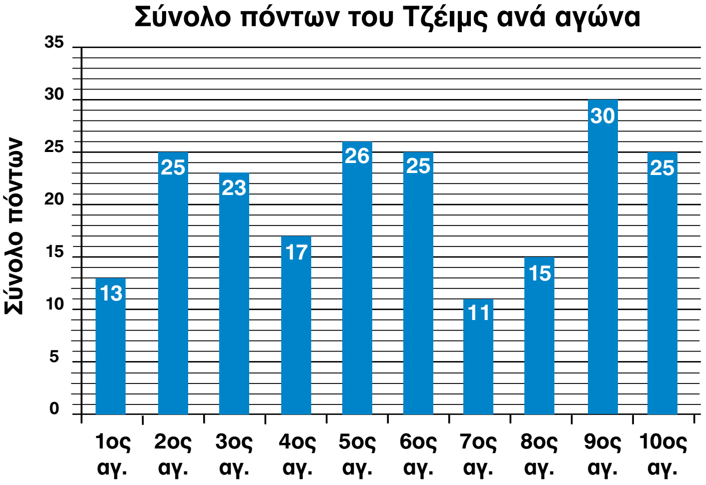
Αναστοχασμός

1. Στην αναπαράσταση των δεδομένων κάποιοι αριθμοί δείχνουν τις τιμές των δεδομένων και κάποιοι άλλοι πόσο συχνά εμφανίζεται κάθε τιμή. Δίνουμε ένα παράδειγμα.

Χαρακτηριστικές τιμές δεδομένων – Μέση τιμή 23

Διερεύνηση

Ο Τζέιμς σημείωσε στους δέκα πρώτους αγώνες μπάσκετ της ομάδας του τους πόντους που φαίνονται στο ραβδόγραμμα:



Σύνολο πόντων του Τζέιμς ανά αγώνα

α. Παρατηρούμε το ραβδόγραμμα:

1. Πόσους πόντους σημείωσε συνολικά και στους δέκα αγώνες;

   ………………………………………………

2. Αν οι συνολικοί πόντοι μοιράζονταν εξίσου και στους 10 αγώνες, πόσους πόντους θα σημείωνε σε κάθε αγώνα;

   ……

   ……

3. Χαράζουμε μια κόκκινη γραμμή παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, που θα δείχνει το ύψος των ράβδων, εάν οι συνολικοί πόντοι μοιράζονταν εξίσου και στους 10 αγώνες.

β. Συμπληρώνουμε τον ακόλουθο πίνακα συχνοτήτων.

Σύνολο διαφορετικών πόντων ανά αγώνα	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης
13		1

1 Ποια είναι η μικρότερη τιμή πόντων; ………………

2. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή πόντων; …………

3. Ποια τιμή πόντων εμφανίζεται πιο συχνά; ………

γ. Διατάσσουμε τους πόντους με τη σειρά από τους λιγότερους, ανά αγώνα, στους περισσότερους.

……………………………………………………………

Ποια τιμή ή ποιες δύο τιμές βρίσκονται στη μέση της διάταξης και χωρίζουν το σύνολο των τιμών σε δυο ίσα μέρη, από τα οποία το ένα μέρος έχει τις μικρότερες τιμές και το άλλο τις μεγαλύτερες;

……

Συζητάμε και κάνουμε προβλέψεις για το μέλλον του παίκτη.

- Με βάση τα δεδομένα, ποια πρόβλεψη μπορούμε να κάνουμε για την πορεία του παίκτη στη διάρκεια της αγωνιστικής περιόδου;
- Ποιοι πιθανοί παράγοντες μπορούν να ανατρέψουν τις προβλέψεις μας;

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

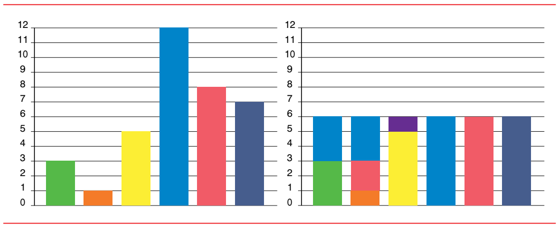
Κατά την επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων, βρίσκουμε κάποιες χαρακτηριστικές τιμές, χρήσιμες στην ερμηνεία των δεδομένων.
Μία από αυτές είναι η μέση τιμή ή μέσος όρος.

Για να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** ή τον **μέσο όρο**, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων.

$$\textbf{Μέση τιμή ή μέσος όρος} = \frac{\textbf{άθροισμα δεδομένων}}{\textbf{πλήθος δεδομένων}}$$

Παραδείγματα

Οι μετρήσεις της θερμοκρασίας στη Λαμία κάθε 4 ώρες στις 25/12/2017 ήταν: 3 °C, 1 °C, 5 °C, 12 °C, 8 °C, 7 °C.



Μέση τιμή ή μέσος όρος

$$\frac{3+1+5+12+8+7}{6} = \frac{36}{6} = 6\ ^{o}\mathrm{C}.$$

Εφαρμογή Υπολογίζω τη μέση τιμή

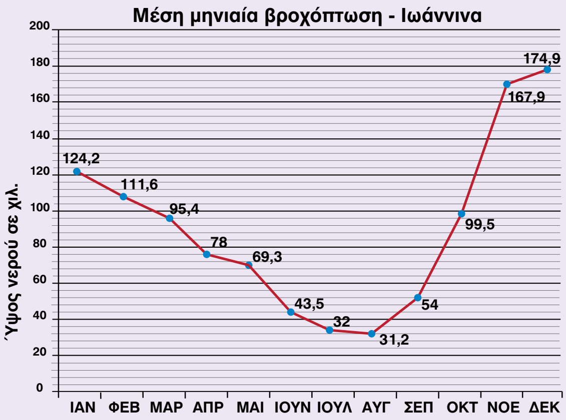
Σύμφωνα με το Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών, η μέση μηνιαία βροχόπτωση στην Αθήνα τον περασμένο αιώνα ήταν 33,29 χιλιοστά. Συγκρίνουμε τη μέση μηνιαία βροχόπτωση της Αθήνας με αυτήν της πόλης των Ιωαννίνων την ίδια περίοδο.
Παρατηρούμε και σχολιάζουμε το διάγραμμα.

1. Άθροισμα των δεδομένων:
   124,2 +111,6 + 95,4 + 78 + 69,3 + 43,5 + 32 + 31,2 + 54 + 99,5 + 167,9 + 174,9 = 1081,5.
2. Πλήθος των δεδομένων: 12.
3. Άρα η μέση τιμή είναι:

$$\frac{1081{,}5}{12} = 1081{,}5 : 12 = 90{,}125 \text{ χιλ.}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση μηνιαία βροχόπτωση στα Ιωάννινα είναι σχεδόν τριπλάσια από αυτήν της Αθήνας.

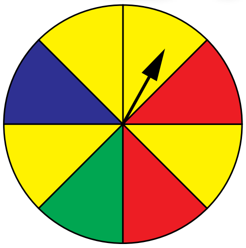
Η μέση τιμή της βροχόπτωσης το καλοκαίρι στα Ιωάννινα είναι περίπου όση είναι η μέση μηνιαία τιμή όλου του έτους για την Αθήνα.



Αναστοχασμός

1. Η μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων είναι πάντα η τιμή ενός από τα δεδομένα;
2. Αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή του ύψους 180 αγοριών Ε΄ δημοτικού, μπορούμε να εκτιμήσουμε το ύψος που έχουν όλα τα αγόρια στην ηλικία αυτή;
3. Αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή της θερμοκρασίας ενός τόπου σε χρονικό διάστημα 7 ημερών, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή της θερμοκρασίας του ίδιου τόπου και για τις επόμενες 7 ημέρες; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.

Διερεύνηση



Παίζουμε ένα παιχνίδι στο οποίο κερδίζει μόνον όποιος φέρει στον διπλανό τροχό το χρώμα που έχει επιλέξει. Ποιο χρώμα θα διάλεγες για εσένα;

α. Κάνουμε προβλέψεις για το πείραμα τύχης.

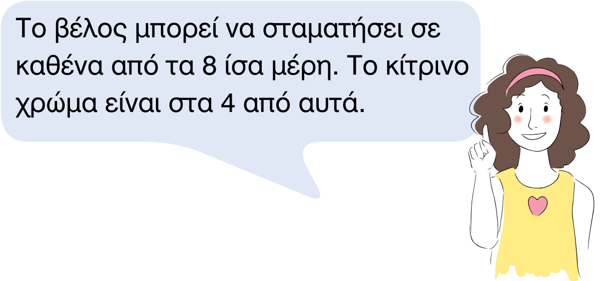
Συζητάμε πόσο πιθανό είναι να έρθει καθένα από τα χρώματα, αν περιστρέψουμε τον τροχό.

β. Κάνουμε το πείραμα τύχης.
Χωριζόμαστε σε ομάδες και χρησιμοποιούμε τον τροχό από το παράρτημα. Περιστρέφουμε τον τροχό 20 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματά μας.

1. Παρατηρούμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος. Ποιο χρώμα είναι πιο πιθανόν να εμφανίζεται κάθε φορά;

   ………………………………………………………………

Αποτελέσματα της ομάδας μου		
Χρώμα	**Καταμέτρηση με γραμμές**	**Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό**
πράσινο		
κίτρινο		
μπλε		
κόκκινο		



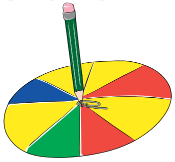
2. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί κόκκινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

   ………………………………………………………………………………………………

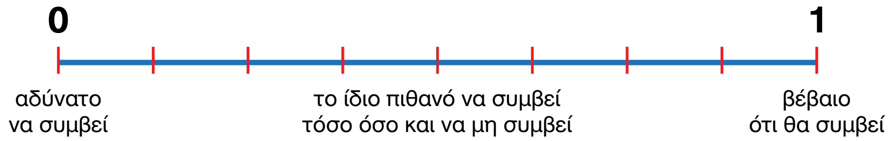
3. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί πράσινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

   ………………………………………………………………………………………………

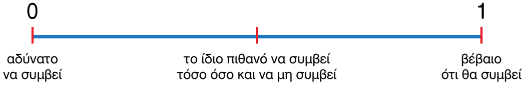
γ. Γράφουμε με κλάσμα την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος, όταν περιστρέφουμε τον τροχό.
Πιθανότητα να έρθει: κίτρινο = $\frac{\square}{\square}$, κόκκινο = $\frac{\square}{\square}$, μπλε = $\frac{\square}{\square}$, πράσινο = $\frac{\square}{\square}$



δ. Τοποθετούμε τα κλάσματα στην παρακάτω κλίμακα.



Συγκρίνουμε τις πιθανότητες που υπολογίσαμε, με τον τρόπο αυτό, με τις αρχικές μας προβλέψεις.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Ένα πείραμα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του, όταν το κάνουμε, ονομάζεται **πείραμα τύχης.**	Αν ρίξουμε ένα ζάρι 1000 φορές, δεν μπορούμε να προβλέψουμε πόσες φορές θα εμφανιστεί κάθε αριθμός.
Σε ένα πείραμα τύχης, το πόσο πιθανό είναι να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα λέγεται **πιθανότητα** και μπορεί να υπολογιστεί με ένα κλάσμα: $\textbf{πιθανότητα} = \dfrac{\textbf{πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\textbf{πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων}}$	Η πιθανότητα να έρθει 3, αν ρίξουμε ένα ζάρι είναι: $\dfrac{\text{πόσες φορές το 3 στο ζάρι}}{\text{πλήθος των αριθμών στο ζάρι}} = \dfrac{1}{6}.$
Η πιθανότητα να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί με μια κλίμακα που εκτείνεται από το **αδύνατο να συμβεί** έως το **βέβαιο ότι θα συμβεί.** Η μέση της κλίμακας αντιπροσωπεύει αυτό που είναι **πιθανό τόσο να συμβεί, όσο και να μην συμβεί.**	Όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6). Το πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων είναι 1 (το 3 εμφανίζεται μία φορά στα 6 αποτελέσματα). 

Εφαρμογή Εκφράζω την πιθανότητα με κλάσμα

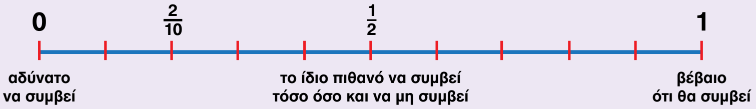
Μέσα σε μια τσάντα βρίσκονται ανακατεμένες ομοιόμορφες μπάλες. Οι 5 είναι κόκκινες, οι 2 κίτρινες και 3 είναι μπλε.
α. Υπολογίζουμε την πιθανότητα να τραβήξουμε:

1. μια κίτρινη μπάλα: $\dfrac{\text{πλήθος από κίτρινες μπάλες}}{\text{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{2}{10}$
2. μια κόκκινη μπάλα: $\dfrac{\text{πλήθος από κόκκινες μπάλες}}{\text{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ (μισές – μισές πιθανότητες).
3. μια πράσινη μπάλα: $\dfrac{\text{πλήθος από πράσινες μπάλες}}{\text{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{0}{10} = 0$. Η πιθανότητα είναι 0, δηλαδή είναι αδύνατο να συμβεί, γιατί δεν υπάρχει πράσινη μπάλα.
4. μια κόκκινη ή κίτρινη ή μπλε μπάλα:

$$\dfrac{\text{πλήθος από κόκκινες και κίτρινες και μπλε μπάλες}}{\text{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{(5+2+3)}{10} = \dfrac{10}{10} = 1.$$

Η πιθανότητα είναι 1, δηλαδή είναι βέβαιο ότι θα συμβεί, γιατί οι μπάλες στην τσάντα είναι μόνο κόκκινες, κίτρινες και μπλε.

β. Τοποθετούμε τις παραπάνω πιθανότητες στην παρακάτω αριθμογραμμή.



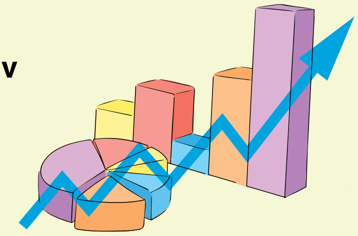
Αναστοχασμός

1. Ο Νίκος ισχυρίζεται ότι σε ένα παιχνίδι τύχης με αριθμούς από το 1 έως το 20, το 17 είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί, επειδή είναι ο τυχερός του αριθμός. Έχει δίκιο;
2. Ρίχνουμε ένα ζάρι 10.000 φορές. Πόσες περίπου φορές θα έρθει ο αριθμός 2;

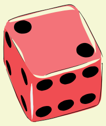
επαναληπτικό 4

Κεφάλαια 22 - 24

Στα κεφάλαια αυτά έμαθα:



- ✓ **να διατυπώνω ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα,**
- ✓ **να συλλέγω δεδομένα μέσω ερευνών, μετρήσεων ή πειραμάτων,**
- ✓ **να οργανώνω τα δεδομένα σε πίνακες,**
- ✓ **να αναπαριστάνω τα δεδομένα σε διαγράμματα,**
- ✓ **να εξηγώ ένα διάγραμμα και να επιχειρηματολογώ με βάση τα δεδομένα,**
- ✓ **να βρίσκω τη μέση τιμή,**
- ✓ **να διατυπώνω προβλέψεις και να καταγράφω τη συχνότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος κατά την επανάληψη ενός πειράματος τύχης,**
- ✓ **να υπολογίζω την πιθανότητα ενός αποτελέσματος με κλάσμα.**



1ο Πρόβλημα

Τα παιδιά της Ε΄ και της ΣΤ΄ τάξης έκαναν μια έρευνα για το ποιο άθλημα τους αρέσει πιο πολύ. Κάθε παιδί διάλεξε μόνο ένα άθλημα. Συμβουλευόμαστε τον πίνακα των δεδομένων και οργανώνουμε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων. Αναπαριστάνουμε τα δεδομένα σε ένα ραβδόγραμμα.

Αγαπημένο άθλημα									
Π	**Π**	**Π**	**Σ**	**Μ**	**Μ**	**Β**	**Μ**	**Σ**	**Π**
Β	**Σ**	**Σ**	**Μ**	**Κ**	**Κ**	**Σ**	**ΠΠ**	**Μ**	**Β**
Π	**Κ**	**Σ**	**Β**	**Β**	**Σ**	**Β**	**Μ**	**Π**	**Π**
Ποδόσφαιρο: Π, Μπάσκετ: Μ, Βόλεϊ: Β, Κολύμβηση: Κ, Πινγκ Πονγκ: ΠΠ, Στίβος: Σ									

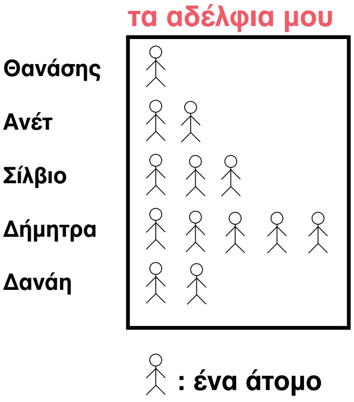
1. Πίνακας συχνοτήτων

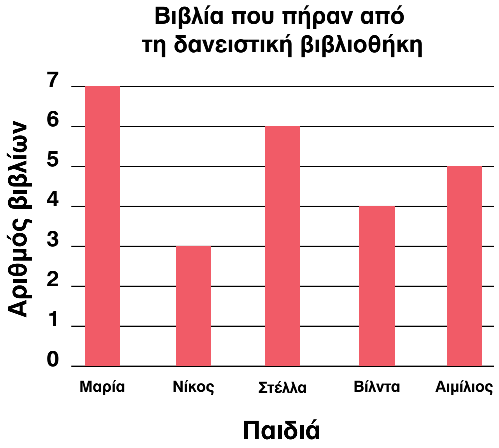
Άθλημα	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό
Ποδόσφαιρο		
Μπάσκετ		
Βόλεϊ		
Κολύμβηση		
Πινγκ Πονγκ		
Στίβος		

2. Ραβδόγραμμα

2ο Πρόβλημα

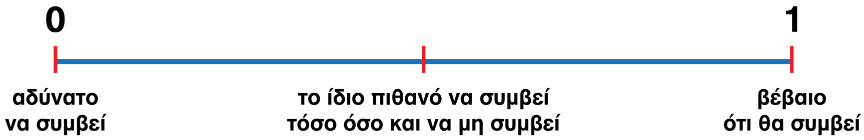
Βρίσκουμε τη μέση τιμή των δεδομένων που παρουσιάζονται σε κάθε διάγραμμα.





3ο Πρόβλημα

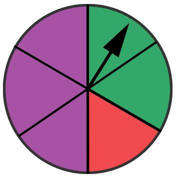
Χρησιμοποιούμε την παρακάτω κλίμακα, για να εκφράσουμε πόσο πιθανό είναι να προκύψουν τα ακόλουθα χρώματα, αν περιστρέψουμε τον τροχό.



α. Μοβ: ....

β. Κίτρινο: ...., **γ.** Ποτέ πράσινο: ....

δ. Κόκκινο ή πράσινο ή μοβ: ....



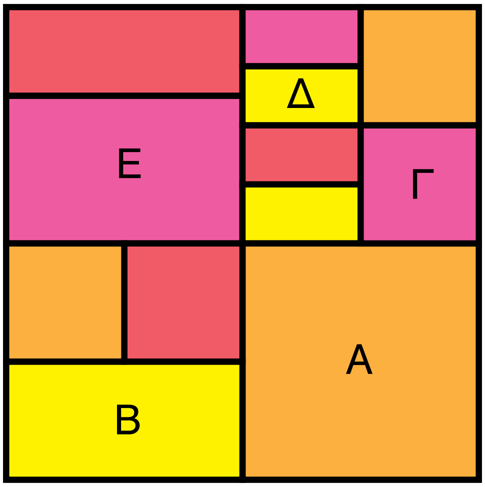
4ο Πρόβλημα

Μέσα σε ένα μαύρο κουτί έχουμε 1 κόκκινη, 1 πράσινη και 1 άσπρη μπάλα. Τραβάμε μία μπάλα, καταγράφουμε το αποτέλεσμα στον πίνακα συχνοτήτων και τοποθετούμε ξανά την μπάλα στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα τύχης συνολικά 30 φορές.

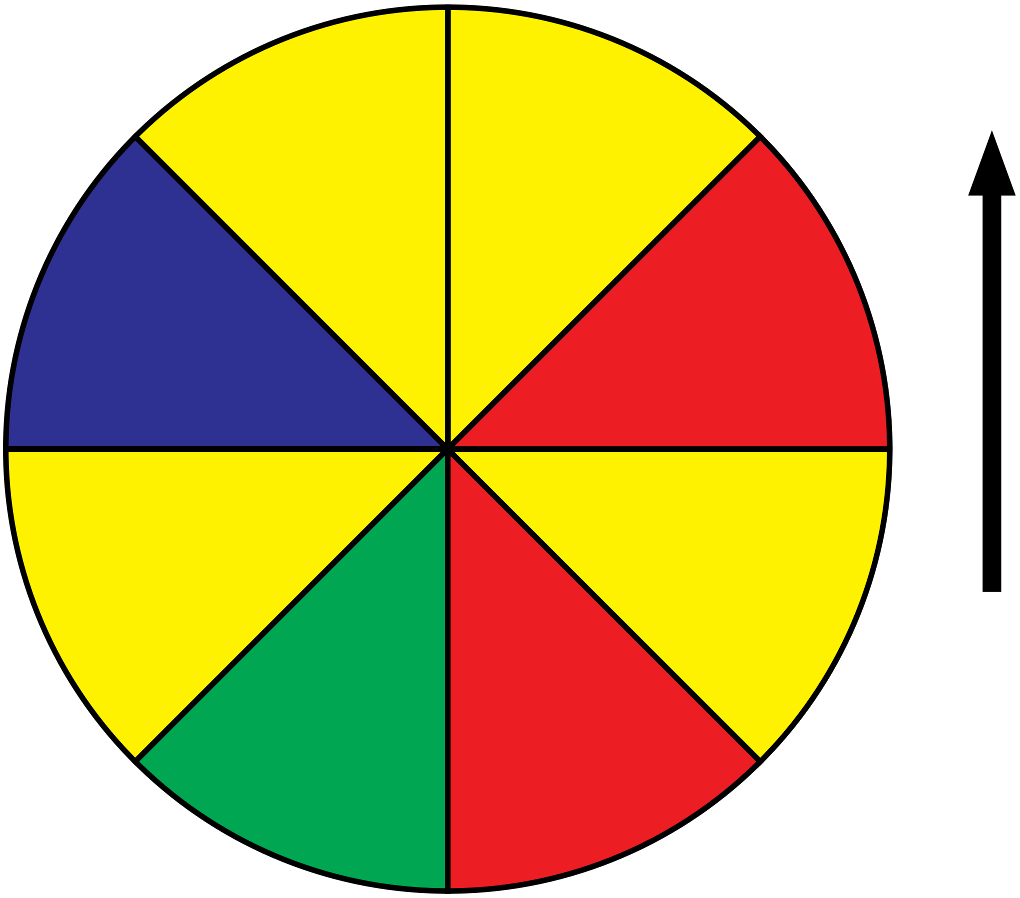
1. Πριν ξεκινήσουμε το πείραμα, προβλέπουμε πόσες φορές θα τραβήξουμε μια άσπρη μπάλα.
   ....
2. Κάνουμε το πείραμα και αναπαριστάνουμε τα αποτελέσματα του πειράματος σε εικονόγραμμα και ραβδόγραμμα.
3. Συγκρίνουμε την πρόβλεψή μας με τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης.

	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης
κόκκινες μπάλες		
άσπρες μπάλες		
πράσινες μπάλες		

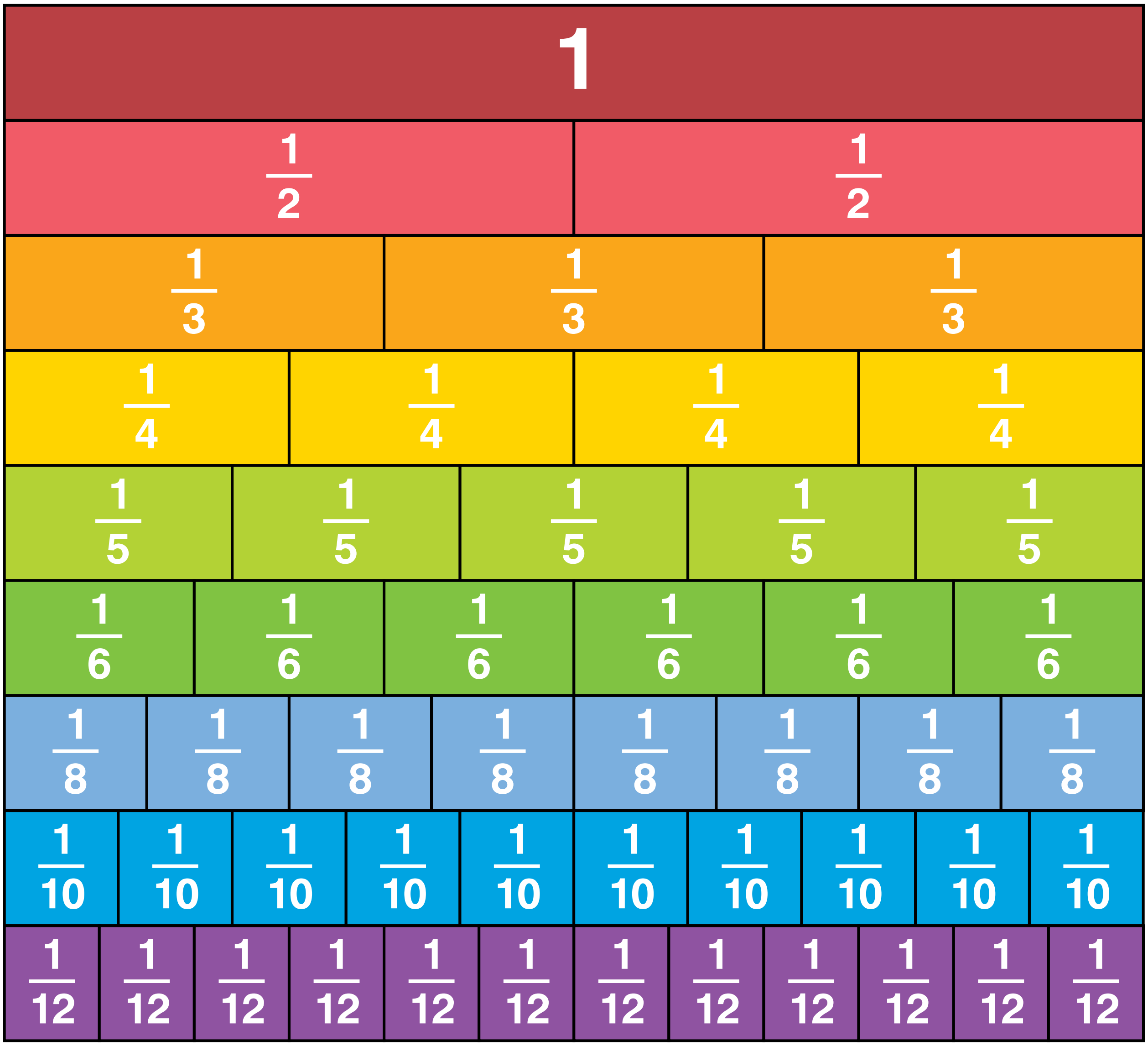
Κεφάλαιο 13



Κεφάλαιο 24

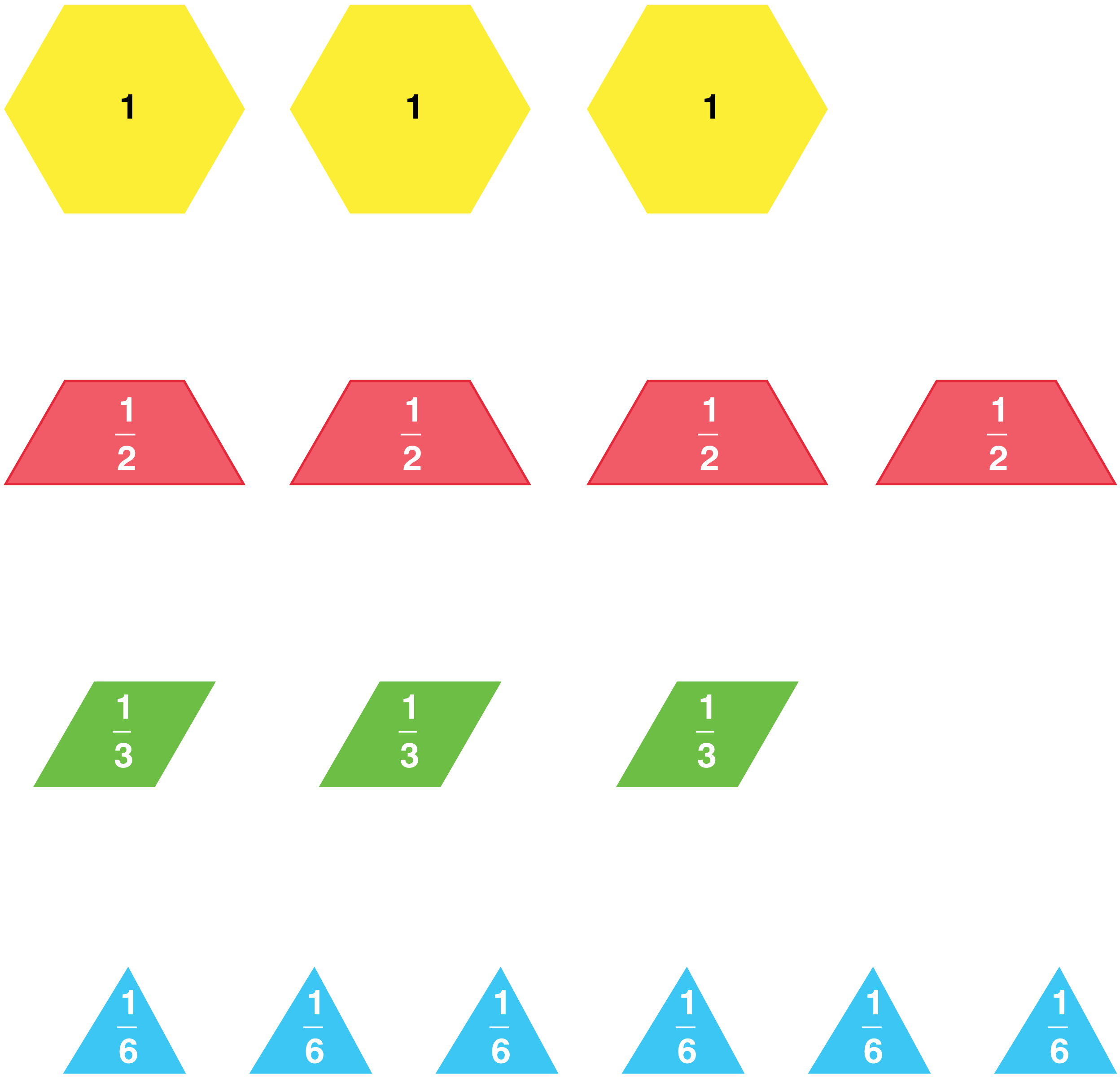


Προτεινόμενα κεφάλαια: 16, 18, 20



1											
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$										
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$									
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$								
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$							
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$						
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$				
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$		
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Κεφάλαιο 19


1
1
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$

Κεφάλαιο 19

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Κωδικός Βιβλίου: 0-10-0209
ISBN Set 978-960-06-5659-6
Τ.Α΄ 978-960-06-5661-9

ΙΤΥΕ
ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
ινστιτούτο τεχνολογίας
υπολογιστών & εκδόσεων

(01) 000000 0 10 0209 6