ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ
Μαθηματικά

Β΄ ΕΠΑ.Λ.

ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ομάδα συγγραφής:
Δρ. Θεόδωρος Αποστολόπουλος, Καθηγητής Τ.Ε.Ι.
Γεώργιος Καΐτσας, Εκπαιδευτικός ΠΕ3, Μαθηματικός

Ομάδα κρίσης:
Βασίλειος Φίλιος, Δρ. Οικονομολόγος
Ελένη Νικολοπούλου, Εκπαιδευτικός ΠΕ9, Οικονομολόγος
Σωτήριος Κανελλόπουλος, Εκπαιδευτικός ΠΕ9, Οικονομολόγος

Γλωσσική επιμέλεια:
Μαρία Πολυζώη, Φιλόλογος

Συντονιστής:
Γεώργιος Καΐτσας, Εκπαιδευτικός ΠΕ3, Μαθηματικός

Ηλεκτρονική Σελιδοποίηση - Διαχωρισμοί:
Γιώργιος Παπανικολάου Α.Β.Ε.Ε., Ασκληπιού 80.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δρ. Θεόδωρος Αποστολόπουλος, Καθηγητής Τ.Ε.Ι.

Γεώργιος Καΐτσας, Εκπαιδευτικός ΠΕ3, Μαθηματικός

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΕΠΑ.Λ.

ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα μαθήματα που διδάσκονται στην Α΄τάξη του Α΄Κύκλου των Τεχνικών Επαγγελματικών Εκπαιδευτηρίων (Τ.Ε.Ε.) περιλαμβάνεται και το μάθημα: **«Οικονομικά Μαθηματικά».**

Τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών, ο οποίος ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων που δημιουργούνται κυρίως στις τραπεζικές και γενικά στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές. Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι το **χρήμα** και ο **τόκος.**

Η έκδοση αυτού του βιβλίου έχει διδακτικό χαρακτήρα. Σκοπός του είναι να εφοδιάσει τους απόφοιτους των Τ.Ε.Ε. (Τομέας Οικονομίας και Διοίκησης) με τις βασικές γνώσεις των Μαθηματικών που απαιτούνται στις τραπεζικές και γενικά στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές, ώστε να δημιουργηθούν οι προϋποθέσεις για την ένταξή τους στην αγορά εργασίας ή τη συνέχιση των οικονομικών σπουδών τους στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Το βιβλίο διαιρέθηκε σε τρία μέρη:

Το **Πρώτο Μέρος** περιλαμβάνει τις βασικές μεθόδους της Πρακτικής Αριθμητικής (μέθοδοι των τριών, ποσοστά, μερισμός σε μέρη ανάλογα κ.τ.λ.), τις οποίες συναντάμε συχνά στην καθημερινή πρακτική.

Το **Δεύτερο Μέρος** περιλαμβάνει τις Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις και αναφέρεται στη **Θεωρία** και στην **Τραπεζική Πρακτική** σε ζητήματα **Απλού Τόκου,** στις σύγχρονες μορφές καταθέσεων, στη διαδικασία των **Προεξοφλήσεων Συναλλαγματικών** και στην **Αντικατάσταση Γραμματίων.**

Το **Τρίτο Μέρος** περιλαμβάνει τις **Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις,** και αναφέρεται στη θεωρία και στα προβλήματα του **Ανατοκισμού,** των **Ραντών** και των **Δανείων.**

Στο τέλος του βιβλίου ενσωματώσαμε **Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεολυσίων,** οι οποίοι είναι απαραίτητοι για τη λύση των προβλημάτων του **Ανατοκισμού,** των **Ραντών** και των **Δανείων.**

Για την πλήρη κατανόηση, αφομοίωση και εμπέδωση κάθε ζητήματος, παραθέσαμε πολλά παραδείγματα και σχήματα. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει σημαντικός αριθμός προβλημάτων, στα οποία δίνεται η απάντηση, ώστε ο μαθητής να επαληθεύει τη λύση κάθε προβλήματος.

Οι συγγραφείς θεωρούν υποχρέωσή τους να ευχαριστήσουν τους κριτές Κυρία **Νικολοπούλου Ελένη** και τους Κυρίους **Φίλιο Βασίλειο** και **Καντελλόπουλο Σωτήριο,** καθώς και τη φιλόλογο Κυρία **Παπαζώη Μαρία,** για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και τη συμβολή τους στην έκδοση αυτού του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΜΕ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ
ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
ΡΑΝΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
ΔΑΝΕΙΑ

Για την υποβοήθηση της αναγνωσιμότητας, εκτός από σχήματα, πίνακες και διάφορα πλαίσια, έχουν χρησιμοποιηθεί και αρκετά εικονίδια τα οποία χαρακτηρίζουν το μέρος του κειμένου που συνοδεύουν.

Τα εικονίδια αυτά και η σημασία τους είναι:

Ορισμός - Τύπος

Παρατηρήσεις - Σημειώσεις

Προβλήματα

Χρήσιμη Πληροφορία

Λέξεις Κλειδιά

Βιβλιογραφία

Ερωτήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Διάκριση των Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στα Θεωρητικά και στα Εφαρμοσμένα.

Θεωρητικά Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης, οι οποίοι ασχολούνται με τη θεωρητική θεμελίωση, διερεύνηση και απόδειξη των νόμων (αξιωμάτων), στους οποίους στηρίζεται η Μαθηματική Επιστήμη.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων των διάφορων επιστημών (Αστρονομία, Μετεωρολογία, Οικονομική, Οικονομετρία, Στατιστική, Φυσική, κ.τ.λ.), οι οποίες θεμελιώνονται όχι μόνο στους δικούς τους νόμους αλλά και στους νόμους (αξιώματα) της Μαθηματικής Επιστήμης. Ένας από τους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είναι τα **Οικονομικά Μαθηματικά**.

1.2. Οικονομικά Μαθηματικά. Έννοια και διαίρεση αυτών

Συνέπεια της ευρύτατης χρήσης των Μαθηματικών στην Οικονομική Επιστήμη ήταν, πριν από λίγα χρόνια, η πλήρης διάσταση απόψεων σχετικά με τα όρια των **Οικονομικών Μαθηματικών**, της **Μαθηματικής**

Οικονομικής, των **Γενικών Μαθηματικών για Οικονομολόγους** και της **Οικονομετρίας**. Σήμερα τέθηκαν κάποια σύνορα, τα οποία, όσο ασαφή και αμφιλεγόμενα και αν είναι, διευκολύνουν την ταξινόμηση της ύλης των Μαθηματικών των Οικονομικών Σχολών. Έτσι διακρίνουμε: **Μαθηματικά για Οικονομολόγους** (Mathematics for Economists) και **Οικονομικά Μαθηματικά** (Mathematics of Finance).

Τα **Μαθηματικά για Οικονομολόγους** είναι Μαθηματικά γι' αυτούς που σπουδάζουν Οικονομικές Επιστήμες. Ο αντικειμενικός σκοπός των Μαθηματικών για Οικονομολόγους δεν είναι η σπουδή καθαρών (pure) Μαθηματικών αλλά η σπουδή της ποσοτικής μεταβολής των οικονομικών μεγεθών και η τεχνική της εξεύρεσης παραδεκτών λύσεων διάφορων προβλημάτων της Οικονομικής Επιστήμης.

Τα **Οικονομικά Μαθηματικά** είναι κλάδος των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών** και αποτελούν τη μαθηματική ανάλυση, η οποία εφαρμόζεται στα ζητήματα, στα οποία υπεισέρχεται ως βασικός παράγοντας το **χρήμα**.

Τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι τα **Μαθηματικά των Οικονομικών Πράξεων** και υποδιαιρούνται σε δύο κλάδους:

α) Ο πρώτος κλάδος ασχολείται με προβλήματα, τα οποία δημιουργούνται στις τραπεζικές και χρηματοοικονομικές συναλλαγές. Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι το **χρήμα** και ο **τόκος**. Τα Μαθηματικά που ασχολούνται με τέτοια προβλήματα, ονομάζονται **Τραπεζικά Μαθηματικά** ή **Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά** (Mathematics of Finance).

β) Ο δεύτερος κλάδος ασχολείται με τα προβλήματα των διάφορων ασφαλιστικών οργανισμών και ονομάζονται **Ασφαλιστικά ή Αναλογιστικά Μαθηματικά** (Actuarial Mathematics). Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι ο **τόκος** και η πιθανότητα πραγματοποιήσεως ορισμένων γεγονότων.

1.3. Θεμελιώδεις οικονομικές έννοιες

Είπαμε πιο πάνω ότι τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, ο οποίος ασχολείται με τη λύση των προβλημάτων στα οποία ο βασικότερος παράγοντας είναι το **χρήμα.** Συνεπώς, είναι απαραίτητο να καθοριστεί η έννοια και ο ορισμός του χρήματος.

Είναι γεγονός ότι οι συναλλαγές των πρωτόγονων ανθρώπων είχαν τη μορφή του λεγόμενου **αντιπραγματισμού** (= ανταλλαγή σε είδος). Π.χ. ο Α έδινε στο Β τυρί, πρόβατο και έπαιρνε ελαιόλαδο, σιτάρι κ.τ.λ. Στην πρωτόγονη, λοιπόν, οικονομία οι άνθρωποι χρησιμοποίησαν ως ανταλλακτικά μέσα διάφορα αγαθά όπως το σιτάρι, τα δέρματα, το αλάτι, τα ζώα, τα κοχύλια, το ρύζι κ.ά. Όλα όμως αυτά τα αγαθά, εκτός του ότι αλλοιώνονταν με την πάροδο του χρόνου, ήταν ογκώδη και δε μεταφέρονταν εύκολα γι' αυτό εγκαταλείφθηκαν σιγά-σιγά όλα και οι άνθρωποι στράφηκαν προς τα διάφορα μέταλλα και κυρίως στα πολύτιμα μέταλλα: τον άργυρο και το χρυσό.

Με την πάροδο όμως του χρόνου και την εξέλιξη του πολιτισμού, οι άνθρωποι επινόησαν ένα κοινό ανταλλακτικό μέσο όλων των αγαθών και του έδωσαν το όνομα **χρήμα.** Στη σύγχρονη ανταλλακτική οικονομία, το χρήμα εμφανίζεται με διάφορες μορφές. Οι οικονομολόγοι δεν έχουν συμφωνήσει σε μια κοινή ορολογία για τον ορισμό του χρήματος. Θα αναφέρουμε μερικούς σχετικούς ορισμούς.

Ορισμοί του χρήματος. Με τη στενή έννοια του όρου, **Χρήμα (Money) είναι το γενικό ανταλλακτικό μέσο και το κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών και υπηρεσιών.** Ειδικότερα:

(i) Το σύνολο των χαρτονομισμάτων και κερμάτων που βρίσκονται σε κυκλοφορία ονομάζεται νομισματική κυκλοφορία ή «ζεστό χρήμα» και συμβολίζεται με το $\mathbf{M_o}$ **= Χαρτονομίσματα + Κέρματα.**

(ii) Αν στο M_o προστεθούν οι καταθέσεις όψεως των ιδιωτών στις τράπεζες, τότε το άθροισμα που προκύπτει αποτελεί την προσφορά χρήματος με το στενό ορισμό της M_1. Δηλαδή:

$\mathbf{M_1}$ **= Χαρτονομίσματα + Κέρματα + Καταθέσεις Όψεως**

(iii) Αν στην ποσότητα του χρήματος M_1 προστεθούν οι Καταθέσεις Ταμιευτηρίου και Προθεσμίας των ιδιωτών, τα Repos καθώς και τα Τραπεζικά Ομόλογα, το προκύπτον άθροισμα αποτελεί την προσφορά χρήματος που συμβολίζεται με το M_3. Δηλαδή:

$M_3 = M_1$ + Καταθέσεις Ταμιευτ. και Προθεσμίας + Repos +
+ Τραπεζικά Ομόλογα

(iv) Αν, τέλος, στο M_3 προσθέσουμε τα Έντοκα Γραμμάτια του Δημοσίου και τα Ομόλογα του Δημοσίου, που έχουν διάρκεια μέχρι και ενός έτους, τότε προκύπτει ένα ακόμη χρηματικό μέγεθος, που συμβολίζεται με το M_4. Δηλαδή:

$M_4 = M_3$ + Έντοκα Γραμμάτια + Ομόλογα Δημοσίου

Το κοινό μέτρο, με το οποίο μετριέται η αξία όλων των αγαθών, ονομάζεται νομισματική μονάδα. Κάθε χώρα έχει τη δική της νομισματική μονάδα. Η Ελλάδα το Ευρώ, οι Η.Π.Α. το Δολλάριο ($), η Γερμανία το Ευρώ, η Αγγλία τη Λίρα (£), η Γαλλία το Ευρώ, η Ιταλία το Ευρώ, η Ιαπωνία το Γιέν (Yen) κτλ. Ο Πίνακας 1.1 περιέχει τις νομισματικές μονάδες (με τις υποδιαιρέσεις τους) διαφόρων χωρών του κόσμου.

Από την 1η Ιανουαρίου 2002 τα κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης χρησιμοποιούν τη νέα νομισματική μονάδα, που ονομάζεται **EURO, ΕΥΡΩ** (Γιούρο, Εύρω ή Ευρώ).

Πίνακας 1.1
Νομισματικές μονάδες διαφόρων χωρών

Χώρες	Ονομασία Νομίσματος	Υποδιαιρέσεις
Αίγυπτος	Λίρα Αιγύπτου (E. Pound)	100 Πιάστρες (Piastres)
Αργεντινή	Πέζο (Peso)	100 Σεντάβος (Centavos)
Αυστραλία	Δολλάριο (Austr. Dollar)	100 Σέντς (Cents)
Αυστρία	Σελλίνι (Shelling)	100 Γκρόσεν (Groschen)
Βέλγιο	Ευρώ	100 Λεπτά
Βραζιλία	Κρουζέϊρο (Cruseiro)	100 Σεντάβος (Centavos)
Γαλλία	Ευρώ	100 Λεπτά
Γερμανία	Ευρώ	100 Λεπτά
Γιουγκοσλαβία	Δηνάριο (Yug. Dinar)	100 Πάρας (Paras)
Δανία	Κορώνα Δ. (D. krone)	100 Όρε (Ore)
Ελβετία	Ελβ. Φράγκο (S. Franc)	100 Σαντίμ (Centimes)
Ηνωμένο Βασίλειο	Λίρα Αγγλίας (U.K. Pound)	100 Πέννες (New Pence)
Η.Π.Α	Δολλάριο (US. Dollar)	100 Σέντς (Cents)
Ιαπωνία	Γιέν (Yen)	100 Σέν (Sen)
Ινδία	Ρουπία (Rupee)	100 Πάιζ (Paise)
Ιράν	Ριάλ (Rial)	100 Δηνάρια (Dinars)
Ισπανία	Ευρώ	100 Λεπτά
Ισραήλ	Λίρα Ισραήλ (Isr. Pound)	100 Αγκορό (Agorot)
Ιταλία	Ευρώ	100 Λεπτά
Καναδάς	Δολλάριο Καν. (Can. Dollar)	100 Σέντς (Cents)
Κουβέιτ	Δηνάριο (K. Dinar)	10 Ντιρχάμ (Dirhams)
Κύπρος	Λίρα Κύπρου (C. Pound)	100 Σέντς (Cents)
Λίβανος	Λίρα Λιβ. (Leb. Pound)	100 Πιάστρες (Piastres)
Μεξικό	Πέζο (Peso)	100 Σεντάβος (Centavos)
Νορβηγία	Κορώνα Νορβ. (Nor. Krone)	100 Όρε (Ore)
Ολλανδία	Ευρώ	100 Λεπτά
Πορτογαλλία	Ευρώ	100 Λεπτά
Σαουδική Αραβία	Ριάλ (Rial)	100 Χαλάλας (Halalas)
Σοβιετική Ένωση	Ρούβλι (Rouble)	100 Κόπεκς (Kopecks)
Σουηδία	Κορώνα Σουηδ. (S. Krona)	100 Όρε (Ore)
Τουρκία	Λίρα Τουρκίας (Turk. Lira)	100 Κουρούς (Kurus)
Χόνγκ Κόνγκ	Δολλάριο Χ.Κ. (H.K. Dollar)	100 Σέντς (Cents)
Φινλανδία	Ευρώ	100 Λεπτά

Από τις αρχές του 1999 και ως το 2002 το **ΕΥΡΩ (EURO)** ήταν νόμισμα λογιστικό. Εχρησιμοποιείτο δηλαδή για καταθέσεις, για μεταφορά κεφαλαίων και για αγορά με επιταγές ή με πιστωτικές κάρτες. Στη μεταβατική αυτή περίοδο το Ευρώ θα χρησιμοποιείται παράλληλα με τα εθνικά νομίσματα.

Το **Ευρώ** κυκλοφορεί σε χαρτονομίσματα των 5, 10, 20, 50, 100, 200 και 500 ευρώ και σε κέρματα του ενός και των δύο ευρώ και σε υποδιαιρέσεις ευροσέντ.

Στα χαρτονομίσματα του ευρώ, απεικονίζονται δύο κυρίως θέματα: Το ένα αναφέρεται στις **«Εποχές και τους Ρυθμούς της Ευρώπης»** και αντανακλά την πολιτιστική κληρονομιά της, ενώ το άλλο είναι ένα σύγχρονο ή αφηρημένο σχέδιο. Όσον αφορά το πρώτο θέμα, σε κάθε χαρτονόμισμα διαφορετικής αξίας παρουσιάζονται οι δεσπόζοντες αρχιτεκτονικοί ρυθμοί κατά τη διάρκεια επτά (7) περιόδων της πολιτιστικής ιστορίας της Ευρώπης: Κλασική, Ρωμανική, Γοτθική, Αναγέννηση, Μπαρόκ και Ροκοκό. Οι ρυθμοί αυτοί αντιστοιχούν στα χαρτονομίσματα των 5, 10, 20, 50, 200 και 500 Ευρώ. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε τρία βασικά αρχιτεκτονικά στοιχεία: Παράθυρα, πύλες και γέφυρες. Οι παραστάσεις αυτές επελέγησαν, διότι παρουσιάζουν διαχρονικά την ανάπτυξης τέχνης, της τεχνικής και της επικοινωνίας στην Ευρώπη.

Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στο μέγεθος των χαρτονομισμάτων, τα οποία είναι διαφορετικών διαστάσεων -όσο αυξάνεται η αξία τους τόσο μεγαλώνουν και οι διαστάσεις τους- ώστε να αναγνωρίζονται εύκολα από άτομα που έχουν προβλήματα όρασης. Στις δύο πλευρές των χαρτονομισμάτων, στην ίδια θέση, αναγράφεται με μεγάλους και ευανάγνωστους αριθμούς η ονομαστική αξία τους. Κάτω από τους αριθμούς αναγράφεται η ονομασία του χαρτονομίσματος, τόσο με λατινικά στοιχεία όσο και με ελληνικά στοιχεία (EURO-ΕΥΡΩ). Τα ευροχαρτονομίσματα και τα ευροκέρματα (βλ Εικόνα 1.1) έχουν τεθεί σε κυκλοφορία από την 1η Ιανουαρίου του 2002 στις παρακάτω υποδιαιρέσεις (Βλέπε Πίνακα 1.2). Το ισότιμο ποσό σε δραχμές προσδιορίστηκε με μια ισοτιμία: 1 ευρώ = 341 δρχ.

(Αμετάκλητη ισοτιμία: 1 Ευρώ = 340,750 δρχ).

Εικόνα 1.1
Ευροχαρτονομίσματα και Ευροκέρματα

Πίνακας 1.2

Ευροκέρματα		Ευροχαρτονομίσματα	
Ευρώ	**Δραχμικό ισότιμό**	**Ευρώ**	**Δραχμικό ισότιμό**
1,00	341	5	1.704
2,00	682	10	3.408
0,50	170	20	6.815
0,20	68	50	17.038
0,10	34	100	34.075
0,05	17	200	68.150
0,02	7	500	170.375
0,01	3		

(Οι μετατροπές και στρογγυλοποιήσεις γίνονται σύμφωνα με τον κανονισμό ΕΚ 1103/97, όπως ισχύει, και το νόμο 2842/2000)

Για τη μετατροπή από **ευρώ** σε δραχμές το χρηματικό ποσό του ευρώ θα πολλαπλασιάζεται με συντελεστή μετατροπής του εθνικού νομίσματος (δραχμές), π.χ., για να μετατρέψουμε 100 **ευρώ** σε δραχμές, πολλαπλασιάζουμε με το 340,750 δρχ = 1 ευρώ. Δηλαδή: 340,750 x 100 = 34.075 δρχ. ή, αντίστροφα, για γα μετατρέψουμε δραχμές σε ευρώ, διαιρούμε με το 340,750. Π.χ. 34.075 δρχ.: 340,750 = 100 ευρώ.

Χρονοδιάγραμμα μετάβασης στο ευρώ. Τα κυριότερα χρονικά σημεία της εισαγωγής του ευρώ είναι τα εξής:

1η Ιανουαρίου 1999: Το Ευρωπαϊκό Συμβούλιο καθόρισε αμετάκλητα τις συναλλαγματικές ισοτιμίες των νομισμάτων των χωρών σε σχέση με το **ευρώ.** Το **ευρώ** καθίσταται αυτοτελές νόμισμα, ενώ το ECU καταργείται. Τίθεται σε λειτουργία ο νέος Μηχανισμός Συναλλαγματικών Ισοτιμιών (Μ.Σ.Ι.). Οι τίτλοι του Δημοσίου (Έντοκα Γραμμάτια και Ομόλογα) εκδίδονται μόνο σε **ευρώ.** Εφαρμογή ενιαίας νομισματικής πολιτικής στη ζώνη του **ευρώ** και διεξαγωγή συναλλαγματικών πράξεων σε **ευρώ.**

1η Ιανουαρίου 2002: Το Ευρωπαϊκό Σύστημα Κεντρικών Τραπεζών (ΕΣΚΤ) θέτει σε κυκλοφορία τα τραπεζογραμμάτια και τα κέρματα σε ευρώ και αρχίζει η απόσυρση των εθνικών νομισμάτων. Η Τράπεζα της Ελλάδος, από την 1η Ιανουαρίου 2002 έως την 30ή Ιουνίου 2002 θα αποσύρει 650 τόνους χαρτονομίσματα και 6.000 τόνους κέρματα. Τα κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε.Ε.) εκδίδουν τους νέους τίτλους δημόσιου χρέους σε ευρώ.

1η Ιουλίου 2002: Κατάργηση του νομισματικού καθεστώτος των εθνικών χαρτονομισμάτων και κερμάτων. Οριστική απόσυρση των εθνικών χαρτονομισμάτων και κερμάτων.

1.4. Βασικοί ορισμοί

Αν θεωρήσουμε ένα σύνολο νομισμάτων μονάδων, τότε έχουμε την έννοια του χρηματικού ποσού. Ας υποθέσουμε ότι ο Α (οφειλέτης) δανείζεται από τον Β (δανειστής) ένα χρηματικό ποσό 300€ και μετά από ένα έτος ο Α επιστρέφει στον Β 360€. Δηλαδή ο Α επέστρεψε στον Β τις 300€ και επί πλέον 60€ ως αμοιβή για την εξυπηρέτηση που του έκανε ο Β. Δηλαδή το χρηματικό ποσό των 300€ απέκτησε παραγωγική ικανότητα. Το χρηματικό ποσό, το οποίο όταν δανείζεται ή αποταμιεύεται αποκτά παραγωγική ικανότητα, στα Οικονομικά Μαθηματικά ονομάζεται **Κεφάλαιο.** Ώστε: **Κεφάλαιο (Capital) καλείται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο με το δανεισμό ή την αποταμίευσή του αποκτά παραγωγική ικανότητα.** Κατά συνέπεια, τα χρηματικά ποσά που διατηρούμε στο σπίτι μας για τις τρέχουσες ανάγκες μας ή τα δανείζουμε σε φιλικά ή συγγενικά μας πρόσωπα ή ποσά χρημάτων που είναι κρυμμένα μέσα στη γη δεν είναι κεφάλαια από οικονομική άποψη.

Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο οφειλέτης χρησιμοποιεί το κεφάλαιο του δανειστή ονομάζεται χρόνος. Άρα: **Χρόνος (Time) είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ένα χρηματικό ποσό έχει παραγωγική ικανότητα.** Μονάδα μετρήσεως του χρόνου είναι συνήθως το έτος αλλά και οι υποδιαιρέσεις του έτους: το εξάμηνο, ο μήνας και η ημέρα.

Είναι γεγονός ότι, αν ο Α δανειστεί εντόκως από το Β (για ορισμένο χρόνο) ένα χρηματικό ποσό, ο Α (μαζί με την επιστροφή του χρηματικού ποσού) δίνει στο Β και μια πρόσθετη αμοιβή για τη χρησιμοποίηση του κεφαλαίου που δανείστηκε. Η πρόσθετη αυτή αμοιβή ονομάζεται Τόκος*. Ώστε: **Τόκος (Interest) καλείται η πρόσθετη αμοιβή, την οποία δίνει ο οφειλέτης στο δανειστή, για το δικαίωμα της χρησιμοποίησης ή εκμετάλλευσης του κεφαλαίου του.**

Πιο πάνω είπαμε ότι κάθε χρηματικό ποσό το οποίο δανείζουμε εντόκως αποκτά παραγωγική ικανότητα, δηλαδή μετατρέπεται σε κεφάλαιο. Για να μετρήσουμε την παραγωγική ικανότητα του κεφαλαίου, θεωρούμε τον τόκο που παράγει το κεφάλαιο μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο (π.χ. σε ένα έτος). Ο συντελεστής αυτός, ο οποίος μετράει την παραγωγική ικανότητα του κεφαλαίου, ονομάζεται Επιτόκιο. Ώστε: **Επιτόκιο (Interest rate) είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για μία χρονική περίοδο.**

Στην τραπεζική πρακτική το επιτόκιο εκφράζεται ως ο τόκος των 100€ σε ένα έτος και παριστάνεται με το σύμβολο % (πχ 15%, 20%, κτλ). Όταν λέμε, λόγου χάρη, ότι ο Α δανείζει χρήματα με τόκο 20%, εννοούμε ότι τα 100€ σε ένα έτος του δίνουν τόκο 20€. Το επιτόκιο, ανάλογα με τη χρονική περίοδο (έτος, εξάμηνο, μήνα, κτλ.) στην οποία αναφέρεται, ονομάζεται: ετήσιο, εξαμηνιαίο, μηνιαίο, κτλ. Στα επόμενα θα αναφερόμαστε στο ετήσιο επιτόκιο (εκτός αν το πρόβλημα αναφέρει επιτόκιο άλλης περιόδου), το οποίο θα χρησιμοποιείται με δεκαδική μορφή, δηλαδή αντί του 8% θα γράφουμε 0,08, αντί του 12% θα γράφουμε 0,12 κ.τ.λ.

Συνήθως συναντάμε τρία είδη επιτοκίων:

α) **Προεξοφλητικό επιτόκιο** (Discount rate). Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται κάθε φορά από το Διοικητικό Συμβούλιο της Τράπεζας της Ελλάδος και αποτελεί το βασικό επιτόκιο για τις προεξοφλήσεις των συναλλαγματικών και γραμματίων από τις εμπορικές τράπεζες.

β) **Νόμιμο επιτόκιο.** Η Τράπεζα της Ελλάδος καθορίζει κάθε φορά ένα ανώτατο επιτόκιο, το οποίο δεν μπορεί κανείς να υπερβεί στις συναλλαγές, διαφορετικά χαρακτηρίζεται ως τοκογλύφος και τιμωρείται.

---

* Η λέξη Τόκος παράγεται από το ρήμα τίκτω, το οποίο σημαίνει γεννώ, παράγω.

γ) **Συμβατικό επιτόκιο.** Πολλές φορές το ύψος του επιτοκίου καθορίζεται συμβατικά μεταξύ του δανειστή και του οφειλέτη· το επιτόκιο αυτό ονομάζεται **συμβατικό.**

Αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας

Η διαμόρφωση των εξισώσεων, με βάση τις οποίες θα λυθούν τα διάφορα προβλήματα των Οικονομικών Μαθηματικών, βασίζεται σε ορισμένες αρχές (κανόνες), που ρυθμίζουν τις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές, μία από τις οποίες είναι η αρχή της Οικονομικής ισοδυναμίας, που αναφέρει ότι δύο άνισα χρηματικά ποσά σε ορισμένη χρονική στιγμή θεωρούνται οικονομικώς ισοδύναμα. Π.χ. ο Β δανείζεται από τον Α 300€. Ο Β πρέπει να επιστρέψει στον Α μετά ένα έτος 360€. Κατά τη χρονική στιγμή της καταβολής των 300€ υπάρχει οικονομική ισοδυναμία μεταξύ των 300€ και των 360€, τα οποία θα καταβληθούν μετά ένα έτος. Επίσης, κατά τη χρονική στιγμή της καταβολής των 360€ υπάρχει οικονομική ισοδυναμία μεταξύ των 360€ και των 300€, τα οποία πληρώθηκαν πριν από ένα έτος.

1.5. Απλός και Σύνθετος τόκος. Βραχυπρόθεσμες και Μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε ότι, κάθε χρηματικό ποσό που δανείζουμε ή αποταμιεύουμε αποκτά παραγωγική ικανότητα, δηλαδή παράγει τόκο. Ενδιαφέρον για τις συναλλαγές έχει η στιγμή της παραγωγής του τόκου και η μετατροπή του σε κεφάλαιο. Η μετατροπή του τόκου σε κεφάλαιο συνεπάγεται ενσωμάτωση του τόκου στο κεφάλαιο. Η πράξη της ενσωμάτωσης του τόκου στο κεφάλαιο ονομάζεται **κεφαλαιοποίηση** του τόκου.

Από μαθηματικής άποψης, υπάρχουν τρεις τρόποι παραγωγής του τόκου:

α) Το κεφάλαιο παράγει τόκο στο τέλος του χρονικού διαστήματος [0, n] εντός του οποίου το κεφάλαιο ήταν **παραγωγικό.**

β) Το χρονικό διάστημα [0, n] εντός του οποίου το κεφάλαιο είναι παραγωγικό διαιρείται σε ίσες χρονικές περιόδους. Ο τόκος παράγεται και συγχρόνως κεφαλαιοποιείται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου.

γ) Το διάστημα [0, n] δεχόμαστε ότι είναι διαιρεμένο σε χρονικές περιόδους απειροστού μεγέθους. Στην περίπτωση αυτή δεχόμαστε ότι ο τόκος παράγεται και συγχρόνως κεφαλαιοποιείται ανά πάσα χρονική στιγμή.

Στην τραπεζική πρακτική, ο δανειζόμενος ένα κεφάλαιο για μια ορισμένη χρονική περίοδο πρέπει να επιστρέψει στο δανειστή το κεφάλαιο που δανείστηκε και τον τόκο που έχει ήδη παραχθεί. Είναι όμως ενδεχόμενο, στο τέλος της 1ης, 2ης, 3ης, κ.ο.κ. χρονικής περιόδου, να συμβούν τα εξής:

1) Ο δανειστής να εισπράττει κάθε φορά τους τόκους και να αφήνει το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται και για δεύτερη, τρίτη, κτλ. περίοδο, δηλαδή ο δανειστής να εισπράττει κάθε χρονική περίοδο μόνο τον τόκο και κατά τη λήξη του δανείου να εισπράξει και το κεφάλαιο που δάνεισε. Στην περίπτωση αυτή ο τόκος και το κεφάλαιο, σε όλες τις χρονικές περιόδους, παραμένουν τα ίδια και λέμε ότι το δάνειο έγινε με **Απλό Τόκο** (Simple Interest).

2) Ο δανειστής να αφήσει τον τόκο που έχει ήδη παραχθεί στα χέρια του οφειλέτη, με σκοπό να προστεθεί ο τόκος αυτός στο αρχικό κεφάλαιο (δηλαδή να κεφαλαιοποιηθεί), οπότε από την επόμενη χρονική περίοδο θα φέρει τόκο το αρχικό κεφάλαιο συν τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου. Το ίδιο θα γίνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους έως τη λήξη του δανείου. Στην περίπτωση αυτή, τόσο ο τόκος όσο και το τοκιζόμενο κεφάλαιο αυξάνονται κάθε χρονική περίοδο και λέμε ότι το δάνειο έγινε με **Σύνθετο Τόκο** (Compound Interest) ή με **Ανατοκισμό.**

Κατά τη λύση των διάφορων προβλημάτων των Οικονομικών Μαθηματικών γίνονται ορισμένες αλγεβρικές πράξεις, οι οποίες ονομάζονται **Οικονομικές Πράξεις,** γιατί τα συμπλεκόμενα ποσά (κεφάλαιο, τόκος κτλ.)

είναι οικονομικά μεγέθη. Οι οικονομικές πράξεις διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

1) **Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις**, δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας τριών μηνών ή το πολύ ενός έτους. Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι: Ο **Απλός Τόκος**, η **Προεξόφληση Συναλλαγματικών και Γραμματίων**, η **Αντικατάσταση Γραμματίων, κτλ.**

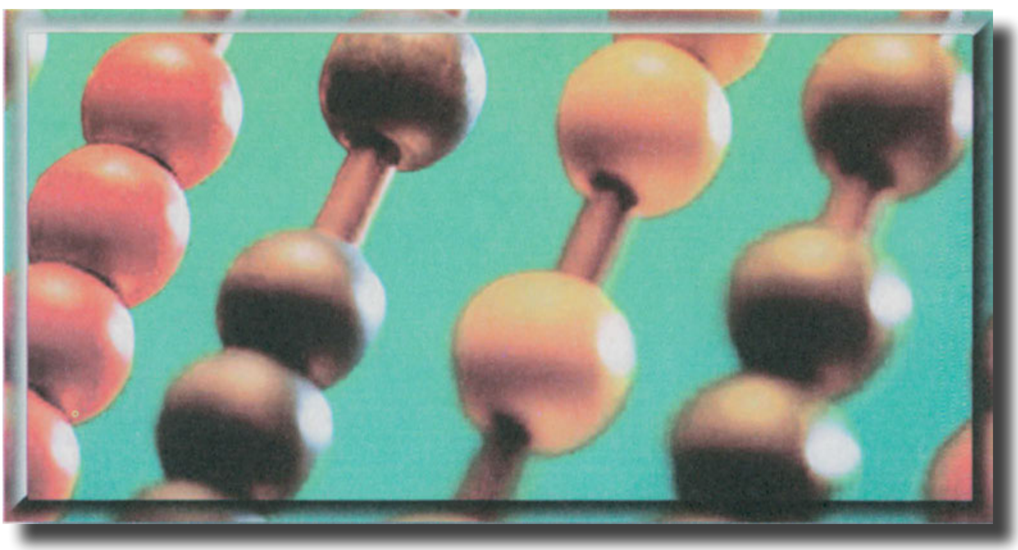
2) **Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις,** δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας μεγαλύτερης του έτους. Μερικοί κάνουν τη διάκριση των Μακροπρόθεσμων Οικονομικών Πράξεων σε Μεσοπρόθεσμες (ένα έως τρία ή πέντε χρόνια) και Μακροπρόθεσμες (όταν αφορούν σε χρονικό διάστημα μεγαλύτερο από τρία ή πέντε χρόνια). Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι ο Ανατοκισμός, οι Ράντες και τα Δάνεια.

Ερωτήσεις

1. Τι είναι Χρήμα;
2. Τι είναι $\mathbf{M_o}$, $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_3}$ και $\mathbf{M_4}$;
3. Τι είναι το EURO (ΕΥΡΩ); Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις του και ποιο το χρονοδιάγραμμα μετάβασης στο ευρώ;
4. Τι είναι Κεφάλαιο, Τόκος, Επιτόκιο;
5. Τι είναι απλός και τι σύνθετος τόκος ή ανατοκισμός;
6. Τι είναι Βραχυπρόθεσμες, Μεσοπρόθεσμες και Μακροπρόθεσμες Οικονομικές πράξεις;

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΠΟΣΟΣΤΑ

2.1. Είδη ποσών. Ποσά ανάλογα. Ποσά αντίστροφα

Είδη ποσών. Κάθε πράγμα που μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί, ονομάζεται **ποσό** ή **μέγεθος.** Π.χ., το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, το ύψος και το πλάτος ενός γεωμετρικού σχήματος, οι καταθέσεις σε ένα ταμιευτήριο, ο τόκος των καταθέσεων, κτλ. είναι ποσά.

Κάθε ποσό που μπορεί να πάρει διάφορες τιμές λέγεται **μεταβλητό ποσό.** Π.χ. η τιμή ενός αγαθού, το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, η θερμοκρασία, κτλ. είναι μεταβλητά ποσά.

Κάθε ποσό που έχει πάντοτε την ίδια αριθμητική τιμή λέγεται **σταθερό ποσό.** Π.χ. ο λόγος μιας περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ένα σταθερό ποσό ($\pi = 3,14159...$), η απόσταση από την Αθήνα στην Πάτρα είναι ένα σταθερό ποσό (= 240 km).

Ας εξετάσουμε τώρα το εξής απλό πρόβλημα: Το 1 μέτρο ενός υφάματος κοστίζει 40€. Πόσο κοστίζουν τα 2, 3, 4 ... μέτρα και πόσο κοστίζει το 1/2, 1/4 ... του μέτρου;

Ο πίνακας 2.1.1 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του μήκους του υφάσματος και του κόστους του.

Πίνακας 2.1.1

Μήκος (σε μέτρα)	1	2	3	4	…	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…
Κόστος (σε €)	40	80	120	160	…	20	10	…

Από τον Πίνακα 2.1.1 παρατηρούμε ότι: Αν το μήκος του υφάσματος μεταβληθεί (δηλαδή αυξηθεί ή ελαττωθεί) κατά ορισμένη έννοια, τότε μεταβάλλεται κατά την ίδια έννοια και το κόστος του υφάσματος. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται **συμμεταβλητά** ή **εξαρτημένα ποσά.** Ειδικότερα: Το κόστος του υφάσματος ονομάζεται **εξαρτημένο** μεταβλητό, ενώ το μήκος του λέγεται **ανεξάρτητο** μεταβλητό. Επειδή το κόστος του υφάσματος εξαρτάται από το μήκος του, λέμε ότι το κόστος του υφάσματος είναι **συνάρτηση** του μήκους του.

Συμμεταβλητά ποσά είναι: η περιφέρεια ενός κύκλου και η ακτίνα του· ο χρόνος εργασίας ενός εργάτη και η αμοιβή του με σταθερό ωρομίσθιο· η τιμή ενός εμπορεύματος και το βάρος του· ο φόρος και το εισόδημα· η τιμή και η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού.

Ποσά ανάλογα. Έστω ότι ένας δάσκαλος σχολής οδηγών παίρνει 20€ για κάθε ώρα διδασκαλίας. Πόσα ευρώ θα πάρει σε 2, 3, 4,... ώρες και πόσα ευρώ θα πάρει σε μισή ώρα, σε ένα τέταρτο της ώρας κτλ;

Ο Πίνακας 2.1.2 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του χρόνου διδασκαλίας σε ώρες και της αμοιβής του δασκάλου σε ευρώ.

Πίνακας 2.1.2

Χρόνος (σε ώρες)	1	2	3	4	…	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…
Αμοιβή (σε €)	20	40	60	80	…	10	5	…

Από τους Πίνακες 2.11 και 2.1.2 παρατηρούμε ότι τα ποσά «μήκος» σε μέτρα και «κόστος» σε ευρώ, «χρόνος» σε ώρες και «αμοιβή» σε ευρώ έχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, ώστε, όταν η τιμή του ενός ποσού διπλασιαστεί, τριπλασιαστεί, τετραπλασιαστεί, και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, τετραπλασιάζεται κτλ.

Επίσης, όταν η τιμή του ενός ποσού (π.χ. του μήκους του υφάσματος ή του χρόνου διδασκαλίας) γίνει το μισό (1/2), το τέταρτο (1/4), κτλ., τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού (π.χ. κόστους ή αμοιβής) γίνεται το μισό, το τέταρτο, κτλ. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται **ανάλογα ποσά.** Συνεπώς, το **μήκος** ενός υφάσματος και το **κόστος** του, ο **χρόνος** εργασίας και η **αμοιβή** της (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογα ποσά.

Από την παραπάνω ανάλυση συνάγουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Δύο (συμμεταβλητά) ποσά θα τα λέμε ανάλογα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.

Ως παραδείγματα ανάλογων ποσών μπορούμε να αναφέρουμε: το κόστος ενός υφάσματος είναι ανάλογο προς το μήκος του, η αξία ενός εμπορεύματος είναι ανάλογη προς το βάρος του· η περιφέρεια ενός κύκλου είναι ανάλογη προς την ακτίνα του· η αμοιβή ενός προσώπου (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογη με το χρόνο εργασίας· ο (απλός) τόκος είναι ανάλογος προς το τοκιζόμενο κεφάλαιο (για τον ίδιο χρόνο τοκισμού και το ίδιο επιτόκιο).

Παρατήρηση. Από τον Πίνακα 2.1.1 παίρνουμε δύο τιμές του ποσού «μήκος», π.χ. τις τιμές 2 και 3 και σχηματίζουμε το λόγο τους 2/3. Έπειτα, παίρνουμε τις αντίστοιχες προς αυτές τιμές 80 και 120 του άλλου ποσού «κόστος» και σχηματίζουμε το λόγο τους 80/120 = 8/12 = 2/3.

Από τον πίνακα 2.1.2 παίρνουμε πάλι δύο τιμές, έστω 2 και 4, του ποσού «χρόνος». Αυτές έχουν λόγο: 2/4 = 1/2. Οι αντίστοιχες προς αυτές τιμές 40 και 80 του άλλου ποσού «αμοιβή» έχουν λόγο: 40/80 = 1/2.

Παρατηρούμε ότι δυο (οποιεσδήποτε) τιμές του ενός ποσού έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού.

Ώστε: **Δυο ποσά είναι ανάλογα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.**

Ποσά αντίστροφα. Ας εξετάσουμε τώρα το εξής πρόβλημα: Ένας εργάτης για να εκτελέσει ένα έργο χρειάζεται 240 ώρες. Σε πόσες ώρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο 2, 3, 4, ... εργάτες;

Ο πίνακας 2.1.3 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του αριθμού των εργατών και του απαιτούμενου χρόνου για την εκτέλεση του έργου.

Πίνακας 2.1.3

Αριθμός εργατών	1	2	3	4	…
Απαιτούμενος χρόνος σε ώρες	240	120	80	60	…

Από τον Πίνακα 2.1.3 παρατηρούμε ότι, όταν οι τιμές του ποσού «αριθμός εργατών» πολλαπλασιασθούν επί 2, 3, 4, ... τότε οι αντίστοιχες τιμές του ποσού «χρόνος» διαιρούνται δια 2, 3, 4 ... Με άλλα λόγια, όταν ο αριθμός των εργατών διπλασιαστεί, τριπλασιαστεί, κτλ, τότε για την εκτέλεση του έργου χρειάζεται ο μισός χρόνος, το ένα τρίτο του χρόνου, κτλ.

Δύο ποσά που έχουν μεταξύ τους τέτοια σχέση, ονομάζονται αντίστροφα ποσά. Ώστε: **Δυο (συμμεταβλητά) ποσά θα λέμε ότι είναι αντίστροφα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, διαιρείται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό ή όταν διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.**

Αντίστροφα ποσά είναι: Ο αριθμός των τεχνιτών και ο απαιτούμενος χρόνος κατασκευής ενός έργου· η (σταθερή) ταχύτητα ενός κινητού και ο χρόνος που χρειάζεται αυτό, για να διανύσει ορισμένη απόσταση· η ημερήσια κατανάλωση μιας ορισμένης ποσότητας τροφίμων και ο χρόνος κατά τον οποίον θα επαρκέσουν τα τρόφιμα· η ωριαία παροχή μιας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται, για να γεμίσει μια δεξαμενή· το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδό· ο αριθμός των στροφών που κάνει ένας τροχός, για να διανύσει μια ορισμένη απόσταση και το μήκος της ακτίνας του.

Παρατήρηση. Από τον Πίνακα 2.1.3 παίρνουμε δύο τιμές του ενός ποσού (αριθμός εργατών), π.χ. τις 2 και 3, και σχηματίζουμε το λόγο τους 2/3. Έπειτα παίρνουμε τις αντίστοιχες τιμές (120 και 80) του άλλου ποσού (χρόνος σε ώρες) και σχηματίζουμε το λόγο τους 120/80 = 12/8. Συγκρίνοντας τώρα τους δύο λόγους παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{12}{8}$$

Εάν όμως αντιστρέψουμε το λόγο $\frac{12}{8}$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Δύο ποσά είναι αντίστροφα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.

2.2. Απλή μέθοδος των τριών

Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα

Πρόβλημα 1ο. Τα 12 μέτρα ενός υφάσματος κοστίζουν 480 €. Πόσο κοστίζουν τα 8 μέτρα του ίδιου υφάσματος;

Κατάταξη:

Λύση.

Τα 12 μέτρα κοστίζουν	480 €
Τα 8 μέτρα κοστίζουν	x; €

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «μήκος» και «κόστος» είναι **ποσά ανάλογα,** διπλάσια, τριπλάσια, κτλ., μέτρα κοστίζουν διπλάσιες, τριπλάσιες, κτλ, δραχμές. Συνεπώς, ο λόγος 12/8 των τιμών 12 και 8 του ποσού «μήκος σε μέτρα» είναι ίσος με το λόγο 480/x των αντίστοιχων τιμών 480 και x του ποσού «κόστους σε €».

Δηλαδή ισχύει η αναλογία:

$$\frac{12}{8} = \frac{480}{x}$$

Λύνοντας ως προς x έχουμε:

$$12 \cdot x = 480 \cdot 8 \Rightarrow x = 480 \cdot \frac{8}{12} = 320$$

Ώστε: Τα 8 μέτρα κοστίζουν 320 €.

Πρόβλημα 2ο. Δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες, για να τελειώσουν ένα έργο. Σε πόσες ώρες θα τελειώσουν το ίδιο έργο 12 εργάτες; (Οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση).

Κατάταξη:

Λύση.

Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 2400 ώρες
Οι 12 εργάτες τελειώνουν το έργο σε x; ώρες

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «αριθμός εργατών» και απαιτούμενος «χρόνος» εκτέλεσης του έργου είναι **ποσά αντίστροφα,** διότι, αφού οι δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες για να τελειώσουν το έργο, οι διπλάσιοι εργάτες θα τελειώσουν το έργο στο μισό του χρόνου και οι τριπλάσιοι εργάτες στο τρίτο του χρόνου. Συνεπώς, ο λόγος 10/12 των τιμών 10 και 12 του ποσού «αριθμός εργατών» είναι ίσος με τον **αντίστροφο λόγο** x/2400 των αντίστοιχων τιμών 2400 και x του ποσού «χρόνος» σε ώρες. Δηλαδή, ισχύει η εξής αναλογία:

$$\frac{10}{12} = \frac{x}{2400}$$

Λύνοντας ως προς x έχουμε:

$$12 \cdot x = 10 \cdot 2400 \Rightarrow x = 2400 \cdot \frac{10}{12} = 2000$$

Άρα: Οι 12 εργάτες θα τελειώσουν το έργο σε 2000 ώρες.

Από τη λύση των προβλημάτων 1 και 2 παρατηρούμε τα εξής:

Παρατήρηση 1η. Στα προβλήματα αυτά (και τα όμοια με αυτά), δίνονται **τρεις αριθμοί** και ζητείται να βρεθεί **τέταρτος** (= x). Γι' αυτό το λόγο ο γενικός τρόπος με τον οποίο λύνονται όλα τα προβλήματα αυτού του είδους, ονομάστηκε **απλή μέθοδος των τριών.**

Παρατήρηση 2η. Για τη λύση προβλημάτων με την απλή μέθοδο των τριών πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν τα συμπλεκόμενα ποσά είναι **ανάλογα** ή **αντίστροφα** και έπειτα να εφαρμόσουμε τον ακόλουθο πρακτικό κανόνα:

Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου x, σε ένα πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών, πολλαπλασιάζουμε τον υπεράνω του άγνωστου x αριθμό επί το σχηματιζόμενο κλάσμα των γνωστών τιμών αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα, και όπως είναι στην κατάταξη, αν τα ποσά είναι αντίστροφα.

Πρόβλημα 3ο. Τα 10 κιλά ενός εμπορεύματος αξίζουν 8000 €. Πόσα ευρώ αξίζουν τα 16 κιλά;

Κατάταξη:

Λύση.

Τα 10 κιλά αξίζουν 8000 €
Τα 16 κιλά αξίζουν x; €

Αφού τα 10 κιλά αξίζουν 8000 €, τα διπλάσια κιλά αξίζουν διπλάσια ευρώ. Επομένως, τα ποσά «βάρος» σε κιλά και «αξία» σε € είναι **ανάλογα.**

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε:

$$x = 8000 \cdot \frac{16}{10} = 12800$$

Άρα: τα 16 κιλά αξίζουν 12800 €.

Πρόβλημα 4ο. Ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 75km/h διανύει την απόσταση: Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 8 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα διανύσει την ίδια διαδρομή σε 10 ώρες; (Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο τρέχει με μια σταθερή ταχύτητα ή όπως λέμε με μια μέση ταχύτητα).

Κατάταξη:

Λύση.

Με ταχύτητα 75km/h κάνει 8 ώρες
Με ταχύτητα x;km/h κάνει 10 ώρες

Αφού με ταχύτητα 75km/h το αυτοκίνητο κάνει τη διαδρομή σε 8 ώρες, για να διανύσει την ίδια απόσταση σε διπλάσιες ώρες πρέπει να τρέχει με τη μισή ταχύτητα από την προηγούμενη. Άρα, τα ποσά «ταχύτητα» και «χρόνος» είναι **αντίστροφα.** Συνεπώς θα έχουμε:

$$x = 75 \cdot \frac{8}{10} = \frac{600}{10} = 60\,\mathrm{km/h}$$

Ώστε: Το αυτοκίνητο πρέπει να τρέχει με (μέση) ταχύτητα 60 km/h, για να διανύσει την απόσταση Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 10 ώρες.

Προβλήματα απλής μεθόδου των τριών

1. Τα 23 μέτρα ενός υφάσματος αξίζουν 25,3 €. Πόσα ευρώ αξίζουν τα 15 μέτρα;

   (Απ. 16,5)

2. Δέκα εργάτες σκάβουν σε 28 ημέρες ένα κτήμα. Πόσοι εργάτες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα σε 8 ημέρες;

   (Απ. 35)

3. Με 45 € αγοράζουμε 3 κιλά καφέ. Πόσα κιλά καφέ θα αγοράσουμε με 1230 €;

   (Απ. 82)

4. Ένας οικοδόμος σε μια εβδομάδα (= 6 ημέρες) παίρνει 240 €. Πόσες δραχμές θα πάρει για 15 ημέρες εργασίας;

   (Απ. 600)

5. Ένα αυτοκίνητο με 45 λίτρα βενζίνης διανύει 450 χιλιόμετρα. Αν τώρα τρέχει με την ίδια ταχύτητα, πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει με 35 λίτρα;

   (Απ. 350)

6. Ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 80km/h κάνει τη διαδρομή «Αθήνα - Πάτρα» σε 3 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα κάνει την ίδια διαδρομή σε 6 ώρες;

   (Απ. 40 km/h)

7. Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 15 € το μέτρο. Τα 2/3 του υφάσματος - τα πούλησε προς 25 € το μέτρο και το υπόλοιπο προς 12 € το μέτρο και κέρδισε συνολικά 1700 €. Πόσα μέτρα ύφασμα είχε αγοράσει;

   (Απ. 300)

8. Ένας έμπορος αγόρασε μοκέτα προς 7 € το μέτρο. Πούλησε τα 5/8 της μοκέτας προς 8 € το μέτρο και το υπόλοιπο προς 7,5 € το μέτρο, και κέρδισε συνολικά 650 €. Πόσα μέτρα είχε αγοράσει;

(Απ. 800)

9. 240 κατασκηνωτές έχουν τρόφιμα για 30 ημέρες Έπειτα από 10 ημέρες ήλθαν στην κατασκήνωση 60 τουρίστες χωρίς τρόφιμα. Πόσες ημέρες θα επαρκέσουν τα τρόφιμα;

(Απ. 16)

10 Σε ένα κάστρο ήταν πολιορκημένοι 1000 άνθρωποι και είχαν τρόφιμα για 54 ημέρες. Έπειτα από 18 ημέρες έφτασαν στο κάστρο άλλοι 500 άνθρωποι. Σε πόσες ημέρες θα εξαντληθούν τα τρόφιμα;

(Απ. 42)

11 Οκτώ άνδρες ή δώδεκα παιδιά εκτελούν ένα έργο σε 30 ημέρες. Έξι άνδρες ή έντεκα παιδιά σε πόσες ημέρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο;

(Απ. 18)

12. Ένας χονδρέμπορος αγόρασε πατάτες προς 4 € το κιλό πουλάει τα 6/9 τους προς 6 € το κιλό και τις υπόλοιπες προς 5 € το κιλό και κερδίζει 25.000 €. Πόσους τόνους είχε αγοράσει;

(Απ. 15)

13. Ένας έμπορος πούλησε λάδι και κέρδισε ποσό ίσο προς τα 10/94 της τιμής πώλησής του. Αν όμως κέρδιζε 340 € περισσότερα, το κέρδος θα ήταν ίσο προς το 1/5 της τιμής αγοράς του λαδιού. Να βρεθεί: α) η τιμή πώλησης του λαδιού, β) το κέρδος που είχε από την πώληση και γ) το βάρος του λαδιού, αν με το κέρδος που πραγματοποίησε αγόραζε 20 κιλά λαδιού.

(Απ. α) 4700 €, β) 500 €, γ) 168 κιλά)

14. Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 420 € το μέτρο. Πούλησε τα 2/5 της ποσότητας προς 500 € το μέτρο και τα υπόλοιπα προς 350 € το μέτρο. Αν ζημιώθηκε 5000 €, πόσα μέτρα είχε αγοράσει;

(Απ. 500)

2.3. Σύνθετη Μέθοδος των τριών

Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα

Πρόβλημα 1ο. Δέκα εργάτες, όταν εργαστούν 8 ημέρες, παίρνουν 3.600 €. Πόσα ευρώ θα πάρουν 14 εργάτες, αν εργαστούν 16 ημέρες;

Λύση. Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

10 εργάτες σε 8 ημέρες παίρνουν 3.600 €
14 εργάτες σε 16 ημέρες παίρνουν x; €

Σύγκριση ποσών. α) Τα ποσά «εργάτες» και «ευρώ» είναι **ανάλογα,** διότι διπλάσιοι εργάτες για τον ίδιο χρόνο εργασίας θα πάρουν διπλάσια ευρώ. β) Τα ποσά «ημέρες» και «ευρώ» είναι **ανάλογα,** διότι σε διπλάσιες ημέρες οι ίδιοι εργάτες θα πάρουν διπλάσια ευρώ. Παρατηρούμε ότι κάθε ποσό συγκρίνεται με το ποσό του αγνώστου.

Το πιο πάνω πρόβλημα αναλύεται σε δύο προβλήματα της απλής μεθόδου των τριών.

1α) Οι 10 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν 3.600 €. Οι 14 εργάτες πόσα ευρώ θα πάρουν;

Κατάταξη:

Οι 10 εργάτες σε 8 ημέρες παίρνουν 3.600 €
Οι 14 εργάτες σε 8 ημέρες παίρνουν x; €

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες» και «ευρώ» είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$\boxed{x = 3.600 \cdot \frac{14}{10} \text{ €}}$$

Ώστε: Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν

$$3.600 \cdot \frac{14}{10} \text{ €}$$

1β) Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν 3.600 · 14/10 ευρώ. Πόσα ευρώ θα πάρουν, αν εργαστούν 16 ημέρες;

Κατάταξη:

Οι 14 εργάτες σε 8 ημέρες παίρνουν $3.600 \cdot \frac{14}{10}$ €

Οι 14 εργάτες σε 16 ημέρες παίρνουν x; €

Επειδή τα ποσά «ημέρες» και «ευρώ» είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$\boxed{x = 3.600 \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{16}{8} = 10.080 \text{ €}} \qquad (E_1)$$

Ώστε: Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 16 ημέρες, θα πάρουν 10.080 ευρώ.

Πρόβλημα 2ο. Δεκαπέντε εργάτες σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Σε πόσες ημέρες 20 εργάτες θα σκάψουν κτήμα 60 στρεμμάτων;

Λύση. Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

Οι 15 εργάτες σε 40 ημέρες σκάβουν 40 στρέμματα

Οι 20 εργάτες σε x; ημέρες σκάβουν 60 στρέμματα

Σύγκριση ποσών, α) Τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι **αντίστροφα,** διότι διπλάσιοι εργάτες θα σκάψουν το κτήμα σε μισές ημέρες (αν όλοι οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση και εργάζονται, π.χ., 8 ώρες την ημέρα), β) Τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι **ανάλογα,** διότι ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σκάβεται από κάποιο αριθμό εργατών σε 40 ημέρες· άλλο κτήμα, με διπλάσιο αριθμό στρεμμάτων, σκάβεται, από τους ίδιους εργάτες, σε διπλάσιο αριθμό ημερών.

Το πιο πάνω πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί στα ακόλουθα δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών:

2α) Οι 15 εργάτες σκάβουν ένα κτήμα (40 στρεμμάτων) σε 40 ημέρες. Οι 20 εργάτες σε πόσες ημέρες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα;

Κατάταξη:

Οι 15 εργάτες σκάβουν το κτήμα σε 40 ημέρες
Οι 20 εργάτες σκάβουν το κτήμα σε x; ημέρες

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι αντίστροφα, θα έχουμε:

$$x = 40 \cdot \frac{15}{20} \text{ ημέρες}$$

Ώστε: Οι 20 εργάτες θα σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων σε $40 \cdot \frac{15}{20}$ ημέρες

2β) Οι 20 εργάτες, για να σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων, χρειάζονται 40 · 15/20 ημέρες. Πόσες ημέρες θα χρειαστούν (οι ίδιοι εργάτες), για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων;

Κατάταξη:

Οι 20 εργάτες για 40 στρέμματα χρειάζονται $40 \cdot \frac{15}{20}$ ημέρες
Οι 20 εργάτες για 60 στρέμματα χρειάζονται x; ημέρες

Επειδή τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι, όπως είπαμε, ανάλογα θα είναι:

$$\boxed{x = 40 \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{60}{40} = 45 \text{ ημέρες}} \qquad (E_2)$$

Ώστε: Οι 20 εργάτες, θα χρειαστούν 45 ημέρες, για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων.

Όπως βλέπουμε, για να λύσουμε τα δύο προηγούμενα προβλήματα, αναλύσαμε το καθένα σε δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών. Γι' αυτό το λόγο, τα προβλήματα τέτοιου είδους ονομάζονται **προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών.**

Από τα τελικά εξαγόμενα (E_1) και (E_2) των πιο πάνω προβλημάτων προκύπτει ο ακόλουθος γενικός κανόνας:

Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου x, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που είναι πάνω από τον άγνωστο x με καθένα από τα κλάσματα που σχηματίζονται από τις δύο άλλες τιμές κάθε ποσού, αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα προς το ποσό του x, όπως είναι το κλάσμα, αν τα ποσά είναι αντίστροφα προς το ποσό του αγνώστου.

Πρόβλημα 3ο. Δέκα εργάτες, εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα παίρνουν σε 20 ημέρες 8.000 €. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργαστούν 8 εργάτες για να πάρουν σε 15 ημέρες 6.000 €;

Λύση. Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο:

Οι 10 εργάτες με 8 ώρες την ημέρα παίρνουν σε 20 ημ. 8.000 €
Οι 8 εργάτες με x; ώρες την ημέρα παίρνουν σε 15 ημ. 6.000 €

Σύγκριση ποσών, α) Τα ποσά «εργάτες» και «ώρες» είναι αντίστροφα, διότι ο μισός αριθμός εργατών τελειώνει το ίδιο έργο σε διπλάσιες ώρες. β) Τα ποσά «ημέρες» και «ώρες» είναι **αντίστροφα,** διότι σε μισό αριθμό ημερών θα χρειαστούν διπλάσιες ώρες, για να τελειώσουν το έργο οι ίδιοι εργάτες. γ) Τα ποσά «αμοιβή» σε € και «ώρες εργασίας» είναι ανάλογα, διότι για διπλάσιες ώρες, οι ίδιοι εργάτες, παίρνουν διπλάσια αμοιβή. Συνεπώς, σύμφωνα με τον πιο πάνω κανόνα θα έχουμε:

$$x = 8 \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{20}{15} \cdot \frac{6.000}{8.000} = 10 \text{ ώρες}$$

Ώστε: Οι 8 εργάτες, για να πάρουν 6.000 € σε 15 ημέρες, πρέπει να εργάζονται 10 ώρες την ημέρα.

Προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών

1. Δεκαέξι εργάτες σε δώδεκα ημέρες σκάβουν ένα αγρόκτημα είκοσι τεσσάρων στρεμμάτων. Σε πόσες ημέρες είκοσι εργάτες θα σκάψουν αγρόκτημα δέκα στρεμμάτων; ***(Απ. 4)***

2. Διακόσιοι στρατιώτες χρειάζονται 400 κιλά ψωμί, για να περάσουν 4 ημέρες. Πόσα κιλά ψωμί θα χρειαστούν 350 στρατιώτες, για να περάσουν 14 ημέρες; ***(Απ. 2450)***

3. Για εργασία 8 ημερών 10 εργάτες πήραν 3.200 €. Πόσα ευρώ θα πάρουν 12 εργάτες, αν εργαστούν 14 ημέρες; ***(Απ. 6.720)***

4. Δεκαπέντε εργάτες εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα, σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Είκοσι εργάτες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, σε πόσες ημέρες θα σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων; ***(Απ. 36)***

5. Ένα εξοχικό σπίτι συμφωνήθηκε να κατασκευαστεί από 9 εργάτες σε 16 ημέρες. Οι εργάτες όμως σε 6 ημέρες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, κατασκεύασαν το ένα τρίτο του σπιτιού. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργαστούν οι ίδιοι εργάτες τις υπόλοιπες ημέρες, για να τελειώσουν το σπίτι σε 16 ημέρες, όπως είχαν συμφωνήσει;
(Απ. 12 ωρ/ημ.)

6. Με 36 κιλά νήματος υφαίνουμε 54 μέτρα υφάσματος πλάτους 0,80m. Με 50 κιλά νήματος πόσα μέτρα θα υφάνουμε, αν τώρα το πλάτος του υφάσματος είναι 1,20m; ***(Απ. 50m)***

7. Είκοσι τέσσερις εργάτες μπορούν να εκτελέσουν ένα έργο σε 28 ημέρες, αν εργάζονται 7 ώρες την ημέρα. Μετά 10 ημέρες εργασίας 6 εργάτες αρρώστησαν˙ οι υπόλοιποι αύξησαν την εργασία τους κατά μία ώρα την ημέρα. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο και τι ποσό θα πάρει ο καθένας, αν πληρωθούν 70.560 € για ολόκληρο το έργο.
(Απ. 21 ημ. -1050 - 3570)

8. Ένα πλοίο έχει πλήρωμα 140 ανδρών και τρόφιμα για 70 ημέρες. Μετά από ταξίδι 10 ημερών παρέλαβε ναυαγούς και ο χρόνος του ταξιδιού αυξήθηκε κατά 10 ημέρες. Ελαττώθηκε τότε η μερίδα κατά τα 2/5 της αρχικής. Πόσους ναυαγούς παρέλαβε; ***(Απ. 60)***

9. Εργολάβος ανέλαβε να εκτελέσει μια εργασία σε τριάντα ημέρες υπολογίζοντας να μισθώσει δύο εκσκαφείς, οι οποίοι θα εργάζονται

εννέα ώρες την ημέρα. Μετά παρέλευση δέκα ημερών, από την ημέρα που συμφώνησε την εργασία, κατόρθωσε να μισθώσει δύο εκσκαφείς με τριπλάσια απόδοση από τους πρώτους, οι οποίοι εργάζονται έξι ώρες την ημέρα. Να βρεθεί πόσες ημέρες νωρίτερα του προβλεπόμενου χρόνου θα τελειώσει η εργασία. ***(Απ. 5 ημ.)***

10. Ένα οικόπεδο μήκους 32 μέτρων και πλάτους 30 μέτρων έχει αξία 48.000 €. Πόσο πλάτος θα είχε το οικόπεδο, αν είχε μήκος 20 μέτρα και τιμή 45.000 €; ***(Απ. 45m)***

2.4. Ποσοστά

2.4.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί

Οι άνθρωποι στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές τους, για να υπολογίσουν τα κέρδη, τις ζημιές, τις μεσιτείες, τις εκπτώσεις, τις προμήθειες, τα ασφάλιστρα, τις αυξήσεις των μισθών και ημερομισθίων, κτλ., χρησιμοποιούν ως βάση τον αριθμό 100 και σε ορισμένες περιπτώσεις τον αριθμό 1000.

Στην καθημερινή πρακτική συναντάμε, π.χ., τα ακόλουθα προβλήματα:

1) Ο έμπορος Ε πούλησε εμπορεύματα που του κόστισαν 365.000 € με κέρδος 18%. Πόσα ευρώ κέρδισε;

2) Ο πελάτης Π αγόρασε «τοις μετρητοίς» από ένα εμπορικό κατάστημα, μια συσκευή τηλεοράσεως αξίας 160 € με έκπτωση 25%. Πόση έκπτωση είχε ο πελάτης και πόσα ευρώ εισέπραξε το κατάστημα;

3) Ο μεσίτης Μ, για την πώληση ενός διαμερίσματος αξίας 180.000 € παίρνει 14‰ για μεσιτικά. Πόσα ευρώ θα εισπράξει;

Λύσεις

1) Όταν λέμε ότι ο έμπορος πούλησε τα εμπορεύματα με κέρδος 18%, εννοούμε ότι σε κάθε 100 ευρώ ο έμπορος κερδίζει 18 €. Δηλαδή, πρέπει να λύσουμε το εξής πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών.

Στα 100 € ο Ε κερδίζει 18 €

Στα 365.000 € ο Ε κερδίζει x; €

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$x = 18 \cdot \frac{365.000}{100} = 65.700\ €$$

Άρα, ο Ε κέρδισε 65.700 ευρώ.

2) Όταν λέμε ότι το κατάστημα κάνει έκπτωση 25%, εννοούμε ότι εμπόρευμα αξίας 100 € το πουλάει 75 €.

Δηλαδή:

Στα 100 € κάνει έκπτωση 25 € και εισπράττει 75 €
Στα 160 € κάνει έκπτωση x_1; € και εισπράττει x_2; €

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$\text{Έκπτωση} = x_1 = 25 \cdot \frac{160}{100} = 40\ €$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 75 \cdot \frac{160}{100} = 120\ €$$

3) Όταν λέμε ότι ο μεσίτης παίρνει 14‰ μεσιτικά, εννοούμε ότι για κάθε 1000 € αυτός θα εισπράττει 14 € για μεσιτικά.

Δηλαδή:

Για αξία	1000	€	παίρνει	14	€	μεσιτικά
Για αξία	180.000	€	παίρνει	x;	€	μεσιτικά

Τα ποσά είναι ανάλογα, άρα θα έχουμε:

$$x = 14 \cdot \frac{180.000}{1000} = 2.520\ €$$

Ώστε, ο μεσίτης θα εισπράξει 2.520 €.

Από τα παραπάνω προβλήματα συνάγουμε τις ακόλουθες έννοιες: Τα 18%, 25%, 14‰ παριστάνουν τα δεκαδικά κλάσματα:

$$\frac{18}{100},\ \frac{25}{100},\ \frac{14}{1000}$$

και απαγγέλλονται: **18 στα εκατό** (18 τοις εκατό), **25 στα εκατό** (25 τοις εκατό) και **14 στα χίλια** (14 τοις χιλίοις).

Το ποσό που, με βάση το 100 ή το 1000, βρίσκεται ότι αναλογεί στο αρχικό ποσό ονομάζεται **ποσοστό.** Στα πιο πάνω προβλήματα βρήκαμε τα ποσοστά:

1) 65.700 € 2) 40 € και 3) 2.520 €.

Το ποσό, με βάση το οποίο υπολογίζεται το ποσοστό ονομάζεται **αρχικό ποσό.** Στα παραπάνω προβλήματα αρχικά ποσά είναι:

1) 365.000 € 2) 160 € και 3) 180.000 €.

Το τόσο τοις εκατό (%) ή τοις χιλίοις (‰) είναι ο λόγος του κέρδους ή της έκπτωσης ή της μεσιτείας, κτλ. προς το αρχικό ποσό. Έτσι, στα πιο πάνω προβλήματα έχουμε:

1) $\dfrac{65.700}{365.000} = 0{,}18 = \dfrac{18}{100}$ που γράφεται 18%

2) $\dfrac{40}{160} = 0{,}25 = \dfrac{25}{100}$ που γράφεται 25%

3) $\dfrac{2.520}{180.000} = 0{,}014 = \dfrac{14}{1000}$ που γράφεται 14‰

Τέλος, το ποσό που προκύπτει από το αρχικό ποσό, αυξημένο ή ελαττωμένο κατά το ποσοστό, λέγεται **τελικό ποσό.** Στα προβλήματα 1 και 2 τελικά ποσά είναι:

$365.000 + 65.700 = 430.700$ € και $160 - 40 = 120$ €

Τα ποσοστά είναι ανάλογα των ποσών με βάση τα οποία υπολογίζονται· γι' αυτό όλα τα προβλήματα των ποσοστών λύνονται με την απλή μέθοδο των τριών και **τα ποσά είναι πάντοτε ανάλογα.** Πρέπει όμως να προσέχουμε, κατά την κατάταξη των δεδομένων του προβλήματος, να βάζουμε τα ομοειδή ποσά στην ίδια κατακόρυφη στήλη.

Τα προβλήματα που θα εξετάσουμε στις επόμενες παραγράφους είναι: 1) Η εύρεση του ποσοστού, 2) η εύρεση του αρχικού ποσού, 3) η εύρεση του τόσο τοις % ή τόσο τοις ‰.

2.4.2. Εύρεση του ποσοστού

Πρόβλημα 1ο. Ο έμπορος Ε πουλάει, τα εμπορεύματά του με κέρδος 26%. Πόσα ευρώ θα κερδίσει, αν πουλήσει εμπορεύματα αξίας 445.000 ευρώ;

Λύση. Για τη λύση οποιουδήποτε προβλήματος ποσοστών πρέπει να προσέχουμε, ώστε, κατά την κατάταξη των δεδομένων του προβλήματος, να βάζουμε τα ομοειδή ποσά στην ίδια στήλη. Έτσι, για το πιο πάνω πρόβλημα έχουμε:

Κατάταξη:

Για εμπ/τα αξίας	100 €	κερδίζει	26	€
Για εμπ/τα αξίας	445.000 €	κερδίζει	x;	€

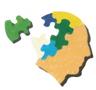
Τα ποσά είναι ανάλογα, άρα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{100}{445.000} = \frac{26}{x}$$

ή $$100 \cdot x = 26 \cdot 445.000$$

και $$x = 26 \cdot \frac{445.000}{100} = 115.700$$

Άρα: ο Ε θα κερδίσει 115.700 €



Σημείωση. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν, εφαρμόσουμε το γνωστό πρακτικό κανόνα: Ο άγνωστος x είναι ίσος με τον υπεράνω αυτού αριθμό επί το κλάσμα (που σχηματίζουν οι άλλες τιμές) αντεστραμμένο ο ίδιος κανόνας εφαρμόζεται σε όλα τα προβλήματα των ποσοστών, γιατί, όπως είπαμε, τα ποσά είναι πάντοτε ανάλογα.

Πρόβλημα 2ο. Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών κάνει έκπτωση 30% (επί της αναγραφόμενης τιμής) για κάθε αγορά «τοις μετρητοίς. Ο πελάτης Π αγόρασε ένα ηλεκτρικό ψυγείο, στο οποίο η αναγραφόμενη τιμή είναι: 1.200 €. Πόση είναι η έκπτωση και πόσα ευρώ εισέπραξε το κατάστημα;

Λύση. Όταν λέμε ότι το κατάστημα κάνει έκπτωση 30%, εννοούμε ότι εμπόρευμα αξίας 100 € το πουλάει 70 € (= 100 - 30).

Κατάταξη:

Στα 100 € κάνει έκπτωση 30 € και εισπράττει 70 €
Στα 1.200 € κάνει έκπτωση x_1 € και εισπράττει x_2 €

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$\text{Έκπτωση} = x_1 = 30 \cdot \frac{1.200}{100} = 360\ €$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 70 \cdot \frac{1.200}{100} = 840\ €$$

Πρόβλημα 3ο. Ένας εξαγωγέας φρούτων πούλησε πέντε τόνους ροδάκινα με ζημία 18% επί της τιμής της αγοράς και εισέπραξε 5.200 €. Πόσα ευρώ ζημιώθηκε;

Λύση. Όταν λέμε ότι ο εξαγωγέας πούλησε με ζημία 18%, εννοούμε ότι σε κάθε 100 € έχασε 18 €, δηλαδή ροδάκινα αξίας αγοράς -100 ευρώ τα πούλησε 82 € (= 100 - 18).

Κατάταξη:

Αγορά 100 € ζημία 18 € πώληση 82 €
ζημία x; € πώληση 5.200 €

$$x = 18 \cdot \frac{5.200}{82} = 1.141{,}46\ €$$

Πρόβλημα 4ο. Ένα διαμέρισμα, αξίας 187.500 €, ασφαλίστηκε (για περίπτωση πυρκαγιάς) με 4 ‰ το έτος. Σε πόσα ευρώ ανέρχονται τα ετήσια ασφάλιστρα;

Λύση. Όταν λέμε ότι τα ασφάλιστρα είναι 4 ‰, εννοούμε ότι ο ιδιοκτήτης του διαμερίσματος, για κάθε 1000 € της αξίας του διαμερίσματος καταβάλλει 4 € για ασφάλιστρα.

Κατάταξη:

Στα 1000 € καταβάλλει 4 € ασφάλιστρα
Στα 187.500 € καταβάλλει x; € ασφάλιστρα

$$x = 4 \cdot \frac{187.500}{100} = 750 \text{ €}$$

Ώστε: Ο ιδιοκτήτης του διαμερίσματος πρέπει να πληρώνει 750 € το χρόνο για ασφάλιστρα.

Πρόβλημα 5ο. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο αξίας αγοράς 26.000 € με κέρδος 32%. Πόσα ευρώ κέρδισε και πόσα ευρώ εισέπραξε από την πώληση;

Λύση.

Κατάταξη:

Αγορά 100 € κέρδος 32 € είσπραξη 132 €
Αγορά 26.000 € κέρδος x1 € είσπραξη x_2 €

$$\text{Κέρδος} = x_1 = 32 \cdot \frac{26.000}{100} = 8.320 \text{ €}$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 132 \cdot \frac{26.000}{100} = 34.320 \text{ €}$$

2.4.3. Εύρεση του αρχικού ποσού

Πρόβλημα 1ο. Έμπορος ηλεκτρικών ειδών πούλησε ένα ηλεκτρικό ψυγείο με κέρδος 25% και εισέπραξε 1.500 €. Πόσα ευρώ του είχε κοστίσει το ψυγείο και πόσα ευρώ κέρδισε;

Λύση

Κατάταξη:

Όταν εισπράττει 125 €, το εμπόρευμα κοστίζει 100 €
Όταν εισπράττει 1.500 €, το εμπόρευμα κοστίζει x; €

$$x = 100 \cdot \frac{1.500}{125} = 1.200 \text{ €}$$

Ώστε: Το ηλεκτρικό ψυγείο είχε κοστίσει 1.200 €

Κέρδος = τιμή πωλήσεως - τιμή κόστους = 1.500 - 1.200 = 300 €.

Πρόβλημα 2ο. Έμπορος έτοιμων ενδυμάτων πούλησε ενδύματα παλαιάς μόδας με ζημία 32% και εισέπραξε 340 €. Πόσα ευρώ του είχαν κοστίσει τα εμπορεύματα και πόσα ευρώ ζημιώθηκε ο έμπορος;

Λύση. Όταν λέμε ότι ο έμπορος πούλησε με ζημία 32%, εννοούμε ότι σε 100 € χάνουμε 32 €, άρα πουλάμε με 68 (= 100 - 32) €.

Κατάταξη:

Όταν πουλιέται 68 €, το εμπ/μα κοστίζει 100 €

Όταν πουλιέται 340 €, το εμπ/μα κοστίζει x; €

$$x = 100 \cdot \frac{340}{68} = 500 \text{ €}$$

Άρα, τα ενδύματα είχαν κοστίσει στον έμπορο 500 €.

Επειδή: Τιμή πώλησης - τιμή κόστους = 340 - 500 = -160, συμπεραίνουμε ότι ο έμπορος ζημιώθηκε 160 €.

Πρόβλημα 3ο. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο με κέρδος 32% επί της τιμής της αγοράς και κέρδισε 832 €. Πόσα ευρώ είχε κοστίσει το αυτοκίνητο;

Λύση.

Κατάταξη:

Σε αγορά 100 € το κέρδος είναι 32 €

Σε αγορά x; € το κέρδος είναι 832 €

$$x = 100 \cdot \frac{830}{32} = 2.600 \text{ €}$$

Ώστε: Το αυτοκίνητο είχε κοστίσει 2.600 €.

Πρόβλημα 4ο. Πουλήθηκαν εμπορεύματα με μετρητά αντί 59.000 €, συμπεριλαμβανομένου Φ.Π.Α. 18%. Να βρεθεί η αξία των πωλήσεων χωρίς το Φ.Π.Α.

Λύση. Σε αξία 100 τιμή με Φ.Π.Α. 118
Σε αξία x; τιμή με Φ.Π.Α. 59.000

$$x = 100 \cdot \frac{59.000}{118} = 59.000 \cdot \frac{1}{1{,}18} = \frac{59.000}{1{,}18} = 50.000$$

Πράγματι: 50.000 · 18% = 9.000, 50.000 + 9.000 = 59.000

$$\text{Γενικά: Αξία Πωλήσεων} = \frac{\text{Τιμή Πώλησης με Φ.Π.Α.18\%}}{1{,}18}$$

Αν ο συντελεστής Φ.Π.Α. είναι 4% ή 8%, τότε ο παρονομαστής γίνεται 1,04 ή 1,08 αντίστοιχα.

2.4.4. Εύρεση του τόσο τοις % ή τοις ‰

Πρόβλημα 1ο. Έμπορος πούλησε εμπορεύματα αντί 120.000 € και κέρδισε 36.000 €. Πόσο τοις εκατό κέρδισε;

Λύση

Κατάταξη:

Για εμπ/τα αξίας 120.000 € το κέρδος είναι 36.000 €
Για εμπ/τα αξίας 100 € το κέρδος είναι x; €

$$x = 36.000 \cdot \frac{100}{120.000} = 30\%$$

Άρα, κέρδισε 30%.

Πρόβλημα 2ο. Ο ιδιοκτήτης ενός διαμερίσματος αξίας 187.500 € πληρώνει για πυρασφάλεια 750 € το έτος. Πόσο τοις % είναι τα ετήσια ασφάλιστρα;

Λύση

Κατάταξη:

Στα 187 500 € πληρώνει 750 € ασφάλιστρα
Στα 1000 € πληρώνει x; € ασφάλιστρα

$$x = 750 \cdot \frac{1000}{187.500} = 4‰$$

Ώστε: Για κάθε 1000 € ο ιδιοκτήτης πληρώνει 4 € για ασφάλιστρα.

Πρόβλημα 3ο. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο αντί 30.000 € και κέρδισε 6.000 €. Πόσο τοις % κέρδισε επί του κόστους αγοράς;

Λύση. Το αυτοκίνητο είχε στοιχίσει στην αντιπροσωπεία: 30.000 - 6.000 = 24.000 €.

Κατάταξη:

Για πώληση 30.000 € έχει κέρδος 6.000 € και κόστος 24.000 €
κέρδος x; € και κόστος 100 €

$$x = 6.000 \cdot \frac{100}{24.000} = 25\%$$

Πρόβλημα 4ο. Εξαγωγέας φρούτων πούλησε ροδάκινα αντί 72.000 € με ζημία 48.000 €. Πόσο τοις % επί του κόστους ζημιώθηκε;

Λύση. ο εξαγωγέας, για να αγοράσει τα ροδάκινα είχε δώσει 72.000 + 48.000 = 120.000 €

Άρα: Για πώληση 72.000 € έχει ζημία 48.000 και κόστος 120.000 €
ζημία x; και κόστος 100 €

$$x = 48.000 \cdot \frac{100}{120.000} = 40\%$$

Προβλήματα ποσοστών

1. Ένας έμπορος πούλησε εμπορεύματα κόστους 22.500 € με κέρδος 28%. α) Πόσα € κέρδισε και β) πόσα € εισέπραξε;
(Απ. α) 6300. β) 28.000)

2. Κάποιος ασφάλισε τα εμπορεύματά του, που τα μετέφερε με πλοίο, προς 4‰ και πλήρωσε 720 € για ασφάλιστρα. Ποια ήταν η αξία των εμπορευμάτων; ***(Απ. 180.000)***

3. Έμπορος πούλησε εμπορεύματα με κέρδος 25%. Ποια ήταν η αξία τους, αν είναι γνωστό ότι κέρδισε 23.500 €; ***(Απ. 94.000)***

4. Οι κτηματομεσίτες, στις αγοραπωλησίες, παίρνουν μεσιτικά 4‰ επί της αξίας των διαμερισμάτων, οικοπέδων, κτλ. Για την πώληση ενός οικοπέδου, αξίας 178.500 € πόσα € θα πάρει ο μεσίτης;
(Απ. 714)

5. Ένα εμπορικό κατάστημα πουλάει τα εμπορεύματά του με έκπτωση 30%. Πόσα € θα πληρώσουμε, αν αγοράσουμε εμπορεύματα αξίας 28.750 € και πόσα € θα είναι η έκπτωση; ***(Απ. 20.125 - 8625)***

6. Έμπορος κερδίζει 25% επί της τιμής αγοράς των εμπορευμάτων του. Πόσα € πρέπει να πουλήσει ένα εμπόρευμα που το αγόρασε 18.500 €;
(Απ. 23.125)

7. Εμπόρευμα πουλήθηκε με ζημία 20% αντί 16.000 €. Πόση ήταν η αξία του εμπορεύματος; ***(Απ. 20.000)***

8. Για εμπόρευμα αξίας 62.500 € πληρώσαμε 50.000 €. Με πόσο τοις % υπολογίστηκε η έκπτωση; ***(Απ. 20%)***

9. Αγόρασε κάποιος ένα διαμέρισμα και ύστερα από δύο χρόνια το πούλησε με κέρδος 40% επί της τιμής της αγοράς. Αν από την πώληση κέρδισε 32.000 €, να βρεθεί η αξία της αγοράς του διαμερίσματος.
(Απ.80.000)

10. Έμπορος αγόρασε 5200 μέτρα ύφασμα προς 10 € το μέτρο και πλήρωσε για μεταφορικά 500 €. Το ύφασμα πουλήθηκε προς 14 € το

μέτρο. Πόσο τοις % κέρδισε: α) επί του κόστους αγοράς και β) επί της τιμής πωλήσεως; ***(Απ. 38,7% - 27,9%)***

11. Αγόρασε κάποιος 8.000 κιλά σιτάρι προς 1,20 € το κιλό. Κατά τη μεταφορά χάθηκε το 5% του σιταριού. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό του υπόλοιπου σιταριού, για να κερδίσει 15%; ***(Απ.2,8 € το κιλό)***

12. Ένας έμπορος αγόρασε 3250 κιλά λάδι προς 2,8 € το κιλό και πλήρωσε: για μεταφορικά 0,10 € το κιλό και για αποθήκευτρα 750 €. Το λάδι το πούλησε προς 3,5 € το κιλό. Το λάδι είχε 1% φύρα. Να βρεθεί αν κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο τοις % επί του κόστους. ***(Απ. κέρδος 10,7‰)***

13. Ένας παραγγελιοδόχος, όταν πηγαίνει σε επαρχιακές πόλεις, παίρνει έξοδα εκτός έδρας 120 € την ημέρα και 2,5% προμήθεια για τα εμπορεύματα που πουλάει. Ύστερα από περιοδεία 24 ημερών πήρε για προμήθειες και έξοδα 5.880 €. Να βρεθεί η αξία των εμπορευμάτων που πούλησε. ***(Απ. 120.000)***

14. Αγόρασε κάποιος ένα οικόπεδο 15 στρεμμάτων και έδωσε για μεσιτικά 3.600 € ο μεσίτης πήρε 2% επί της αξίας του οικοπέδου. Πόσο κόστισε το στρέμμα; ***(Απ. 12.000)***

15. Ασφάλισε κάποιος ένα διαμέρισμα αξίας 200.000 € για 5 έτη με 1,5‰ ετήσια ασφάλιστρα. Επειδή πλήρωσε αμέσως ολόκληρο το ποσό, του χαρίστηκαν ενός έτους ασφάλιστρα. Πλήρωσε επί πλέον για φόρο δημοσίου 14% επί των ασφαλίστρων και 5 € για χαρτόσημο. Πόσα ευρώ πλήρωσε συνολικά; ***(Απ. 1.415)***

16. Έμπορος αγόρασε μια ποσότητα σιταριού. Στην αρχή πούλησε το ένα τέταρτο της ποσότητας με κέρδος 5%. Έπειτα πούλησε άλλο ένα τέταρτο με κέρδος 15% και το υπόλοιπο με ζημία 4,67%. Από την πώληση κέρδισε 5.000 €. Πόσο του κόστισε η αγορά; ***(Απ. 187.617)***

17. Αγόρασε κάποιος δύο κομμάτια ύφασμα. Για το α′ έδωσε 450 € και για το β′ 400 €. Το α′ το πούλησε με ζημία 4,8%. Πόσο τοις % πρέπει

να πουλήσει το β′, για να κερδίσει και από τα δυο κομμάτια 156 €;

(Απ. 44,4%)

18. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων έκανε σε αγοραστή μεταχειρισμένου αυτοκινήτου αξίας 6.000 €, έκπτωση 12%. Τα έξοδα μεταβίβασης κτλ., που βαρύνουν τον αγοραστή, είναι κατά 285 € λιγότερα της έκπτωσης Σε πόσο τοις % επί της τιμής της αγοράς ανέρχεται η έκπτωση και σε πόσο επί της τιμής του κόστους του αγοραστή;

(Απ. 12,6%)

19. Έμπορος αγόρασε 1200 μέτρα ύφασμα προς 5,8 € το μέτρο και πλήρωσε για μεταφορικά 20 €. Το ύφασμα πουλήθηκε προς 7,2 € το μέτρο. Να βρεθεί πόσο τοις % κέρδισε: α) επί του κόστους αγοράς και β) επί της τιμής πωλήσεως.

(Απ. α) 23,7%. β) 19,21%)

20. Έμπορος αγόρασε 2150 κιλά καρπούζι προς 0,32 € το κιλό και πλήρωσε 0,02 € κατά κιλό για μεταφορικά και 100 € για αποθήκευτρα. Το καρπούζι πουλήθηκε προς 0,39 € το κιλό. Κατά την πώληση το καρπούζι παρουσίασε φύρα 2%. Να βρεθεί αν ο έμπορος κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο τοις % επί του κόστους.

(Απ. ζημία 1,12%)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

3.1. Αριθμοί: ανάλογοι προς άλλους, αντίστροφοι και αντιστρόφως ανάλογοι

Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς: 2, 3, 5

Αν πολλαπλασιάσουμε τους πιο πάνω αριθμούς επί τον ίδιο αριθμό, π.χ. επί 5, τότε προκύπτουν οι αριθμοί: 10, 15, 25.

Οι αριθμοί 10, 15, 25 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 2, 3, 5.

Αν τώρα οι αριθμοί 10, 15, 25 πολλαπλασιαστούν επί τον αριθμό 1/5, τότε προκύπτουν οι αριθμοί:

$$10 \cdot \frac{1}{5} = 2, \quad 15 \cdot \frac{1}{5} = 3, \quad 25 \cdot \frac{1}{5} = 5$$

Οι αριθμοί 2, 3, 5 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 10, 15, 25, διότι προκύπτουν από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό.

Ώστε: **Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται ανάλογοι προς άλλους, αν γίνονται από αυτούς όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό.**

Π.χ. οι αριθμοί 28, 40, 48 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 7, 10, 12, γιατί προκύπτουν από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον αριθμό 4, αλλά και οι αριθμοί 7, 10, 12 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 28, 40, 48, γιατί γίνονται από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό 1/4.

Από τα πιο πάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι:

Ο αριθμός 28 προκύπτει από τον αριθμό 7, όταν πολλαπλασιαστεί με 4, αλλά και ο 7 προκύπτει από τον 28, όταν πολλαπλασιαστεί με 1/4.

Οι αριθμοί 7 και 28 λέγονται **ομόλογοι** αριθμοί. Επίσης, οι αριθμοί 10 και 40, καθώς και οι 12 και 48 είναι ομόλογοι αριθμοί.

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{7}{28}=\frac{1}{4} \qquad \frac{10}{40}=\frac{1}{4} \qquad \frac{12}{48}=\frac{1}{4}$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι:

Αν οι αριθμοί x, ψ, ω, ... είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, ..., τότε ο λόγος των ομόλογων αριθμών είναι ο ίδιος για όλους.

Δηλαδή, αν x, ψ, ω είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\lambda$$

Από αυτή τη σχέση έχουμε:

$$x=\lambda\cdot\alpha,\quad \psi=\lambda\cdot\beta,\quad \omega=\lambda\cdot\gamma$$

Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με τη μονάδα, τότε οι αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι.** Π.χ., οι αριθμοί 6 και 1/6 είναι αντίστροφοι, διότι $6 \cdot 1/6 = 1$. Επίσης, το κλάσμα 4/8 έχει αντίστροφο το κλάσμα 8/4, διότι $4/8 \cdot 8/4 = 1$.

Αν τώρα δύο ή περισσότεροι αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους αντίστροφούς τους, τότε οι αριθμοί αυτοί λέγονται **αντιστρόφως ανάλογοι** προς άλλους ισοπληθείς.

Έστω π.χ. οι αριθμοί 3, 4, 5. Οι αντίστροφοί τους είναι: 1/3, 1/4, 1/5. Οι αριθμοί 12, 16, 20 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3, 4, 5 αλλά αντιστρόφως ανάλογοι προς τους 1/3, 1/4, 1/5.

3.2. Προβλήματα μερισμού

3.2.1. Μερισμός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα

Μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ είναι η εύρεση άλλων αριθμών x, ψ, ω,... τέτοιων, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\ldots \quad \text{με} \quad x+\psi+\omega=M$$

Ο αριθμός Μ τον οποίο θέλουμε να μερίσουμε, λέγεται **μεριστέος** αριθμός. Από τις ιδιότητες των αναλογιών είναι γνωστό ότι αν οι αριθμοί x, ψ, ω είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\ldots=\frac{x+\psi+\omega+\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}=\frac{M}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}=\lambda$$

Λύνοντας ως προς x, ψ, ω βρίσκουμε ότι

$$x=\lambda\cdot\alpha \qquad \psi=\lambda\cdot\beta \qquad \omega=\lambda\cdot\gamma$$

Από τα παραπάνω συνάγουμε τον ακόλουθο κανόνα:

Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς άλλους αριθμούς α, β, γ, ..., διαιρούμε το μεριστέο αριθμό Μ με το άθροισμα α + β + γ + ... και με το πηλίκο (= λ) πολλαπλασιάζουμε καθέναν από τους αριθμούς α, β, γ...

Παράδειγμα. Να μεριστεί ο αριθμός 1000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5.

Εάν x, ψ, ω είναι οι άγνωστοι αριθμοί που είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2, 3, 5, τότε θα έχουμε x + ψ + ω = 1000 και επειδή οι x, ψ, ω είναι ανάλογοι προς τους 2, 3 και 5, θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{2}=\frac{\psi}{3}=\frac{\omega}{5}=\frac{x+\psi+\omega}{2+3+5}=\frac{1000}{10}=100$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\frac{x}{2}=100 \text{ και } x=200,\ \frac{\psi}{3}=100 \text{ και } \psi=300,\ \frac{\omega}{5}=100 \text{ και } \omega=500.$$

Επαλήθευση: $x+\psi+\omega=200+300+500=1000.$

3.2.2. Μερισμός σε μέρη ανάλογα ακέραιων αριθμών

Πρόβλημα 1ο. Ένας εργολάβος οικοδομών χρησιμοποίησε (στο ίδιο χρονικό διάστημα) τέσσερις εργάτες, για να σκάψουν ένα πηγάδι και πλήρωσε με τα εξής ημερομίσθια: Ο Α εργάτης πήρε 55 €, ο Β εργάτης πήρε 65 €, ο Γ πήρε 50 € και ο Δ 70 € ο εργολάβος έδωσε συνολικά 4.800 €. Πόσα € θα πάρει ο κάθε εργάτης;

Λύση. Για να βρούμε το μερίδιο κάθε εργάτη, θα πρέπει να μοιράσουμε το ποσό των 4.800 € σε μέρη ανάλογα των ημερομισθίων των εργατών, δηλαδή σε μέρη ανάλογα των αριθμών:

$$55,\ 65,\ 50,\ 70$$

Το άθροισμα των ημερομισθίων είναι:

$$55 + 65 + 50 + 70 = 240 = Α + Β + Γ + Δ$$

Το μεριστέο ποσό είναι 4.800 = Μ

Αν τώρα παραστήσουμε με φ, x, ψ, ω τα τέσσερα μερίδια, θα είναι:

$$\varphi + x + \psi + \omega = 4.800 \text{ και ισχύει η σχέση:}$$

$$\frac{\varphi}{55} = \frac{x}{65} = \frac{\psi}{50} = \frac{\omega}{70} = \frac{\varphi + x + \psi + \omega}{55 + 65 + 50 + 70} = \frac{4.800}{240} = 20$$

Άρα: $\frac{\varphi}{55} = 20$ και $\varphi = 1.100$, $\frac{x}{65} = 20$ και $x = 1.300$

$$\frac{\psi}{50} = 20 \text{ και } \psi = 1.000,\quad \frac{\omega}{70} = 20 \text{ και } \omega = 1.400$$

Ώστε: Ο Α εργάτης θα πάρει 1.100 €
Ο Β εργάτης θα πάρει 1.300 €
Ο Γ εργάτης θα πάρει 1.000 €
Ο Δ εργάτης θα πάρει 1.400 €

Σύνολο: 4.800 €

Πρόβλημα 2ο. Ένα φιλανθρωπικό σωματείο θέλει να μοιράσει 15.000 € σε τρεις πτωχές οικογένειες ανάλογα με τα άτομα κάθε οικογένειας. Η α' οικογένεια έχει 4 άτομα, η β' 6 άτομα και η γ' 10 άτομα. Πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια;

Λύση. Μεριστέος = 15.000, α = 4, β = 6, γ = 10

Για να βρούμε πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια, θα πρέπει να μερίσουμε τον αριθμό 15.000 σε μέρη ανάλογα των αριθμών 4, 6, 10.

Πρακτικός κανόνας μερισμού:

Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ, ..., πολλαπλασιάζουμε το μεριστέο αριθμό Μ με καθέναν από τους αριθμούς α, β, γ, ... και το γινόμενο το διαιρούμε με το άθροισμα α + β + γ + ...

Δηλαδή, ο μερισμός γίνεται με βάση τις σχέσεις:

$$\alpha = \frac{M \cdot \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad \beta = \frac{M \cdot \beta}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad \gamma = \frac{M \cdot \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα, βρίσκουμε ότι:

Η α' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \cdot 4}{4+6+10} = 3.000$ €

Η β' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \cdot 6}{4+6+10} = 4.500$ €

Η γ' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \cdot 10}{4+6+10} = 7.500$ €

3.2.3. Μερισμός σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών

Πρόβλημα 1ο. Να μεριστεί ο αριθμός 250.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 1/2, 3/4, 5/6.

Λύση. Μ = 250.000, α = 1/2, β = 3/4, γ = 5/6.

Για να βρούμε το άθροισμα α + β + γ, τρέπουμε τα ετερώνυμα κλάσματα 1/2, 3/4, 5/6 στα ισοδύναμα ομώνυμα 6/12, 9/12, 10/12, οπότε:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{6}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{25}{12}$$

Μερίζουμε κατόπιν τον αριθμό 250.000 ανάλογα προς τα ομώνυμα κλάσματα 6/12, 9/12, 10/12.

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού έχουμε:

$$\frac{250.000\cdot\frac{6}{12}}{\frac{25}{12}}=\frac{250.000\cdot 6}{25}=60.000$$

$$\frac{250.000\cdot\frac{9}{12}}{\frac{25}{12}}=\frac{250.000\cdot 9}{25}=90.000$$

$$\frac{250.000\cdot\frac{10}{12}}{\frac{25}{12}}=\frac{250.000\cdot 10}{25}=100.000$$

Σύνολο: 250.000 = M

Από τη λύση του πιο πάνω προβλήματος συμπεραίνουμε ότι: **Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών, τρέπουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα ομώνυμα και έπειτα μερίζουμε τον αριθμό Μ ανάλογα προς τους αριθμητές των ομώνυμων κλασμάτων.**

Πρόβλημα 2ο. Ένας θείος άφησε στους ανεψιούς του Α, Β, Γ 6.000.000 €. Στη διαθήκη του όρισε ότι ο Α θα πάρει τα 2/ 5 των χρημάτων, ο Β το 1/3 και ο Γ τα υπόλοιπα. Πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε ανεψιός;

Λύση. $M=6.000.000,\quad \alpha=\frac{2}{5},\quad \beta=\frac{1}{3},\qquad \gamma=;$

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}\qquad \text{Άρα: }\ \gamma=\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$$

Άρα: Ο Α θα πάρει τα $\frac{6}{15}$ των χρημάτων.

Ο Β θα πάρει τα $\frac{5}{15}$ των χρημάτων.

Ο Γ θα πάρει τα $\frac{4}{15}$ των χρημάτων.

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\frac{6.000.000 \cdot 6}{15} = 2.400.000$ €

Ο Β θα πάρει: $\frac{6.000.000 \cdot 5}{15} = 2.000.000$ €

Ο Γ θα πάρει: $\frac{6.000.000 \cdot 4}{15} = 1.600.000$ €

Σύνολο: 6.000.000 €

Πρόβλημα 3ο. Ένας πατέρας όρισε στη διαθήκη του να μοιραστεί η περιουσία του στα παιδιά του α, β, γ, ηλικίας 10, 12 και 15 χρονών, σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα με τις ηλικίες τους. Η περιουσία του ήταν 600 στρέμματα˙ πόσα στρέμματα θα πάρει το κάθε παιδί;

Λύση. Ο μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ, ανάγεται στο μερισμό του Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 1/α, 1/β, 1/γ, οι οποίοι είναι αντίστροφοι των αριθμών α, β, γ.

Οι αντίστροφοι των αριθμών 10, 12, 15, που εκφράζουν τις ηλικίες των παιδιών, είναι 1/10, 1/12, 1/15.

Ο αριθμός Μ = 600 στρέμματα θα μεριστεί ανάλογα προς τα κλάσματα 1/10, 1/12, 1/15, τα οποία εάν τραπούν σε ομώνυμα είναι: 6/60, 5/60, 4/60. Συνεπώς, τα 600 στρέμματα θα μοιραστούν ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5, 4. Είναι 6 + 5 + 4 = 15. Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα βρίσκουμε ότι:

Το α′ παιδί 0α πάρει: $\dfrac{600 \cdot 6}{15} = 240$ στρέμματα

Το β′ παιδί θα πάρει: $\dfrac{600 \cdot 5}{15} = 200$ στρέμματα

Το γ′ παιδί θα πάρει: $\dfrac{600 \cdot 4}{15} = 160$ στρέμματα

Σύνολο: 600 στρέμματα

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο σε ηλικία παιδί πήρε τα περισσότερα στρέμματα, ενώ το μεγαλύτερο παιδί πήρε τα λιγότερα στρέμματα. Τούτο οφείλεται στο ότι η περιουσία μοιράστηκε σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τις ηλικίες των παιδιών.

3.3. Προβλήματα Εταιρείας

3.3.1. Βασικές έννοιες

Για την οργάνωση και τη διοίκηση μιας σύγχρονης επιχείρησης, δεν επαρκεί μόνο η προσωπική εργασία και η εποπτεία ενός ατόμου· χρειάζεται η συμβολή περισσότερων ατόμων. Γι’ αυτό το λόγο, δύο ή περισσότεροι άνθρωποι ενώνουν τα χρήματά τους, για να κάνουν μαζί μια εμπορική, βιομηχανική, κτλ. επιχείρηση, η οποία ονομάζεται **Εταιρεία.** Τα πρόσωπα που συμμετέχουν σε μια εταιρεία ονομάζονται **εταίροι** ή **συνεταίροι.** Τα χρηματικά ποσά που καταθέτουν οι συνεταίροι στην εταιρεία λέγονται **κεφάλαια,** γιατί είναι χρηματικά ποσά που έχουν παραγωγική ικανότητα.

Οι εμπορικές εταιρείες διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

1) Προσωπικές εταιρείες: Προσωπικές εταιρείες είναι οι **ομόρρυθμες** και οι **ετερόρρυθμες** εταιρείες.

2) Κεφαλαιουχικές εταιρείες: Οι κεφαλαιουχικές εταιρείες είναι ο πιο συνηθισμένος εταιρικός τύπος και ονομάζονται **ανώνυμες εταιρείες.** Οι συνεταίροι μιας ανώνυμης εταιρείας ονομάζονται **μέτοχοι,** διότι το κεφάλαιο μιας ανώνυμης εταιρείας διαιρείται σε χρηματικούς τίτλους, που λέγονται **μετοχές.**

3) Μεικτής φύσεως εταιρείες: Αυτές έχουν χαρακτηριστικά και από τις δύο προηγούμενες κατηγορίες. Τέτοιες εταιρείες είναι: α) Οι διάφοροι προμηθευτικοί, οικοδομικοί, γεωργικοί κτλ. **συνεταιρισμοί,** β) **Οι εταιρείες περιορισμένης ευθύνης.**

Οι συνεταίροι ενδέχεται να συμμετέχουν στην εταιρεία όλοι με τα ίδια κεφάλαια· ενδέχεται όμως να συμμετέχουν και με διαφορετικά κεφάλαια, δηλαδή άλλοι με περισσότερα και άλλοι με λιγότερα. Τα κεφάλαια των συνεταίρων μπορεί να μείνουν στην εταιρεία ίσο χρονικό διάστημα, μπορεί όμως να μείνουν και διαφορετικό χρονικό διάστημα.

Τα κέρδη ή οι ζημίες που θα προκύψουν από τις εργασίες μιας εταιρείας μοιράζονται, συνήθως, στους συνεταίρους ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής κάθε εταίρου ή ανάλογα με το χρόνο που μένουν στην εταιρεία τα κεφάλαια.

Τα προβλήματα που έχουν σχέση με τη διανομή των κερδών ή ζημιών στους συνεταίρους μιας εταιρείας ονομάζονται **προβλήματα εταιρείας** και λύνονται όπως ακριβώς και τα προβλήματα μερισμού σε μέρη ανάλογα.

3.3.2. Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής

Πρόβλημα 1ο. Τέσσερα άτομα αποφάσισαν να συνεταιριστούν, ο Α εισέφερε 450.000 €, ο Β 500.000 €, ο Γ 700.000 € και ο Δ 850.000 €. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία είχε πραγματοποιήσει κέρδη 400.000 €. Ποιο είναι το κέρδος κάθε συνεταίρου;

Λύση. Το κέρδος των 400.000 € θα μοιραστεί ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής κάθε συνεταίρου. Δηλαδή πρέπει να μερίσουμε τον αριθμό 400.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 450.000, 500.000, 700.000 και 850.000 ή προς τους αριθμούς 450, 500, 700 και 850. (Τα μέρη του μεριστέου αριθμού δε μεταβάλλονται, αν τα κεφάλαια διαιρεθούν διά του αριθμού 1000).

Μεριστέος = Μ = 400.000

$$Α + Β + Γ + Δ = 450 + 500 + 700 + 850 = 2500$$

Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\dfrac{400.000 \cdot 450}{2500} = 72.000$ €

Ο Β θα πάρει: $\dfrac{400.000 \cdot 500}{2500} = 80.000$ €

Ο Γ θα πάρει: $\dfrac{400.000 \cdot 700}{2500} = 112.000$ €

Ο Δ θα πάρει: $\dfrac{400.000 \cdot 850}{2500} = 136.000$ €

Σύνολο: 400.000 €.

Πρόβλημα 2ο. Τρεις έμποροι συνεταιρίστηκαν. Ο Α εισέφερε 1.500.000 € , ο Β 1.200.000 € και ο Γ 8.000.000 € . Στο τέλος του πρώτου έτους, η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδη 900.000 € . Ο Α, ο οποίος εκτελεί και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας, δικαιούται 10% επί πλέον επί των κερδών. Πόσο είναι το κέρδος κάθε συνεταίρου;

Λύση. Το κέρδος του πρώτου έτους είναι 900.000 € . Ο Α, ως διαχειριστής, παίρνει 10% πριν από τη διανομή των κερδών, δηλαδή 900.000 · 0,1 = 90.000 €. Συνεπώς, το κέρδος που θα διανεμηθεί είναι:

900.000 - 90.000 = 810.000 €

Το κέρδος των 810.000 θα μοιραστεί ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής των συνεταίρων: 1.500.000, 1.200.000 και 8.000.000 ή ανάλογα προς τους αριθμούς: 15 = α, 12 = β και 80 = γ.

Έχουμε: Μ = 810.000 και α + β + γ = 107

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\dfrac{810.000 \cdot 15}{107} = 113.551,40$

Άρα, 113.551,40 + 90.00 = 203.551,40

Ο Β θα πάρει: $\dfrac{810.000 \cdot 12}{107} =$ = 90.841,12

Ο Γ θα πάρει: $\dfrac{810.000 \cdot 80}{107} =$ $= 605.607,48$

Σύνολο: 900.000

Πρόβλημα 3ο. Εταιρεία από δύο πρόσωπα είχε κέρδος 1.330.000 € . Ο Α, που εκτελεί και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας, πήρε πριν από τη διανομή των κερδών τα 18% αυτών και τα υπόλοιπα κέρδη μοιράστηκαν ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής, τα οποία ήταν όπως οι αριθμοί 5 και 9. Να βρεθεί το κεφάλαιο που εισέφερε κάθε συνεταίρος, αν είναι γνωστό ότι το κεφάλαιο και το συνολικό κέρδος του Α ανέρχονται σε 2.750.650 €.

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα την ιδιαίτερη αμοιβή του Α με 18% επί των κερδών.

Στα 100 € κέρδος η αμοιβή είναι 18 €

Στα 1.330.000 € κέρδος η αμοιβή είναι x; €

και $$x = 18 \cdot \frac{1.330.000}{100} = 239.400 \text{ €}$$

Άρα, ο Α πήρε 239.400 € πρόσθετη αμοιβή, γιατί εκτελούσε καθήκοντα διαχειριστή. Το υπόλοιπο κέρδος 1.090.600 (= 1.330.000 - 239.400) θα μοιραστεί ανάλογα προς τους αριθμούς:

$5 = \alpha$ και $9 = \beta$, $\alpha + \beta = 5 + 9 = 14$, $M = 1.090.600$.

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\dfrac{1.090.600 \cdot 5}{14} = 389.500$ €

Ο Β θα πάρει: $\dfrac{1.090.600 \cdot 9}{14} = 701.100$ €

Σύνολο: 1.090.600 €

Το συνολικό κέρδος του Α είναι: 239.400 + 389.500 = 628.900 €

Αφού το κεφάλαιο και το συνολικό κέρδος του Α ανέρχονται σε 2.750.650 €, συμπεραίνουμε ότι το κεφάλαιο που εισέφερε ο Α θα είναι: 2.750.650 - 628.900 = 2.121.750 €. Για να βρούμε τώρα το κεφάλαιο που εισέφερε ο Β, σκεπτόμαστε ως εξής:

Τα 5 μερίδια του Α αποτελούν κεφάλαιο 2.121.750 €
Τα 9 μερίδια του Β αποτελούν κεφάλαιο x; €

και $$x = 2.121.750 \cdot \frac{9}{5} = 3.819.150 \text{ €}$$

Ώστε: Το κεφάλαιο που εισέφερε ο Β ανέρχεται σε 3.819.150 €.

3.3.3. Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τους χρόνους συμμετοχής

Πρόβλημα 1ο. Τρεις έμποροι συνεταιρίστηκαν με τα ίδια κεφάλαια συμμετοχής. Τα χρήματα του Α έμειναν στην εταιρεία ένα έτος, του Β 10 μήνες και του Γ 8 μήνες. Στο τέλος του έτους βρέθηκε κέρδος 3.000.000 €. Πόσα χρήματα πήρε ο κάθε συνεταίρος από το κέρδος;

Λύση. Αφού και οι τρεις συνεταίροι εισέφεραν το ίδιο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι το κέρδος των 3.000.000 € θα μοιραστεί ανάλογα με το χρόνο που τα κεφάλαια έμειναν στην εταιρεία, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς 12, 10 και 8 μήνες.

Έχουμε: $M = 3.000.000$, $\alpha = 12$, $\beta = 10$, $\gamma = 8$ και

Εφαρμόζουμε τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\dfrac{3.000.000 \cdot 12}{30} = 1.200.000$ €

Ο Β θα πάρει: $\dfrac{3.000.000 \cdot 10}{30} = 1.000.000$ €

Ο Γ θα πάρει: $\dfrac{3.000.000 \cdot 8}{30} = 800.000$ €

Σύνολο: 3.000.000 €

Πρόβλημα 2ο. Ένας έμπορος άρχισε μια εμπορική επιχείρηση με κεφάλαιο 6.000.000 €. Τέσσερις μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε το ίδιο κεφάλαιο. Έξι μήνες μετά την πρόσληψη του β' συνεταίρου πήρε και τρίτο συνεταίρο με το ίδιο κεφάλαιο. Όταν συ-

μπληρώθηκε ένα έτος από τη συμμετοχή του τρίτου συνεταίρου, βρέθηκε κέρδος 520.000 €. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;

Λύση. Εύκολα βρίσκουμε ότι το κεφάλαιο του Γ έμεινε στην εταιρεία 12 μήνες, ότι το κεφάλαιο του Β έμεινε 12 + 6 = 18 μήνες και ότι το κεφάλαιο του Α έμεινε 12 + 6 + 4 = 22 μήνες.

Αφού και οι τρεις συνεταίροι εισέφεραν το ίδιο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι το κέρδος των 520.000 € θα μοιραστεί στους τρεις συνεταίρους ανάλογα με το χρόνο που τα κεφάλαια έμειναν στην εταιρεία, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς: 22 = α, 18 = β, 12 = γ.

Έχουμε: Μ = 520.000 και α + β + γ = 22 + 18 + 12 = 52.

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\dfrac{520.000 \cdot 22}{52} = 220.000$ €

Ο Β θα πάρει: $\dfrac{520.000 \cdot 18}{52} = 180.000$ €

Ο Γ θα πάρει: $\dfrac{520.000 \cdot 12}{52} = 120.000$ €

Σύνολο: 520.000 €

3.3.4. Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα κεφάλαια και τους χρόνους συμμετοχής

Πρόβλημα 1ο. Ένας έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με 8.000.000 €. Έξι μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 1.500.000 €. Ύστερα από 8 ακόμη μήνες πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 2.000.000 €. Δύο χρόνια μετά την έναρξη της επιχείρησης βρέθηκε κέρδος 3.310.000 €. Πόσο κέρδος αναλογεί σε κάθε συνεταίρο.

Λύση. Όπως βλέπουμε, στο πρόβλημα αυτό είναι διάφορα και τα κεφάλαια και οι χρόνοι συμμετοχής. Πρέπει λοιπόν το κέρδος να μοιραστεί όχι μόνο ανάλογα προς τα κεφάλαια αλλά και ανάλογα προς το χρόνο συμμετοχής.

Για να λύσουμε το πιο πάνω πρόβλημα, πρέπει να χωρίσουμε το κέρδος σε μερίδια· ένα μερίδιο θα είναι το κέρδος της 1 € σε 1 μήνα. Αν ο Α εισέφερε 8.000.000 € σε 1 μήνα, θα είχε 8.000.000 μερίδια. Αφού όμως εισέφερε 8.000.000 € σε 24 μήνες (εύκολα βρίσκουμε ότι τα κεφάλαια των Α, Β και Γ έμειναν στην εταιρεία 24, 18 και 10 μήνες αντιστοίχως), έχει 8.000.000 · 24 = 192.000.000 μερίδια. Ο Β έχει 1.500.000 · 18 = 27.000.000 μερίδια και ο Γ έχει 2.000.000 · 10 = 20.000.000 μερίδια. Επομένως, ολόκληρο το κέρδος θα χωριστεί σε: 192.000.000 + 27.000.000 + 20.000.000 = 239.000.000 μερίδια. Πρέπει λοιπόν να μερίσουμε το κέρδος των 3.310.000 € σε μέρη ανάλογα των μεριδίων: 192.000.000, 27.000.000 και 20.000.000 ή σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς: 192, 27, 20.

Έχουμε: Μ = 3.310.000 και 192 + 27 + 20 = 239

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\dfrac{3.310.000 \cdot 192}{239} = 2.659.080$ €

Ο Β θα πάρει: $\dfrac{3.310.000 \cdot 27}{239} = 373.933$ €

Ο Γ θα πάρει: $\dfrac{3.310.000 \cdot 20}{239} = 276.987$ €

Σύνολο: 3.310.000 €

Παρατήρηση. Από τη λύση του πιο πάνω προβλήματος συμπεραίνουμε ότι: Στα προβλήματα εταιρείας, στα οποία και τα κεφάλαια και οι χρόνοι είναι διάφοροι, μοιράζουμε, συνήθως, τα κέρδη (ή και τις ζημίες) **ανάλογα προς τα γινόμενα των κεφαλαίων επί τους αντίστοιχους χρόνους** παραμονής των κεφαλαίων στην εταιρεία.

Πρόβλημα 2ο. Ένας έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με 3.000.000 €. Μετά τέσσερις μήνες πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 5.000.000 €. Έξι μήνες αργότερα πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 8.000.000 €. Αφού συμπληρώθηκαν δύο έτη από την έναρξη λειτουργίας της εταιρείας, διαπίστωσαν ότι είχαν κερδίσει 5.680.000 €. Πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε συνεταίρος από τα κέρδη;

Λύση. Για τη λύση του προβλήματος ταξινομούμε τα δεδομένα στον παρακάτω πίνακα:

	Συνεταίροι		
	Α	**Β**	**Γ**
Κεφάλαια	3.000.000	5.000.000	8.000.000
Χρόνοι	24 μην.	20 μην.	14 μην.
Γινόμενα Κεφαλ. x Χρόνοι	72.000.000	100.000.000	112.000.000

Το κέρδος των 5.680.000 € θα μοιραστεί στους συνεταίρους Α, Β και Γ ανάλογα προς τα γινόμενα: Κεφάλαια · Χρόνοι, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς: 72.000.000, 100.000.000, 112.000.000 ή σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς: 72, 100 και 112.

Έχουμε: Μ = 5.680.000 και 72 + 100 + 112 = 284

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\dfrac{5.680.000 \cdot 72}{284} = 1.440.000$ €

Ο Β θα πάρει: $\dfrac{5.680.000 \cdot 100}{284} = 2.000.000$ €

Ο Γ θα πάρει: $\dfrac{5.680.000 \cdot 112}{284} = 2.240.000$ €

Σύνολο: 5.680.000 €

Προβλήματα Μερισμού και Εταιρείας

1. Τρεις εργάτες εργάστηκαν με το ίδιο ημερομίσθιο ο Α εργάστηκε 2 ημέρες, ο Β 3 ημ. και ο Γ 5 ημ. Ο εργοδότης τους έδωσε 400 € να τα μοιράσουν ανάλογα με τις ημέρες που εργάστηκε ο καθένας. Πόσα ευρώ αναλογούν στον καθένα:

(Απ. α) 80, β) 120, γ) 200)

2. Τέσσερις εργάτες έσκαψαν ένα κτήμα και πληρώθηκαν με το ίδιο ημερομίσθιο. Ο α′ εργάσθηκε 6 ημέρες, ο β′ 7 ημέρες, ο γ′ 9 ημέρες και ο δ′ 12 ημέρες. Πήραν και οι τέσσερις μαζί 1.360 €. Πάσα ευρώ αναλογούν σε κάθε εργάτη;

   (Απ. α) 240, β) 280, γ) 360, δ) 480)

3. Θείος άφησε στους τρεις ανεψιούς του 540000 € και όρισε στη διαθήκη του να τα μοιραστούν σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα με τις ηλικίες τους. Ο α′ ήταν 18 χρονών, ο β′ 12 και ο γ′ 9 χρονών. Πόσα ευρώ θα πάρει ο κάθε ανεψιός;

   (Απ. α) 120.000, β) 180.000, γ) 240.000)

4. Τέσσερις αδελφοί πούλησαν ένα οικόπεδο αντί 1.600.000 €. Αν στον Α ανήκε το 1/5 του οικοπέδου, στον Β τα 3/8 αυτού, στον Γ τα 3/10 και στον Δ το υπόλοιπο, πόσα χρήματα αναλογούν στον κάθε αδελφό;

   (Απ. α) 320.000, β) 600.000, γ) 480.000, δ) 200.000)

5. Μοιράστηκαν 36.800 € σε 4 πτωχές οικογένειες ως εξής: Η β′ πήρε τα 2/3 του μεριδίου της α′, η γ′ πήρε το 1/5 του μεριδίου της α′ και β′ μαζί και η δ′ πήρε τα 4/7 του μεριδίου της γ′. Να βρεθεί το μερίδιο κάθε οικογένειας.

   (Απ. α) 16.800, β) 11.200, γ) 5.600, δ) 3.200)

6. Ένας πατέρας όρισε στη διαθήκη του να μοιραστεί η περιουσία του στη σύζυγό του, στην κόρη του και στον γιο του ως εξής: Η κόρη του να πάρει τα 3/4 του μεριδίου της συζύγου και ο γιος τα 3/5 της κόρης. Αν η περιουσία του ήταν 4.400.000 €, να βρεθεί πόσα ευρώ θα πάρει το κάθε μέλος της οικογένειας.

   (Απ. 2.000.000 - 1.500.000 - 900.000)

7. Να μοιραστούν 7.440 € σε 2 εργοδηγούς, 17 τεχνίτες και 30 εργάτες έτσι, ώστε ο κάθε τεχνίτης να πάρει τριπλάσια από κάθε εργάτη και ο κάθε εργοδηγός να πάρει διπλάσια από κάθε τεχνίτη.

   (Απ. εργ. 80, τεχν. 240, εργοδ. 480)

8. Τρεις έμποροι συνεταιρίστηκαν. Ο α′ εισέφερε 120.000 €, ο β′ 80.000 € και ο γ′ 200.000 €. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδος 84.000 €. Ο α′, που εκτελεί καθήκοντα διαχειριστή, δικαιούται 10% επί πλέον από τα κέρδη. Πόσο κέρδος αναλογεί στον κάθε συνεταίρο;

(Απ. α) 31.080, β) 15.120, γ) 37.800)

9. Ποσό 420.000 € μοιράστηκε σε τρία άτομα ανάλογα προς τους αριθμούς 12, 15, 18 και με τα χρήματα που πήραν έκαναν μια εταιρεία, αφού αύξησαν τις εισφορές τους κατά 100.000 € ο καθένας. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδη 300.000 €. Πόσο κέρδος αναλογεί στον κάθε συνεταίρο;

(Απ. α) 88.333,33, β) 100.000, γ) 111.666,67)

10. Έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με κεφάλαιο 150.000 €. Δύο μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε τα 80% του κεφαλαίου του πρώτου. Ύστερα από τρεις ακόμη μήνες πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε τα 4/5 της εισφοράς του β′ συνεταίρου. Όταν συμπληρώθηκε ένα έτος από τη συμμετοχή του τρίτου συνεταίρου, βρέθηκε κέρδος 426.800 €. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;

(Απ. α) 197.808, β) 139.629, γ) 89.363)

11. Τρεις συνεταίροι κέρδισαν από την εταιρεία τους 165.000 €. Τα κεφάλαια που είχαν εισφέρει στην εταιρεία είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 2, 3, ενώ οι χρόνοι παραμονής των κεφαλαίων στην εταιρεία είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 1, 2/3 και 3/4. Να βρεθεί πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος.

(Απ. α) 36.000, β) 48.000, γ) 81.000)

12. Δύο έμποροι συνεταιρίστηκαν με κεφάλαιο 900.000 €. Μετά δύο έτη, αφού κέρδισαν 300.000 €, διέλυσαν εταιρεία. Ο ένας από τους συνεταίρους πήρε 720.000 € για κεφάλαιο και κέρδος. Να βρεθούν το κεφάλαιο και το κέρδος χωριστά που πήρε ο κάθε συνεταίρος.

(Απ. α) κεφ. 540.000, κέρδος 180.000, β) κεφ. 360.000, κέρδος 120.000)

13. Τρεις άνθρωποι συνεταιρίστηκαν με συνολικό κεφάλαιο 1.200.000 €. Ο α′ εισέφερε 450.000 €, ο β′ 330.000 € και ο γ′ το υπόλοιπο. Στο τέλος του πρώτου έτους τα κέρδη ήταν τα 8% του συνολικού κεφαλαίου. Πλήρωσαν φόρο στο Δημόσιο 3% από τα κέρδη και τα υπόλοιπα κέρδη τα μοίρασαν ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής τους. Πόσα ευρώ πήρε ο καθένας από το καθαρό κέρδος;

(Απ. α) 34.920, β) 25.608, γ) 32.592)

14. Δύο έμποροι συνεταιρίστηκαν. Ο α′ εισέφερε 250.000 € και ο β′ 400.000 €. Τέσσερις μήνες αργότερα πήραν και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε κεφάλαιο ίσο προς το κεφάλαιο που εισέφεραν οι δυο πρώτοι μαζί. Όταν συμπληρώθηκε ένα έτος από την έναρξη λειτουργίας της εταιρείας, βρέθηκε κέρδος 325.000 €. Να βρεθεί πόσο κέρδος αναλογεί σε κάθε συνεταίρο, αν είναι γνωστό ότι ο α′, πριν από τη διανομή των κερδών, πήρε 20% από τα κέρδη, διότι εκτελούσε και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας.

(Απ. α) 125.000, β) 96.000, γ) 104.000)

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

4.1. Υπολογισμός του Απλού Τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε Έτη, Εξάμηνα, Μήνες, Ημέρες

Στα προβλήματα του τόκου συμπλέκονται τέσσερα ποσά:

1) Ο **τόκος,** ο οποίος θα συμβολίζεται με το γράμμα **I** (αρχικό της λέξης Interest = τόκος).
2) Το **κεφάλαιο,** το οποίο θα συμβολίζεται με το γράμμα **K.**
3) Το **επιτόκιο,** το οποίο θα συμβολίζεται με το γράμμα **i.**
4) Ο **χρόνος,** ο οποίος θα συμβολίζεται με το **n,** όταν εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, τρίμηνα, με το **μ,** όταν εκφράζεται σε μήνες και με το **ν,** όταν εκφράζεται σε ημέρες.

Για τον υπολογισμό του απλού τόκου διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

4.1.1. Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, τρίμηνα

Στην παράγραφο 1.3 της Εισαγωγής είπαμε ότι: **Επιτόκιο είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο** (π.χ. σε ένα έτος).

Για την εξαγωγή του γενικού τύπου του απλού τόκου βασιζόμαστε στον ορισμό του επιτοκίου και σκεπτόμαστε ως εξής:

Κεφάλαιο 1 νομισματικής μονάδας σε 1 έτος φέρνει τόκο $1 \cdot i$
" 1 " " " 2 έτη " " $2 \cdot i$
" 1 " " " 3 έτη " " $3 \cdot i$
....
....

Κεφάλαιο 1 νομισμ. μονάδας σε n έτη φέρνει τόκο $n \cdot i$

Αν τώρα διαθέτουμε κεφάλαιο K νομισματικών μονάδων, τότε ο συνολικός ετήσιος τόκος θα είναι: $K \cdot n \cdot i$. Συνεπώς, ο συνολικός τόκος (= I) ενός κεφαλαίου (= K), το οποίο τοκίζεται επί n έτη ή εξάμηνα με επιτόκιο i, υπολογίζεται από τον ακόλουθο θεμελιώδη τύπο του απλού τόκου:

$$I = K \cdot n \cdot i$$

Από τον τύπο (4.1) συμπεραίνουμε ότι: **Ο απλός τόκος είναι ευθέως ανάλογος προς το κεφάλαιο, το χρόνο και το επιτόκιο.** Δηλαδή, αν ένα από τα ποσά του β’ μέλους της σχέσης (4.1) διπλασιαστεί, τριπλασιαστεί κτλ., τότε και ο τόκος διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ.

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 10.000 €, το οποίο τοκίστηκε με επιτόκιο 15% για 1, 2, 3 έτη.

Λύση: $K = 10.000$, $i = 0{,}15$ $n = 1, 2, 3$
Για $n = 1$, $I = 10.000 \cdot 1 \cdot 0{,}15 = 1.500$
Για $n = 2$, $I = 10.000 \cdot 2 \cdot 0{,}15 = 3.000$
Για $n = 3$, $I = 10.000 \cdot 3 \cdot 0{,}15 = 4.500$

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 20.000 € , το οποίο τοκίστηκε με 8% το εξάμηνο για δύο έτη και έξι μήνες.

Λύση: $K = 20.000$, $i = 0,08$, $n = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ εξάμηνα
$I = K \cdot n \cdot i = 20.000 \cdot 5 \cdot 0,08 = 8.000$

Παράδειγμα 3. Πόσο τόκο φέρνει κεφάλαιο 20.000 € σε 2 έτη και 6 μήνες με 4% το τρίμηνο;

Λύση: $K = 20.000$, $i = 0,04$, $n = 2 \cdot 4 + 2 = 10$ τρίμηνα
$I = K \cdot n \cdot i = 20.000 \cdot 10 \cdot 0,04 = 8.000$

4.1.2. Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες

Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες, πρέπει να αντικαταστήσουμε το n του τύπου (4.1) με το κλάσμα μ/12 του έτους που αντιπροσωπεύουν οι μήνες. Στην περίπτωση αυτή, ο τόκος υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$I = \frac{K \cdot \mu \cdot i^*}{12} \qquad (4.2)$$

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρνει κεφάλαιο 10.000 € σε 8 μήνες με 12%;

Λύση: $K = 10.000$, $\mu = 8$, $i = 0,12$

$$I = 10.000 \cdot \frac{8}{12} \cdot 0,12 = 800 \text{ €}$$

4.1.3. Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες

Όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, τότε πρέπει να αντικαταστήσουμε το n του τύπου (4.1) με το κλάσμα ν/365 (ή ν/360) του έτους που αντιπροσωπεύουν οι ημέρες. Στην περίπτωση αυτή, ο τόκος υπολογίζεται με τους τύπους:

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot i^*}{365 \text{ ή } 366} \quad \text{για πολιτικό έτος} \qquad (4.3)$$

* Διευκρινίζεται ότι το επιτόκιο είναι ετήσιο.

$$I = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} \quad \text{για μεικτό ή εμπορικό έτος} \qquad (4.4)$$

Για να εφαρμόσουμε τους τύπους (4.3) και (4.4), πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις **τοκοφόρες ημέρες.** Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών ισχύουν διεθνώς τα εξής:

1) Αν θεωρήσουμε τους μήνες με τις πραγματικές τους ημέρες (30 ή 31 και για το Φεβρουάριο 28 ή 29 για δίσεκτο έτος) και το έτος με **365** (ή 366 για δίσεκτο έτος) ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **πολιτικό έτος*.**

2) Αν θεωρήσουμε τους μήνες με τις πραγματικές του ημέρες (30, 31, 28 ή 29) και το έτος με **360** ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **μεικτό έτος.**

3) Αν, τέλος, θεωρήσουμε ότι όλοι οι μήνες έχουν 30 ημέρες και το έτος 360 (= 30 · 12), τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **εμπορικό έτος.**

Σημείωση. Η εφαρμογή του τύπου (4.4), δηλαδή η διαίρεση του Κνi διά του 360 και η διάκριση σε μεικτό και εμπορικό έτος, έχει πλέον ιστορική αξία και είχε επινοηθεί, για να υπολογίζουν με ευκολία τον τόκο. Σήμερα οι Τράπεζες και τα Ταμιευτήρια εφαρμόζουν το **πολιτικό έτος,** δηλαδή τον τύπο (4.3).

Παρατήρηση: Στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και στα ταμιευτήρια των Τραπεζών, για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών, ισχύουν τα εξής: i) Τα χρήματα που καταθέτουν οι πελάτες φέρνουν τόκο από την **επόμενη ημέρα**. ii) Τα χρήματα που δανείζουν οι διάφοροι πιστωτικοί οργανισμοί παράγουν τόκο από την ημέρα που χορηγούνται στους πελάτες.

---

* Το έτος των 365 ημερών (με μία επί πλέον ημέρα κάθε 4 χρόνια) το καθιέρωσε ο Ιούλιος Καίσαρας, ύστερα από εισήγηση του Αλεξανδρινού αστρονόμου Σωσιγένη. Το Ιουλιανό ημερολόγιο επεκτάθηκε στη χρονολόγηση των γεγονότων και δημιούργησε μιαν επί πλέον διαφορά 10 ημερών. Τη διαφορά αυτή τη ρύθμισε το 1582 ο Πάπας Γρηγόριος ο ΙΓ’, ο δημιουργός του Γρηγοριανού ημερολογίου, που χρησιμοποιούμε σήμερα. Τότε, η επόμενη ημέρα της 4ης Οκτωβρίου 1582 αντί 5η Οκτωβρίου γράφτηκε 15η Οκτωβρίου. Υπερπηδήθηκαν δηλαδή 10 ημέρες, για να διορθωθεί το Ιουλιανό ημερολόγιο. Στην Ελλάδα η καθιέρωση του Γρηγοριανού ημερολογίου έγινε το έτος 1923, κατά το οποίο η επόμενη της 16 Φεβρουάριου ορίστηκε η 1η Μαρτίου. Υπερπηδήθηκαν δηλαδή 13 ημέρες, για να διορθωθεί το παμπάλαιο Ιουλιανό ημερολόγιο.

Πίνακας 4.1
Αριθμοί ημερών του έτους, για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών

ΗΜΕΡΑ	Ι	Φ	Μ	Α	Μ	Ι	Ι	Α	Σ	Ο	Ν	Δ	ΗΜΕΡΑ
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	255	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	…	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	…	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	…	90	…	151	…	212	243	…	304	…	365	31

Σημείωση: Για τα δίσεκτα έτη, κάθε αριθμός του πίνακα, από την 1η Μαρτίου και έπειτα, πρέπει να αυξάνεται κατά μία μονάδα.

Παράδειγμα. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 δρχ., το οποίο τοκίστηκε με 15%: α) Από 27.1.1990 έως 10.4.1990· πολιτικό έτος. β) Από 20.6.1990 έως 31.8.1990· μεικτό έτος. γ) Από 1.2.1992 έως 1.4.1992· πολιτικό έτος.

Λύση. Πριν εφαρμόσουμε τους τύπους (4.3) και (4.4), πρέπει να υπολογίσουμε τις τοκοφόρες ημέρες. Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών χρησιμοποιούμε τον Πίνακα 4.1. Ο πίνακας αυτός δίνει αθροιστικά τον αριθμό των ημερών του έτους από την 1η Ιανουαρίου έως την 31η Δεκεμβρίου. Για να βρούμε τις τοκοφόρες ημέρες μεταξύ δύο ημερομηνιών εκτελούμε μια απλή αφαίρεση. Ο υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών του ανωτέρω παραδείγματος, με τη βοήθεια του Πίνακα 4.1, γίνεται ως εξής:

α)	Από	1.1.1990	έως	10.4.1990	έχουμε:	100	ημέρες
	"	1.1.1990	"	27.1.1990	"	-27	"
Άρα:	Από	27.1.1990	"	10.4.1990	"	73	τοκοφόρες ημέρες.
β)	Από	1.1.1990	έως	31.8.1990	έχουμε:	243	ημέρες
	"	1.1.1990	"	20.6.1990	"	-171	"
Άρα:	Από	20.6.1990	"	31.8.1990	"	72	τοκοφόρες ημέρες.
γ)	Από	1.1.1992	έως	1.4.1992	έχουμε:	92	ημέρες*
	"	1.1.1992	"	1.2.1992	"	-32	"
Άρα:	Από	1.2.1992	"	1.4.1992	"	60	τοκοφόρες ημέρες.

Επομένως, θα έχουμε:

$$K = 100.000, \quad i = 0,15, \quad \nu = 73, \quad \nu = 72, \quad \nu = 60.$$

Αντικαθιστώντας τώρα στους τύπους (4.3) και (4.4) βρίσκουμε αντίστοιχα:

---

* Το 1992 : 4 = 498, άρα δίσεκτο έτος. Συνεπώς, θα έχουμε:
Ιαν. 31 + Φεβρ. 29 + Μαρτ. 31 + Απρ. 1 = 92 ημέρες

α) $$I = \frac{100.000 \cdot 73 \cdot 0{,}15}{365 = 5 \cdot 73} = 3.000 \text{ δρχ.}$$

β) $$I = \frac{100.000 \cdot 72 \cdot 0{,}15}{360 = 5 \cdot 72} = 3.000 \text{ δρχ.}$$

γ) $$I = \frac{100.000 \cdot 60 \cdot 0{,}15}{366} = 2.459 \text{ δρχ.}$$

4.2. Υπολογισμός του απλού τόκου με τους Τοκάριθμους, τους Σταθερούς Διαιρέτες και τους Σταθερούς Πολλαπλασιαστές

Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους του β’ μέλους των τύπων:

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365} \qquad \text{και} \qquad I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360}$$

με το επιτόκιο i, τότε προκύπτουν οι τύποι:

$$I = \frac{K \cdot \nu}{\frac{365}{i}} \qquad \text{και} \qquad I = \frac{K \cdot \nu}{\frac{360}{i}}$$

Το γινόμενο Κ · ν (= Κεφάλαιο · τοκοφόρες ημέρες) ονομάζεται **Τοκάριθμος** και συμβολίζεται με το γράμμα **Ν.** Το πηλίκο 365 : i (ή 360 : i), το οποίο για ορισμένα επιτόκια είναι **ακέραιος αριθμός,** συμβολίζεται με το γράμμα **Δ** και ονομάζεται **Σταθερός Διαιρέτης.** Συνεπώς, για τον υπολογισμό του τόκου μπορεί να εφαρμοστεί και ο παρακάτω τύπος:

$$I = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} = \frac{\textbf{Τοκάριθμος}}{\textbf{Σταθερός Διαιρέτης}} = \frac{N}{\Delta} \qquad (4.5)$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 30.000 €, το οποίο τοκίστηκε: α) με ετήσιο επιτόκιο 12% για 100 ημέρες και έτος μεικτό και β) με ετήσιο επιτόκιο 10% για 73 ημέρες και έτος πολιτικό.

Λύση: Κ = 30.000, ν = 100, i = 0,12, ν = 73, i = 0,10
α) Δ = 360 : 0,12 = 3.000. β) Δ = 365 : 0,10 = 3.650

Αντικαθιστώντας στον τύπο (4.5) βρίσκουμε:

$$I = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} = \frac{30.000 \cdot 100}{3.000} = 1.000 \text{ €}$$

$$I = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} = \frac{30.000 \cdot 73}{3.650 = 50 \cdot 73} = 600 \text{ €}$$

Πίνακας 4.2
Σταθεροί Διαιρέτες

i	360 : i = Δ	i	365 : i = Δ
0,06	6.000	0,05	7.300
0,08	4.500	0,10	3.650
0,09	4.000	0,125	2.920
0,10	3.600	0,20	1.825
0,12	3.000		
0,15	2.400		

Παρατήρηση: Η εφαρμογή του τύπου (4.5) παρέχει ευχέρεια υπολογισμών, αλλά πρέπει τα πηλίκα 360 : i και 365 : i να δίνουν πάντοτε ακέραιο αριθμό. Στον Πίνακα 4.2 παραθέτουμε ενδεικτικά ορισμένους σταθερούς διαιρέτες.

Εύρεση τόκου με τη μέθοδο των Σταθερών Πολλαπλασιαστών. Οι τύποι υπολογισμού του τόκου:

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \quad \text{ή} \quad I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365}$$

μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$I = K \cdot \nu \cdot \frac{i}{360} = K \cdot \nu \cdot \Pi$$

$$I = K \cdot \nu \cdot \frac{i}{365} = K \cdot \nu \cdot \Pi \qquad (4.7)$$

Τα πηλίκα i : 360 = Π και i : 365 = Π ονομάζονται **σταθεροί πολλαπλασιαστές.** Από τους τύπους (4.6) και (4.7) συνάγεται ότι: Για να υπολογίσουμε τον τόκο ενός κεφαλαίου πολλαπλασιάζουμε τον **Τοκάριθμο** (= Κ · ν) επί το **Σταθερό πολλαπλασιαστή** (= Π). Η μέθοδος των Σταθερών Πολλαπλασιαστών εφαρμόζεται, όταν ο εκτοκισμός γίνεται με Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές (Η/Υ). Συγκεκριμένα ο Σταθερός Πολλαπλασιαστής είναι καταχωρισμένος σε μια μνήμη του Η/Υ και αφού υπολογιστεί ο τοκάριθμος, ο υπολογισμός του τόκου γίνεται αυτομάτως: Τοκάριθμος επί το Σταθερό Πολλαπλασιαστή.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 1.000.000 €, το οποίο τοκίστηκε επί 100 ημέρες με επιτόκιο 14,5% και έτος πολιτικό.

Λύση: Κ = 1.000.000, ν = 100, i = 0,145
Ο Σταθερός Πολλαπλασιαστής είναι: Π = 0,145 : 365 = 0,00039726.
Αντικαθιστούμε στον τύπο (4.7) και βρίσκουμε:

$$I = 1.000.000 \cdot 100 \cdot 0{,}00039726 = 39.726 \text{ €}.$$

Πίνακας 4.3
Σταθεροί Πολλαπλασιαστές

Επιτόκια (i)	Π = i : 360	Π = i : 365
0,06	0,0001667	0,0001644
0,08	0,0002222	0,0002192
0,09	0,0002500	0,0002466
0,10	0,0002778	0,0002740
0,12	0,0003333	0,0003288
0,14	0,0003889	0,0003836
0,15	0,0004167	0,0004109

Στον Πίνακα 4.3 παραθέτουμε ενδεικτικά ορισμένους Σταθερούς Πολλαπλασιαστές.

4.3. Υπολογισμός συνολικού τόκου πολλών κεφαλαίων

Υποθέτουμε ότι κεφάλαια K_1, K_2, ..., K_μ τοκίζονται αντίστοιχα για ν_1, ν_2, ..., ν_μ ημέρες με το ίδιο επιτόκιο i. Ο συνολικός τόκος των δοσμένων κεφαλαίων θα αποτελείται από το άθροισμα των τόκων κάθε κεφαλαίου, δηλαδή:

$$I_{ο\lambda} = I_1 + I_2 + \ldots + I_\mu$$

ή

$$I_{ο\lambda} = \frac{K_1 \cdot \nu_1 \cdot i}{365} + \frac{K_2 \cdot \nu_2 \cdot i}{365} + \ldots + \frac{K_\mu \cdot \nu_\mu \cdot i}{365} =$$

$$= \frac{i \cdot \left(K_1 \cdot \nu_1 + K_2 \cdot \nu_2 + \ldots + K_\mu \cdot \nu_\mu\right)}{365} = \frac{i \cdot \Sigma K\nu}{365} \qquad (4.8)$$

Αν τώρα το επιτόκιο είναι «κατάλληλο» για σταθερό διαιρέτη, τότε χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$I_{ο\lambda} = \frac{K_1 \cdot \nu_1 + K_2 \cdot \nu_2 + \ldots + K_\mu \cdot \nu_\mu}{\Delta} = \frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_\mu}{\Delta} \qquad (4.9)$$

όπου: N_1, N_2, ..., N_μ = Τοκάριθμοι και Δ = σταθερός διαιρέτης.

Παράδειγμα: Ο υπάλληλος Υ κατέθεσε στην Τράπεζα Τ, με ετήσιο επιτόκιο* 15%, στις 9/2/1996 20.000 δρχ., στις 22/3/1996 25.000 δρχ. και την 21/5/1996 30.000 δρχ. Στις 30/6/1996 ο Υ έκανε ανάληψη 50.000 δρχ. Στη συνέχεια, ο Υ κατέθεσε 30.000 δρχ. στις 22/9/1996 και 40.000 δρχ. την 1/11/1996. Να βρεθεί το ποσό (υπόλοιπο) που θα εμφανίζει ο λογ/σμός του Υ στις 31/12/1996, αν είναι γνωστό ότι: α) η Τράπεζα υπολογίζει τους τόκους των καταθέσεων ταμιευτηρίου στις 30 Ιουνίου και 31 Δεκεμβρίου

---

* Στις 29.06.1999, το επιτόκιο Καταθέσεων Ταμιευτηρίου, στις Εμπορικές τράπεζες ήταν 8%.

και β) ο φόρος του Δημοσίου επί των τόκων των καταθέσεων ανέρχεται σε 15%· έτος πολιτικό.

Λύση: Στις Τράπεζες και στα Ταμιευτήρια, για τις **«Καταθέσεις Ταμιευτηρίου»**[*], υπολογίζουν τους τόκους δύο φορές το χρόνο: Στις 30 Ιουνίου και στις 31 Δεκεμβρίου· εφαρμόζουν δε το **πολιτικό έτος.** Στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο υπολογίζουν τους τόκους στις 31 Δεκεμβρίου κάθε χρόνου.

Κατά τη διάρκεια του εξαμήνου γίνονται **καταθέσεις** και **αναλήψεις,** χωρίς να υπολογίζονται οι τόκοι. Στις 30 Ιουνίου υπολογίζονται οι **τοκοφόρες ημέρες** για το κάθε υπόλοιπο και στη συνέχεια οι αντίστοιχοι **τοκάριθμοι.** Στις 30 Ιουνίου αθροίζεται η στήλη «Τοκάριθμοι», το άθροισμα των τοκαρίθμων πολλαπλασιάζεται με το ισχύον επιτόκιο και το γινόμενο διαιρείται με το 365. Έτσι, προκύπτουν οι τόκοι που έχουν παραχθεί κατά τη διάρκεια του πρώτου εξαμήνου κάθε έτους. Οι τόκοι του α' εξαμήνου συνήθως κεφαλαιοποιούνται. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για το β' εξάμηνο.

Πίνακας 4.4

Ημερομηνία	Καταθέσεις	Αναλήψεις	Υπόλοιπο (Κ)	Τοκοφ. ημ. (ν)	Τοκάριθμοι (Κ·ν)
09/02/1996	20.000	-	20.000	42	840.000
22/03/1996	25.000	-	45.000	60	2.700.000
21/05/1996	30.000	-	75.000	40	3.000.000
30/06/1996	-	50.000	25.000	-	-
30/06/1996	*Τόκοι*		*+2.680= Τόκοι = (6.540.000 · 0,15)/366*		
30/06/1996	*Φόρος 15% επί τόκων*		*-402*		
30/06/1996			27.278		
30/06/1996	*Υπόλοιπο*		*27.278*	*84*	*2.291.352*
22/09/1996	30.000	-	57.278	40	2.291.120
01/11/1996	40.000	-	97.278	60	5.836.680
31/12/1996	*Τόκοι*		*+ 4.270 =(10.419.152 · 0,15)/366*		
31/12/1996	*Φόρος 15% επί τόκων*		*-640*		
31/12/1996	*Υπόλοιπο*		*100.908*		

* Για τα διάφορα είδη των καταθέσεων βλέπε στην παράγραφο 4.6 αυτού του Κεφαλαίου

Ο Πίνακας 4.4 επεξηγεί πλήρως την ακολουθούμενη διαδικασία εκτοκισμού. Δηλαδή, το υπόλοιπο 20.000 δρχ. παράγει τόκο από 10/2/96 έως και 22/3/96, δηλαδή για 42 ημέρες. Υπολογίζουμε τον τοκάριθμο 840.000 (= 20.000 x 42) και τον καταχωρίζουμε στη στήλη «Τοκάριθμοι" του Πίνακα 4.4. Επίσης, το υπόλοιπο 45.000 παράγει τόκο από 23/3/1996 έως και 21/5/96, δηλαδή 60 ημέρες. Υπολογίζουμε πάλι τον τοκάριθμο 2.700.000 (= 45.000 x 60) και τον καταχωρίζουμε στη στήλη «Τοκάριθμοι». Τέλος, το υπόλοιπο 75.000 παράγει τόκο από 22/5/1996 έως και 30/6/1996, δηλαδή για 40 ημέρες και δίνει τοκάριθμο 3.000.000, ο οποίος καταχωρίζεται στη στήλη «Τοκάριθμοι».

Στις 30/6/1996, για τον εκτοκισμό (= υπολογισμός τόκων), αθροίζουμε τους τοκάριθμους, το άθροισμά τους (= 6.540.000) πολλαπλασιάζουμε με το επιτόκιο 0,15 (15%) και το γινόμενο διαιρούμε με το 366 και βρίσκουμε τους τόκους 2.680, οι οποίοι καταχωρίζονται προσθετικά στη στήλη «Υπόλοιπο». Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το φόρο επί των τόκων 402 (= 2.680 x 15%), ο οποίος καταχωρίζεται αφαιρετικά στη στήλη «Υπόλοιπο». Κατά συνέπεια, το βιβλιάριο καταθέσεων του Υ, στις 30/6/1996, δείχνει «Υπόλοιπο» 27.278 δρχ.

Η ίδια ακριβώς διαδικασία ακολουθείται και κατά το β' εξάμηνο και, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 4.4, στις 31/12/1996 το βιβλιάριο καταθέσεων του Υ εμφανίζει «Υπόλοιπο» 100.908 δρχ.

4.4. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστό το τελικό κεφάλαιο (αυξημένο κατά τους τόκους του κεφάλαιο)

Στον απλό τόκο, ονομάζουμε **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** (Amount) ενός κεφαλαίου ή **αυξημένο** κατά τους τόκους του κεφάλαιο, το άθροισμα του **αρχικού κεφαλαίου** αυξημένο κατά τον τόκο που έχει παραχθεί στο τέλος μιας χρονικής περιόδου.

Αν παραστήσουμε με το K_0 το αρχικό κεφάλαιο και με το K_n το τελικό κεφάλαιο, με βάση τον πιο πάνω ορισμό, θα έχουμε:

α) Αν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη:

$$K_n = K_0 + I = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i \qquad (4.10)$$

β) Αν τώρα ο χρόνος δίνεται σε μήνες:

$$K_\mu = K_0 + \frac{K_0 \cdot \mu \cdot i}{12} \qquad (4.11)$$

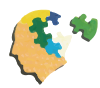
γ) Αν, τέλος, ο χρόνος δίνεται σε ημέρες:

$$K_\nu = K_0 + \frac{K_0 \cdot \nu \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \qquad (4.12)$$

ή με σταθερούς διαιρέτες:

$$K_\nu = K_0 + \frac{K_0 \cdot \nu}{\Delta} \qquad (4.13)$$

Παρατήρηση: Με την τελική αξία ενός κεφαλαίου σχετίζεται το εξής πρόβλημα: Σε πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ.;



Για να βρούμε ύστερα από πόσο χρόνο, ένα κεφάλαιο που τοκίζεται με απλό τόκο, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ. αρκεί να αντικαταστήσουμε σε έναν από τους παραπάνω τύπους όπου $K_\nu = 2K_0$, ή $K_\nu = 3K_0$, κλπ.

Έτσι, αν στον τύπο (4.13) θέσουμε όπου $K_\nu = 2K_0$ θα έχουμε:

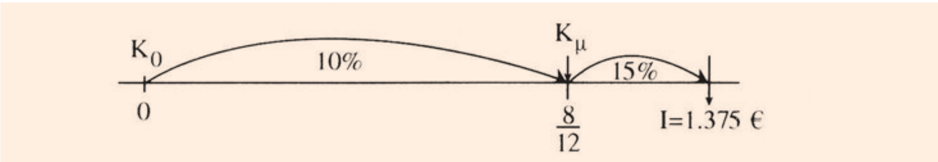
$$2K_0 = K_0 + \frac{K_0 \cdot \nu}{\Delta} \quad \text{ή} \quad K_0 = \frac{K_0 \cdot \nu}{\Delta}, \quad \text{οπότε} \quad \nu = \Delta$$

$$3K_0 = K_0 + \frac{K_0 \cdot \nu}{\Delta} \quad \text{ή} \quad 2K_0 = \frac{K_0 \cdot \nu}{\Delta}, \quad \text{οπότε} \quad \nu = 2\Delta$$

Ώστε: Κεφάλαιο, τοκισμένο με απλό τόκο, διπλασιάζεται σε τόσες ημέρες όσες και ο σταθερός διαιρέτης, τριπλασιάζεται σε αριθμό ημερών διπλάσιο του σταθερού διαιρέτη.

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαιο τοκίστηκε με 10% επί 8 μήνες και το τοκοκεφάλαιο τοκίστηκε πάλι με 15% και έδωσε μηνιαίο τόκο 1.375 €. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο;

Λύση:



Έστω K_μ το τοκοκεφάλαιο που τοκίστηκε με 15% και έδωσε μηνιαίο τόκο 1.375 € Δηλαδή:

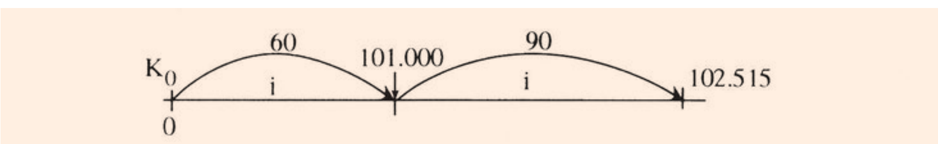
$$\frac{K_\mu \cdot 1 \cdot 0{,}15}{12} = 1.375, \text{ οπότε: } K_\mu = 110.000$$

Αντικαθιστώντας τώρα στον τύπο (4.11) έχουμε:

$$110.000 = K_0 + \frac{K_0 \cdot 8 \cdot 0{,}10}{12}, \text{ οπότε } K_0 = 103.125\ €$$

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο τοκίστηκε επί 60 ημέρες και έγινε μαζί με τους τόκους του 101.000 €. Το τοκοκεφάλαιο 101.000 € τοκίστηκε πάλι επί 90 ημέρες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε μαζί με τους τόκους του 102.515 €. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο και το επιτόκιο˙ έτος μεικτό.

Λύση:



Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, το κεφάλαιο των 101.000 €, που τοκίστηκε επί 90 ημέρες, έφερε τόκο:

$$102.515 - 101.000 = 1.515 = I$$

Αντικαθιστούμε τώρα στον τύπο $I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360}$ και βρίσκουμε το επιτόκιο. Δηλαδή:

$$1.515=\frac{101.000\cdot 90\cdot i}{360} \quad \text{και} \quad i=0,06.$$

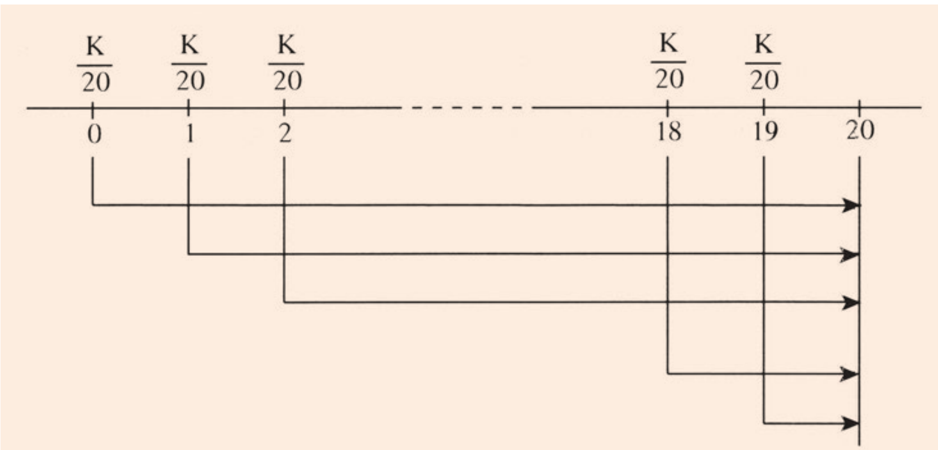
Από τη σχέση:

$$K_\nu=K_0+\frac{K_0\cdot\nu\cdot i}{360} \quad \text{θα βρούμε το αρχικό κεφάλαιο}$$

$$101.000=K_0+\frac{K_0\cdot 60\cdot 0,06}{360} \quad \text{και} \quad K_0=100.000$$

Παράδειγμα 3ο. Ο κ. Α.Β. αγόρασε ένα οικόπεδο αξίας 6.000.000 € και συμφώνησε να δώσει σήμερα 4.000.000 € μετρητά και το υπόλοιπο να το εξοφλήσει με 20 μηνιαίες δόσεις. Το ετήσιο τραπεζικό επιτόκιο είναι 30%. Να υπολογιστούν οι μηνιαίες δόσεις τις οποίες θα πληρώνει ο κ. Α.Β.

Λύση. Πρώτος Τρόπος. (Ισες Δόσεις). Έστω K το οφειλόμενο ποσό και i το ετήσιο επιτόκιο. Κατασκευάζουμε το ακόλουθο σχήμα:



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει:

$$\textbf{Σύνολο Τόκων}=\frac{K}{20}\cdot 20\cdot\frac{i}{12}+\frac{K}{20}\cdot 19\cdot\frac{i}{12}+\frac{K}{20}\cdot 18\cdot\frac{i}{12}+\ldots+$$

$$+\frac{K}{20}\cdot 2\cdot\frac{i}{12}+\frac{K}{20}\cdot 1\cdot\frac{i}{12}=\frac{K}{20}\cdot\frac{i}{12}(20+19+18+\ldots+2+1)=$$

$$=\frac{K}{20}\cdot\frac{i}{12}(1+2+\ldots+18+19+20)$$

Το εντός της παρενθέσεως άθροισμα αποτελεί άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου και βρίσκεται με τον τύπο:

$$\Sigma = \frac{(\alpha + \tau) \cdot \nu}{2} \qquad (4.14)$$

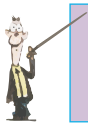
όπου **α** = 1ος μήνας, **τ** = τελευταίος μήνας και **ν** = πλήθος όρων (μηνών). Κατά συνέπεια, θα έχουμε:

$$\textbf{Σύνολο Τόκων} = \frac{K}{20} \cdot \frac{(1+20)20}{2} \cdot \frac{i}{12} = \mathbf{K} \cdot \frac{\mathbf{1+20}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{12}} = \qquad (4.15)$$

$$= 2.000.000 \cdot \frac{1+20}{2} \cdot \frac{0,30}{12}$$

$$= 2.000.000 \cdot 10,5 \cdot 0,025 = 525.000$$

Συνεπώς, η μηνιαία δόση θα είναι:
Μηνιαία Δόση = (2.000.000 + 525.000) : 20 = **126.250**
Γενικός τύπος υπολογισμού συνολικών τόκων:



$$\mathbf{I_{o\lambda}} = \mathbf{K}\left(\frac{\mathbf{1+\tau}}{\mathbf{2}}\right) \cdot \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{12}} \qquad (4.16)$$

K = οφειλόμενο ποσό
1 = 1^{ος} μήνας
τ = τελευταίος μήνας
i = ετήσιο επιτόκιο

Δεύτερος Τρόπος (Άνισες Δόσεις). Ο τρόπος αυτός ανταποκρίνεται πλήρως στην **Αρχή της Οικονομικής ισοδυναμίας**. Έτσι, θα έχουμε:

$$\textbf{Μηνιαία Δόση} = \frac{\mathbf{K}}{\boldsymbol{\mu}} + \frac{\mathbf{K}}{\boldsymbol{\mu}} \cdot \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{12}} \cdot \boldsymbol{\mu} \qquad (4.17)$$

Όπου: Κ = Οφειλόμενο ποσό
μ = μήνες
i = ετήσιο τραπεζικό επιτόκιο

Κ : μ = 2.000.000 : 20 = 100.000
i : 12 = 0,30 : 12 = 0,025 και μ = 1, 2, 3, ..., 20
Κατά συνέπεια, θα έχουμε:

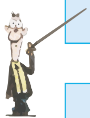
Δόση	$\frac{K}{20} + \frac{K}{20} \cdot \frac{0,30}{12} \cdot \mu$	$= \frac{K}{20}$ + Τόκοι = Δόσεις
$1^{η}$	100.000 + 100.000 · 0,025 · 1	= 100.000 + 2.500 = 102.500
$2^{η}$	100.000 + 100.000 · 0,025 · 2	= 100.000 + 5.000 = 105.000
$3^{η}$	100.000 + 100.000 · 0,025 · 3	= 100.000 + 7.500 = 107.500
.	....	....
.	....	....
$19^{η}$	100.000 + 100.000 · 0,025 · 19	= 100.000 + 47.500 = 147.500
$20^{η}$	100.000 + 100.000 · 0,025 · 20	= 100.000 + 50.000 = 150.000
	Σύνολο:	2.000.000 + 525.000 = 2.525.000

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι οι δόσεις ακολουθούν αριθμητική πρόοδο με λόγο ω = 2.500. Συνεπώς, αν στην πρώτη δόση (= 102.500) προσθέσουμε το λόγο (= 2.500), βρίσκουμε τη 2η δόση. Αν στη 2η δόση (= 105.000) προσθέσουμε το λόγο (= 2.500), βρίσκουμε την τρίτη δόση κ.ο.κ.

4.5. Προβλήματα στα οποία δίνεται το κεφάλαιο ελαττωμένο κατά τον τόκο του

Στις εμπορικές συναλλαγές, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες ο δανειζόμενος ένα χρηματικό ποσό δεν εισπράττει ολόκληρο το ποσό που δανείζεται, γιατί ο δανειστής (πιστωτής) παρακρατεί συνήθως τον τόκο του κεφαλαίου που δανείζει, οπότε ο δανειζόμενος (χρεώστης) εισπράττει ένα κεφάλαιο που είναι ελαττωμένο κατά τον τόκο του. Στην περίπτωση αυτή δημιουργούνται τα εξής προβλήματα: α) η εύρεση του ελαττωμένου κεφαλαίου ή β) η εύρεση του αρχικώς δανεισθέντος κεφαλαίου.

Αν παραστήσουμε με το K_0 το αρχικό κεφάλαιο που δανείστηκε ο χρεώστης για μ μήνες (ή ν ημέρες) με επιτόκιο i, και με το $K_ε$ το ελαττωμένο κεφάλαιο (δηλαδή το κεφάλαιο το οποίο εισέπραξε ο χρεώστης από τον πιστωτή μετά την αφαίρεση του τόκου), τότε το ελαττωμένο κατά τον τόκο του κεφαλαίο θα βρεθεί από τις σχέσεις:



$$K_0 - \frac{K_0 \cdot \mu \cdot i}{12} = K_\varepsilon, \quad K_0 > K_\varepsilon \tag{4.18}$$

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot \nu \cdot i}{360 \text{ ή } 365} = K_\varepsilon, \quad K_0 > K_\varepsilon \tag{4.19}$$

Παράδειγμα 1ο. Μια εταιρεία δανείστηκε από τον εισοδηματία Ε ένα χρηματικό ποσό με επιτόκιο 20% για έξι μήνες και συμφωνήθηκε να κρατηθούν προκαταβολικά οι τόκοι. Η εταιρεία εισέπραξε 90.000 €. Ποιο χρηματικό ποσό θα επιστρέψει στο τέλος των έξι μηνών;

Λύση: $K_0 = ;$ $i = 0{,}20$, $\mu = 6$, $K_\varepsilon = 90.000$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (4.18) βρίσκουμε:

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot 6 \cdot 0{,}20}{12} = 90.000 \quad \text{και} \quad K_0 = 100.000$$

Παράδειγμα 2ο. Στις 19 Φεβρουάριου ο έμπορος Ε δανείστηκε ένα χρηματικό ποσό με τη συμφωνία να το εξοφλήσει την 20ή Απριλίου του ίδιου έτους. Ο πιστωτής κράτησε προκαταβολικά τον τόκο του ποσού που δάνεισε με 8% και ο Ε εισέπραξε 44.400 €. Ποιο είναι το οφειλόμενο ποσό; Έτος μεικτό.

Λύση: $\nu = 60$, $i = 0{,}08$, $K_\varepsilon = 44.400$, $K_0 = ;$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (4.19) βρίσκουμε:

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot 60 \cdot 0,08}{360} = 44.400 \quad \text{και} \quad K_0 = 45.000\ €$$

4.6. Είδη Καταθέσεων

Ανάλογα με τους όρους της κατάθεσης και με τη χρονική διάρκεια, οι καταθέσεις διακρίνονται σε: α) **Καταθέσεις Ταμιευτηρίου**, β) **Καταθέσεις Όψεως**, γ) **Καταθέσεις με προειδοποίηση**, δ) **Καταθέσεις Προθεσμίας**, ε) **Καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό**, ζ) **Καταθέσεις τρεχούμενων λογαριασμών.**

4.7. Καταθέσεις Ταμιευτηρίου

Οι Εμπορικές Τράπεζες (Εμπορική, Ιονική, Εθνική, Τράπεζα Πίστεως κτλ.), οι Κτηματικές Τράπεζες, η Αγροτική Τράπεζα, το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων δέχονται καταθέσεις σε πρώτη ζήτηση, οι οποίες ονομάζονται Καταθέσεις Ταμιευτηρίου.

Η κατηγορία αυτή των καταθέσεων καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των τραπεζικών καταθέσεων και αποτελεί βασική πηγή για την άσκηση της πιστοδοτικής λειτουργίας των τραπεζών. Είναι η πιο δημοφιλής μορφή καταθέσεων, γι’ αυτό προσελκύονται οικονομίες μεγάλου αριθμού ατόμων με μικρά εισοδήματα.

Άνοιγμα Λογαριασμού. Κατά την αρχική κατάθεση συμπληρώνεται ειδική καρτέλα και εκδίδεται Γραμμάτιο Εισπράξεως και **Βιβλιάριο Ταμιευτηρίου,** το οποίο παραδίδεται στον καταθέτη. Στην καρτέλα αναγράφονται όλα τα στοιχεία του καταθέτη: Ονοματεπώνυμο, διεύθυνση και άλλα στοιχεία της αστυνομικής ταυτότητας ή του διαβατηρίου. Στην καρτέλα τίθεται υπόδειγμα υπογραφής του καταθέτη. Στη συνέχεια, το όνομα του καταθέτη καταχωρίζεται στο **Βιβλίο Μητρώου** και με βάση αυτή την καταχώριση ο ανοιγμένος λογαριασμός παίρνει **Αριθμό.** Ο αριθμός αυτός καταχωρίζεται ως πρώτο στοιχείο στην καρτέλα και αναγράφεται και στο βιβλιάριο του καταθέτη.

Κατάθεση (Deposit). Κατά το άνοιγμα του λογαριασμού και εφόσον διενεργείται νέα κατάθεση, συμπληρώνεται το **«Γραμμάτιο Εισπράξεως»*** και μέσω του συστήματος «ON LINE» γίνεται ενημέρωση του «Βιβλιαρίου Καταθέσεων» (Passbook Savings accounts)**.** Στο «Γραμμάτιο Εισπράξεως» αναγράφεται ο κωδικός του υποκαταστήματος στο οποίο έγινε η οικονομική πράξη, η ημερομηνία και ο αριθμός του λογαριασμού, το ονοματεπώνυμο και το ποσό της κατάθεσης. Το «Γραμμάτιο Εισπράξεως» υπογράφεται από τον καταθέτη, ο οποίος παραλαμβάνει το βιβλιάριο ενημερωμένο.

Εκτός από μετρητά μπορεί να κατατεθούν στο λογαριασμό και επιταγές. Στην περίπτωση αυτή, στο «Γραμμάτιο Εισπράξεως» πρέπει να καταχωρίζονται: α) το ποσό των μετρητών και β) το ποσό των επιταγών. Για τις επιταγές πρέπει να εξακριβώνεται η συνέχεια των οπισθογραφήσεων.

Ανάληψη (Withdrawal)**.** Για την ανάληψη μέρους ή ολόκληρου του ποσού της κατάθεσης εκδίδεται **«Ένταλμα Πληρωμής»,**** στο οποίο αναγράφονται: το υποκατάστημα όπου έγινε η πράξη, η ημερομηνία, ο αριθμός του λογαριασμού, το όνομα του καταθέτη και το ποσό της ανάληψης. Το «Ένταλμα Πληρωμής» υπογράφεται από τον πελάτη και αναγράφονται σ' αυτό τα στοιχεία της ταυτότητας και ο αριθμός τηλεφώνου του πελάτη. Ταυτόχρονα, ενημερώνεται και το βιβλιάριο καταθέσεών του, το οποίο πρέπει απαραιτήτως να προσκομίζεται, όταν ο πελάτης θέλει να κάνει ανάληψη.

---

* Βλέπε «Γραμμάτιο Εισπράξεως» της Τράπεζας «Τ» στις επόμενες σελίδες.

** Βλέπε «Ένταλμα Πληρωμής» της Τράπεζας «Τ» στις επόμενες σελίδες.

ΤΡΑΠΕΖΑ "Τ" **ΓΡΑΜΜΑΤΙΟ ΕΙΣΠΡΑΞΕΩΣ**

ΑΡΙΘ. ΠΡΑΞΗΣ	ΤΑΥΤΟΤ. ΠΡΑΞΗΣ	ΠΟΣΟ (Αριθμητικώς)

ΚΑΤ/ΜΑ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	Γ.Κ.	ΑΡΙΘ. Λ/ΣΜΟΥ	ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΠΕΛΑΤΗ	ΣΥΝ.ΠΟΣΟ ΔΡΧ.
				Α. ΑΝΔΡΕΟΥ	

ΕΥΡΩ

ΠΟΣΟ (Ολογράφως)

ΚΑΘΕ ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΕΠΙΤΑΓΗΣ ΓΙΝΕΤΑΙ ΟΡΙΣΤΙΚΗ ΜΟΝΟ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΙΣΠΡΑΞΗ ΤΗΣ

ΣΥΝΟΛΑ ΕΠΙΤΑΓΩΝ ΚΑΤΑ VALEUR						ΜΕΤΡΗΤΑ

Ο ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ
Α. ΑΝΔΡΕΟΥ
(Υπογραφή)

ΤΡΑΠΕΖΑ "Τ" **ΕΝΤΑΛΜΑ ΠΛΗΡΩΜΗΣ**

ΑΡΙΘ. ΠΡΑΞΗΣ	ΤΑΥΤΟΤ. ΠΡΑΞΗΣ	ΠΟΣΟ (Αριθμητικώς)

ΚΑΤ/ΜΑ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	Γ.Κ.	ΑΡΙΘ. Λ/ΣΜΟΥ	ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΠΕΛΑΤΗ	ΣΥΝ.ΠΟΣΟ ΔΡΧ.
				Β. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ	

ΕΥΡΩ

ΠΟΣΟ (Ολογράφως)

ΕΛΑΒΕ Ο
Β. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
(Υπογραφή)

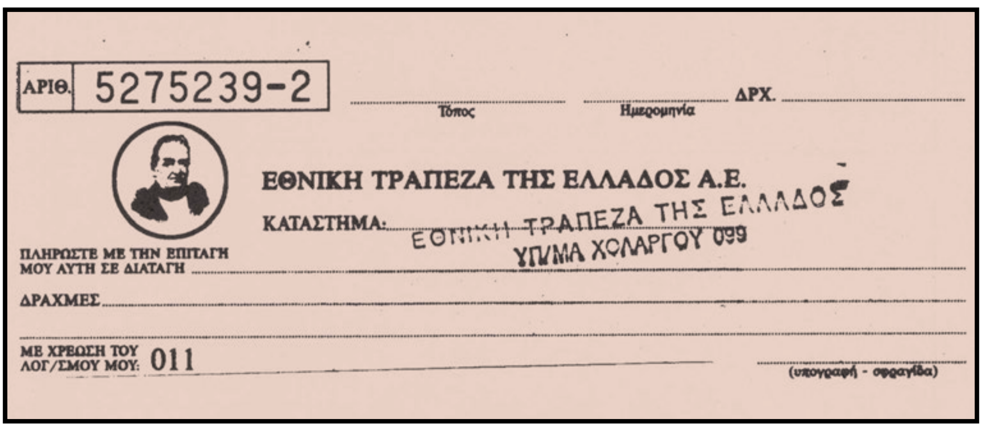
Μετά την καταχώριση της κατάθεσης ή της ανάληψης το υπόλοιπο που προκύπτει κάθε φορά θα πρέπει να είναι ίσο με το υπόλοιπο που εμφανίζει το βιβλιάριο του πελάτη.

Κλείσιμο λογαριασμού. Σε περίπτωση που ο καταθέτης αναλαμβάνει ολόκληρο το υπόλοιπο του λογαριασμού με τους τόκους και θέλει να κλείσει το λογαριασμό του, υπολογίζονται οι τόκοι που αναλογούν στο διάστημα από την ημερομηνία του τελευταίου εκτοκισμού έως την ημερομηνία κλεισίματος του λογαριασμού, και το νέο υπόλοιπο αποδίδεται στο δικαιούχο.

Εκτοκισμός (= Υπολογισμός τόκων). Στις καταθέσεις υπολογίζονται τόκοι από την επόμενη εργάσιμη ημέρα της κατάθεσης· η ημέρα της ανάληψης δε θεωρείται τοκοφόρος. Οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται και ανατοκίζονται την επόμενη ημέρα του υπολογισμού των τόκων και ο λογαριασμός του καταθέτη θα παρουσιάζει πιστωτικό υπόλοιπο, το οποίο θα συνεχίσει στο εξής να είναι τοκοφόρο.

Τοκοφόρος ημερομηνία (Valeur). Ο όρος «τοκοφόρος ημερομηνία ή Valeur (Βαλέρ)» έχει την έννοια της ημερομηνίας, ύστερα από την οποία το ποσό που κατατέθηκε σε λογαριασμό κατάθεσης είναι έντοκο.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΤΑΓΗΣ



ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟΥ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΙΟΥ

	ΚΑΤ/ΜΑ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	ΑΙΤ.	ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ	Ε	
1								1
2								2
3								3
4								4
5								5
6								6
7								7
8								8
9								9
10								10
11								11
12								12
13								13
14								14
15								15
16								16

ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΤΗΛΗΣ (ΑΙΤ.)

Κ Μ Ε	ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΜΕ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ	Τ Ο Κ	ΤΟΚΟΙ
Κ Ε Π	ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΕΠΙΤΑΓΗΣ	Α Ν Κ	ΑΝΤΙΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑΘΕΣΗΣ
Κ Χ Β	ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΧΩΡΙΣ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ	Α Ν Α	ΑΝΤΙΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΑΛΗΨΗΣ
Κ Χ Ρ	ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΗ	Κ Λ Σ	ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ
Α Μ Ε	ΑΝΑΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΜΕ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ	Ε Μ Β	ΕΜΒΑΣΜΑ
Α Χ Β	ΑΝΑΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΧΩΡΙΣ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ	Μ Τ Φ	ΜΕΤΑΦΟΡΑ
Α Χ Ρ	ΑΝΑΛΗΨΗ ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΗ	Α Κ Ε	ΑΚΥΡΩΣΗ ΕΠΙΤΑΓΗΣ
		Μ Σ Θ	ΜΙΣΘΟΔΟΣΙΑ
		Σ Ν Τ	ΣΥΝΤΑΞΗ

4.8. Καταθέσεις Όψεως

Με τον όρο «Καταθέσεις όψεως» δηλώνεται ότι η υποχρέωση της Τράπεζας για απόδοση των καταθέσεων αυτών είναι άμεση και σε **πρώτη ζήτηση** από το δικαιούχο.

Κατά το άνοιγμα του λογαριασμού, συμπληρώνεται το προβλεπόμενο δελτίο και εξετάζονται με προσοχή τα στοιχεία που αναγράφονται σ' αυτό.

Δηλαδή: α) Η ιδιότητα του πελάτη, η πίστη και η οικονομική του κατάσταση. β) Αν έχει πραγματική επαγγελματική εγκατάσταση και εφόσον πρόκειται για ιδιώτη, αν η κύρια κατοικία του βρίσκεται στην περιοχή του υποκαταστήματος στο οποίο ανοίγεται ο λογαριασμός, γ) Αν για το συγκεκριμένο πελάτη δεν υπάρχουν δυσμενείς πληροφορίες.

Ο καταθέτης που επιθυμεί να κινήσει το λογαριασμό του με επιταγές, ζητάει από την Τράπεζα να τον εφοδιάσει με στέλεχος (μπλοκ) επιταγών. Έτσι, ο καταθέτης ενεργεί αναλήψεις με τις επιταγές, οι οποίες σύρονται εις βάρος του λογαριασμού του **«Καταθέσεις Όψεως».**

Όταν παραλαμβάνει το στέλεχος των επιταγών υπογράφει απόδειξη, στην οποία αναγράφονται οι αριθμοί των επιταγών του στελέχους και απαλλάσσει την τράπεζα από κάθε ευθύνη. Ο αριθμός των επιταγών αρχικά είναι περιορισμένος. Πριν από τη χορήγηση νέου στελέχους (μπλοκ) επιταγών, διαπιστώνεται ότι έγινε καλή χρήση των προηγούμενων επιταγών, δηλαδή ότι οι επιταγές που εκδόθηκαν έχουν πληρωθεί και ότι δεν έχουν εκδοθεί ακάλυπτες επιταγές*. Ο αριθμός των επιταγών αναγράφεται στην καρτέλλα του πελάτη, για να γίνεται εύκολα ο απαραίτητος έλεγχος του αριθμού της επιταγής.

Σε περίπτωση έκδοσης ακάλυπτων επιταγών από τον καταθέτη κλείνει οριστικά ο λογαριασμός του και ειδοποιείται αμέσως με συστημένη επιστολή ο πελάτης για την επιστροφή των αχρησιμοποίητων φύλλων του μπλοκ των επιταγών που βρίσκονται στα χέρια του, ενώ παράλληλα κινείται η προβλεπόμενη διαδικασία αναγγελίας των ακάλυπτων επιταγών που εκδόθηκαν. Επίσης δεν επιτρέπεται να χορηγηθεί νέο μπλοκ επιταγών σε δικαιούχο λογ/σμού όψεως, αν έχει εκδώσει ακάλυπτες επιταγές, παρά μόνο μετά από παρέλευση 12 μηνών από την έκδοση της τελευταίας ακάλυπτης επιταγής.

Για τις Καταθέσεις Όψεως έχουμε:

1) Κλιμακωτό επιτόκιο, το οποίο αυξάνεται με το ύψος του λογαριασμού.

2) Πληρωμή των τόκων κάθε εξάμηνο.

---

* Επιταγές χωρίς αντίκρισμα.

3) Αποστολή κάθε μήνα αντίγραφου κίνησης του λογαριασμού.
4) Αποστολή των Επιταγών που πληρώνονται στη διεύθυνση του δικαιούχου.
5) Χορήγηση επιταγών υπο όρους.

Η πίστωση των άτοκων λογαριασμών όψεως με τα ποσά που καταθέτονται γίνεται με Valeur (τοκοφόρος ημερομηνία) την ίδια ημέρα που πραγματοποιείται η κατάθεση και όχι την επόμενη εργάσιμη ημέρα, όπως συμβαίνει με τους λογαριασμούς των έντοκων καταθέσεων. Η Χρέωση των λογαριασμών όψεως για τα ποσά των επιταγών που έχουν εκδοθεί εις βάρος του, σύρονται με Valeur την ημέρα αγοράς τους από την τράπεζα ή άλλο πιστωτικό ίδρυμα.

4.9. Καταθέσεις Ταμιευτηρίου με προειδοποίηση

Οι Τράπεζες και οι πιστωτικοί οργανισμοί μπορούν να δέχονται καταθέσεις ταμιευτηρίου με προειδοποίηση (συνήθως 3 μηνών), που πραγματοποιούν φυσικά πρόσωπα και νομικά πρόσωπα ιδιωτικού δικαίου μη κερδοσκοπικού χαρακτήρα. Ειδικότεροι όροι:

α) Οι καταθέσεις αυτής της μορφής εμφανίζονται στο γενικό λογαριασμό «Καταθέσεις ταμιευτηρίου με προειδοποίηση».

β) Στους καταθέτες αυτής της μορφής παραδίδεται βιβλιάριο διαφορετικής εξωτερικής εμφάνισης από αυτήν του συνηθισμένου βιβλιαρίου των καταθέσεων απλού ταμιευτηρίου.

γ) Οι καταθέτες δεν μπορούν να προβαίνουν σε αναλήψεις παρά μόνο όταν καταθέσουν στην Τράπεζα έγγραφη προειδοποίηση τριών (3) τουλάχιστον μηνών πριν από την ημερομηνία της ανάληψης.

Οι λογαριασμοί των καταθέσεων με προειδοποίηση εκτοκίζονται την 30ή Ιουνίου και 31η Δεκεμβρίου κάθε χρόνου. Οι τόκοι που προκύπτουν μπορούν να αναλαμβάνονται από τους δικαιούχους χωρίς προειδοποίηση μέσα στο επόμενο εξάμηνο, διαφορετικά κεφαλαιοποιούνται.

Σε περίπτωση που οι καταθέτες έχουν μια έκτακτη ανάγκη, και κατά την κρίση των διευθυντών των υποκαταστημάτων, επιτρέπεται η μερική ή ολική απόδοση της κατάθεσης, χωρίς έγγραφη προειδοποίηση ή πριν συμπληρωθεί το τρίμηνο από τη λήψη της έγγραφης προειδοποίησης.

Στην περίπτωση αυτή, ο καταθέτης υποχρεούται να καταβάλει τους τόκους, οι οποίοι υπολογίζονται επί του ποσού που αναλαμβάνει, με επιτόκιο 6% το χρόνο, για τρίμηνο χρονικό διάστημα.

4.10. Καταθέσεις Προθεσμίας

Οι Εμπορικές Τράπεζες, το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων δέχονται Προθεσμιακές Καταθέσεις διάρκειας μεγαλύτερης των τριών (3) μηνών.

Ως «Προθεσμιακή Κατάθεση» νοείται η κατάθεση η οποία διενεργείται μεταξύ του καταθέτη και της Τράπεζας και κατά την οποία συμφωνείται ότι θα αποδοθεί αυτή μετά από παρέλευση ορισμένου χρονικού διαστήματος και σε τακτή μάλιστα προθεσμία.

Οι καταθέσεις προθεσμίας διακρίνονται σε:

α) Καταθέσεις προθεσμίας από 3 έως 6 μήνες. Περιλαμβάνονται οι καταθέσεις, οι οποίες έχουν ως ελάχιστο χρονικό όριό τους τρεις (3) μήνες και φτάνουν τους έξι (6) μήνες.

β) Καταθέσεις προθεσμίας από έξι (6) μήνες έως ένα (1) έτος. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται οι καταθέσεις, οι οποίες έχουν σαν ελάχιστο χρονικό όριο τους έξι (6) μήνες και φτάνουν τους 12 μήνες.

γ) Καταθέσεις προθεσμίας ενός (1) έτους και πάνω.

Οι Τράπεζες, για τις προθεσμιακές καταθέσεις σε δραχμές και σε συνάλλαγμα, υποχρεώνονται να εκδίδουν **«Ομολογία Προθεσμιακής Κατάθεσης»**, χωρίς να επιτρέπουν τη χορήγηση βιβλιαρίων καταθέσεων. Ως απόδειξη της διενέργειας προθεσμιακής κατάθεσης παραδίνουν υποχρεωτικά στον καταθέτη απόδειξη - ομολογία. Για την κατάθεση εκδίδεται «Γραμμάτιο Εισπράξεως» και για την εξόφληση «Ένταλμα Πληρωμής». Η ανάληψη κάθε ποσού από το κεφάλαιο της κατάθεσης γίνεται απαραίτητα με την προσκόμιση της ομολογίας και η οποία μετά την τελική εξόφληση μετατρέπεται σε «Ένταλμα Πληρωμής».

Ο εκτοκισμός και η απόδοση των τόκων των προθεσμιακών καταθέσεων από τις εμπορικές τράπεζες, γίνεται στη λήξη της προθεσμίας των καταθέσεων. Ο εκτοκισμός γίνεται με βάση την ημερομηνία της κατάθεσης.

Τα επιτόκια των προθεσμιακών καταθέσεων, τα οποία ίσχυαν στην Εμπορική Τράπεζα κατά τον Ιούλιο του 1999 ήταν:

Από 3-6 μήνες:	9,25%
Από 6-9 μήνες:	9%
Για 1 έτος και πάνω :	9%

Απόδοση τόκων. Όταν γίνεται συμφωνία ότι οι τόκοι θα καταβάλονται κάθε εξάμηνο, σημειώνεται πάνω στην ομολογία ο όρος «τόκος καταβλητέος ανά εξάμηνο». Όταν όμως γίνεται συμφωνία ότι οι τόκοι θα ανατοκίζονται σημειώνεται η ένδειξη «ΕΠΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΩ». Στην περίπτωση αυτή, οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται και εκτοκίζονται με το αρχικό ποσό της κατάθεσης.

Για τις προθεσμιακές καταθέσεις με «Πιστοποιητικά Καταθέσεων» καθορίζονται οι εξής όροι:

α) Έκδοση από τα πιστωτικά ιδρύματα τίτλων στον κομιστή (πιστοποιητικά καταθέσεων), που είναι ελεύθερα διαπραγματεύσιμοι.

β) Ελάχιστο επιτρεπόμενο όριο κατάθεσης. Το επιτόκιο είναι διαπραγματεύσιμο.

γ) Η διάρκεια της κατάθεσης είναι από 3 - 18 μήνες.

4.11. Καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό (Joint Account)

Κατάθεση σε κοινό λογαριασμό είναι η χρηματική κατάθεση, η οποία τηρείται στο όνομα δύο ή περισσότερων προσώπων από κοινού, με τον όρο ο κάθε δικαιούχος να μπορεί να κάνει μερική ή ολική χρήση του λογαριασμού χωρίς τη σύμπραξη του άλλου ή των άλλων συνδικαιούχων.

Επιτρέπεται στις τράπεζες να δέχονται καταθέσεις μόνιμων κατοίκων του εξωτερικού σε ευρώ (ή σε συνάλλαγμα) σε κοινό λογαριασμό με προθεσμία ή ταμιευτηρίου υπό προειδοποίηση.

Στις καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό μπορεί να προστεθεί ο όρος ότι σε περίπτωση θανάτου οποιουδήποτε από τους δικαιούχους, η κατάθεση και ο λογαριασμός που δημιουργήθηκαν θα περιέχονται αυτοδικαίως στους λοιπούς συνδικαιούχους.

Κάθε φυσικό πρόσωπο, από τη στιγμή που γίνεται συνδικαιούχο κατάθεσης σε κοινό λογ/σμό, αποκτά ευθύ, άμεσο και αυτοτελές δικαίωμα στην κατάθεση.

Σημείωση. Τα επιτόκια καταθέσεων σε συνάλλαγμα, την 29.6.1999 ήταν: Για το Δολλάριο ($) 4%, για το Γερμανικό Μάρκο (D.M.) 1,9%, για τη Στερλίνα (£) 4%.

4.12. Τρεχούμενοι Λογαριασμοί Καταθέσεων

Οι Τρεχούμενοι Λογαριασμοί Καταθέσεων (Τ.Λ.Κ.) είναι είδος λογαριασμών καταθέσεων, οι οποίοι ανήκουν στην κατηγορία των λογαριασμών καταθέσεων **«σε πρώτη ζήτηση»**, δηλαδή ο δικαιούχος τους μπορεί να καταθέτει ή να κάνει ανάληψη ποσών οποτεδήποτε. Οι Τ.Λ.Κ. αποτελούν συνδυασμό των καταθέσεων ταμιευτηρίου και των καταθέσεων όψεως.

Μόνο φυσικά πρόσωπα που δεν είναι έμποροι μπορούν ν’ ανοίξουν Τ.Λ.Κ. Για το άνοιγμα ενός Τ.Λ.Κ. είναι υποχρεωτική η υποβολή από τον καταθέτη στην τράπεζα υπεύθυνης δήλωσης του Ν. 1599/1986 με την οποία δηλώνει ότι:

1) Δεν είναι έμπορος.
2) Κατά το τελευταίο δωδεκάμηνο δεν έχει εκδώσει επιταγές χωρίς αντίκρισμα.
3) Δεν τηρεί άλλο Τ.Λ.Κ., εκτός από τους προβλεπόμενους (δηλαδή έναν απλό κι έναν κοινό Τ.Λ.Κ.).
4) Δε θα χρησιμοποιήσει τον Τ.Λ.Κ. για εμπορικούς σκοπούς.

Οι πληρωμές από Τ.Λ.Κ. μπορεί να γίνονται με επιταγές ή με εντολές. Στο δικαιούχο χορηγείται μπλοκ επιταγών.

Εφόσον το επιθυμεί ο πελάτης, η τράπεζα είναι υποχρεωμένη να του στέλνει ανά τρίμηνο αντίγραφο κίνησης του Τ.Λ.Κ.

Ερωτήσεις

1. Τι είναι καταθέσεις ταμιευτηρίου; Πώς γίνεται: το «άνοιγμα λογαριασμού», η «κατάθεση» η «ανάληψη» και το «κλείσιμο» σε ένα λογαριασμό ταμιευτηρίου; Πώς γίνεται ο εκτοκισμός στις καταθέσεις ταμιευτηρίου;
2. Τι είναι «καταθέσεις προθεσμίας»;
3. Τι είναι «καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό»;
4. Τι είναι «τρεχούμενοι λογαριασμοί καταθέσεων»;

Προβλήματα απλού τόκου

1. Τοκίστηκαν τα εξής κεφάλαια:

α) 15.000	€	από	1η	Ιαν/ρίου	έως	10 Φεβ/ρίου
β) 20.000	"	"	20	"	"	19 "
γ) 3.000	"	"	25	"	"	24 "

Να βρεθεί ο συνολικός τόκος, αν το επιτόκιο είναι 8% και το έτος μεικτό. **(Απ. 286,67)**

2. Τόκισε κάποιος (με απλό τόκο) ένα χρηματικό ποσό πριν από έξι (6) χρόνια. Τα δύο πρώτα χρόνια ο τόκος υπολογίστηκε με 5% και τα υπόλοιπα χρόνια με 7%. Στο τέλος των 6 ετών εισέπραξε για τόκους και κεφάλαιο 138.000 €. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που τοκίστηκε;

(Απ. 100.000)

3. Να υπολογιστεί το ποσό που θα εμφανίζει ο λογαριασμός του καταθέτη Κ στις 30/6/2002 από τις «καταθέσεις - αναλήψεις» που έγιναν σε μία Τράπεζα με επιτόκιο 15%, αν είναι γνωστό ότι το βιβλιάριο καταθέσεων του Κ εμφάνιζε την 31/12/2001 «υπόλοιπο» 20.500 € και ότι κατά τη διάρκεια του 2002 έγιναν οι ακόλουθες οικονομικές πράξεις:

1 Απριλίου	Κατάθεση	€	20.000
20 "	Ανάληψη	"	11.000
31 Μαΐου	Κατάθεση	"	10.000

Έτος πολιτικό. **(Απ. 41.821,71)**

4. Ο έμπορος Ε κατέθεσε σε μια Τράπεζα ένα χρηματικό ποσό Χ με απλό τόκο 12%. Ύστερα από 27 μήνες ο Ε απέσυρε το ποσό που είχε συγκεντρωθεί και αγόρασε ομόλογα, τα οποία του αποφέρουν ετήσιο τόκο 15%. Αν είναι γνωστό ότι από τα ομόλογα ο Ε έχει ετήσιο εισόδημα 19.050 €, να βρεθεί το ποσό Χ. **(Απ. 100.000)**

5. Δύο κεφάλαια, από 10.000 € το καθένα, τοκίστηκαν με κοινό επιτόκιο 6%. Έως σήμερα, το πρώτο έδωσε τόκο 300 € και το δεύτερο 100 €. Σε πόσο χρόνο (ημέρες) από σήμερα, ο συνολικός τόκος του πρώτου κεφαλαίου θα είναι διπλάσιος του συνολικού τόκου του δεύτερου κεφαλαίου;

6. Ο εισοδηματίας Ε αγόρασε ένα ακίνητο, αξίας 9.000.000 €. Το ακίνητο είναι επιβαρημένο με ενυπόθηκο δάνειο 3.000.000 € με 10% το χρόνο. Ο ετήσιος φόρος ανέρχεται σε 60.000 €. Για επισκευές και λοιπά έξοδα απαιτούνται 40.000 €. Αν το ετήσιο ενοίκιο ανέρχεται σε 1.300.000 €, με ποιο επιτόκιο τοκίζεται το κεφάλαιο που αντιπροσωπεύει το ακίνητο;
(Απ. i = 0,10)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Ε θέλει να πουλήσει το ακίνητο και να τοποθετήσει τα 9.000.000 € σε μια Τράπεζα, με προθεσμία ενός έτους και με επιτόκιο 20%. Τι θα συμβουλεύατε να κάνει ο Ε;

7. Δάνεισε κάποιος, με απλό τόκο, 24.000 €. Το επιτόκιο του δανείου συμφωνήθηκε στην αρχή 5% και ύστερα από μερικές ημέρες έγινε 4%. Ύστερα από πόσες ημέρες (από την αρχή του δανείου) άλλαξε το επιτόκιο, αν είναι γνωστό ότι το σύνολο των τόκων στο τέλος του έτους ήταν 1.010 €; Έτος μεικτό. **(Απ. 75 ημ.)**

8. Δάνεισε κάποιος ένα χρηματικό ποσό Κ. Το 1/3 του ποσού το δάνεισε για 2 χρόνια και 4 μήνες με 8% και το υπόλοιπο για 3 χρόνια και 20 ημέρες με 10%, και εισέπραξε και από τα δύο ποσά συνολικό τόκο 15.955,55 €. Να βρεθεί το ποσό Κ. **(Απ. 60.000)**

9. Ο έμπορος Ε τόκισε το 1/6 του κεφαλαίου του με 9% και το υπόλοιπο με 2%. Το β' τμήμα του κεφαλαίου έφερε ετήσιο τόκο 300 € περισσότερο από το α' τμήμα. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που τόκισε ο Ε;
(Απ. 180.000)

10. Κεφάλαιο τοκίστηκε επί 10 μήνες και έγινε μαζί με τους τόκους του 12.600 €. Το τοκοκεφάλαιο 12.600 € τοκίστηκε επί 2 έτη και 6 μήνες, με το ίδιο επιτόκιο, και έγινε μαζί με τους τίκους του 14.490 €. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιο το επιτόκιο;
(Απ. 12.000 - 0,06)

11. Κεφάλαια 40.000 € και 30.000 € τοκίστηκαν με δύο διαφορετικά επιτόκια και έδωσαν συνολικό ετήσιο τόκο 5.900 €. Αν ο ετήσιος τόκος του πρώτου κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος του ετήσιου τόκου του δεύτερου κατά 500 €, με ποια επιτόκια τοκίστηκαν τα πιο πάνω κεφάλαια;

(Απ. 0,08 - 0,09)

12. Δύο κεφάλαια τοκίστηκαν επί 9 μήνες· το πρώτο με 6% και το δεύτερο με 7% και έδωσαν συνολικό τόκο 4.500 €. Αν ο τόκος του β' κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος του τόκου του α' κεφαλαίου κατά 1.800 €, ποια είναι τα κεφάλαια που τοκίστηκαν; **(Απ. 30.000 - 60.000)**

13. Ο καταθέτης Κ κατάθεσε στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 60.000 δρχ. στις 31/1/1996 και 40.000 την 1/3/1996. Στις 30/4/1996 καταχωρίστηκε στο βιβλιάριο καταθέσεων του Κ συνολικός τόκος 1.625 δρχ. Με ποιο επιτόκιο υπολογίστηκαν οι τόκοι των καταθέσεων; Έτος μεικτό.

(Απ. 0,075)

14. Κεφάλαια 20.000 €, 40.000 € και 55.000 € τοκίστηκαν αντίστοιχα επί 40, 60 και 80 ημέρες με αντίστοιχα επιτόκια 5,5%, 7%, 9%. Να υπολογιστεί το μέσο επιτόκιο. Έτος μεικτό. **(Απ. 0,08)**

15. Ο έμπορος Ε κατέθεσε 7.500 € με ετήσιο επιτόκιο 6% και ύστερα από ορισμένους μήνες απέσυρε κεφάλαιο και τόκο, για να δανείσει όλο το ποσό με ετήσιο επιτόκιο 8% για 15 μήνες. Αν ο Ε εισέπραξε τελικά 9.240 €, πόσο ήταν το χρονικό διάστημα της πρώτης κατάθεσής του;

(Απ. μ = 24)

16. Κάποιος πατέρας άφησε στα τρία παιδιά του 542.675 € και όρισε στη διαθήκη του να τα μοιράσουν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το κάθε παιδί, αν καταθέσει το μερίδιό του στην Τράπεζα Τ με απλό τόκο 9%, να αποσύρει από την Τράπεζα το ίδιο ποσό, όταν συμπληρώσει το 21ο έτος της ηλικίας του. Αν, κατά το θάνατο του πατέρα, οι ηλικίες των παιδιών ήταν 11, 13 και 15 ετών, να βρεθεί το μερίδιο του κάθε παιδιού.

(Απ. K_1 = 162.555 - K_2 = 179.566 - K_3 = 200.554)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΜΕ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ

5.1. Βασικές οικονομικοεμπορικές έννοιες και ορισμοί

Είναι γεγονός ότι στις εμπορικές συναλλαγές, η εξόφληση μιας χρηματικής υποχρέωσης δεν γίνεται πάντοτε «τοις μετρητοίς». Κατά την αγορά π.χ. εμπορευμάτων, ο αγοραστής δεν μπορεί συνήθως να καταβάλει αμέσως στον πωλητή το αντίτιμο της αξίας των εμπορευμάτων που αγόρασε σε μετρητά. Ο πωλητής (πιστωτής), για να εξασφαλίσει την απαίτησή του, υποχρεώνει τον αγοραστή (χρεώστη) να υπογράψει ένα ειδικό νομικό έγγραφο, με το οποίο να μπορεί στο μέλλον να εισπράξει από τον αγοραστή το οφειλόμενο χρηματικό ποσό.

Ο Νόμος 5325 του 1932 έχει καθιερώσει δύο τύπους τέτοιων εγγράφων: α) Το **«Γραμμάτιο εις διαταγήν»** και β) τη **«Συναλλαγματική».** Το Γραμμάτιο συντάσσεται και υπογράφεται από τον οφειλέτη, ο οποίος υπόσχεται να πληρώσει ορισμένο χρηματικό ποσό, σε ορισμένο τόπο και χρόνο. Στο Γραμμάτιο υπάρχουν δύο πρόσωπα: α) Ο **εκδότης,** δηλαδή ο χρεώστης (οφειλέτης) και β) ο **πιστωτής,** δηλαδή αυτός που θα εισπράξει το χρηματικό ποσό, το οποίο είναι γραμμένο στο Γραμμάτιο.

Στην καθημερινή πρακτική, σπάνια χρησιμοποιείται το Γραμμάτιο. Στις εμπορικές συναλλαγές χρησιμοποιείται συνήθως η **Συναλλαγματική** (για συντομία: συν/κή). Η συν/κή είναι έγγραφο, το οποίο υπογράφει ο πιστωτής -ο οποίος ονομάζεται Εκδότης- και με αυτό δίνει εντολή στον οφειλέτη - ο οποίος ονομάζεται Αποδέκτης- να πληρώσει στον κομιστή του εγγράφου (ή για λογαριασμό του), σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή.

Το γραμμάτιο και η συν/κή είναι **πιστωτικοί τίτλοι,** εκδίδονται συνήθως κατά την αγορά εμπορευμάτων με πίστωση ή για την τακτοποίηση αμοιβαίων υποχρεώσεων.

Ο Νόμος 5325/1932 έχει εξομοιώσει ο γραμμάτιο και τη συν/κή και η διαφορά τους είναι τυπική: Το γραμμάτιο εκδίδεται από τον οφειλέτη και αποτελεί υπόσχεσή του να πληρώσει στον πιστωτή του, σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το χρηματικό ποσό που αναγράφεται στο γραμμάτιο, ενώ η συν/κή εκδίδεται από τον πιστωτή (εκδότη), ο οποίος δίνει εντολή στον οφειλέτη (αποδέκτη) να πληρώσει, σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή.

Οι παραπάνω πιστωτικοί τίτλοι, για να είναι έγκυροι, πρέπει να περιέχουν ορισμένα τυπικά και ουσιαστικά στοιχεία που προβλέπει ο Νόμος 5325/1932, δηλαδή: τη λέξη «Συναλλαγματική» ή «Γραμμάτιο εις διαταγήν», την εντολή για πληρωμή ορισμένου χρηματικού ποσού, τη χρονολογία και τον τόπο πληρωμής, το ποσό (αριθμητικώς και ολογράφως), τις υπογραφές του εκδότη και του αποδέκτη και το προβλεπόμενο από το Νόμο* χαρτόσημο, το οποίο είναι συνήθως ενσωματωμένο στη συν/κή και στο γραμμάτιο.

Η μεταβίβαση μιας συν/κής (ή γραμματίου) από έναν έμπορο σε μια τράπεζα (ή από ένα πρόσωπο σε άλλο πρόσωπο) γίνεται με ειδική νομική πράξη, η οποία ονομάζεται οπισθογράφηση και γίνεται στην οπίσθια όψη της συν/κής (ή του γραμματίου) από τον εκδότη (ή από τον τυχόντα κομιστή), σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

«Αντ' εμού πληρώσατε στον κ. Χ.Κ.»
Αθήνα, 20 Ιουλίου 1990
(Υπογραφή) Α. Ανδρέου

Για να καταλάβει ο αναγνώστης τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο νομικών εγγράφων, παραθέτουμε έντυπα «Γραμματίου εις διαταγήν» και «Συναλλαγματικής», τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα στις εμπορικές συναλλαγές (Βλ. σελ. 104).

---

* Με την υπ αριθ. 2232/1975 Απόφαση του Υπουργού Οικονομικών, το χαρτόσημο είναι ενσωματωμένο στη συν/κή και στο γραμμάτιο.

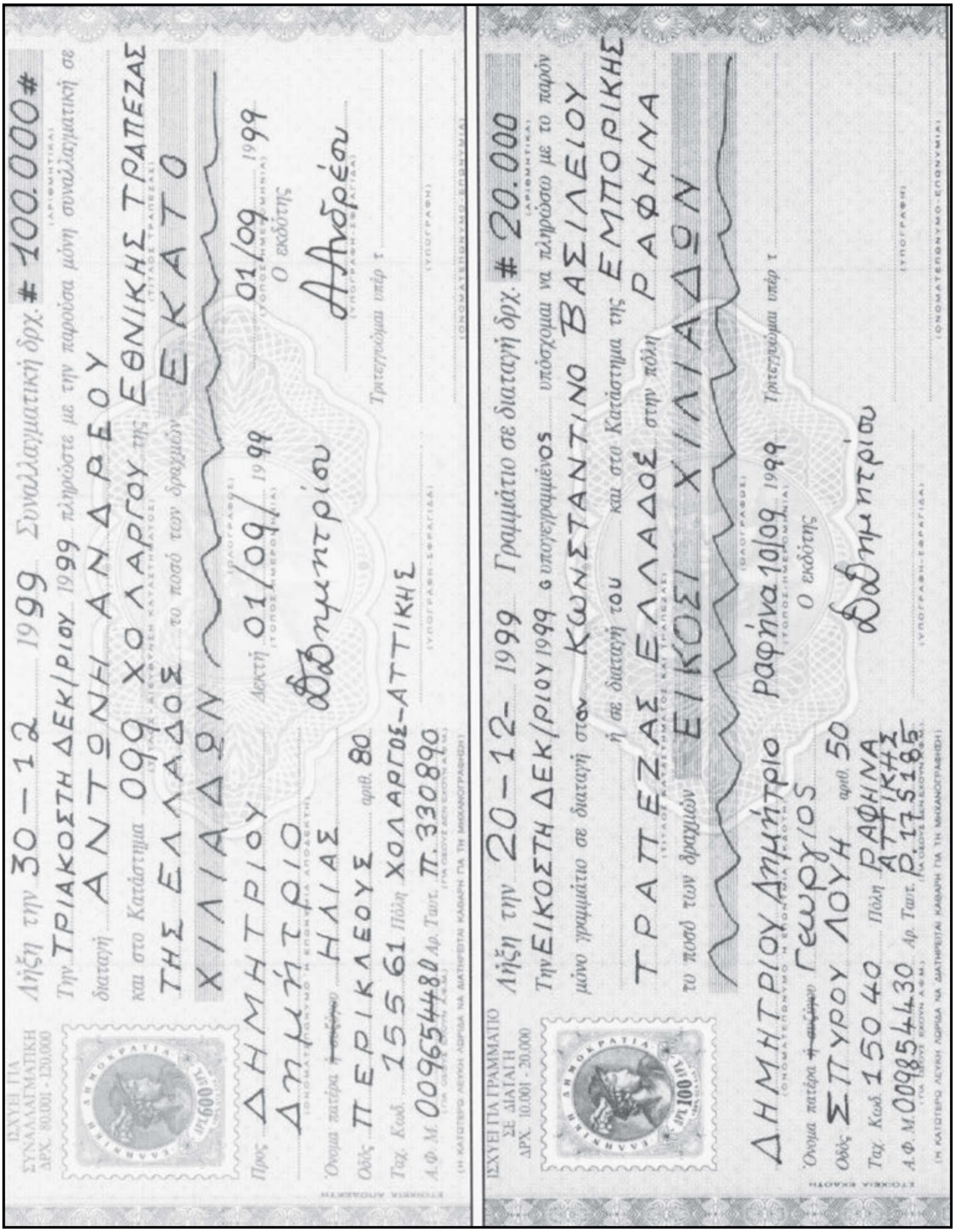
Όπως είπαμε πιο πάνω, αν και δεν υπάρχει καμιά ουσιαστική νομική διαφορά μεταξύ του «Γραμματίου εις διαταγήν» και της «Συναλλαγματικής», εντούτοις, στην πράξη χρησιμοποιούνται, κατά κανόνα, οι συναλλαγματικές και σπανιότερα τα γραμμάτια, γιατί οι συναλλαγματικές έχουν δύο υπογραφές (την υπογραφή του εκδότη και την υπογραφή του αποδέκτη) πράγμα απαραίτητο για την προεξόφλησή τους από τις εμπορικές τράπεζες, δηλαδή την εξόφλησή τους πριν από τη λήξη τους.

Στις εμπορικές συναλλαγές, τα «Γραμμάτια εις διαταγήν» και οι «Συναλλαγματικές» αναφέρονται συνήθως με το κοινό όνομα: **Εμπορικά Γραμμάτια** ή απλώς **Γραμμάτια.** Στο εξής, όταν χρησιμοποιούμε τη λέξη «γραμμάτια», θα εννοούμε και τις συναλλαγματικές και τα «γραμμάτια εις διαταγήν».

Για την πλήρη κατανόηση του μηχανισμού των εμπορικών γραμματίων, παραθέτουμε μια συνηθισμένη οικονομική πράξη, η οποία γίνεται καθημερινώς μεταξύ των εμπόρων και των πελατών τους. Υποθέτουμε ότι ο έμπορος Ε πούλησε στον πελάτη Π μια τηλεόραση αξίας 100.000 € «μετρητής». Επειδή όμως ο Π δεν μπορεί να πληρώσει «τοις μετρητοίς» την αξία της τηλεόρασης, υπογράφει μια συν/κή 105.000 €, η οποία θα πληρωθεί μετά πέντε (5) μήνες. Το χρηματικό ποσό (105.000) που είναι γραμμένο στη συν/κή καλείται **ονομαστική αξία** (Nominal Value or Maturity Value) της συν/κής. Η ημέρα κατά την οποία πρέπει να πληρωθεί η συν/κή, ονομάζεται **λήξη** (Maturity date) της συν/κής.

Στο παραπάνω παράδειγμα, το ποσό των 105.000 €, δηλαδή η ονομαστική αξία της συν/κής, πρέπει να εισπραχθεί μετά πέντε (5) μήνες από την ημερομηνία έκδοσης της. Επομένως, η ονομαστική αξία της συν/κής αποτελείται από την αξία της τηλεόρασης συν τον τόκο των 5 μηνών με επιτόκιο 12%. Είναι όμως ενδεχόμενο ο Ε να χρειαστεί μετρητά πριν από τη λήξη της συν/κής. Τότε ο Ε προσκομίζει τη συν/κή σε μια τράπεζα, για να την «πουλήσει» και να εισπράξει μετρητά π.χ. τρεις (3) μήνες πριν από τη λήξη της συν/κής. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τράπεζα προεξοφλεί τη συν/κή του Ε, δηλαδή ότι η τράπεζα δίνει στον Ε ένα ποσό μικρότερο των 105.000 €, ελαττωμένο κατά τον τόκο των 3 μηνών. Συνεπώς, αν η τράπεζα προεξοφλήσει τη συν/κή των 105.000 €, με επιτόκιο 12% για τους υπόλοιπους τρεις (3) μήνες, θα δώσει στον Ε το ποσό των 101.850 €. Το ποσό

Υπόδειγμα
Γραμματίου σε διαταγή και Συναλλαγματικής



ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ ΔΡΧ. 80.001 - 120.000

Λήξη την 30-12 1999 Συναλλαγματική δρχ. # 100.000 #

Την ΤΡΙΑΚΟΣΤΗ ΔΕΚ/ΡΙΟΥ 1999 πληρώστε με την παρούσα μόνη συναλλαγματική σε διαταγή ΑΝΤΩΝΗ ΑΝΔΡΕΟΥ

και στο Κατάστημα 099 ΧΟΛΑΡΓΟΥ της ΕΘΝΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ το ποσό των δραχμών ΕΚΑΤΟ ΧΙΛΙΑΔΩΝ

Προς ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Δημήτριο
Δεκτή 01/09/1999 Δημητρίου
01/09 1999
Ο εκδότης
Α. Ανδρέου

Όνομα πατέρα ΗΛΙΑΣ
Οδός ΠΕΡΙΚΛΕΟΥΣ αριθ. 80
Ταχ. Κωδ. 15561 Πόλη ΧΟΛΑΡΓΟΣ-ΑΤΤΙΚΗΣ
Α.Φ.Μ. 009654480 Αρ. Ταυτ. Π. 330890

Τριτεγγυώμαι υπέρ τ

ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΟ ΣΕ ΔΙΑΤΑΓΗ ΔΡΧ. 10.001 - 20.000

Λήξη την 20-12- 1999 Γραμμάτιο σε διαταγή δρχ. # 20.000

Την ΕΙΚΟΣΤΗ ΔΕΚ/ΡΙΟΥ 1999 ο υπογεγραμμένος υπόσχομαι να πληρώσω με το παρόν μόνο γραμμάτιο σε διαταγή στον ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

ή σε διαταγή του και στο Κατάστημα της ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΕΛΛΑΔΟΣ στην πόλη ΡΑΦΗΝΑ

το ποσό των δραχμών ΕΙΚΟΣΙ ΧΙΛΙΑΔΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Δημήτριο
Ραφήνα 10/09 1999
Ο εκδότης
Δ. Δημητρίου

Όνομα πατέρα Γεώργιος
Οδός ΣΠΥΡΟΥ ΛΟΥΗ αριθ. 50
Ταχ. Κωδ. 15040 Πόλη ΡΑΦΗΝΑ ΑΤΤΙΚΗΣ
Α.Φ.Μ. 009854430 Αρ. Ταυτ. Ρ. 175185

Τριτεγγυώμαι υπέρ τ

αυτό (101.850) ονομάζεται **παρούσα αξία** (Present Value or proceeds) της συν/κής. Το ποσό των 3.150 € το οποίο κράτησε η τράπεζα και που είναι ο τόκος των 105.000 € για τους τρεις (3) μήνες πριν από τη λήξη της συν/κής, ονομάζεται **προεξόφλημα** (Discount).

Στο πιο πάνω παράδειγμα, το ποσό των 3.150 ευρώ, το οποίο είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας της συν/κής, ονομάζεται ειδικότερα **εξωτερικό προεξόφλημα.** Η τράπεζα όμως κράτησε τόκο περισσότερο από τον κανονικό· η τράπεζα θα έπρεπε να δώσει στον Ε ένα ποσό Α, τέτοιο ώστε, αφού αυξηθεί κατά τον τόκο των τριών (3) μηνών με 12% να είναι ίσο με την ονομαστική αξία της συν/κής, δηλαδή:

$$\mathrm{A} + \mathrm{A} \cdot \frac{3}{12} \cdot 0{,}12 = 105.000 \Rightarrow \mathrm{A} = 101.942$$

Συνεπώς, η τράπεζα θα έπρεπε να είχε κρατήσει για προεξόφλημα 3.058 € (= 105.000 - 101.942) και όχι 3.150 €. Το ποσό των 3.058 €, το οποίο αποτελεί τον τόκο της παρούσας αξίας (= 101.942 · 3 · 0,12/12) της συν/κής, ονομάζεται **εσωτερικό προεξόφλημα** και είναι μικρότερο από το εξωτερικό προεξόφλημα.

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι ακόλουθοι βασικοί ορισμοί στην προεξόφληση:

-Ονομαστική (ή μέλλουσα) αξία μιας συν/κής είναι το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή και το οποίο πρέπει να πληρωθεί κατά τη λήξη της.

-Παρούσα αξία μιας συν/κής (ή ενός γραμματίου) είναι το ποσό που πρέπει να πληρωθεί σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από τη λήξη της συν/κής.

-Προεξόφλημα είναι το ποσό που κρατάει η τράπεζα κατά την προεξόφληση. Ειδικότερα:

-Εξωτερικό προεξόφλημα είναι τόκος επί της ονομαστικής αξίας μιας συν/κής.

-Εσωτερικό προεξόφλημα είναι τόκος επί της παρούσας αξίας μιας συν/κής.

- **Εσωτερικό προεξόφλημα** είναι τόκος επί της παρούσας αξίας μιας συν/κής.

Η εξωτερική προεξόφληση, αν και είναι άδικη για τον έμπορο, ο οποίος δίνει τις συν/κές στην τράπεζα για προεξόφληση, εντούτοις εφαρμόζεται στις τράπεζες. Σε όλες τις χώρες της Ευρώπης -εκτός από την Αγγλία και την Ολλανδία- και στην Ελλάδα, **οι τράπεζες εφαρμόζουν την εξωτερική προεξόφληση.** Βασική προϋπόθεση και στα δύο είδη προεξοφλήσεων είναι ότι ισχύει η θεμελιώδης ισότητα:

Ονομαστική Αξία = Παρούσα Αξία + Προεξόφλημα

Αν παραστήσουμε με τα σύμβολα:

K = Ονομαστική αξία συν/κής
A = Παρούσα αξία με εξωτερική προεξόφληση
E = Εξωτερικό προεξόφλημα
E_1 = Εσωτερικό Προεξόφλημα
A_1 = Παρούσα αξία με εσωτερική προεξόφληση.

τότε η μεν έννοια της εξωτερικής προεξόφλησης αποδίδεται με την ισότητα:

$$\boxed{A = K - E} \tag{5.1}$$

η δε έννοια της εσωτερικής προεξόφλησης αποδίδεται με την ισότητα:

$$\boxed{A_1 + E_1 = K} \tag{5.2}$$

Το επιτόκιο με το οποίο γίνεται η προεξόφληση των συν/κών (ή και των γραμματίων) από τις εμπορικές τράπεζες ονομάζεται **προεξοφλητικό επιτόκιο** (Discount rate). Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται από την Τράπεζα της Ελλάδος. Σήμερα, τα προεξοφλητικά επιτόκια υπάγονται στις διατάξεις των «ελεύθερα καθοριζόμενων επιτοκίων», δηλαδή η Νομισματική Επιτροπή της Τράπεζας της Ελλάδος έχει καθορίσει ένα ελάχιστο επιτόκιο, το οποίο ονομάζεται **βασικό επιτόκιο**[*]**,** πάνω στο οποίο η κάθε τράπεζα προσθέτει ένα ακόμη μικρό ποσοστό, το οποίο λέγεται περιθώριο και συνθέτει το τελικό επιτόκιο προεξοφλήσεως.

Οι τράπεζες, κατά την προεξόφληση συν/κών και γραμματίων, εκτός από το προεξόφλημα, κρατάνε διάφορες προμήθειες, εισπρακτικά, ταχυδρομικά και τον Ειδικό Φόρο Τραπεζικών Εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.), ο οποίος αντικατέστησε το Φόρο Κύκλου Εργασιών. (Για όλα αυτά θα μιλήσουμε εκτενέστερα πιο κάτω).

Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών, υπάρχουν διάφορες ρυθμίσεις, οι οποίες αποβαίνουν προς το συμφέρον των τραπεζών. Γενικά ισχύουν τα εξής:

α) Για την προεξόφληση συναλλαγματικών και γραμματίων, οι εμπορικές τράπεζες υπολογίζουν ως **τοκοφόρες ημέρες, την ημέρα που γίνεται η προεξόφληση συν την ημέρα της λήξης συν τις ημέρες που παρεμβάλλονται συν δύο (2) εργάσιμες**[**] ημέρες μετά τη λήξη της συν/κής. Π.χ. για συναλλαγματική που έληγε στις 15 Απριλίου 1998 και εμφανίστηκε στην τράπεζα για προεξόφληση στις 21 Ιανουαρίου 1998, θα υπολογιστούν 87 τοκοφόρες ημέρες (Ιαν. 11 + Φεβ. 28 + Μάρτ. 31 + Απρ. 15 + 2 εργάσιμες ημέρες = 87).

β) Ποσό που χορηγείται από μια τράπεζα φέρνει τόκο από την ημέρα που χορηγήθηκε από την τράπεζα. Ποσό που κατατίθεται σε μία τράπεζα αποδίδει τόκο από την επόμενη ημέρα.

---

* Τα προεξοφλητικά επιτόκια διαφέρουν. Άλλο επιτόκιο ισχύει στη Βιομηχανία, άλλο στη Βιοτεχνία και άλλο στο Εμπόριο.

** Ο αποδέκτης (πληρωτής) μιας συν/κής μπορεί να πληρώσει την ονομαστική αξία της και μετά δύο εργάσιμες ημέρες από την ημερομηνία λήξης της συν/κής, γιατί το προβλέπει ο νόμος.

5.2. Προεξόφληση χωρίς έξοδα

5.2.1. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Είπαμε ότι το προεξόφλημα διακρίνεται σε εξωτερικό και εσωτερικό. Επομένως, το προεξόφλημα θα υπολογιστεί με δύο τρόπους:

α) Με εξωτερική προεξόφληση. Επειδή το εξωτερικό προεξόφλημα (= Ε) είναι απλός τόκος πάνω στην ονομαστική αξία (= Κ), έπεται ότι:

$$E = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \quad ή \quad E = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 \text{ ή } 365}$$
$$E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta} \quad ή \quad E = K \cdot \nu \cdot \Pi \tag{5.3}$$

β) Με εσωτερική προεξόφληση. Επειδή το εσωτερικό προεξόφλημα είναι απλός τόκος πάνω στην παρούσα αξία, δηλαδή:

$$E = \frac{A_1 \cdot \nu \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \quad ή \quad E = \frac{A_1 \cdot \nu}{\Delta}$$

βρίσκουμε πρώτα την παρούσα αξία σε συνάρτηση με την ονομαστική αξία και αφού υπολογίσουμε τον τόκο της, βρίσκουμε το εσωτερικό προεξόφλημα.

Από τη σχέση: $A_1 + E_1 = K$ προκύπτει:

$$A_1 = K - E_1 = K - \frac{A_1 \nu}{\Delta} \text{ ή } A_1 \Delta = K\Delta - A_1 \nu \text{ ή } A_1(\Delta + \nu) = K\Delta \text{ και } A_1 = \frac{K\Delta}{\Delta + \nu}$$

Υπολογίζουμε τον τόκο του τελευταίου ποσού και έχουμε:

$$A_1 \cdot \frac{\nu}{\Delta} = \frac{K\Delta}{\Delta + \nu} \cdot \frac{\nu}{\Delta} = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} = E_1$$

Ώστε:
$$E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} \quad ή \quad E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365 + \nu \cdot i} \quad ή \quad E_1 = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12 + \mu \cdot i} \tag{5.4}$$

Παράδειγμα 1. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 120.000 €, προεξοφλήθηκε τρεις (3) μήνες προτού λήξει με 12%. Να υπολογιστεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα.

Λύση. Κ = 120.000, μ = 3, i = 0,12, Ε = ; E_1 = ;

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στους τύπους (5.3) και (5.4) και βρίσκουμε:

$$E = \frac{120.000 \cdot 3 \cdot 0{,}12}{12} = 3.600\ €$$

$$E_1 = \frac{120.000 \cdot 3 \cdot 0{,}12}{12 + 3 \cdot 0{,}12} = \frac{43.200}{12{,}36} = 3.495\ €$$

Παράδειγμα 2. Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 100.000 €, η οποία λήγει στις 17 Απριλίου, προεξοφλήθηκε στις 19 Φεβρουάριου (του ίδιου έτους) με 24%. Να βρεθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα. Έτος μεικτό και πολιτικό.

Λύση. Κ = 100.000, ν = 60 (= Φεβ. 10 + Μάρτ. 31 + Απρ. 17 + 2)

$$i = 0{,}24, \quad \Delta = \frac{360}{0{,}24} = 1.500\,, \quad \Pi = \frac{0{,}24}{360} = 0{,}0006667$$

α) Έτος μεικτό: $E = \dfrac{K \cdot \nu}{\Delta} = \dfrac{100.000 \cdot 60}{1.500} = 4.000\ €$

$$E = K \cdot \nu \cdot \Pi = 100.000 \cdot 60 \cdot 0{,}0006667 = 4.000\ €$$

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} = \frac{100.000 \cdot 60}{1.500 + 60} = 3.846\ €$$

β) Έτος πολιτικό: $E = \dfrac{100.000 \cdot 60 \cdot 0{,}24}{365} = 3.945\ €$

$$E_1 = \frac{100.000 \cdot 60 \cdot 0{,}24}{365 + 60 \cdot 0{,}24} = 3.795\ €$$

5.2.2. Διαφορά των δύο προεξοφλημάτων

Επειδή η ονομαστική αξία (= Κ) είναι μεγαλύτερη από την παρούσα αξία (= Α) και επειδή το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας, ενώ το εσωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της παρούσας αξίας, έπεται ότι $Ε > Ε_1$. Συνεπώς, υπάρχει διαφορά στα δύο προεξοφλήματα.

$$Ε - Ε_1 = \frac{Κ \cdot ν}{Δ} - \frac{Κ \cdot ν}{Δ + ν} = \frac{Κ \cdot ν \cdot Δ + Κ \cdot ν \cdot ν - Κ \cdot ν \cdot Δ}{Δ(Δ + ν)} = \frac{Κ \cdot ν \cdot ν}{Δ(Δ + ν)} \qquad (5.5)$$

Η σχέση (5.5) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$Ε - Ε_1 = \frac{Κ \cdot ν}{Δ + ν} \cdot \frac{ν}{Δ} = Ε_1 \cdot \frac{ν}{Δ} \qquad (5.5α)$$

Δηλαδή η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ισούται με το εξωτερικό προεξόφλημα του εσωτερικού προεξοφλήματος.
Εξάλλου, η σχέση (5.5) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$Ε - Ε_1 = \frac{Κ \cdot ν}{Δ} \cdot \frac{ν}{Δ + ν} = Ε \cdot \frac{ν}{Δ + ν} \qquad (5.5β)$$

Δηλαδή η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ισούται με το εσωτερικό προεξόφλημα του εξωτερικού προεξοφλήματος.

Παράδειγμα: Συναλλαγματική η οποία λήγει στις 8 Απριλίου προεξοφλήθηκε στις 10 Φεβρουάριου με 20%. Ποια είναι η ονομαστική αξία της συν/κής, αν είναι γνωστό ότι η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων είναι 50€;

Λύση. ν = Φεβ. 19 + Μάρτ. 31 + Απρ. 8 + 2 = 60 ημέρες,

$$i = 0{,}20,\ Δ = 1.800,\ Ε - Ε_1 = 50$$

$$Ε - Ε_1 = \frac{Κ \cdot ν \cdot ν}{Δ(Δ + ν)} \quad ή \quad 50 = \frac{Κ \cdot 60 \cdot 60}{1.800(1.800 + 60)} \quad \text{και} \quad Κ = 46.500$$

5.2.3. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία

α) Με εξωτερική προεξόφληση. Είπαμε ότι, το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας· γνωρίζουμε όμως την παρούσα αξία. Συνεπώς, αν βρούμε την ονομαστική αξία σε συνάρτηση με την παρούσα αξία και υπολογίσουμε τον τόκο της, τότε βρίσκουμε και το εξωτερικό προεξόφλημα. Θα έχουμε:

$$\mathrm{A} + \mathrm{E} = \mathrm{K} \;\; \text{ή} \;\; \mathrm{A} = \mathrm{K} - \mathrm{E} = \mathrm{K} - \frac{\mathrm{K}\nu}{\Delta} \;\; \text{ή} \;\; \mathrm{A}\Delta = \mathrm{K}\Delta - \mathrm{K}\nu = \mathrm{K}(\Delta - \nu)$$

και

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta - \nu}$$

Υπολογίζοντας τώρα τον τόκο του τελευταίου ποσού βρίσκουμε:

$$\mathrm{K} \cdot \frac{\nu}{\Delta} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta - \nu} \cdot \frac{\nu}{\Delta}. \quad \text{Αλλά} \quad \mathrm{K}\frac{\nu}{\Delta} = \mathrm{E}.$$

Ώστε:

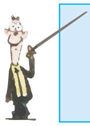
$$\boxed{\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A} \cdot \nu}{\Delta - \nu} = \frac{\mathrm{A} \cdot \nu \cdot i}{360 - \nu \cdot i} \quad \text{ή} \quad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{A} \cdot \mu \cdot i}{12 - \mu \cdot i}} \tag{5.6}$$

β) Με εσωτερική προεξόφληση. Γνωρίζουμε ότι το εσωτερικό προεξόφλημα είναι απλός τόκος πάνω στην παρούσα αξία. Επομένως:

$$\boxed{\mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{A} \cdot \nu}{\Delta} = \frac{\mathrm{A} \cdot \nu \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \quad \text{ή} \quad \mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{A} \cdot \mu \cdot i}{12}} \tag{5.7}$$

5.2.4. Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

α) Με εξωτερική προεξόφληση. Είπαμε ότι η εξωτερική προεξόφληση αποδίδεται με την εξίσωση:



$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{K} - \mathrm{E} = \mathrm{K} - \frac{\mathrm{K} \cdot \nu}{\Delta} = \mathrm{K} - \frac{\mathrm{K} \cdot \nu \cdot i}{360 \text{ ή } 365}} \tag{5.8}$$

Παράδειγμα: Ποια είναι η παρούσα αξία συν/κής, ονομαστικής αξίας 6.000 €, η οποία προεξοφλήθηκε 75 ημέρες πριν από τη λήξη της με 12%; Έτος μεικτό.

Λύση. $A = ;\ K = 6.000, \quad \nu = 75, \quad i = 0,12, \quad \Delta = 3.000$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (5.8) και βρίσκουμε:

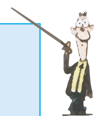
$$A = 6.000 - \frac{6.000 \cdot 75}{3.000} = 5.850\ €$$

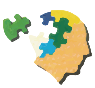
β) Με εσωτερική προεξόφληση. Η εσωτερική προεξόφληση αποδίδεται με την ισότητα:

$$A_1 + E_1 = K \Rightarrow A_1 = K - E_1$$

Αλλά $$E_1 = \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i}$$

Επομένως: $$\boxed{A_1 = K - \frac{K \cdot \nu}{\Delta + \nu} = K - \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i}} \qquad (5.9)$$





Σημείωση. Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι οι εμπορικές τράπεζες, κατά την προεξόφληση συναλλαγματικών, χρησιμοποιούν την εξωτερική προεξόφληση και έτος πολιτικό.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

5.3. Προεξόφληση με έξοδα

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 5.1 του παρόντος Κεφαλαίου, οι εμπορικές τράπεζες, κατά την προεξόφληση συν/κών και γραμματίων, εκτός από το προεξόφλημα, κρατάνε και διάφορα άλλα ποσά όπως: **Προμήθειες, εισπρακτικά, ταχυδρομικά - τηλεγραφικά, καθώς και τον Ειδικό Φόρο Τραπεζικών Εργασιών** (Ε.Φ.Τ.Ε.).

Υπολογισμός Προμήθειας. Η προμήθεια αποτελεί την αμοιβή της τράπεζας για τις υπηρεσίες της προεξόφλησης. Το ποσοστό της προμήθειας είναι 1% το χρόνο **«κατά μήνα αδιαίρετο».** Αν π.χ. έχουμε μια συν/κή, ονομαστικής αξίας 180 €, η οποία λήγει στις 28 Απριλίου και προεξοφλείται στις 25 Φεβρουάριου και η τράπεζα υπολογίζει προμήθεια 1% ετησίως **«κατά μήνα αδιαίρετο»,** τότε το ποσό της προμήθειας θα βρεθεί ως εξής: Τοκοφόρες ημέρες = Φεβρ 4 + Μάρτ. 31 + Απρ. 28 + 2 = 65 ημέρες. Η τράπεζα θα υπολογίσει προμήθεια για 3 μήνες. Δηλαδή: 180 · 3/12 · 1/100 = 0,45 €. Στο ποσό αυτό υπολογίζεται Ειδικός Φόρος Τραπεζικών Εργασιών (σήμερα 3%): 0,45 + 0,45 · 3/100 = 0,45 + 0,0135 = 0,4635.

Υπολογισμός Εισπρακτικών. Οι εμπορικές τράπεζες, για να καλύψουν τα έξοδά τους, κατά την προεξόφληση συν/κών, κρατάνε και **«εισπρακτικά»** για κάθε συναλλαγματική. Τα «εισπρακτικά» ανέρχονται σήμερα σε 3‰, συν 3% Ε.Φ.Τ.Ε. Αν π.χ. έχουμε για προεξόφληση επτά (7) συν/κές και η τράπεζα κρατάει 0,8 € για καθεμία συν/κή συν 3% Ε.Φ.Τ.Ε., τα «εισπρακτικά» θα υπολογιστούν ως εξής: 0,8 + 0,8 · 3/100 = 0,8 + 0,024 = 0,824 € για κάθε συν/κή. Επομένως, τα «εισπρακτικά» θα είναι 7 · 0,824 = 5,768 €.

Υπολογισμός Ταχυδρομικών. Εκτός από τα «εισπρακτικά», υπολογίζονται για κάθε συν/κή και **«ταχυδρομικά»** έξοδα διακίνησης της συν/κής και των παραστατικών της. Τα «Ταχυδρομικά» για τις συν/κές που είναι εισπρακτέες εντός της έδρας της τράπεζας είναι διαφορετικά από τα ταχυδρομικά για τις συν/κές που πρέπει να εισπραχθούν εκτός της έδρας της τράπεζας. Αν, π.χ., έχουμε τρεις συν/κές που είναι εισπρακτέες στην περιοχή της τράπεζας και δύο συν/κές εκτός της έδρας της τράπεζας και τα ταχυδρομικά είναι 0,60 και 0,70 € αντίστοιχα, τότε τα «ταχυδρομικά» θα υπολογιστούν ως εξής: Εντός της έδρας της τράπεζας: 0,60 + 0,60 · 3/100 = 0,60 + 0,018 = 0,618 € για κάθε συν/κή. Άρα: 3 · 0,618 = 1,854 €. Εκτός της έδρας της τράπεζας: 0,70 + 0,70 · 3/100 = 0,70 + 0,024 = 0,721 € για κάθε συν/κή. Άρα 2 · 0,721 = 1,442 €. Επομένως, για «ταχυδρομικά» η τράπεζα θα υπολογίσει συνολικά: 1,854 + 1,442 = 3,296 €.

5.4. Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Η εύρεση της παρούσας αξίας μιας συν/κής αποτελεί το κεντρικό πρόβλημα της προεξόφλησης. Οι εμπορικές τράπεζες εφαρμόζουν την **εξωτερική προεξόφληση** και το πολιτικό έτος.

Είπαμε ότι οι εμπορικές τράπεζες, κατά την προεξόφληση συν/κών και γραμματίων, κρατάνε: **Προεξόφλημα** (= Ε), **Προμήθεια** (= θ), **Εισπρακτικά** (= ε), **Ταχυδρομικά** (= τ), καθώς και **Ειδικό Φόρο Τραπεζικών Εργασιών** (= φ).

Το άθροισμα: **προεξόφλημα** + **προμήθεια** + **εισπρακτικά** + **ταχυδρομικά** + **Ε.Φ.Τ.Ε.** -το οποίο ονομάζεται **Σύνθετο Προεξόφλημα**- αφαιρείται από την ονομαστική αξία της συν/κής και έτσι προκύπτει η παρούσα αξία της συν/κής ή το καθαρό προϊόν από την προεξόφληση.

Παράδειγμα. Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 200 €, η οποία λήγει στις 10 Απριλίου, προεξοφλείται στις 27 Ιανουαρίου με προεξοφλητικό επιτόκιο 24%. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια 1% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο», εισπρακτικά 3‰, ταχυδρομικά έξοδα 0,60 € και ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών 3%. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό. Να βρεθεί η παρούσα αξία της συν/κής.

Λύση. Δίνονται: Κ = 200, i = 0,24, Τοκοφόρες ημέρες = ν = Ιαν. 5 + Φεβ. 28 + Μαρτ. 31 + Απρ. 10 + 2 = 76, θ = 1% κατά μήνα αδιαίρετο. Άρα 3 μήνες, ε = 3‰, τ = 0,60, φ = 3%.

Υπολογίζουμε τις διάφορες κρατήσεις:

Προεξόφλημα: $E = \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{365} = \dfrac{200 \cdot 76 \cdot 0,24}{365} = 9,995$

Προμήθεια: $\theta = K \cdot \dfrac{\mu}{12} \cdot \dfrac{1}{100} = 200 \cdot \dfrac{3}{12} \cdot \dfrac{1}{100} = 0,5$

Εισπρακτικά: $\varepsilon = 200 \cdot \dfrac{3}{1.000} = 0,6$

Ταχυδρομικά: τ = 0,6

$$\text{Ε.Φ.Τ.Ε.: } \varphi = \underbrace{(9,995+0,5+0,6+0,6)}_{11,695} \cdot \frac{3}{100} = 0,35$$

Συνεπώς, η παρούσα αξία θα είναι:

$$A = K - (E + \theta + \varepsilon + \tau + \varphi) =$$

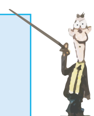
$$= 200 - \underbrace{(9,995+0,5+0,6+0,6+0,35)}_{12,045} = 187,955$$

5.5. Εύρεση του πραγματικού επιτοκίου στην προεξόφληση

Όπως είπαμε πιο πάνω, ο κομιστής μιας συναλλαγματικής, ονομαστικής αξίας Κ, που θα την προεξοφλήσει σε μια τράπεζα, θα εισπράξει ένα ποσό Α, το οποίο προκύπτει από τη σχέση: Α = Κ – (Ε + θ + ε + τ + φ). Συνεπώς η τράπεζα κρατάει το σύνθετο προεξόφλημα (Κ – Α) = Ε + θ + ε + τ + φ. Αν το ποσό που κρατάει η τράπεζα θεωρηθεί τόκος του καθαρού ποσού (= Α), το οποίο εισπράττει ο κομιστής μιας συν/κής, τότε δημιουργείται το εξής πρόβλημα: Με ποιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε το ποσό Α επί ν ημέρες (ή μ μήνες), ώστε να εισπράξουμε τόκο (Κ – Α), δηλαδή όσο κράτησε η τράπεζα;

Αν παραστήσουμε με το j το **πραγματικό επιτόκιο** προεξόφλησης, τότε πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{K - A = \frac{A \cdot \nu \cdot j}{365 \text{ ή } 360}} \tag{5.10}$$



Παράδειγμα. Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 40.000 δρχ., η οποία έληγε στις 30/6/1996, προεξοφλήθηκε στις 29/3/1996 με επιτόκιο 20%. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια 1% το χρόνο «κατά μήνα αδιαίρετο», εισπρακτικά 4‰, ταχυδρομικά έξοδα 250 δρχ. και Ε.Φ.Τ.Ε. 3%. Η τράπεζα εφάρμοσε την εξωτερική προεξόφληση και έτος πολιτικό. Με ποιο πραγματικό επιτόκιο έγινε η προεξόφληση;

Λύση: Δίνονται: Κ = 40.000, i = 0,20, Τοκοφόρες ημέρες = ν = Μάρτ. 3 + Απρ. 30 + Μάιος 31 + Ιούν. 30 + 2 = 96, θ = 1% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο». Θα υπολογίσουμε προμήθεια για 4 μήνες. ε = 4‰, τ = 250, φ = 3%.

Υπολογίζουμε τα ποσά που κράτησε η τράπεζα:

Προεξόφλημα: $E = \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{366^*} = \dfrac{40.000 \cdot 96 \cdot 0,20}{366} \quad = \quad 2.098$

Προμήθεια: $\theta = K \cdot \dfrac{\mu}{12} \cdot \dfrac{1}{100} = 40.000 \cdot \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{1}{100} \quad = \quad 133$

Εισπρακτικά: $\varepsilon = K \cdot \dfrac{\varepsilon}{1.000} = 40.000 \cdot \dfrac{4}{1.000} \quad = \quad 160$

Ταχυδρομικά: τ = 250

2.641

Ε.Φ.Τ.Ε. = φ = (Ε + θ + ε + τ) · 3% = 2.641 · 3/100 = 79

Σύνθετο προεξόφλημα = 2.720

Συνεπώς, ο κομιστής της συν/κής θα εισπράξει το ποσό

$$A = K - (E + \theta + \varepsilon + \tau + \varphi) = 40.000 - 2.720 = 37.280$$

Η τράπεζα κράτησε: Κ – Α = 40.000 – 37.280 = 2.720.

Αντικαθιστώντας τώρα τα δεδομένα στον τύπο (5.10) βρίσκουμε το πραγματικό επιτόκιο:

$$2.720 = \frac{37.280 \cdot 96 \cdot j}{366} \quad \text{ή} \quad 366 \cdot 2.720 = 37.280 \cdot 96 \cdot j$$

και

$$j = \frac{995.520}{3.578.880} = 0,278 \ \text{ή} \ j = 27,8\%.$$

Ώστε: Ο έμπορος που προεξόφλησε τη συν/κή, επιβαρύνθηκε τελικά με επιτόκιο 27,8%.

---

* Το έτος 1996 ήταν δίσεκτο.

5.6. Πινάκιο Προεξοφλήσεων

Στην πράξη, οι προεξοφλήσεις γίνονται από τις Εμπορικές Τράπεζες, οι οποίες δε δέχονται για προεξόφληση μεμονωμένες συν/κές, αλλά ολόκληρη σειρά συν/κών. Οι Εμπορικές Τράπεζες δέχονται για προεξόφληση συν/κές και γραμμάτια που αναφέρονται στη Βιομηχανία, στη Βιοτεχνία και το Εσωτερικό Εμπόριο, λήξης το πολύ έως πέντε μηνών.

Υποθέτουμε ότι ο έμπορος Ε χρειάζεται χρήματα (μετρητά) και για να τα εξοικονομήσει προσκομίζει στην Τράπεζα Τ έναν ορισμένο αριθμό συν/κών με σκοπό να τις προεξοφήσει και να εισπράξει το αναγκαίο χρηματικό ποσό.

Η Τράπεζα Τ, για να προεξοφλήσει τις συναλλαγματικές τις οποίες προσκόμισε ο Ε υποχρεώνει τον έμπορο: 1) Να μεταβιβάσει στην τράπεζα τις συν/κές που θέλει να προεξοφλήσει, αφού προηγουμένως τις οπισθογραφήσει και 2) να καταχωρίσει τις συν/κές (και τα γραμμάτια) σε ειδικό έντυπο, που χορηγεί δωρεάν η τράπεζα και το οποίο ονομάζεται ΠΙΝΑΚΙΟ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ. Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων έχει μεγάλη σημασία για τις τραπεζικές εργασίες, γιατί με αυτό διακινούνται οι πιστωτικοί τίτλοι των πελατών κάθε τράπεζας και έτσι διευκολύνονται πολύ οι εμπορικές συναλλαγές.

Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων φέρει επικεφαλής τα εξής στοιχεία: α) το όνομα και το υποκατάστημα της τράπεζας, β) την ημερομηνία προεξόφλησης, γ) τον αριθμό των συναλλαγματικών που θα προεξοφληθούν, καθώς και το όνομα του κομιστή των συν/κών και δ) τους όρους προεξόφλησης, δηλαδή το προεξοφλητικό επιτόκιο και τις διάφορες κρατήσεις της τράπεζας: προμήθεια, εισπρακτικά, ταχυδρομικά και τον ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.).

Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων είναι γραμμογραφημένο σε στήλες στις οποίες αναγράφονται: 1) Ο αύξων αριθμός (Α/Α) των συν/κών που θα προεξοφληθούν. 2) Οι αριθμοί που υπάρχουν στις συν/κές των πελατών κατά την έκδοσή τους. 3) Τα ποσά, δηλαδή οι ονομαστικές αξίες των συν/κών. 4) Η ημερομηνία λήξης. 5) Οι τοκοφόρες ημέρες, δηλαδή οι ημέρες που μεσολαβούν από την ημερομηνία προεξόφλησης ως την ημέρα λήξης κάθε συν/κής. Είπαμε ότι οι τράπεζες υπολογίζουν ως τοκοφόρες ημέρες: **την ημέρα προεξόφλησης συν την ημέρα λήξης συν τις παρεμβαλλόμενες ημέρες συν δύο (2) εργάσιμες ημέρες.** 6) Οι **Τοκάριθμοι,** δηλαδή το γινόμενο κάθε ποσού (ονομαστική αξία συν/κής) επί τον αντίστοιχο αριθμό τοκοφόρων ημερών˙ οι Τοκάριθμοι, για τεχνικούς λόγους, διαιρούνται δια του 100. 7) Ο τόπος πληρωμής της συν/κής. 8) Η προμήθεια. 9) Τα εισπρακτικά. 10) Τα ταχυδρομικά. 11) Το όνομα του αποδέκτη (πληρωτή) της συν/κής.

Για την πλήρη κατανόηση και εμπέδωση του μηχανισμού σύνταξης ενός Πινακίου Προεξοφλήσεων παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα:
Ο έμπορος Α. Ανδρέου προσκόμισε στην Τράπεζα Τ στην Αθήνα, στις 25 Φεβρουάριου 2002, για προεξόφληση, τις εξής συναλλαγματικές:

1) Συν/κή αριθ. 110, ονομαστικής αξίας 20.000 €, λήξη 31-3-2002, αποδοχής Γ. Γεωργίου, εμπόρου Αθήνας.

2) Συν/κή αριθ. 111, ονομαστικής αξίας 18.000 €, λήξης 28-4-2002, αποδοχής Δ. Δημητρίου, εμπόρου Αθήνας.

3) Συν/κή αριθ. 109, ονομαστικής αξίας 15.000 €, λήξης 3-3-2002, αποδοχής Β. Βασιλείου, εμπόρου Θεσ/νίκης.

4) Συν/κή αριθ. 112, ονομαστικής αξίας 10.000 €, λήξης 10-5-2002, αποδοχής Ε. Ευθυμίου, βιοτέχνη Βόλου.

5) Συν/κή αριθ. 113, ονομαστικής αξίας 15.000 €, λήξης 30-6-2002, αποδοχής Ζ. Ζήση, βιομήχανου Αθήνας.

6) Γραμμάτιο αριθ. 108, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξης 30-8-2002,του Ι. Ιωάννου, δικηγόρου Πάτρας.

Να συνταχθεί το «Πινάκιο Προεξοφλήσεων» και να βρεθεί το καθαρό ποσό το οποίο θα εισπράξει ο Α. Ανδρέου, αν: α) το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 25%, β) η προμήθεια της Τράπεζας 1% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο σε δωδέκατα», γ) τα εισπρακτικά 3‰ με minimum 2,5 € ανά τεμάχιο συν/κής, δ) τα ταχυδρομικά 0,60 € ανά τεμάχιο συν/κής για τις συν/κές εντός της Αθήνας και 0,70 € ανά συν/κή για συν/κές εκτός Αθήνας και ε) 3% ο

Ειδικός Φόρος Τραπεζικών Εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.). Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό. (Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων είναι στη σελίδα 130).

Επεξηγήσεις συντάξεως του Πινακίου Προεξοφλήσεων

1) Οι συναλλαγματικές καταχωρίζονται στο Πινάκιο Προεξοφλήσεων με βάση τη χρονολογική σειρά λήξης τους, αρχίζοντας με τη συν/κή, της οποίας η ημερομηνία λήξης είναι η πλησιέστερη στην ημερομηνία προεξόφλησης (25.2.02).

2) Ο αρμόδιος υπάλληλος της τράπεζας ελέγχει αν έχουν καταχωριστεί σωστά οι συν/κές στο «Πινάκιο», γιατί οι τράπεζες δεν προεξοφλούν συν/κές που λήγουν νωρίτερα από 15 ημέρες (15 ημέρες είναι το ελάχιστο όριο αποδεκτού χρόνου προεξόφλησης), ούτε συν/κές που λήγουν αργότερα από πέντε (5) μήνες. Έτσι, στη συν/κή αριθ. 109, αν και οι τοκοφόρες ημέρες είναι 9 (= Φεβ. 4 + Μάρτ. 3 + 2), εντούτοις υπολογίσαμε 15 ημέρες. Επίσης το υπ' αριθ. 108 Γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας 50.000 € λήξης 30-8-2002, δεν καταχωρίστηκε στο «Πινάκιο», γιατί λήγει αργότερα από πέντε μήνες.

3) Για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος εφαρμόζεται ο τύπος:

$$\text{Προεξόφλημα} = \frac{\text{Συνολικός Τοκάριθμος} \cdot \text{Επιτόκιο}}{365\,(\text{ή } 366)}$$

4) Η προμήθεια υπολογίζεται «κατά μήνα αδιαίρετο» ως εξής: Κ · μ/12 · 1%.

5) Τα «εισπρακτικά» είναι συνήθως 3‰ για κάθε συν/κή αλλά όχι λιγότερο από 2,5 €.

6) Στο άθροισμα (προεξόφλημα + προμήθεια + εισπρακτικά + ταχυδρομικά) υπολογίζουμε 3% ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών και έτσι προκύπτει το σύνολο των κρατήσεων (= 3.603,78), το οποίο αφαιρείται από το άθροισμα των ποσών (= 78.000). Έτσι προκύπτει το καθαρό ποσό(= 74.396,22),το οποίο θα εισπράξει ο Α. Ανδρέου.

Ο αρμόδιος υπάλληλος της τράπεζας χαρτοσημαίνει με το προβλεπόμενο χαρτόσημο το «Πινάκιο Προεξοφλήσεων», το οποίο έχει πλέον θέση «Εντάλματος Πληρωμής» για την τράπεζα.

ΤΡΑΠΕΖΑ Τ

ΠΙΝΑΚΙΟ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΕΩΝ

ΕΔΡΑ : ΑΘΗΝΑ — Πέντε (5) συν/κών του κ. Α. Ανδρέου — Αθήνα 25-2-1990

ΑΡΙΘ. Λ/ΣΜΟΥ : 130200 — Επιτόκιο 25%. Προμήθεια 1%. Εισπρακτικά 3‰

Ταχυδρομικά 200 και 250. Ε.Φ.Τ.Ε. 8%

Α/Α	Αριθ. συν/κής ή γρ/τίου	Ποσά €	Λήξεις Μήνας	Λήξεις Ημερ	Τοκοφόρες ημέρες	Τοκάριθμοι $K \cdot \nu/100$	Τόπος Πληρωμής	μ	Προμήθεια $K \cdot \frac{\mu}{12} \cdot \frac{1}{100}$	Εισπρακτικά	Ταχυδρομικά	Αποδέκτης (Πληρωτής)
1	109	15.000	Μάρτιος	3	15	2.250	Θεσ/νίκη	1	12,50	2,5	0,7	Β. Βασιλείου
2	110	20.000	Μάρτιος	31	37	7.400	Αθήνα	2	33,33	2,5	0,6	Γ. Γεωργίου
3	111	18.000	Απρίλιος	28	65	11.700	Αθήνα	3	45,00	2,5	0,6	Δ. Δημητρίου
4	112	10.000	Μάιος	10	77	7.700	Βόλος	3	25,00	2,5	0,7	Ε. Ευθυμίου
5	113	15.000	Ιούνιος	30	128	19.200	Αθήνα	5	62,50	2,5	0,6	Ζ. Ζήση
Άθροισμα		78.000			Άθροισμα 48.250		Άθροισμα		178,33	12,5	3,2	

Κρατήσεις Τράπεζας

Προεξόφλημα: $E = \frac{48.250 \cdot 25}{365} = 3.304,79$

Προμήθεια: $\theta = 178,33$

Εισπρακτικά: $\varepsilon = 12,5$

Ταχυδρομικά: $\tau = 3,2$

Άθροισμα $(E + \theta + \varepsilon + \tau) = 3.498,82$

Ε.Φ.Τ.Ε. $3.498,82 \cdot 3\% = 104,96$

Σύνολο Κρατήσεων $= 3.603,78$

-3.603,78

74.396,22 = Καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο Α. Ανδρέου

ΕΜΠΟΡΙΚΗΤΡΑΠΕΖΑ

ΠΙΝΑΚΙΟ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ & ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ

Ο υποφαινόμενος, αφού προεξόφλησα τα παρακάτω γραμμάτια, έλαβα το αντίτιμο κατά τον παρακάτω λογαριασμό, δηλώνω δε ότι σε περίπτωση μη έγκαιρης διαμαρτύρησης εκ μέρους της Τράπεζας για οποιονδήποτε λόγο φέρω πάντοτε ακέραιη την ευθύνη σαν οπισθογράφος.

ΤΙΤΛΟΙ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΩΝ		ΜΕΡΙΚΑ ΠΟΣΑ	ΟΛΙΚΑ ΠΟΣΑ
ΧΡΕΟΥΜΕΝΟΣ Λ/ΣΜΟΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ			
ΠΙΣΤΟΥΜΕΝΕΣ ΜΕΡΙΔΕΣ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ «ΠΡΟΣΩΡΙΝΟΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ» Κ.Α. 2910	Τόκος ______ προς ______ % ______		
	Προμήθεια ______ προς ______ % ______		
	Εισπρακτικά ______		
	Ταχυδρομικά ______		
Σημ. Στα παραπάνω ποσά των Τόκων, Προμηθειών και λοιπών εξόδων περιλαμβάνονται ο Φ.Κ.Ε. και το χαρ/μο.	ΚΑΘΑΡΟ ΚΑΤΑΒΛΗΤΕΟ ΠΟΣΟ		

ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΠΕΛΑΤΗ ______

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ______

ΑΡΙΘΜ. Λ/ΣΜΟΥ ΕΚΧΩΡΗΤΗ ______ ΑΡΙΘΜ. ΠΙΝΑΚΙΟΥ ______

ΚΩΔ. ΓΡΑΜ/ΤΙΩΝ ______ **ΚΩΔ. ΟΔΗΓΙΩΝ** ______

ΤΕΜΑΧΙΑ ΓΡΑΜΜ./ΠΟΛΥΦ. ______ ΑΠΟ ______ ΜΕΧΡΙ ______

ΔΡΧ. ______

______ (Πόλη) ______ (Ημερομηνία) 198__

Ο ΛΑΒΩΝ

ΘΕΩΡΗΘΗΚΕ

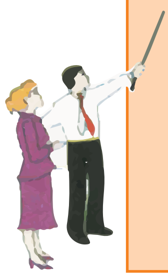
Α/Α	ΑΡΙΘ. ΠΕΛΑΤΗ	ΠΟΣΟ ΣΥΝ/ΚΩΝ	ΗΜΕΡ. ΠΙΣΤ.	ΗΜΕΡ. ΛΗΞΗΣ	ΠΡΟΘΕΣΜΙΑ	ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΙ	ΑΠΟΔΕΚΤΗΣ	ΤΟΠΟΣ ΠΛΗΡΩΜΗΣ	ΗΜΕΡΟΜ. ΕΚΔΟΣΗΣ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ *
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
	ΣΥΝΟΛΟ									

* Να σημειώνεται από το Κατ/μα το όνομα οπισθογράφων ή εγγυητών.

Α.Ε 2% · 5663 (Ζ 8000 · 100 × 1 6/84) Πραξ. 788

Ερωτήσεις

1. Τι είναι «Γραμμάτιο σε διαταγή»;
2. Τι είναι «Συναλλαγματική»;
3. Ποια είναι τα τυπικά στοιχεία που προβλέπει ο Ν. 5325/1932 για να είναι έγκυροι οι με αριθ. 1 και 2 πιστωτικοί τίτλοι;
4. Τι είναι «ονομαστική» και τι «παρούσα» αξία συναλλαγματικής;
5. Τι είναι προεξόφλημα; Τι είναι εξωτερικό και τι εσωτερικό προεξόφλημα; Ποιο προεξόφλημα είναι μεγαλύτερο και γιατί;
6. Πώς υπολογίζονται οι «προμήθειες», τα «εισπρακτικά», τα «ταχυδρομικά» και ο «Ε.Φ.Τ.Ε.» κατά την προεξόφληση συναλλαγματικών από τις εμπορικές τράπεζες;
7. Τι είναι το «προεξοφλητικό επιτόκιο» και τι το «πραγματικό επιτόκιο» που αντιστοιχεί στην προεξόφληση συναλλαγματικών;
8. Τι είναι το «Πινάκιο Προεξοφλήσεων»; Περιγράψτε τη διαδικασία σύνταξης ενός «Πινακίου Προεξοφλήσεων».



Προβλήματα προεξόφλησης

1. Να βρεθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα συναλλαγματικής, ονομαστικής αξίας 10.000 €, η οποία προεξοφλήθηκε 60 ημέρες πριν από τη λήξη της: α) με έτος πολιτικό και β) με έτος μεικτό. Επιτόκιο 6%.
   Αν τώρα η πιο πάνω συν/κή είχε προεξοφληθεί τρεις (3) μήνες πριν από τη λήξη της, ποιο είναι το προεξόφλημα (εξωτερικό και εσωτερικό); **(Απ. 98,63 - 100 - 97,67 - 99 - 150 - 147,78)**

2. Γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 7 μήνες προτού λήξει με $5\frac{3}{4}\%$ και έδωσε παρούσα αξία 10.000 €. Να βρεθούν τα δύο προεξοφλήματα.
   (Απ. 347,06 - 335,42)

3. Συναλλαγματική, η οποία προεξοφλήθηκε με εξωτερική προεξόφληση, πέντε μήνες προτού λήξει, προς επτά και τρία τέταρτα «τοις εκατό» έδωσε παρούσα αξία τρία εκατομύρια τριάντα χιλιάδες τριάντα ευρώ. Ποιο είναι το εξωτερικό προεξόφλημα; (Οι μήνες να μη μετατραπούν σε ημέρες). **(Απ. 101.109,71)**

4. Προεξοφλήθηκαν εξωτερικώς με 4% δύο γραμμάτια. Το πρώτο έληγε μετά 50 ημέρες και το δεύτερο μετά 60 ημέρες. Και τα δύο μαζί έδωσαν προεξόφλημα 2.250 €. Να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων, αν είναι γνωστό ότι η ονομαστική αξία του δεύτερου είναι το δύο τρίτα της ονομαστική αξίας του πρώτου. Έτος μεικτό.

(Απ. 22.500 - 15.000)

5. Ο έμπορος Ε αγόρασε σήμερα εμπορεύματα συνολικής αξίας 26.500 € και έδωσε μια συν/κή ονομαστικής αξίας 16.700 €, η οποία λήγει μετά 54 ημέρες. Η συν/κή προεξοφλήθηκε εξωτερικώς την ίδια ημέρα με 8% και έτος μεικτό. Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει ακόμη ο έμπορος, για να εξοφλήσει τη συνολική αξία των εμπορευμάτων που αγόρασε; **(Απ. 10.000 €)**

6. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 100.000 € προεξοφλήθηκε εξωτερικώς 80 ημέρες προτού λήξει, με έτος πολιτικό. Η Τράπεζα έκανε τις εξής κρατήσεις: α) Προμήθεια 1,5% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο», β) Εισπρακτικά 4‰. γ) Ταχυδρομικά έξοδα 600 € δ) Ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.) 8%. Προεξοφλητικό επιτόκιο 25%. Να βρεθεί η παρούσα αξία της συν/κής. **(Απ. 92.598)**

7. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 100.000 € προεξοφλήθηκε εξωτερικώς 80 ημέρες προτού λήξει, με έτος πολιτικό. Η Τράπεζα κράτησε: α) Προμήθεια 1,5% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο». β) Εισπρακτικά

4‰. γ) Ταχυδρομικά έξοδα 600 €. Ο κομιστής της συν/κής εισέπραξε καθαρό ποσό 93.146 €. Ποιο πραγματικό επιτόκιο αντιστοιχεί στην προεξόφληση; **(Απ. 33,57)**

8. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 48.000 δρχ., η οποία έληγε στις 12 Μαΐου 1992 προεξοφλήθηκε εξωτερικώς στις 25 Ιανουαρίου 1992 με 25%. Η Τράπεζα έκανε τις εξής κρατήσεις: α) Προμήθεια 2% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο». β). Εισπρακτικά 4‰. γ) Ταχυδρομικά έξοδα 850 δρχ. δ) Ε.Φ. Τ.Ε. 8%. Έτος πολιτικό. α) Να βρεθεί το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο κομιστής της συν/κής. β) Ποιο πραγματικό επιτόκιο αντιστοιχεί στην προεξόφληση;

(Απ. 42.588 - 41.79%)

9. Ύστερα από πόσες ημέρες πρέπει να λήγει γραμμάτιο, το οποίο, όταν προεξοφληθεί εξωτερικώς με 9% και εσωτερικώς με 10%, δίνει την ίδια παρούσα αξία; **(Απ. 400 ημ.)**

10. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 50.000 €, η οποία λήγει στις 19 Φεβρουάριου επιστρέφεται απλήρωτη. Για την είσπραξή της εκδίδεται νέα συν/κή (λέγεται Επισυναλλαγματική), η οποία λήγει στις 25 Απριλίου του ίδιου έτους. Η Επισυναλλαγματική προεξοφλείται στις 19 Φεβρουάριου με 20% και έτος πολιτικό. Η Τράπεζα κρατάει: α) Προμήθεια 1% «κατά μήνα αδιαίρετο», β) Εισπρακτικά 3‰. γ) Ταχυδρομικά 600 € δ) Ε.Φ.Τ.Ε. 240 €. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία της Επισυναλλαγματικής, ώστε ο κομιστής να εισπράξει τελικά τις 50.000 €;

Λύση. Η ονομαστική αξία της παλιάς συν/κής θεωρείται πλέον παρούσα αξία της επισυναλλαγματικής. Δηλαδή: Α = 50.000 €. Η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής θα βρεθεί, αν στην ονομαστική αξία της παλιάς συν/κής προσθέσουμε όλες τις κρατήσεις της Τράπεζας. Δηλαδή

$$K = 50.000 + \frac{50.000 \cdot 68 \cdot 0,20}{365} + 50.000 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{100} +$$

$$+ 50.000 \cdot \frac{3}{1.000} + 600 + 240 =$$

$$= 50.000 + 1.863 + 125 + 150 + 600 + 240 = 52.978$$

11. Ο Έμπορος Α Ανδρέου προσκόμισε στην Τράπεζα Τ στην Αθήνα, στις 25 Ιαν/ρίου 2002, για προεξόφληση, τις εξής συναλλαγματικές: 1) Αριθ., 1040, ονομαστικής αξίας 62.000 €, λήξης 15 Μαρτίου 2002, αποδοχής Β. Βασιλείου εμπόρου Αθήνας. 2) Αριθ 1680, ονομαστικής αξίας 81.500 €, λήξης 30 Μαρτίου 2002, αποδοχής Γ. Γεωργίου, εμπόρου Πάτρας. 3) Αριθ. 5080, ονομαστικής αξίας 42.000 €, λήξης 31 Ιανουαρίου 2002, αποδοχής Δ. Δημητρίου, βιοτέχνη Θεσ/νίκης. 4) Αριθ 2020, ονομαστικής αξίας 40.000 €, λήξης 14 Απριλίου 2002 αποδοχής Ε. Ευθυμίου, εμπόρου Καλαμάτας. 5) Αριθ. 2021, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξης 15 Ιουλίου 2002, αποδοχής Ζ. Ζήσιμου, ιδιωτικού υπαλλήλου Αθήνας.

    Να συνταχθεί το Πινάκιο Προεξοφλήσεων και να βρεθεί το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο Α. Ανδρέου, αν το προεξοφλητικό επιτόκιο ήταν 24%, η προμήθεια 1,5% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο σε δωδέκατα», τα εισπρακτικά 4‰, τα ταχυδρομικά 600 € για τις συν/κές εντός της έδρας της Τράπεζας και 850 € για τις συν/κές εκτός της έδρας της Τράπεζας και 8%. Ε.ΦΤ.Ε. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό.

    (Απ. 211.463)

12. Ο βιοτέχνης Β. Βασιλείου προκόμισε στο υποκατάστημα 099 της Εθνικής Τράπεζας στην Αθήνα, στις 20 Αυγούστου 2002, τις εξής συναλλαγματικές: 1) Αριθ. 3140, ονομαστικής αξίας 20.000 €, λήξης 4.10.02, αποδοχής Η.Η., εμπόρου Αθήνας. 2) Αριθ 3138, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξης 5.9.02 αποδοχής Θ.Θ. βιομήχανου Θεσ/νίκης. 3) Αριθ 3141, ονομ. αξίας 38.000 €, λήξης 3.11.02, αποδοχής Ι.Ι.

εμπόρου Πάτρας. 4) Αριθ. 3139, ονομαστικής αξίας 45.000 €, λήξης 24.9.02, αποδοχής Κ.Κ. βιοτέχνη Βόλου. 5) Αριθ. 3142, ονομαστικής αξίας 48.000 €, λήξεως 30.11.02, αποδοχής Λ.Λ. καπνεμπόρου Αγρίνιου. 6) Αριθ. 3143, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξεως 3.11.2003, αποδοχής Μ.Μ. καθηγητή Αθήνας.

Να συνταχθεί το Πινάκιο Προεξοφλήσεων και να βρεθεί το καθαρό ποσό, το οποίο έδωσε η Τράπεζα στο Β. Βασιλείου, αν το προεξοφλητικό επιτόκιο ήταν 25%, η προμήθεια 2% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο σε δωδέκατα», τα εισπρακτικά 4‰» τα ταχυδρομικά έξοδα 700 € για τις συν/κές εντός της έδρας της τράπεζας και 900 € για τις συν/κές εκτός της έδρας της τράπεζας και 8% ο Ε.ΦΤ.Ε. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό.

(Απ. 186.015)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

6.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί

Στις εμπορικές συναλλαγές συμβαίνει πολλές φορές ο οφειλέτης να ζητήσει από το δανειστή την αντικατάσταση δύο ή περισσότερων γραμματίων (K_1, K_2, ..., K_μ) διάφορων λήξεων με ένα **ενιαίο γραμμάτιο** (= K) ή την αντικατάσταση ενός ενιαίου γραμματίου με δύο ή περισσότερα γραμμάτια, **οικονομικώς ισοδύναμα** με το ενιαίο γραμμάτιο. (Στο Κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιούμε μόνο τον όρο «Γραμμάτια» και θα εννοούμε και τα «Γραμμάτια εις διαταγήν» και τις «Συναλλαγματικές»).

Η αντικατάσταση γραμματίων στηρίζεται στην **Αρχή της Οικονομικής Ισοδυναμίας*** και πρέπει να γίνει χωρίς κέρδος ή ζημιά του οφειλέτη ή του δανειστή.

Για να πραγματοποιηθεί **οικονομική ισοδυναμία** μεταξύ του ενιαίου γραμματίου (= K) και των αντικαθιστάμενων γραμματίων (K_1, K_2, ..., K_μ), πρέπει **το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων να ισούται με την παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου,** σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο. Επομένως, για τη λύση

---

* Δύο άνισα χρηματικά ποσά, σε ορισμένη χρονική στιγμή, θεωρούνται οικονομικώς ισοδύναμα. Καταθέτουμε σήμερα 100.000 € με 18%. Μετά ένα έτος εισπράττουμε 118.000 €. Οι 100.000 € σήμερα είναι οικονομικώς ισοδύναμες με τις 118.000 € μετά ένα έτος. Βλέπε και παράγραφο 1.4 του Κεφαλαίου 1.

οποιουδήποτε προβλήματος αντικατάστασης γραμματίων, θα καταστρώνεται μία εξίσωση, η οποία ονομάζεται **εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας.** Το πρώτο μέλος της εξίσωσης οικονομικής ισοδυναμίας θα αποτελείται από την παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης θα αποτελείται από το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων.

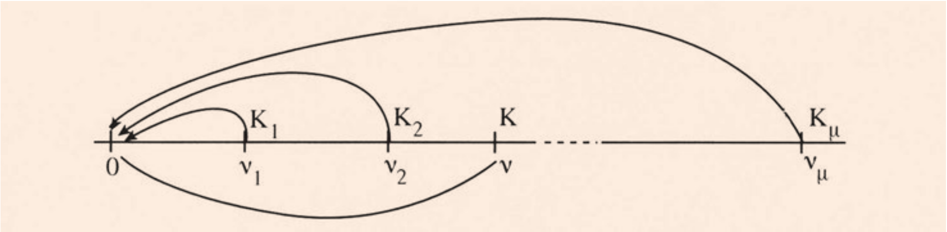
Η χρονική στιγμή κατά την οποία η παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων ονομάζεται **Εποχή Ισοδυναμίας** (Focal Date). Ως Εποχή Ισοδυναμίας μπορούμε να πάρουμε: 1) την **Ημέρα Υπολογισμού,** δηλαδή την ημερομηνία κατά την οποία γίνεται η αντικατάσταση των γραμματίων, ή 2) την **Κοινή Λήξη,** δηλαδή την ημερομηνία λήξης του ενιαίου γραμματίου, ή 3) μια οποιαδήποτε ημερομηνία.

Το γενικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Γραμμάτια ονομαστικής αξίας: K_1, K_2, ..., K_μ, τα οποία λήγουν αντίστοιχα μετά: ν_1, ν_2, ..., ν_μ ημέρες, αντικαθίστανται με ένα ενιαίο ισοδύναμο γραμμάτιο K, το οποίο λήγει μετά ν ημέρες με επιτόκιο i. Στο πρόβλημα αυτό μπορεί να ζητείται: 1) Η εύρεση της ονομαστικής αξίας του K. 2) Η εύρεση της ονομαστικής αξίας (ή λήξης) οποιουδήποτε γραμματίου (K_1 ή K_2 ή ... ή K_μ). 3) Η εύρεση της κοινής λήξης (= ν). 4) Η εύρεση του επιτοκίου. Σε κάθε περίπτωση θα εφαρμόζεται η εξωτερική προεξόφληση.

6.2. Εύρεση της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου

Υποθέτουμε ότι γραμμάτια: K_1, K_2, ..., K_μ, τα οποία λήγουν αντίστοιχα μετά ν_1, ν_2, ..., ν_μ ημέρες από σήμερα (= 0), θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε με ένα ενιαίο γραμμάτιο (= K), το οποίο να λήγει μετά ν ημέρες από σήμερα. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία του K, ώστε να υπάρξει οικονομική ισοδυναμία; Εποχή ισοδυναμίας: 1) η ημέρα υπολογισμού και β) η κοινή λήξη. Προεξόφληση εξωτερική και έτος μεικτό.

1) Εποχή Ισοδυναμίας Ημέρα Υπολογισμού (Ε.Ι.Η.Υ.)



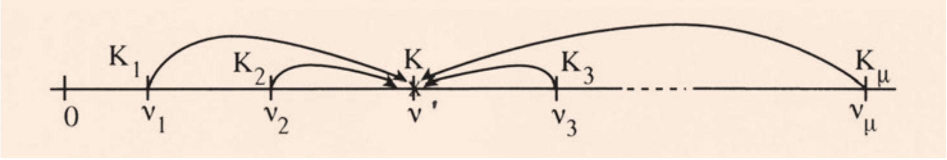
Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή 0 (ημέρα υπολογισμού), πρέπει να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας:

Παρούσα Αξία K = Π.Α.K_1 + Π.Α.K_2 + ... + Π.Α.K_μ. Δηλαδή:

$$K - \frac{K \cdot \nu}{\Delta} = \left(K_1 - \frac{K_1 \cdot \nu_1}{\Delta}\right) + \left(K_2 - \frac{K_2 \cdot \nu_2}{\Delta}\right) + \ldots + \left(K_\mu - \frac{K_\mu \cdot \nu_\mu}{\Delta}\right) \qquad (6.1)$$

Αν το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε θέτουμε: Δ = 365/i ή 360/i.

2) Εποχή Ισοδυναμίας η Κοινή Λήξη (Ε.Ι.Κ.Λ.)



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή ν (= κοινή λήξη), πρέπει η παρούσα αξία του K να ισούται με το άθροισμα των παρουσών αξιών των K_1, K_2, K_3, ..., K_μ. Αλλά η παρούσα αξία του K κατά την ημέρα της λήξης του ισούται με την ονομαστική του αξία.

Η εξίσωση της οικονομικής ισοδυναμίας θα είναι:

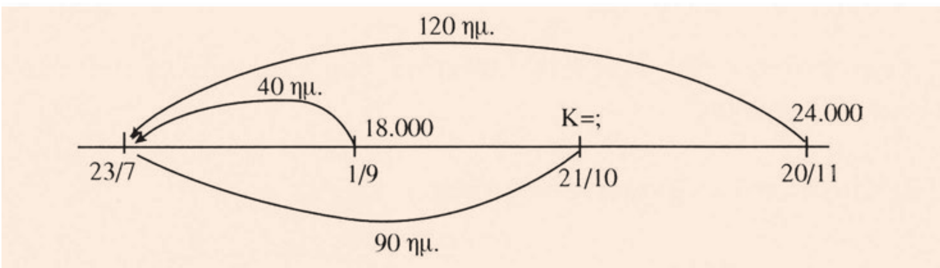
$$K = \left(K_1 + \frac{K_1 \cdot \nu_1}{\Delta}\right) + \left(K_2 + \frac{K_2 \cdot \nu_2}{\Delta}\right) + \left(K_3 - \frac{K_3 \cdot \nu_3}{\Delta}\right) + \ldots + \left(K_\mu - \frac{K_\mu \cdot \nu_\mu}{\Delta}\right) \quad (6.2)$$

Η τιμή του K θα βρεθεί, αν εκτελεστούν οι πράξεις στο β' μέλος της (6.2).

Παράδειγμα 1. Έστω ότι έχουμε τα γραμμάτια 18.000 € και 24.000 €, τα οποία λήγουν αντίστοιχα την 1/9 και την 20/11, και θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε στις 23/7 με ένα εναιαίο γραμμάτιο, το οποίο να λήγει την 21/10. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 6%, το έτος μεικτό και ως εποχή ισοδυναμίας πάρουμε: 1) την ημέρα υπολογισμού και 2) την κοινή λήξη;

Λύση. 1) Ε.Ι.Η.Υ.

Για την καλύτερη κατανόηση κατασκευάζουμε το ακόλουθο σχήμα:



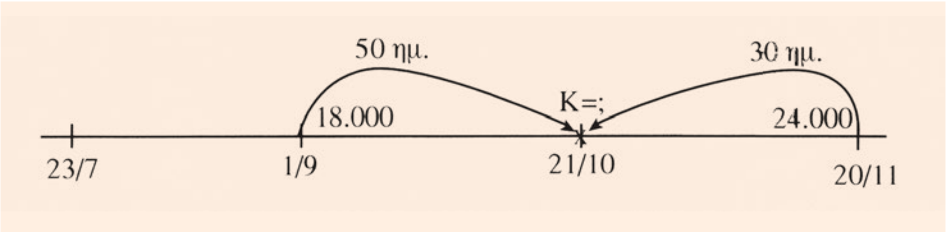
$K_1 = 18.000$	$K = ;$	$K_2 = 24.000$	$i = 0{,}06$
$\nu_1 = 40$	$\nu = 90$	$\nu_2 = 120$	$\Delta = 6.000$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση (6.1)

$$K - \frac{K \cdot 90}{6.000} = \left(18.000 - \frac{18.000 \cdot 40}{6.000}\right) + \left(24.000 - \frac{24.000 \cdot 120}{6.000}\right)$$

Λύνουμε ως προς K και βρίσκουμε: K = 42.030,46.

2) Ε.Ι.Κ.Λ. Κατασκευάζουμε το ακόλουθο σχήμα:



$K_1 = 18.000$ $\quad K = ;$ $\quad K_2 = 24.000$ $\quad i = 0,06$

$\nu_1 = 50$ $\quad \nu = 0$ $\quad \nu_2 = 30$ $\quad \Delta = 6.000$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση (6.2)

$$K = \left(18.000 + \frac{18.000 \cdot 50}{6.000}\right) + \left(24.000 - \frac{24.000 \cdot 30}{6.000}\right) = 42.030$$

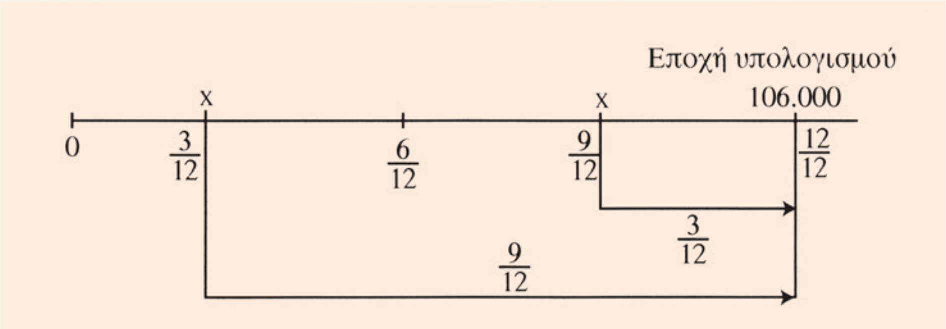
Σημείωση. Ως αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών πήραμε την κοινή λήξη (21/10). Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών χρησιμοποιήσαμε τον Πίνακα 4.1 που είναι στο κεφάλαιο 4.

Παράδειγμα 2. Οφείλει κάποιος σήμερα 100.000 €, τα οποία πρέπει να πληρώσει σε 1 έτος με επιτόκιο 6%. Θέλει να εξοφλήσει το χρέος του με δύο ισόποσες πληρωμές σε 3 και 9 μήνες αντίστοιχα. Ποιο θα είναι το μέγεθος αυτών των πληρωμών, αν το επιτόκιο είναι 6% και ως εποχή ισοδυναμίας ληφθεί το 1 έτος από σήμερα.

Λύση. Βρίσκουμε κατ’ αρχάς το ύψος του χρέους μετά ένα έτος:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = 100.000 + 100.000 \cdot 1 \cdot 0,06 = 106.000 \text{ €}$$

Έστω X το μέγεθος κάθε πληρωμής. Κατασκευάζουμε το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα:



Σύμφωνα με την αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας θα είναι:

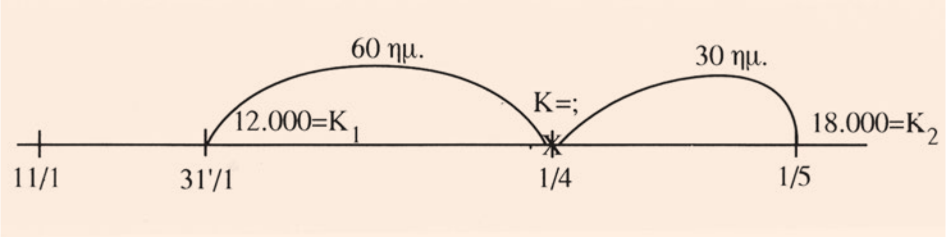
$$\left(X + X \cdot \frac{9}{12} \cdot 0,06\right) + \left(X + X \cdot \frac{3}{12} \cdot 0,06\right) = 106.000$$

$$12,54X + 12,18X = 1.272.000$$

$$24,72X = 1.272.000 \qquad \text{και} \qquad X = 51.456,31$$

Παράδειγμα 3. Οφείλει κάποιος δύο γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 12.000 €, το οποίο λήγει την 31η Ιαν/ρίου και β) Γραμμάτιο 18.000 €, το οποίο λήγει την 1η Μαΐου, και θέλει να τα αντικαταστήσει την 11η Ιαν/ρίου με ένα ενιαίο γραμμάτιο, το οποίο να λήγει την 1η Απριλίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας: 1) η κοινή λήξη και 2) η 11η Ιαν/ρίου. Επιτόκιο 7%. Έτος πολιτικό.

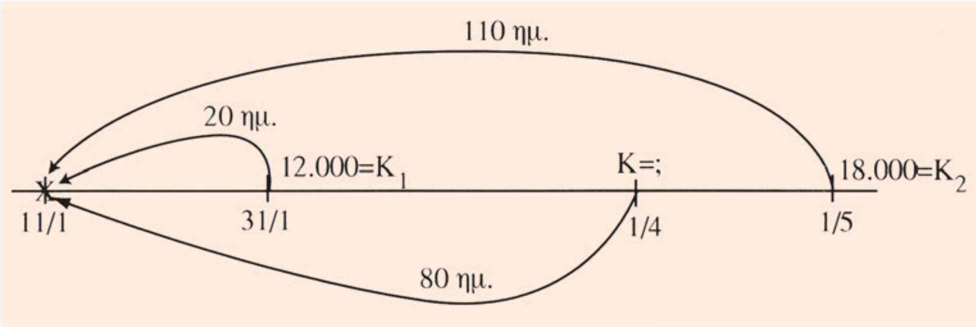
Λύση. 1) Ε.Ι.Κ.Λ. Κατασκευάζουμε το χρονοδιάγραμμα:



Η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας είναι της μορφής (6.2). Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε:

$$K = \left(12.000 + \frac{12.000 \cdot 60 \cdot 0,07}{365}\right) + \left(18.000 - \frac{18.000 \cdot 30 \cdot 0,07}{365}\right) = 30.034,52$$

2) Ε.Ι.Η.Υ.



Η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας είναι της μορφής (6.1). Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε:

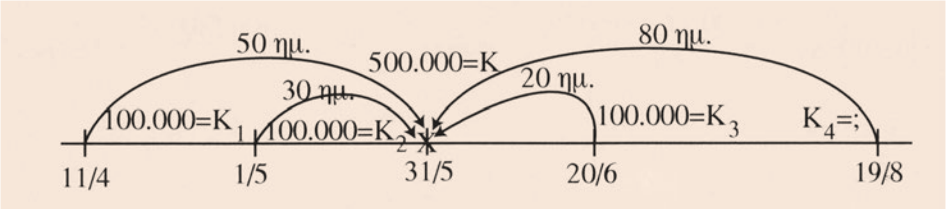
$$K - \frac{K \cdot 80 \cdot 0,07}{365} = \left(12.000 - \frac{12.000 \cdot 20 \cdot 0,07}{365}\right) +$$

$$+ \left(18.000 - \frac{18.000 \cdot 110 \cdot 0,07}{365}\right) \text{ και } K = 30.035,06$$

6.3. Εύρεση της ονομαστικής αξίας ή της λήξης οποιουδήποτε γραμματίου

Παράδειγμα 1. Ο έμπορος Ε δεν μπορεί να πληρώσει γραμμάτιο 500.000 €, το οποίο λήγει την 31η Μαΐου, γι’ αυτό υπογράφει τα εξής γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 100.000 €, λήξης 11 Απριλίου, β) Γραμμάτιο 100.000 €, λήξης 1 Μαΐου, γ) 100.000 €, λήξης 20 Ιουνίου και δ) γραμμάτιο που λήγει στις 19 Αυγούστου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του τελευταίου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 8% και το έτος πολιτικό. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη (31/5).

Λύση. Κατασκευάζουμε το χρονοδιάγραμμα:



Αφού εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη (31/5), έπεται ότι θα εφαρμόσουμε την εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας (6.2). Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε

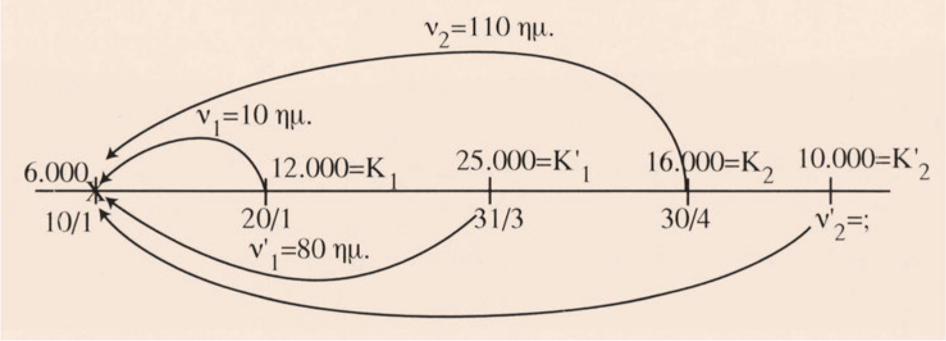
$$500.000 = \left(100.000 + \frac{100.000 \cdot 50 \cdot 0,08}{365}\right) + \left(100.000 + \frac{100.000 \cdot 30 \cdot 0,08}{365}\right) +$$

$$+ \left(100.000 - \frac{100.000 \cdot 20 \cdot 0,08}{365}\right) + \left(K_4 - \frac{K_4 \cdot 80 \cdot 0,08}{365}\right)$$

και $K_4 = 202.230,89$.

Παράδειγμα 2. Οφείλει κάποιος γραμμάτιο 12.000 € που λήγει την 20η Ιαν/ρίου, άλλο γρ/τιο 16.000 €, που λήγει την 30ή Απριλίου και 6.000 € μετρητά. Για να εξοφλήσει το χρέος, υπογράφει στις 10 Ιαν/ρίου δύο γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 25.000 €, το οποίο λήγει την 31η Μαρτίου και β) Γραμμάτιο 10.000 €. Πότε πρέπει να λήγει το β γραμμάτιο, για να εξοφληθεί το χρέος; Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 6% και έτος μεικτό.

Λύση. Κατασκευάζουμε το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα:



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία, πρέπει το άθροισμα των παρουσών αξιών των παλαιών γραμματίων να είναι ίσο με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$6.000+\left(12.000-\frac{12.000\cdot 10}{6.000}\right)+\left(16.000-\frac{16.000\cdot 110}{6.000}\right)=$$

$$=\left(25.000-\frac{25.000\cdot 80}{6.000}\right)+\left(10.000-\frac{10.000\cdot \nu_2'}{6.000}\right)$$

και $\nu'_2 = 588$ ημ.

Ώστε: το β' γραμμάτιο πρέπει να λήγει 588 ημέρες μετά την 10η Ιαν/ρίου, δηλαδή στις 21 Αυγούστου του επόμενου έτους.

6.4. Εύρεση της κοινής λήξης

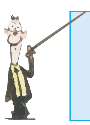
Είπαμε ότι κοινή λήξη είναι η ημερομηνία κατά την οποία λήγει το ενιαίο γραμμάτιο.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τα γραμμάτια: K_1, K_2, ..., K_μ, τα οποία λήγουν αντίστοιχα μετά ν_1, ν_2, ..., ν_μ ημέρες από σήμερα. Τα πιο πάνω γραμμάτια αντικαθίστανται με ένα ενιαίο γραμμάτιο K. Πότε πρέπει να λήγει το γραμμάτιο K, ώστε να πραγματοποιηθεί η οικονομική ισοδυναμία;

1) Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση:

$$K-\frac{K\cdot\nu}{\Delta}=\left(K_1-\frac{K_1\cdot\nu_1}{\Delta}\right)+\left(K_2-\frac{K_2\cdot\nu_2}{\Delta}\right)+\ldots+\left(K_\mu-\frac{K_\mu\cdot\nu_\mu}{\Delta}\right)$$

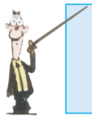
Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς ν βρίσκουμε την κοινή λήξη.



$$\boxed{\nu=\frac{K_1\nu_1+K_2\nu_2+\ldots+K_\mu\nu_\mu}{K}+\Delta\cdot\frac{K-(K_1+K_2+\ldots+K_\mu)}{K}} \qquad (6.3)$$

$\Delta = 360/i$

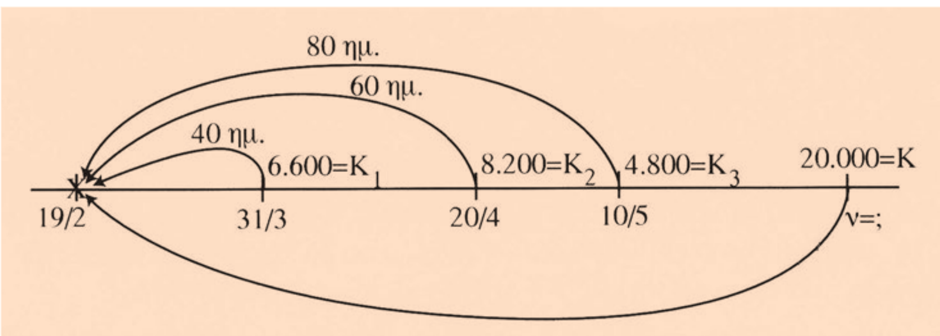
2) Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη. Η κοινή λήξη (= ν) βρίσκεται με τον τύπο:



$$\nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \ldots + K_\mu\nu_\mu}{K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu} + \Delta \cdot \frac{K - (K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu)}{K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu} \qquad (6.4)$$

Παράδειγμα. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 20.000 €, το οποίο στις 19/2 αντικαθιστά τα εξής γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 6.600 € λήξης 31/3, β) Γραμμάτιο 8.200 € λήξης 20/4 και γ) γραμμάτιο 4.800 € λήξης 10/5. Επιτόκιο 9%. Έτος μεικτό. (Δ = 360:0,09 = 4.000).

Λύση. Εποχή ισοδυναμίας η 19/2.



Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (6.3) ή (6.4) και έχουμε:

$$\nu = \frac{6.600 \cdot 40 + 8.200 \cdot 60 + 4.800 \cdot 80}{20.000} + 4.000 \cdot \frac{20.000 - 19.600}{20.000} =$$

$= 56{,}1 + 80 + 136{,}1$ 136 ημέρες μετά την 19/2 πρέπει να λήγει το ενιαίο γραμμάτιο, δηλαδή την 6/7.

6.5. Εύρεση της μέσης λήξης

Μέση λήξη είναι η περίπτωση εκείνη της κοινής λήξης, κατά την οποία **η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου ισούται με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων.**

Όταν λοιπόν είναι: $K = K_1 + K_2 + ... + K_\mu$, τότε το δεύτερο κλάσμα του β' μέλους του τύπου (6.3) μηδενίζεται, και έτσι προκύπτει ο τύπος υπολογισμού της μέσης λήξης:

$$\boxed{\nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + ... + K_\mu\nu_\mu}{K}} \qquad (6.5)$$

Από τον τύπο (6.5) προκύπτει η εξίσωση:

$$\boxed{K \cdot \nu = K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + ... + K_\mu\nu_\mu} \qquad (6.6)$$

Η εξίσωση (6.6) αποτελεί τη γενική εξίσωση επίλυσης των προβλημάτων της μέσης λήξης.

Από τον τύπο (6.5) και την εξίσωση (6.6) συνάγεται ότι η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από το επιτόκιο και το έτος υπολογισμού, γιατί δεν περιέχουν το Δ.

Η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από την εποχή υπολογισμού.

Αν συμβεί να είναι $K_1 = K_2 = ... = K_\mu$, τότε η μέση λήξη ισούται με το μέσο όρο των λήξεων των γραμματίων. Δηλαδή:

$$\boxed{\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\mu}{\mu}} \qquad (6.7)$$

Παράδειγμα. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 60.000 €, το οποίο την 1/9 αντικαθίσταται από δύο γραμμάτια: α) γραμμάτιο 35.000 € λήξης 20/11 και β) γραμμάτιο 25.000 € λήξης 11/10. Επιτόκιο 9%. Έτος πολιτικό.

Λύση. Επειδή $K = 60.000 = 35.000 + 25.000 = K_1 + K_2$, πρόκειται για πρόβλημα μέσης λήξης.
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση (6.6) και έχουμε:

$$60.000\ \nu = 25.000 \cdot 40 + 35.000 \cdot 80 \text{ και}$$

$\nu = 63{,}33 \simeq 63$ ημέρες μετά την 1/9, δηλαδή την 3/11. Το επιτόκιο και το έτος δε μας χρειάζονται, γιατί η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη απ’ αυτά.

Προβλήματα αντικατάστασης γραμματίων

1. Γραμμάτια 4.000, 9.000 και 15.000 €, τα οποία λήγουν αντιστοίχως την 20/1, 9/2 και 30/4, τα αντικαθιστούμε στις 10/1 με ένα γραμμάτιο, το οποίο λήγει στις 31/3. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας: α) η κοινή λήξη και β) η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 4%. Έτος πολιτικό.

(Απ. 28.030,68 - 28.030,95)

2. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 50.000 €, το οποίο την 1η Σεπ/βρίου αντικαθιστά τα εξής γραμμάτια: α) γραμμάτιο 20.000 € λήξης 10 Οκτωβρίου και β) γραμμάτιο 30.000 € λήξης 19 Νοεμβρίου. Επιτόκιο 8% και έτος πολιτικό. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

(Απ. ν = 108 ημ.)

3. Οφείλει κάποιος γραμμάτιο 50.000 €, το οποίο λήγει την 20ή Απριλίου. Για να εξοφλήσει το γραμμάτιο, υπογράφει τα εξής γραμμάτια: α) γραμμάτιο 10.000 € λήξης 21 Μαρτίου, β) γραμμάτιο 10.000 €, λήξης 10 Απριλίου, γ) γραμμάτιο 10.000 € λήξης 10 Μαΐου και δ) γραμμάτιο που λήγει στις 10 Ιουνίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του δ' γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη. Επιτόκιο 7% και έτος πολιτικό.

(Απ. K_4 = 20.158,81)

4. Δύο γραμμάτια από 5.000 € το καθένα λήγουν: το πρώτο μετά 30 ημέρες και το δεύτερο μετά 100 ημέρες από σήμερα. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 10.000 €, το οποίο αντικαθιστά τα δύο γραμμάτια;

(Απ. ν = 65 ημ. από σήμερα)

5. Γραμμάτιο 12.000 € έπρεπε να πληρωθεί την 30ή Μαΐου. Για την εξόφλησή του έγιναν τρία γραμμάτια: α) γραμμάτιο 4.500 € λήξης 15/4, β) γραμμάτιο 4.500 € λήξης 10/5 και γ) γραμμάτιο 3.000 € Να βρεθεί η λήξη του γ' γραμματίου.

(Απ. ν_3 = 143 ημ. μετά την 15/4)

6. Δύο γραμμάτια λήγουν μετά 60 και 180 ημέρες αντιστοίχως, έχουν μέση λήξη μετά 80 ημέρες, άθροισμα ονομαστικών αξιών ισοδύναμο με γραμμάτιο 20.000 €, το οποίο λήγει μετά 120 ημέρες από σήμερα. Να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων.

(Απ. K_1 = 16.554 – K_2 = 3.310,8)

7. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 60.000 €, το οποίο την 1η Σεπτεμβρίου αντικαθίσταται από δύο γραμμάτια: α) από γραμμάτιο 35.000 € λήξης 20 Νοεμβρίου και β) από γραμμάτιο 25.000 € λήξης 11 Οκτωβρίου. Εποχή ισοδυναμίας: α) ημέρα υπολογισμού και β) η κοινή λήξη. Επιτόκιο 9%. Έτος πολιτικό.

(Απ. ν = 63 ημ. μετά την 1η Σεπτεμβρίου)

8. Γραμμάτιο 60.000 € πρέπει να πληρωθεί μετά 80 ημέρες από σήμερα. Συμφωνήθηκε να γίνουν 4 ίσα γραμμάτια από 15.000 € το καθένα, τα οποία να λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα από σήμερα. Να βρεθούν οι λήξεις των τεσσάρων γραμματίων. Επιτόκιο 12% και έτος μεικτό.

(Απ. ν_1 = 32, ν_2 = 64, ν_3 = 96, ν_4 = 128)

9. Ο έμπορος Ε αγόρασε εμπορεύματα αξίας 500.000 € και πλήρωσε 140.000 € μετρητά˙ για το υπόλοιπο ποσόν υπέγραψε τρία ισόποσα γραμμάτια, τα οποία λήγουν μετά 20, 40 και 60 ημέρες από σήμερα. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του κάθε γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 6%, το έτος μεικτό και η εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

(Απ. $K_1 = K_2 = K_3 = 120.805$)

10. Χρέος 420.000 € πρέπει να πληρωθεί μετά 40 ημέρες από σήμερα. Έναντι αυτού εκδίδονται δύο συναλλαγματικές αξίας 120.000 € και 260.000 €, οι οποίες λήγουν αντίστοιχα μετά 35 και 60 ημέρες από σήμερα. Πότε πρέπει να λήγει τρίτη συναλλαγματική, αξίας 40.000 € για να εξοφληθεί το χρέος;

(Απ. $v_3 = -75$ δηλαδή πριν από 75 ημ. από σήμερα, άρα πρακτικώς αδύνατο)

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ Ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

7.1. Γενικά

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 1.4 της Εισαγωγής, έχουμε δύο είδη τόκων:

1) Τον **Απλό Τόκο** (Simple Interest), κατά τον οποίο ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, εισπράττεται από τον καταθέτη, ο οποίος αφήνει το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται για δεύτερη, τρίτη, κ.ο.κ. χρονική περίοδο. Δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο παραμένει το ίδιο σε όλες τις χρονικές περιόδους του τοκισμού.

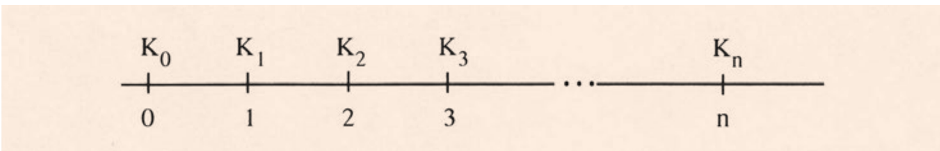
2) Το **Σύνθετο Τόκο** (Compound Interest) ή **Ανατοκισμό,** κατά τον οποίο ο καταθέτης αφήνει τον τόκο που έχει παραχθεί, (στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου), στο ταμιευτήριο, με σκοπό να προστεθεί στο κεφάλαιο (δηλαδή να κεφαλαιοποιηθεί), οπότε από την επόμενη χρονική περίοδο να φέρει τόκο το αρχικό κεφάλαιο συν τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου. Το ίδιο θα επαναλαμβάνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους έως τη λήξη της κατάθεσης. Στον ανατοκισμό, τόσο ο τόκος όσο και το τοκιζόμενο

κεφάλαιο αυξάνουν κάθε χρονική περίοδο, ενώ στον απλό τόκο ο τόκος και το αρχικό κεφάλαιο παραμένουν αμετάβλητα.

Η περίοδος του ανατοκισμού μπορεί να είναι το έτος ή το εξάμηνο ή το τρίμηνο ή και ο μήνας και λέμε ότι ο ανατοκισμός γίνεται ανά έτος ή ανά εξάμηνο ή ανά τρίμηνο, κτλ.

Αν ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται κατά τις χρονικές περιόδους 0, 1, 2, 3,..., n, τότε το κεφάλαιο που αντιστοιχεί στη χρονική περίοδο **(0)** ονομάζεται **αρχικό κεφάλαιο** ή **αρχική αξία** ή **παρούσα αξία** (present value) και θα το παριστάνουμε με το $\mathbf{K_0}$, ενώ το κεφάλαιο που θα έχει σχηματιστεί στο τέλος της n περιόδου ονομάζεται **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** του $\mathbf{K_0}$ (compound amount) και θα το παριστάνουμε με το $\mathbf{K_n}$.

Διάγραμμα 7.1



Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 7.1, στον ανατοκισμό το αρχικό κεφάλαιο (= K_0) στο τέλος της 1ης χρονικής περιόδου θα αυξηθεί κατά τον τόκο του και θα γίνει K_1. Στο τέλος της 2ης περιόδου θα έχουμε K_1 συν τον τόκο του και γίνεται K_2. Στο τέλος της 3ης περιόδου, το K_3 σχηματίζεται από το K_2 συν τον τόκο του. Το ίδιο θα γίνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους μέχρις ότου ο καταθέτης αποσύρει το τελικό κεφάλαιο. Συνεπώς, είναι δυνατόν από ένα μικρό αρχικό κεφάλαιο, το οποίο θα ανατοκιστεί για πολλά χρόνια, να παραχθεί ένα τεράστιο τελικό κεφάλαιο. Αν π.χ. ανατοκίσουμε 1 ευρώ για 1000 χρόνια, τότε θα παραχθεί τελικό κεφάλαιο, το οποίο θα αποτελείται από δεκαοκταψήφιο αριθμό, δηλαδή ποσό το οποίο υπερβαίνει το ύψος των κεφαλαίων που υπάρχουν σε όλη τη Γη.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του μαγικού φαινομένου του ανατοκισμού είναι το κληροδότημα των 1000 λιρών (στερλινών), τις οποίες έδωσε με διαθήκη ο Βενιαμίν Φραγκλίνος* στην πόλη της Βοστόνης (Η.Π.Α.). Ο

* Βλ. "Mathematics of Finance", Robert & Helen Cissell, Houghton Mifflin Company, Boston 1973, p. 76.

Βενιαμίν Φραγκλίνος πέθανε στις 17 Απριλίου 1790 και η πόλη της Βοστόνης έκανε δεκτή τη δωρεά την 1η Ιουνίου 1790. Σύμφωνα με τη διαθήκη του Φραγκλίνου, τα χρήματα κατατέθηκαν σε μια τράπεζα με ανατοκισμό για 100 χρόνια. Στο τέλος των 100 ετών, ένα τμήμα του συσσωρευμένου κεφαλαίου διατέθηκε για δημόσια έργα και το υπόλοιπο ανατοκίστηκε για άλλα 100 χρόνια.

Το 1907 το τεράστιο κτίριο Franklin Institute of Boston άρχισε με 438.742 δολλάρια. Περισσότεροι από 75.000 σπουδαστές έχουν φοιτήσει μέχρι το 1971 σε αυτό το ινστιτούτο, το οποίο άνοιξε το 1908. Το 1971 το ποσό που είχε συσσωρευτεί ήταν 2.552.267 δολλάρια. Από αυτά τα χρήματα χρηματοδοτούνται σήμερα σπουδαστές της Ιατρικής. Όλα αυτά από ένα κληροδότημα ισοδύναμο με 4.570 δολλάρια.

Ο ανατοκισμός κρίθηκε αρκετές φορές ως κοινωνικά άδικος όταν επιβάλλεται στις καθυστερούμενες δόσεις δανείων. Πρόσφατα, απαγορεύτηκε από το Ανώτατο Δικαστήριο της χώρας μας ο ανατοκισμός των καθυστερούμενων δόσεων δανείων όταν αυτός γίνεται με επιτόκιο υπερημερίας, ενώ ορίστηκε ότι το επιτόκιο υπερημερίας δεν μπορεί να υπερβαίνει τις δύο εκατοστιαίες μονάδες έναντι του ανώτατου επιτοκίου που χρησιμοποιεί η κάθε τράπεζα στις δανειοδοτήσεις της.

7.2. Εύρεση της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου τοκισμένου με ανατοκισμό. Γενικός τύπος ανατοκισμού

Στα προβλήματα του ανατοκισμού συμπλέκονται τέσσερα ποσά: α) το **αρχικό κεφάλαιο** (= K_0), το οποίο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή 0, β) το **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** (= K_n) του K_0, που θα έχει σχηματιστεί στο τέλος της **n** χρονικής περιόδου, γ) το **επιτόκιο** (= i), το οποίο θεωρείται σταθερό καθ’ όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού και δ) ο **χρόνος,** ο οποίος θα συμβολίζεται με το n, αν εκφράζεται σε ακέραιες περιόδους (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα) και με το **μ/ρ** αν εκφράζεται σε κλάσμα της ακέραιας περιόδου.

Για τον υπολογισμό του τελικού κεφαλαίου (= K_n) διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

7.2.1. Εύρεση του K_n όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ακέραιες χρονικές περιόδους

Είπαμε ότι σύνθετο τόκο έχουμε, όταν ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε περιόδου, προστίθεται στο τοκιζόμενο κεφάλαιο (= κεφαλαιοποιείται) και παράγει και αυτός τόκο από την επόμενη χρονική περίοδο κτλ., ώσπου να λήξει η κατάθεση.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό (Βλέπε και Διάγραμμα 7.1) ο γενικός τύπος του ανατοκισμού θα προκύψει ως εξής:

Στο τέλος της 1ης περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1 + i)$$

Στο τέλος της 2ης περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1(1 + i)$$

Στο τέλος της 3ης περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2(1 + i)$$

....

....

....

Στο τέλος της n-στής περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_{n-1}(1 + i)$$

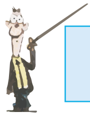
Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και έχουμε:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \ldots \cdot K_n = K_0(1+i) \cdot K_1(1+i) \cdot K_2(1+i) \cdot \ldots \cdot K_{n-1}(1+i)$$

$$= K_0 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_{n-1}[\underbrace{(1+i)(1+i)(1+i)\ldots(1+i)}_{\text{n φορές}}]$$

$$= K_0 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_{n-1}(1+i)^n$$

Μετά τις απαλοιφές παίρνουμε το γενικό τύπο του ανατοκισμού:*



$$\boxed{\mathbf{K_n = K_0 (1 + i)^n}} \qquad (7.1)$$

Παρατήρηση 1η. Ο τύπος (7.1) αποτελεί το γενικό τύπο του ανατοκισμού και με βάση αυτόν λύνονται όλα τα προβλήματα του ανατοκισμού. Το διώνυμο $(1 + i)^n$ ονομάζεται **συντελεστής κεφαλαιοποίησης** ή **ανατοκισμού** και το παίρνουμε από ειδικούς πίνακες** για διάφορα επιτόκια (= i) και n. Ο τύπος (7.1) προϋποθέτει ότι το επιτόκιο i αναφέρεται στην ίδια με το n χρονική περίοδο. Δηλαδή: Ετήσιο επιτόκιο, n = έτη, εξαμηνιαίο επιτόκιο, n = εξάμηνα.

Παρατήρηση 2η. Το διώνυμο $(1 + i)^n$ είναι η τελική αξία 1 νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n ακέραιες χρονικές περιόδους. Επειδή το $(1 + i)^n$ είναι δύναμη, όταν αυξάνεται το i ή το n, το $(1 + i)^n$ δεν αυξάνεται ανάλογα προς τα i και n αλλά κατά γεωμετρική πρόοδο, όπως δείχνουν τα Διαγράμματα 7.2 και 7.3.

---

* Στην ξένη βιβλιογραφία ο γενικός τύπος του ανατοκισμού έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{FV = PV\ (1 + r)^n} \qquad (7.1\alpha)$$

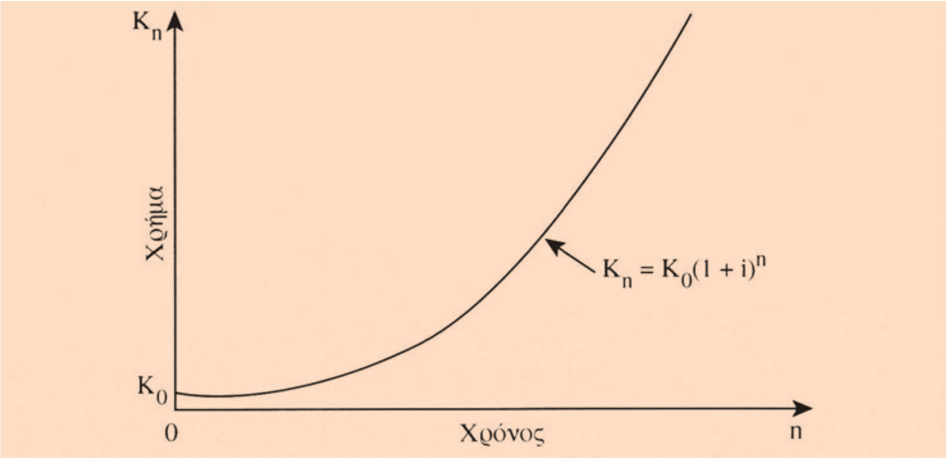
όπου: FV = Future Value = Μέλλουσα αξία του ποσού
PV = Present Value = Παρούσα αξία
r = Επιτόκιο (απόδοση μιας επένδυσης)
n = αριθμός χρονικών περιόδων,

Οι τύποι (7.1) και (7.1α) εκφράζουν τη **Διαχρονική Αξία του Χρήματος** (Time Value of Money).

Η έννοια αυτή είναι ο θεμέλιος λίθος, πάνω στον οποίο έχει κτιστεί ολόκληρο το οικοδόμημα της χρηματοοικονομικής (Finance).

** Βλ. Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεολυσίων, στο τέλος του βιβλίου.

Διάγραμμα 7.2



Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 6%. Τι ποσό θα έχει συσσωρευτεί στο ταμιευτήριο στο τέλος των 10 ετών;

Λύση. $K_0 = 20.000$, $n = 10$, $i = 0{,}06$, $K_n = ;$

Η τελική αξία (τελικό κεφάλαιο) του δοσμένου κεφαλαίου θα βρεθεί με τον τύπο (7.1). Αντικαθιστούμε τα δεδομένα, και έχουμε:

$$K_n = 20.000(1 + 0{,}06)^{10} = 20.000\ (1{,}06)^{10} \qquad (\alpha)$$

Το συντελεστή* $(1{,}06)^{10}$ τον βρίσκουμε στον Πίνακα Ι (βλέπε στο τέλος του βιβλίου) ως εξής: Στην πρώτη γραμμή του Πίνακα Ι εντοπίζουμε πρώτα το επιτόκιο 6% και στην πρώτη στήλη εντοπίζουμε το $n = 10$. Στη διασταύρωση της γραμμής $n = 10$ και της στήλης 6%, βρίσκουμε τον αριθμό 1,7908477, ο οποίος αποτελεί το εξαγόμενο της δύναμης $(1{,}06)^{10}$. Αντικαθιστώντας τώρα το $(1{,}06)^{10}$ με τον αριθμό 1,7908477 στην (α) βρίσκουμε το K_n. Δηλαδή:

$$K_n = 20.000 \times 1{,}7908477 = 35.816{,}95\ €$$

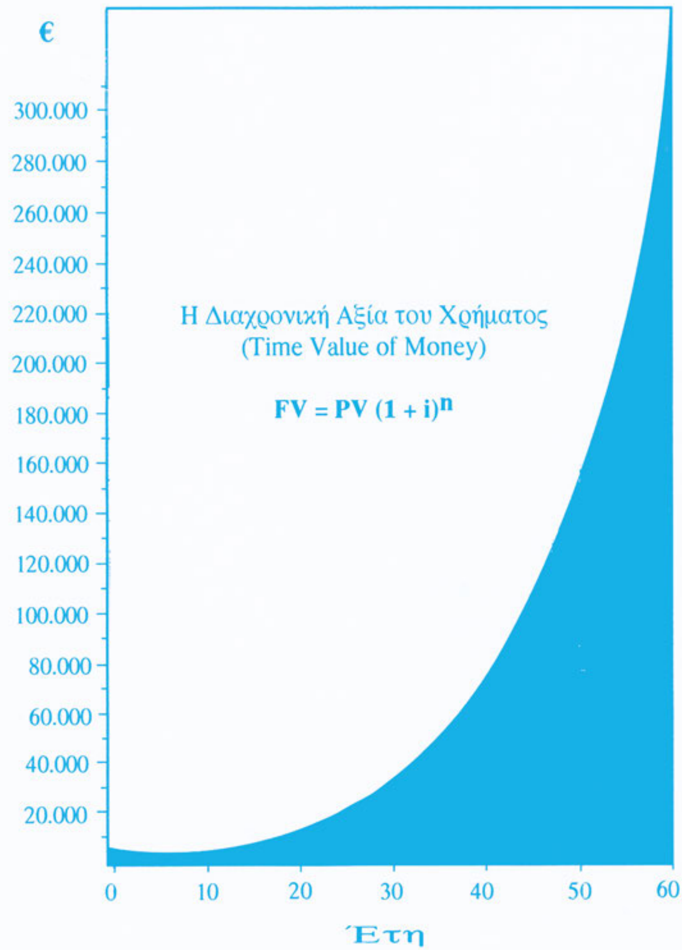
---

* Το συντελεστή ανατοκισμού $(1{,}06)^{10}$ μπορούμε να τον υπολογίσουμε με το Scientific Calculator (Κομπιουτεράκι), που διαθέτει το πλήκτρο x^y, ακολουθώντας την ακόλουθη διαδικασία : α) πληκτρολογούμε: α) 1,06, β) το x^y, γ) το 10 και δ) το =. Το κομπιουτεράκι θα εμφανίσει στην οθόνη το αποτέλεσμα: 1,7908477.

Διάγραμμα 7.3

Ο παρακάτω πίνακας και το αντίστοιχο διάγραμμα δείχνουν το κεφάλαιο που σχηματίζεται στο τέλος των 10, 15, 20, ...,100 ετών, αν ανατοκίσουμε 1000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 10%.

n	$K_n=1000(1+0,1)^n$
10	2.594
15	4.177
20	6.727
25	10.835
30	17.449
35	28.102
40	45.259
45	72.890
50	117.391
60	304.482
70	789.747
80	2.048.400
90	5.313.023
100	13.780.612



Παρατήρηση 3η. Αν τώρα ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο ή κάθε τρίμηνο και ο χρόνος δίνεται σε έτη και εξάμηνα ή σε έτη και τρίμηνα, τότε πρέπει να μετατρέψουμε τα έτη σε εξάμηνα ή τρίμηνα και εργαζόμαστε πλέον όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Πρέπει να έχουμε πάντοτε υπόψη μας ότι το επιτόκιο i πρέπει να αναφέρεται στην ίδια με το n χρονική περίοδο.

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο ταμιευτήριο μετά 5 έτη και 6 μήνες.

Λύση. Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, πρέπει να μετατρέψουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Θα έχουμε:

$$n = 5 \cdot 2 + 1 = 11 \text{ εξάμηνα}, \; K_0 = 20.000, \; i = 0{,}03$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο, (7.1) και βρίσκουμε:

$$K_n = 20.000\,(1,\,03)^{11} = 20.000 \cdot 1{,}38423387 = 27.684{,}68$$

7.2.2 Εύρεση του K_n όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μεικτό αριθμό χρονικών περιόδων

Για την εύρεση του τύπου (7.1) του ανατοκισμού υποθέσαμε ότι είχαμε ακέραιο αριθμό χρονικών περιόδων. Επιπλέον υποθέσαμε ότι το επιτόκιο i αναφερόταν στην ίδια με το n περίοδο. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το n είναι μεικτός αριθμός, δηλαδή αποτελείται από n ακέραιες περιόδους (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα) και μήνες (μ/ρ), π.χ. 10 έτη και 5 μήνες ή 15 εξάμηνα και 6 μήνες κ.ο.κ., και το επιτόκιο αναφέρεται στην ακεραία περίοδο, δηλαδή στο έτος ή στο εξάμηνο αντίστοιχα. Για να βρούμε το τελικό κεφάλαιο στο τέλος των n + μ/ρ χρονικών περιόδων, εργαζόμαστε με τους ακόλουθους τρόπους:

1ος τρόπος. Εκθετική Συνθήκη. Στην περίπτωση αυτή, για να βρούμε το τελικό κεφάλαιο στο τέλος των **n + μ/ρ** χρονικών περιόδων, εφαρμόζουμε το γενικό τύπο του ανατοκισμού, ο οποίος έχει τώρα την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^{n+\frac{\mu}{\rho}} = K_0(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{\rho}}} \quad (7.2)$$

Αν όμως η ακέραια περίοδος είναι το έτος, τότε η (7.2) γράφεται:

$$\boxed{K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}}} \quad (7.3)$$

Αν όμως η ακεραία περίοδος είναι το εξάμηνο, τότε:

$$\boxed{K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{6}}} \quad (7.4)$$

Παράδειγμα 1ο. Καταθέσαμε στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο με ετήσιο ανατοκισμό 20.000 € και με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί το ύψος του κεφαλαίου μετά 5 έτη και 8 μήνες.

Λύση. $K_0 = 20.000$, $i = 0{,}06$, $n = 5$, $\mu = 8$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (7.3) βρίσκουμε:

$$K_{n+\mu/12} = 20.000(1{,}06)^5(1{,}06)^{\frac{8}{12}} = 20.000 \cdot 1{,}33822 \cdot 1{,}03961 =$$

$$= 27.824{,}54.$$

Σημείωση: Το συντελεστή $(1{,}06)^{\frac{8}{12}}$ τον πήραμε από τον Πίνακα ΙΙ.

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται καθ' εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% επί 5 έτη και 8 μήνες. Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο.

Λύση. Στην περίπτωση αυτή, ως ακέραια περίοδος θεωρείται το εξάμηνο, οπότε: 5 έτη και 8 μήνες = 5 · 2 + 1 = 11 εξάμηνα και μ = 2

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (7.4) βρίσκουμε:

$$K_{n+\mu/\rho} = 20.000(1,03)^{11}(1,03)^{\frac{2}{6}} = 20.000(1,03)^{11}(1,03)^{\frac{4}{12}} =$$

$$= 20.000 \cdot 1,38423387 \cdot 1,0099 = 27.958,76$$

Σημείωση: Ο κλασματικός εκθέτης $(1,03)^{\frac{2}{6}}$ πρέπει να μετατρέπεται σε δωδέκατα $(1,03)^{\frac{2x2}{6x2}=\frac{4}{12}}$ για να χρησιμοποιείται ο Πίνακας ΙΙ.

2ος τρόπος. Γραμμική Συνθήκη. Στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και στα Ταμιευτήρια των Τραπεζών εφαρμόζεται ο **μεικτός ανατοκισμός˙** για τις ακέραιες περιόδους εφαρμόζεται ο ανατοκισμός, ενώ για το κλάσμα της ακέραιας περιόδου εφαρμόζεται ο απλός τόκος. Συνεπώς, κεφάλαιο K_0, το οποίο ανατοκίζεται επί n ακέραιες περιόδους και μ/ρ κλασματικές, στο τέλος των n + μ/ρ χρονικών περιόδων θα έχει τελική αξία:

$$\mathbf{K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n + K_0 \cdot (1+i)^n \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot i =}$$

$$\boxed{\mathbf{= K_0 \cdot (1+i)^n \left(1 + \frac{\mu}{\rho} \cdot i\right)}} \qquad (7.5)$$

Αν η ακέραια περίοδος είναι το έτος, τότε:

$$\boxed{K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \left(1 + \frac{\mu}{12} \cdot i\right)} \qquad (7.6)$$

όπου n = έτη, μ = μήνες

Αν η ακέραια περίοδος είναι το εξάμηνο, τότε:

$$\boxed{K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \left(1 + \frac{\mu}{6} \cdot i\right)} \qquad (7.7)$$

όπου n = εξάμηνα, μ = μήνες

Αν, τέλος, ο χρόνος εκφράζεται σε έτη (ή σε εξάμηνα) μήνες και ημέρες, τότε μετατρέπουμε τους μήνες σε ημέρες και εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n\left(1+\frac{\nu}{360}\cdot i\right) \qquad (7.8)$$

Παράδειγμα 1ο. Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 6%. Τι ποσό θα έχει συσσωρευτεί μετά 5 έτη και 8 μήνες;

Λύση. $K_0 = 20.000$, $n = 5$, $\mu = 8$, $i = 0,06$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (7.6), και βρίσκουμε:

$$K_{5+8/12} = 20.000(1,06)^5\left(1+\frac{8}{12}\cdot 0,06\right)$$
$$= 20.000\cdot 1,33823\cdot 1,04 = 27.835,18$$

Παράδειγμα 2ο. Κεφάλαιο 10.000 € ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3,5% επί 8 έτη και 8 μήνες. Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο.

Λύση. $K_0 = 10.000$, $i = 0,035$, $n = 17$ εξαμ., $\mu = 2$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (7.7) και βρίσκουμε:

$$K_n = 10.000(1,035)^{17}\left(1+\frac{2}{6}\cdot 0,035\right) =$$
$$= 10.000\cdot 1,79468\cdot 1,01167 = 18.156,24.$$

Παράδειγμα 3ο. Δανείζεται κάποιος σήμερα 1.000.000 € με ανατοκισμό. Τι ποσό πρέπει να επιστρέψει στον πιστωτή μετά 10 έτη 3 μήνες και 10 ημέρες, όταν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6% και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε χρόνο;

Λύση. $K_0 = 1.000.000$, $i = 0,06$, $n = 10$, $\mu = 3$, $\nu = 10$, $K_n = ;$

Μετατρέπουμε τους μήνες σε ημέρες και αντικαθιστούμε στον τύπο (7.8). $\nu = 3 \cdot 30 + 10 = 100$.

$$K_n = 1.000.000(1,06)^{10}\left(1+\frac{100}{360}x0,06\right) =$$
$$= 1.000.000\cdot 1,79085\cdot 1,01667 = 1.820.703,40.$$

7.3. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου (παρούσας αξίας)

Το αρχικό κεφάλαιο (= K_0), το οποίο ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους με επιτόκιο i, ονομάζεται και **παρούσα αξία** (Present Value) του κεφαλαίου που θα σχηματιστεί στο τέλος της n-ιοστής περιόδου, γιατί παριστάνει την αξία που έχει σήμερα το τελικό κεφάλαιο (= K_n).

Στην περίπτωση αυτή δημιουργείται το εξής πρόβλημα: Ποιο κεφάλαιο K_0, το οποίο ανατοκίστηκε επί n περιόδους με επιτόκιο i, έδωσε τελικό κεφάλαιο K_n;

Για να βρούμε το αρχικό κεφάλαιο, πρέπει να λύσουμε τον τύπο του ανατοκισμού $K_n = K_0 (1 + i)^n$ ως προς K_0. Δηλαδή:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n (1+i)^{-n} = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}} \qquad (7.9)^*$$

Αν παραστήσουμε το $\frac{1}{1+i}$ με το U, τότε η σχέση (7.9) γράφεται ως εξής:

$$\boxed{K_0 = K_n \cdot U^n} \qquad (7.10)$$

Το $\frac{1}{(1+i)^n} = U^n$, το οποίο είναι η παρούσα αξία μιας νομισματικής μο-

νάδας, στον ανατοκισμό ονομάζεται **συντελεστής προεξόφλησης** και παρέχεται από τον Πίνακα III για n = 1 έως n = 100 και για i = 1/4% έως i = 20%.

Αν τώρα ο χρόνος εκφράζεται σε έτη και μήνες ή σε εξάμηνα και μήνες, τότε από τον τύπο $K_n = K_0 (1+i)^{n+\frac{\mu}{12}}$ προκύπτει ο τύπος:

---

* Ο τύπος (7.9) στην ξένη βιβλιογραφία έχει τη μορφή: $PV = FV/(1 + r)^n$.
όπου : PV = Present Value, r = επιτόκιο
FV = Future Value, n = χρόνος

$$\mathbf{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^{n+\frac{\mu}{12}}} = \frac{K_n}{(1+i)^n(1+i)^{\frac{\mu}{12}}}} \qquad (7.11)$$

Ο τύπος (7.11) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^{n+\frac{\mu}{12}}} = \frac{K_n}{(1+i)^{n+1-1+\frac{\mu}{12}}} = \frac{K_n}{(1+i)^{n+1}(1+i)^{-\frac{12-\mu}{12}}}$$

και

$$\mathbf{K_0 = K_n(1+i)^{-(n+1)}(1+i)^{\frac{12-\mu}{12}} = K_n U^{n+1}(1+i)^{\frac{12-\mu}{12}}} \qquad (7.12)$$

Δηλαδή: Προεξοφλούμε για n + 1 έτη, εξάμηνα κτλ. και ανατοκίζουμε για τη διαφορά των μηνών.

Παράδειγμα 1ο. Ποιο κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε σήμερα, με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 4%, για να εισπράξουμε 100.000 μετά 20 έτη;

Λύση. K_n = 100.000, n = 20, i = 0,04, K_0=;

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (7.11) ή (7.12) και έχουμε:

$$K_0 = 100.000 \cdot \frac{1}{(1,04)^{20}} = 100.000 \cdot 0,45639 = 45.639\,€$$

Το $\frac{1}{(1,04)^{20}} = U^{20}_{0,04}$ το πήραμε από τον Πίνακα ΙΙΙ.

Παράδειγμα 2ο. Να βρεθεί το κεφάλαιο που ανατοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, επί 11 έτη και 5 μήνες και έγινε με τους τόκους του 165.000 €.

Λύση. $K_0 = ;$ $n = 11$, $\mu = 5$, $i = 0{,}045$, $K_n = 165.000$

Αντικαθιστούμε στον τύπο (7.11) και βρίσκουμε:

$$K_0 = \frac{165.000}{(1{,}045)^{11}(1{,}045)^{\frac{5}{12}}} = \frac{165.000}{1{,}622853 \cdot 1{,}018509} = 99.825{,}03$$

Σημείωση. Αν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη και μήνες ή σε εξάμηνα και μήνες, τότε για να βρούμε το K_0 λύνουμε τις εξισώσεις (7.6) και (7.7) της Γραμμικής Συνθήκης ως προς K_0, και έχουμε:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n \left(1 + \frac{\mu}{12} \cdot i\right)}, \quad n = \text{έτη}, \ \mu = \text{μήνες}} \qquad (7.13)$$

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n \left(1 + \frac{\mu}{6} \cdot i\right)}, \quad n = \text{εξάμηνα}, \ \mu = \text{μήνες}} \qquad (7.14)$$

Με τα δεδομένα του 2ου παραδείγματος, έχουμε:

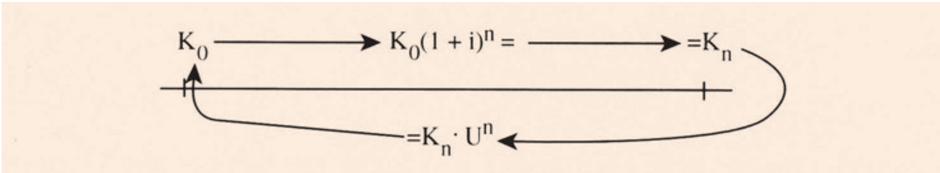
$$K_0 = \frac{165.000}{(1{,}045)^{11}\left(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}045\right)} = \frac{165.000}{1{,}622853 \cdot 1{,}01875} = 99.801{,}52$$

7.4. Προεξόφληση με ανατοκισμό

Από το γενικό τύπο του ανατοκισμού (7.1) προκύπτει ότι: Αν το αρχικό κεφάλαιο (παρούσα αξία) K_0 πολλαπλασιάσουμε επί το συντελεστή ανατοκισμού $(1 + i)^n$, τότε βρίσκουμε το τελικό κεφάλαιο: $K_n = K_0\,(1 + i)^n$.

Εξάλλου, από τον τύπο (7.10) προκύπτει ότι: Αν το τελικό κεφάλαιο K_n πολλαπλασιάσουμε επί το συντελεστή προεξοφλήσεως U^n, τότε βρίσκουμε το αρχικό κεφάλαιο (ή παρούσα αξία). Δηλαδή: $K_0 = K_n \cdot U^n$.

Τα παραπάνω φαίνονται καλύτερα στο ακόλουθο σχήμα:



Αν τώρα, από το τελικό κεφάλαιο αφαιρέσουμε το αρχικό κεφάλαιο (παρούσα αξία), τότε βρίσκουμε το **(εσωτερικό) προεξόφλημα με ανατοκισμό.** Δηλαδή:

$$\mathbf{E = K_n - K_n U^n} \qquad (7.15)$$

Αν τώρα γνωρίζουμε την παρούσα αξία (= K_0), τότε το προεξόφλημα βρίσκεται με τον τύπο:

$$\mathbf{E = K_0 (1+i)^n - K_0} \qquad (7.16)$$

Παρατήρηση 1η. Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (7.15) επί το συντελεστή ανατοκισμού $(1 + i)^n$, θα έχουμε:

$$E(1+i)^n = K_n (1+i)^n - K_n \cdot U^n (1+i)^n \qquad (7.17)$$

Αλλά: $$U^n (1+i)^n = (1+i)^{-n} (1+i)^n = 1$$

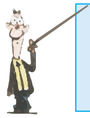
Επομένως, η σχέση (7.17) γράφεται:

$$E(1+i)^n = K_n (1+i)^n - K_n = I = \text{Τόκος} \qquad (7.18)$$

Ώστε:

$$\mathbf{I = E(1+i)^n} \qquad (7.19)$$

και



$$\mathbf{E = \frac{I}{(1+i)^n} = I \cdot U^n} \qquad (7.20)$$

Δηλαδή: Ο τόκος στον ανατοκισμό ισούται με την τελική αξία του προεξοφλήματος, ενώ το προεξόφλημα ισούται με την παρούσα αξία του τόκου.

Παρατήρηση 2η. Γνωρίζουμε ότι, ενώ στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις εφαρμόζεται η **εξωτερική προεξόφληση,** στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις εφαρμόζεται μόνο η **εσωτερική προεξόφληση,** γιατί η εξωτερική προεξόφληση οδηγεί σε άτοπα εξαγόμενα. Π.χ. το εξωτερικό προεξόφλημα (με ανατοκισμό) γραμματίου 10.000 €, το οποίο προεξοφλείται 10 έτη προτού λήξει με 8%, θα είναι:

$$10.000\ (1{,}08)^{10} - 10.000 = 10.000 \cdot 2{,}1589 - 10.000 = 11.589$$

Επομένως, η παρούσα αξία του γραμματίου θα ήταν αρνητική: 10.000 – 11.589 = –1.589. Το αποτέλεσμα όμως αυτό είναι προφανώς εξωπραγματικό.

Παράδειγμα. Ποια η παρούσα αξία και ποιο το προεξόφλημα με ανατοκισμό συναλλαγματικής ονομαστικής αξίας 100.000 €, η οποία προεξοφλήθηκε 5 έτη προτού λήξει με ετήσιο επιτόκιο 8,5%;

Λύση. $K_0 = ;$ $K_n = 100.000$, $n = 5$, $i = 0{,}085$, $E = ;$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στους τύπους (7.10), (7.15), (7.19) και (7.20) και βρίσκουμε:

$$K_0 = K_n \cdot U^n = 100.000 \cdot 0{,}6650454 = 66.504{,}54\ €$$

$$E = K_n - K_n \cdot U^n = 100.000 - 66.504{,}54 = 33.495{,}46\ €$$

$$I = E(1+i)^n = 33.495{,}46\ (1{,}085)^5 = 33.495{,}46 \cdot 1{,}5036567 =$$

$$= 50.365{,}67\ €$$

$$E = I \cdot U^n = 50.365{,}67 \cdot 0{,}6650454 = 33.495{,}45\ €$$

Προβλήματα Ανατοκισμού

1. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 200.000 €, το οποίο ανατοκίστηκε με $4\frac{1}{4}\%$ επί 8 έτη και 10 μήνες.

(Απ. 288.869)

2. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 100.000 €, το οποίο ανατοκίστηκε επί 12 έτη 7 μήνες και 13 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 4,5%.

(Απ. 174.310)

3. Καταθέτει κάποιος σήμερα 1.000.000 € με ανατοκισμό και με ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 20%. Να βρεθεί το ποσό που θα σχηματιστεί μετά 10 έτη, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.

(Απ. 6.256.860)

4. Ο έμπορος Ε κατέθεσε στην Τράπεζα Τ 250.000 €, με ανατοκισμό και με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2,5%. Έξι (6) έτη μετά την αρχική κατάθεση, το επιτόκιο άλλαξε και έγινε 3% το εξάμηνο. Να βρεθεί το ποσό που θα εμφανίζει ο λογαριασμός του Ε 10 έτη μετά την αλλαγή του επιτοκίου, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο. **(Απ. 607.255)**

5. Ο υπάλληλος Υ κατέθεσε με ανατοκισμό στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 200.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4,5% για μια περίοδο 5 ετών. Στο τέλος όμως των 2,5 ετών ο Υ απέσυρε 100.000 €. Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό του Υ στο τέλος των 5 ετών; (ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο). **(Απ. 185.975)**

6. Την 31/03/2002, ο έμπορος Υ πήρε από την Κτηματική Τράπεζα δάνειο 6.000.000 €. Ποιο ποσό πρέπει να επιστρέψει στις 31/03/2008, αν οι τόκοι του δανείου υπολογίστηκαν με ανατοκισμό, με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 16% και ο ανατοκισμός γινόταν κάθε εξάμηνο;

(Απ. 15.109.020)

7. Ποιο κεφάλαιο, αν ανατοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 6%, θα δώσει μετά 14 έτη και 3 μήνες τελικό κεφάλαιο 300.000; **(Απ. 130.772)**

8. Ένα οικόπεδο μπορεί να αγοραστεί αντί 2.850.000 € «μετρητοίς» ή αντί 3.000.000 € πληρωτέων μετά 12 μήνες με ανατοκισμό και με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 7%, όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο. Ποιός είναι ο οικονομικότερος τρόπος αγοράς του οικοπέδου; Αν, τώρα, το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι 4% και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, τι είναι προτιμότερο; Να αγοραστεί το οικόπεδο «μετρητοίς» ή με προθεσμία;
(Απ. Στην πρώτη περίπτωση συμφέρει να πληρώσει ο αγοραστής μετά 12 μήνες, γιατί κερδίζει 51.123 €. Η παρούσα αξία των 3.000.000 είναι:

$$3.000.000\ (1{,}0175)^{-4} = 3.000.000 \cdot 0{,}932959 = 2.798.877.$$

Άρα: 2.850.000 – 2.798.877 = 51.123 = κέρδος.
Στη β’ περίπτωση συμφέρει να αγοράσει «μετρητοίς» γιατί η παρούσα αξία των 3.000.000 με 1% το τρίμηνο είναι:
$3.000.000(1{,}01)^{-4} = 3.000.000 \cdot 0{,}960980 = 2.832.940.$
Αν πληρώσει «μετρητοίς», κερδίζει 32.940 (= 2.882.940 – 2.850.000)).

9. Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 10.000 € προεξοφλείται 3 έτη και 8 μήνες προτού λήξει με ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η παρούσα αξία και το προεξόφλημα.
(Απ. 8.076,33 - 1.923,77)

10. Ο έμπορος Ε κατέχει γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 25.000 €, το οποίο λήγει μετά 5 έτη. Επειδή ο Ε έχει ανάγκη από χρήματα, προεξοφλεί το γραμμάτιο με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 5%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, ποια θα είναι η παρούσα αξία και ποιο το προεξόφλημα; **(Απ. 19.500,20 - 5.499,80)**

11. Δάνεισε κάποιος κεφάλαιο 60.000 € με ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 5,5% για 8 χρόνια. Επί πόσο χρόνο πρέπει να δανείσει το ίδιο κεφάλαιο και με το ίδιο επιτόκιο, με απλό τόκο, για να εισπράξει το ίδιο τελικό κεφάλαιο και στις δύο περιπτώσεις;
(Απ. 3.500 ημ. ή 9 έτη 8 μην. 20 ημ.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΡΑΝΤΕΣ

8.1. Ορισμοί, κατάταξη και σύμβολα ραντών

Η εξόφληση ενός χρέους με δόσεις, ο σχηματισμός ενός κεφαλαίου με καταθέσεις, οι οποίες γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα, οι μηνιαίες κρατήσεις των μισθωτών για τα ασφαλιστικά ταμεία, η εύρεση της αξίας που αντιπροσωπεύει σήμερα ένα πλήθος χρηματικών ποσών, τα οποία θα εισπράττει κάποιος σε ορισμένα χρονικά διαστήματα (π.χ. μια υποτροφία) και πλήθος άλλων προβλημάτων, τα οποία συναντάμε συχνά στις εμπορικές και στις τραπεζικές συναλλαγές, συνιστούν μια ιδιαίτερη κατηγορία προβλημάτων του ανατοκισμού.

Μια σειρά δόσεων για την εξόφληση ενός δανείου ή οι διάφορες περιοδικές καταθέσεις για το σχηματισμό ενός κεφαλαίου, στα Οικονομικά Μαθηματικά, ονομάζονται ειδικότερα **Ράντα*.**

Ώστε: **Ράντα καλείται σειρά (ακολουθία) κεφαλαίων, τα οποία καταβάλλονται ή καταθέτονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.**

Κάθε χρηματικό ποσό που καταβάλλεται ή καταθέτεται στα ίσα χρονικά διαστήματα, λέγεται **όρος ή δόση** (Rent) της ράντας. Η χρονική στιγμή της

---

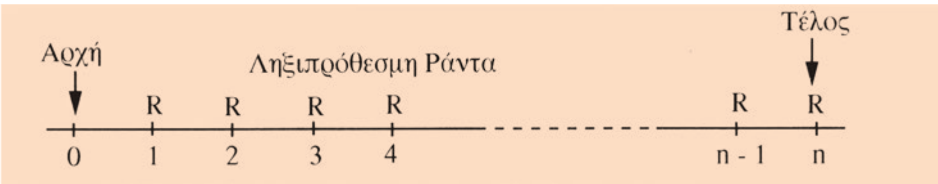
* Η λέξη Ράντα προέρχεται από τη λατινική λέξη Reddita. Στις λατινογενείς γλώσσες αποδίδεται με τις λέξεις: Rent ή Annuity (Αγγλ.), Rente ή Annuite (Γαλλ.), die Rente ή die Annuitat (Γερμ.) και Rendita ή Annualita (Ιταλ.). Στην ελληνική ορολογία χρησιμοποιήθηκαν οι λέξεις: Παροχή, Πρόσοδος, Χρηματοσειρά, Περιοδική καταβολή, αλλά επικράτησε τελικά ο μονολεκτικός όρος Ράντα.

πληρωμής ή της κατάθεσης της δόσης λέγεται **λήξη** της δόσης. Ο χρόνος που περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών λήξεων, ονομάζεται **περίοδος** της ράντας.

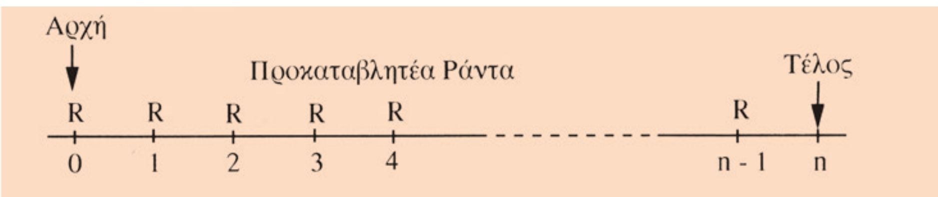
Ληξιπρόθεσμη Ράντα (Ordinary Annuity) λέγεται η ράντα, της οποίας ο όρος καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου.

Προκαταβλητέα Ράντα (Annuity Due) ονομάζεται η ράντα, της οποίας ο όρος καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ορισμών, παρατηρήστε τα επόμενα σχήματα:



R = Όρος ή δόση, 0, 1, 2, ..., n = Περίοδος της ράντας.



Αρχή ράντας λέγεται, στις ληξιπρόθεσμες ράντες, μία περίοδος πριν από την καταβολή του πρώτου όρου, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες η περίοδος καταβολής του πρώτου όρου της ράντας.

Τέλος ράντας είναι, στις ληξιπρόθεσμες ράντες, η περίοδος καταβολής του τελευταίου όρου, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες, μία περίοδος μετά την καταβολή του τελευταίου όρου. Η χρονική στιγμή κατά την οποία ζητείται ο υπολογισμός της αξίας των όρων μιας ράντας λέγεται **Εποχή Υπολογισμού** (Focal Date).

Παρούσα Αξία (Present Value) ράντας λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας σε μια ορισμένη χρονική στιγμή. Αν η χρονική στιγμή συμπίπτει με την αρχή της ράντας, τότε η παρούσα αξία ονομάζεται **Αρχική Αξία.**

Τελική Αξία (Final Value or amount of an annuity) ράντας λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στο τέλος της ράντας.

Βέβαιη Ράντα λέγεται η ράντα, της οποίας η καταβολή των όρων δεν εξαρτάται από την πραγματοποίηση ή όχι κάποιου γεγονότος.

Τυχαία Ράντα (Contingent Annuity) λέγεται η ράντα, της οποίας η καταβολή των όρων της εξαρτάται από την πραγματοποίηση ενός τυχαίου γεγονότος (π.χ. ζωής ή θανάτου ενός προσώπου). Στις τυχαίες ράντες ανήκουν και οι ράντες ζωής, με τις οποίες ασχολούνται τα **Ασφαλιστικά Μαθηματικά.** Στο Κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μόνο της Βέβαιες Ράντες.

Κατάταξη Ραντών. Οι Ράντες κατατάσσονται:

1) Ανάλογα με τον όρο: α) Σε **σταθερές,** όταν όλοι οι όροι της ράντας είναι ίσοι και β) σε **μεταβλητές,** όταν οι όροι δεν είναι ίσοι. Όταν όλοι οι όροι της ράντας είναι ίσοι με τη μονάδα, τότε η ράντα ονομάζεται **μοναδιαία.**

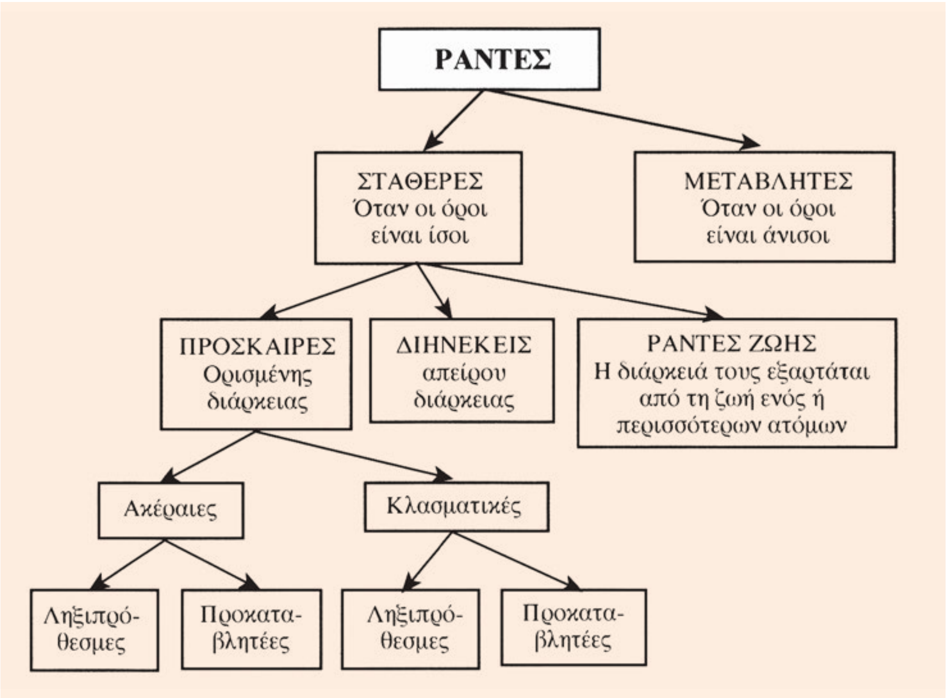
2) Ανάλογα με τη διάρκεια: α) σε **πρόσκαιρες** (Annuity Certain), όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι ορισμένο, β) σε **διηνεκείς** (Perpetuity), όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι άπειρο και γ) σε **ράντες ζωής** (Life annuity), όταν το πλήθος των όρων μιας ράντας εξαρτάται από τη διάρκεια της ζωής ενός ή περισσότερων ατόμων. Στο Κεφάλαιο αυτό θα σπουδάσουμε μόνο τις πρόσκαιρες ράντες.

3) Ανάλογα με την εποχή υπολογισμού: α) σε **άμεσες** (Immediate), όταν η εποχή υπολογισμού της ράντας συμπίπτει με την αρχή της ράντας, β) σε **μέλλουσες** (Deffered), όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται πριν από την αρχή της ράντας και γ) σε **αρξάμενες** (Anticipated), όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται μετά την αρχή της ράντας.

4) Ανάλογα με την περίοδο: α) σε **ακέραιες** και β) σε **κλασματικές.** Όταν η περίοδος της ράντας είναι το έτος, το εξάμηνο, κτλ., ο όρος της ράντας είναι ετήσιος, εξαμηνιαίος, κτλ. και το επιτόκιο είναι ετήσιο, εξαμηνιαίο, κτλ. τότε η ράντα λέγεται **ακέραια.** Αν όμως ο όρος της ακέραιας ράντας διαιρείται σε ρ ίσα τμήματα και κάθε ένα από αυτά καταβάλλεται ρ φορές εντός της ακέραιας περιόδου ανά 1/ρ αυτής, τότε η ράντα ονομάζεται **κλασματική.**

Για την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των παραπάνω ορισμών, παραθέτουμε το επόμενο διάγραμμα:

Διάγραμμα 8.1



Σύμβολα Ραντών. Κατά τη λύση των διαφόρων προβλημάτων των ραντών, θα χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα διεθνή σύμβολα:

R = Όρος (δόση) μιας σταθερής ράντας.

$\alpha_{\overline{n}|i}$ = Παρούσα (αρχική) αξία ράντας σταθερής, άμεσης, **ληξιπρόθεσμης,** n όρων αξίας 1 νομ. μονάδας με επιτόκιο i.

$\mathbf{a}_{\overline{n}|i}$ = Παρούσα αξία **προκαταβλητέας** ράντας σταθερής, άμεσης, κτλ.

$\mathbf{S}_{\overline{n}|i}$ = Τελική αξία **ληξιπρόθεσμης** ράντας, n όρων 1 νομισμ. μονάδας, με επιτόκιο i.

$\varsigma_{n\rceil i}$ = Τελική αξία **προκαταβλητέας** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας, με επιτόκιο i.

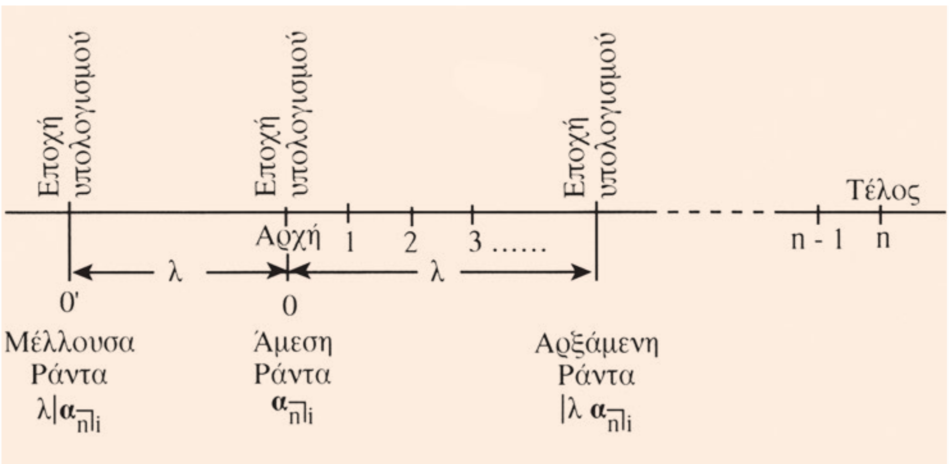
$\lambda|\alpha_{n\rceil i}$ = Παρούσα αξία μέλλουσας ληξιπρόθεσμης ράντας.

$|\lambda\,\alpha_{n\rceil i}$ = Παρούσα αξία αρξάμενης ληξιπρόθεσμης ράντας.

$\lambda|\mathbf{a}_{n\rceil i}$ και $|\lambda\,\mathbf{a}_{n\rceil i}$ = Παρούσα αξία μέλλουσας και αρξάμενης προκαταβλητέας ράντας.

V = αξία ράντας, n όρων σε ορισμένη χρονική στιγμή.

Διάγραμμα 8.2



Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με τις ράντες εκείνες οι οποίες εφαρμόζονται ευρύτατα στις εμπορικές και τραπεζικές συναλλαγές, δηλαδή με ράντες: Βέβαιες, σταθερές, πρόσκαιρες, ακέραιες.

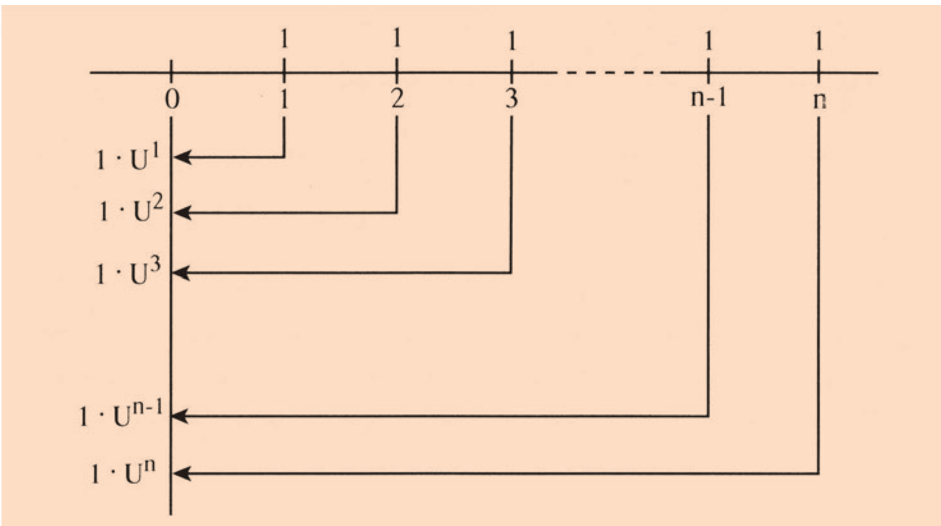
ΠΡΟΣΚΑΙΡΕΣ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

8.2. Εύρεση της αρχικής (παρούσας) αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

8.2.1. Άμεση Ράντα

Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα, διάρκειας n ετών (ή εξαμήνων, κτλ.), όρου 1 νομισματικής μονάδας, με επιτόκιο i και θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική (παρούσα) αξία των όρων της ράντας, δηλαδή να βρούμε την αξία της ράντας στην αρχή της. Για την καλύτερη κατανόηση κατασκευάζουμε το Διάγραμμα 8.3.

Διάγραμμα 8.3



Η παρούσα (αρχική) αξία κάθε όρου της ράντας θα βρεθεί με βάση το γνωστό τύπο:

$$K_0 = K_n \cdot U^n \qquad \text{όπου} \qquad K_n = 1.$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε:

Η 1η	νομισμ.	μονάδα	έχει	παρούσα	αξία:	$1 \cdot U^1 = U^1$
Η 2η	"	"	"	"	"	$1 \cdot U^2 = U^2$
Η 3η	"	"	"	"	"	$1 \cdot U^3 = U^3$

....

....

Η n νομισμ. μονάδα έχει παρούσα αξία: $1 \cdot U^n = U^n$

Η ζητούμενη αρχική (παρούσα) αξία -η οποία συμβολίζεται με το $\alpha_{\overline{n}|i}$- ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παρουσών αξιών των όρων της ράντας, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i} = U^1 + U^2 + U^3 + \ldots + U^{n-1} + U^n \tag{8.1}$$

Το β' μέλος της σχέσεως (8.1) είναι το άθροισμα των n όρων γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο το U, με λόγο το U και τελευταίο όρο το U^n. Αν στον τύπο*:

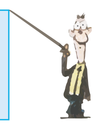
$$\Sigma = \frac{\tau \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1}, \qquad \omega \neq 1 \tag{8.2}$$

θέσουμε όπου: $\alpha = U$, $\omega = U$ και $\tau = U^n$, τότε θα έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i} = \frac{U^n \cdot U - U}{U - 1} = \frac{U(U^n - 1)}{U - 1} = \frac{U^n - 1}{1 - \frac{1}{U}} = \frac{1 - U^n}{\frac{1}{U} - 1}$$

Γνωρίζουμε ότι: $U = \frac{1}{1+i}$, οπότε $\frac{1}{U} = 1 + i$. Αν τώρα αντικαταστήσουμε στον παρονομαστή της τελευταίας σχέσης το 1/U με το ίσον του (1 + i), τότε προκύπτει η επόμενη θεμελιώδης σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - U^n}{i} \tag{8.3}$$



Ο συντελεστής $\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}$ είναι η αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας. Το συντελεστή αυτό το βρίσκουμε στον Πίνακα IV, ο οποίος είναι στο τέλος του βιβλίου. Μπορούμε

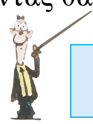
* Με τον τύπο (8.2) βρίσκουμε το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\omega \neq 1$.

όμως να πάρουμε το U^n από τον Πίνακα ΙΙΙ και να το αντικαταστήσουμε στον αριθμητή του τύπου (8.3). Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή του $\alpha_{\overline{20}|0,12} = \dfrac{1-U^{20}}{0,12}$, ως έξης: Από τον Πίνακα ΙΙΙ με i = 0,12 και n = 20 παίρνουμε U^{20} = 0,10366677. Αντικαθιστώντας τώρα το U^{20} στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε:

$$\alpha_{\overline{20}|0,12} = \frac{1-0,10366677}{0,12} = 7,469444$$

Παρατήρηση: Η παρούσα αξία, για την ίδια τιμή του n, είναι **φθίνουσα** συνάρτηση του επιτοκίου i, γιατί, όταν αυξάνεται το i, ελαττώνεται ο συντελεστής προεξοφλήσεως U καθώς και οι δυνάμεις αυτού με εκθέτες θετικούς και ακεραίους, άρα και το άθροισμα (8.1). Αντιθέτως, για την ίδια τιμή του επιτοκίου i, η παρούσα αξία είναι αύξουσα συνάρτηση του n, γιατί, όταν αυξάνει το n, αυξάνει το πλήθος των όρων του αθροίσματος, άρα αυξάνει και το $\alpha_{\overline{n}|i}$.

Αν ο όρος μιας ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε το $\alpha_{\overline{n}|i}$ πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί R. Επομένως, η αρχική αξία όλων των όρων μιας ληξιπρόθεσμης ράντας θα υπολογιστεί βάσει του τύπου:

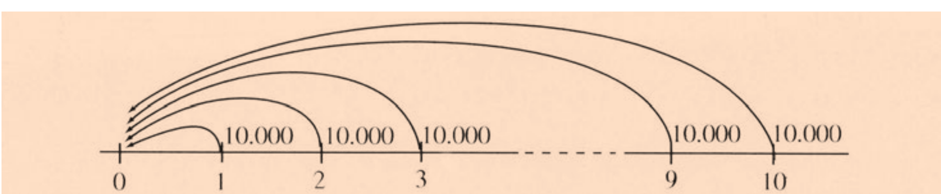


$$\boxed{V_{\alpha\rho\chi.} = R\,\alpha_{\overline{n}|i}} \qquad (8.4)$$

Παράδειγμα 1ο. Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε μια τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 7%, για να έχουμε το δικαίωμα να αποσύρουμε 10.000 € στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη.

Λύση. R = 10.000, i = 0,07, n = 10.

Διάγραμμα 8.4



Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.4) και έχουμε:

$$V_{\alpha\rho\chi.} = R\alpha_{\overline{n|}\,i} = 10.000\,\alpha_{\overline{10|}\,0,07} \qquad (\alpha)$$

Από τον Πίνακα IV με i = 0,07 και n = 10 παίρνουμε:

$$\alpha_{\overline{10|}\,0,07} = 7,023581$$

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (α) βρίσκουμε:

$$V_{\alpha\rho\chi.} = 10.000 \cdot 7,023581 = 70.235,81€$$

Άρα, πρέπει να καταθέσουμε σήμερα 70.235,81 €.

Παράδειγμα 2ο. Ένα ίδρυμα θέλει να χορηγεί κάθε χρόνο μία υποτροφία 100.000 € και επί 10 χρόνια. Η πρώτη υποτροφία θα χορηγηθεί μετά ένα χρόνο. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα σε μια Τράπεζα, με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 4%, για να μπορεί να δίνει τις 100.000 € στο τέλος κάθε χρόνου;

Λύση. Το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα αντιστοιχεί με την αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων, της οποίας ο κάθε όρος αποτελείται από 100.000 €. Δηλαδή:

$$R = 100.000, \quad n = 10, \quad i = 0,04$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.4) και βρίσκουμε:

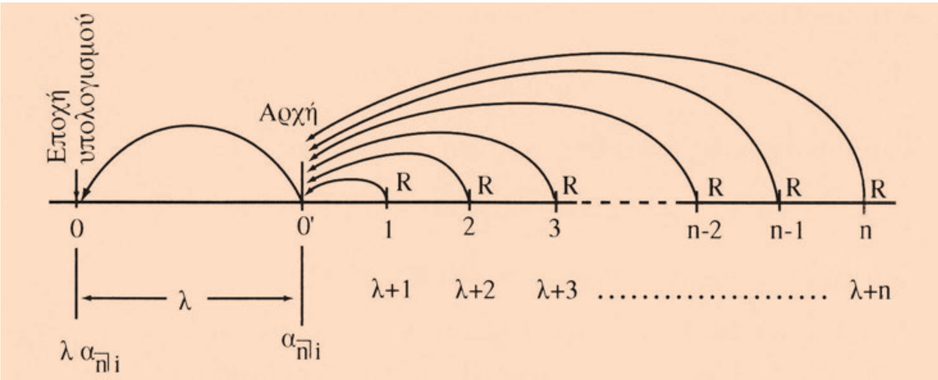
$$V_{\alpha\rho\chi.} = 10.000\,\alpha_{\overline{10|}0,04} = 100.000 \cdot 8,11089578 = 811.089,58$$

Ώστε: Το ίδρυμα πρέπει να καταθέσει σήμερα 811.089,58 €, για να μπορεί να αποσύρει κάθε χρόνο 100.000 € για την υποτροφία.

8.2.2. Μέλλουσα Ράντα

Είπαμε ότι, αν η εποχή υπολογισμού της αξίας των όρων μιας ράντας βρίσκεται λ περιόδους πριν από την αρχή της ράντας, τότε η ράντα ονομάζεται Μέλλουσα, δηλαδή η ράντα πρόκειται να αρχίσει λ περιόδους μετά την εποχή υπολογισμού. Για την καλύτερη κατανόηση μιας μέλλουσας ράντας παραθέτουμε το Διάγραμμα 8.5.

Διάγραμμα 8.5



Από το Διάγραμμα 8.5 συνάγεται ότι για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης μέλλουσας ράντας, θα πρέπει να προεξοφλήσουμε **λ** περιόδους την αντίστοιχη άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα.

Κατά συνέπεια, η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης μέλλουσας ράντας θα βρίσκεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{\pi.\alpha.} = R \cdot \lambda \,|\, \alpha_{\overline{n}|i} = R\,\alpha_{\overline{n}|i} U^{\lambda} \qquad (8.5)$$

Αν παρατηρήσουμε με προσοχή το Διάγραμμα 8.5, θα διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση της μέλλουσας ληξιπρόθεσμης ράντας, ο 1ος όρος θα καταβληθεί μετά (λ + 1) περιόδους, ο 2ος όρος θα καταβληθεί μετά (λ + 2) περιόδους κ.ο.κ. και ο n-ιοστός όρος θα καταβληθεί μετά (λ + n) περιόδους.

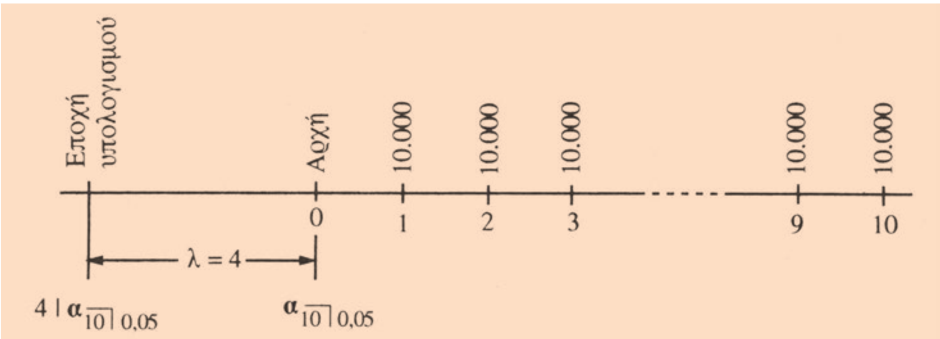
Παρατήρηση: Το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε και στην περίπτωση κατά την οποία η παραπάνω ράντα θεωρηθεί ως διαφορά μεταξύ μιας άμεσης ράντας (λ + n) όρων και μιας άμεσης ράντας λ όρων. Δηλαδή:

$$V_{\pi.\alpha.} = R \cdot \lambda \,|\, \alpha_{\overline{n}|i} = R\,\alpha_{\overline{\lambda+n}|i} - R\,\alpha_{\overline{\lambda}|i} \qquad (8.6)$$

Παράδειγμα. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε μια Τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 5%, για να έχουμε το δικαίωμα να αποσύρουμε (στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη)10.000 €, αρχής γενομένης μετά 5 έτη -από σήμερα.

Λύση. Το ποσό που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα αποτελεί την παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων, των 10.000 €, μέλλουσα να αρχίσει μετά 4 έτη. Εφόσον η πρώτη ανάληψη θα αρχίσει μετά 5 έτη και η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη, έπεται ότι λ = 4. Για καλύτερη κατανόηση, παρατηρήστε το Διάγραμμα 8.6.

Διάγραμμα 8.6



Έχουμε: R = 10.000, n = 10, i = 0,05, λ = 4

Αντικαθιστούμε στον τύπο (8.5) και βρίσκουμε:

$$V_{\pi.\alpha.} = 10.000\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{10}|0,05} U^{4}_{0,05} = 10.000 \cdot 7,72173 \cdot 0,8227 =$$

$$= 63.526,67\,€$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε, αν εφαρμόσουμε τον τύπο (8.6). Θα έχουμε:

$$V_{\pi.\alpha.} = R \cdot \lambda \,|\, \boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{\lambda+n}|i} - R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{\lambda}|i} =$$

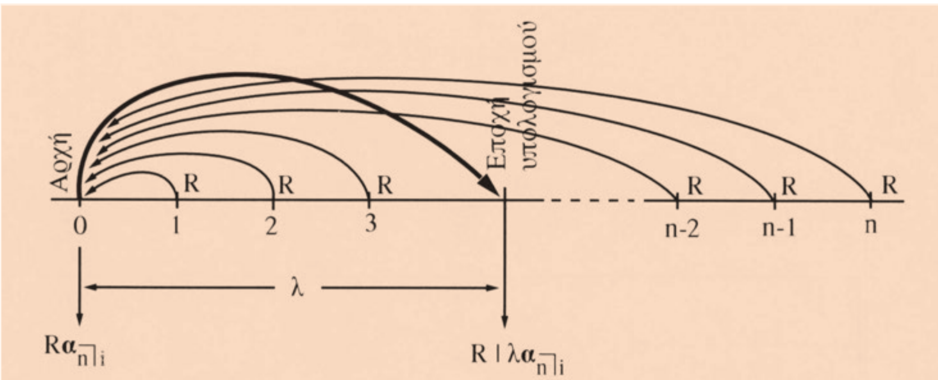
$$= 10.000\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{14}|0,05} - 10.000\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{4}|0,05} =$$

$$= 10.000 \cdot 9,89864 - 10.000 \cdot 3,54595 = 63.526,90.$$

8.2.3. Αρξάμενη Ράντα

Όταν η εποχή υπολογισμού της αξίας των όρων μιας ράντας βρίσκεται **λ** περιόδους μετά την αρχή της ράντας, τότε η ράντα ονομάζεται **αρξάμενη.** Δηλαδή ζητάμε την αξία της ράντας **λ** περιόδου μετά την αρχή της, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 8.7.

Διάγραμμα 8.7



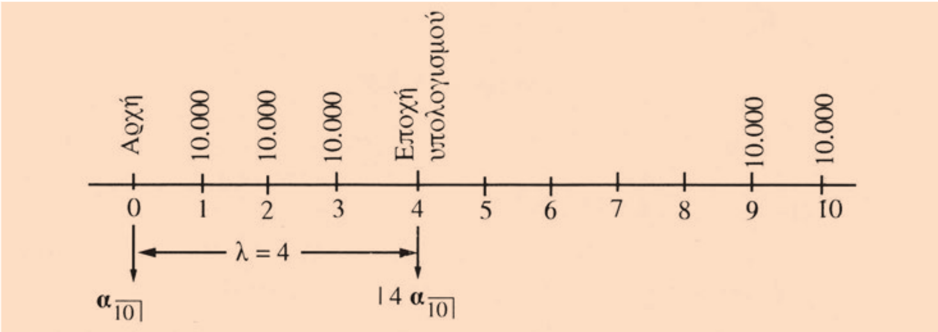
Από το Διάγραμμα 8.7 συνάγεται ότι, για να βρούμε την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης αρξάμενης ράντας, αρκεί να υπολογίσουμε πρώτα την αρχική αξία της ράντας και κατόπιν να την ανατοκίσουμε για λ περιόδους. Κατά συνέπεια, η παρούσα αξία μιας αρξάμενης ληξιπρόθεσμης ράντας θα βρεθεί με τον τύπο:

$$V_{\pi.\alpha.} = R\,|\boldsymbol{\lambda\alpha}_{\overline{n}|i} = R\,|\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i)^{\lambda} \qquad (8.7)$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, διάρκειας 10 ετών, ετήσιου όρου 10.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 5%, της οποίας ο πρώτος όρος κατατέθηκε πριν από τρία χρόνια.

Λύση. Εφόσον ο πρώτος όρος κατατέθηκε πριν από τρία χρόνια και η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη, έπεται ότι λ = 4, γιατί κατά το τέταρτο έτος συμπληρώθηκαν τρία χρόνια από την κατάθεση του πρώτου όρου. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο Διάγραμμα 8.8.

Διάγραμμα 8.8



R= 10.000, n =10, i = 0,05, λ = 4.

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.7), και βρίσκουμε:

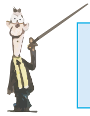
$$V_{\pi.\alpha.} = 10.000\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{14|}0,05}(1,05)^4 = 10.000 \cdot 7,72173 \cdot 1,21551 = 93.858,40$$

8.3. Εύρεση της αρχικής (παρούσας) αξίας προκαταβλητέας ράντας

Άμεση Ράντα. Είπαμε ότι **Προκαταβλητέα** ονομάζεται η ράντα της οποίας ο όρος καταβάλλεται στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου.

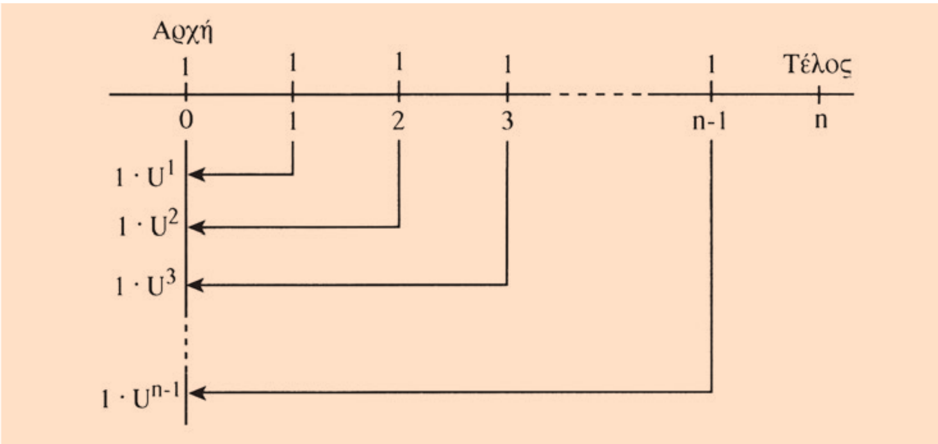
Έστω ότι έχουμε μια **προκαταβλητέα** ράντα **n** όρων, 1 νομισματικής μονάδας και θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία της. Θα εργαστούμε όπως ακριβώς εργαστήκαμε και στην περίπτωση της ληξιπρόθεσμης ράντας. Για την καλύτερη κατανόηση παραθέτουμε το Διάγραμμα 8.9.

Η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας συμβολίζεται με το $\mathbf{a}_{\overline{n|}i}$. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 8.9, η παρούσα αξία του πρώτου όρου είναι 1, του δεύτερου όρου είναι $1 \cdot U^1$, του τρίτου $1 \cdot U^2$ κ.ο.κ. και του τελευταίου όρου $1 \cdot U^{n-1}$ Δηλαδή, για να βρούμε την παρούσα αξία κάθε όρου προεξοφλούμε. Ο πρώτος όρος δεν προεξοφλείται, γιατί η παρούσα αξία του κατά τη χρονική στιγμή 0 ισούται με τον εαυτό του. Επομένως, η παρούσα (αρχική) αξία όλων των όρων μιας προκαταβλητέας ράντας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παρουσών αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή:



$$\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = 1 + U^1 + U^2 + U^3 + \ldots + U^{n-1} \tag{8.8}$$

Διάγραμμα 8.9



Το β' μέλος της σχέσης (8.8) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α = 1, λόγο ω = U και τελευταίο όρο τ = U^{n-1}. Συνεπώς, σύμφωνα με το γνωστό τύπο:

$$\Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1} \quad \text{θα έχουμε:}$$

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = \frac{U^{n-1}U^1 - 1}{U-1} = \frac{U^{n-1+1} - 1}{U-1} = \frac{U^n - 1}{U-1} = \frac{(-1)(U^n - 1)}{(-1)(U-1)} =$$

$$= \frac{1-U^n}{1-U} = \frac{1-U^n}{1-\dfrac{1}{1+i}} = \frac{1-U^n}{\dfrac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1-U^n}{i}(1+i) =$$

$$= \boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i), \qquad \text{γιατί} \qquad \frac{1-U^n}{i} = \boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}$$

Ώστε:

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = \boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i) \tag{8.9}$$

Η σχέση (8.9) παρέχει την αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας. Αν όμως ο όρος της ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας θα υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{\alpha\rho\chi.} = R\,\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n|}i}(1+i) \tag{8.10}$$

Παρατήρηση 1η. Από τη σχέση (8.10) συνάγεται ότι, για να βρούμε την αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να ανατοκίσουμε την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη για μία ακόμη χρονική περίοδο.

Παρατήρηση 2η. Αποδεικνύεται ότι η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας n όρων ισούται με την αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας (n – 1) όρων*, αυξημένης κατά τον όρο R. Επομένως, η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{\alpha\rho\chi.} = R\,\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n-1|}i} + R \tag{8.11}$$

Παρατήρηση 3η. Αν η ράντα είναι **Μέλλουσα** να αρχίσει μετά λ περιόδους, τότε η παρούσα αξία της θα είναι:

$$V_{\pi.\alpha.} = R\,\lambda|\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = R\,\mathbf{a}_{\overline{n|}i}U^{\lambda} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n|}i}(1+i)U^{\lambda} \tag{8.12}$$

Παρατήρηση 4η. Αν, τέλος, η ράντα είναι **αρξάμενη,** δηλαδή έχει αρχίσει πριν από λ περιόδους, τότε η παρούσα αξία της θα είναι:

$$V_{\pi.\alpha.} = R\,|\lambda\,\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = R\,\mathbf{a}_{\overline{n|}i}(1+i)^{\lambda} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n|}i}(1+i)(1+i)^{\lambda} \tag{8.13}$$

---

* Είδαμε πιο πάνω ότι: $\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = \dfrac{U^{n-1}U-1}{U-1}$.

Αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το U, τότε θα έχουμε:

$\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = \dfrac{U^{n-1} - \frac{1}{U}}{1 - \frac{1}{U}}$. Αλλά $\dfrac{1}{U} = \dfrac{1}{\frac{1}{1+i}} = 1+i$.

Αντικαθιστούμε τώρα το $\dfrac{1}{U}$ με το ίσον του (1 + i) και έχουμε:

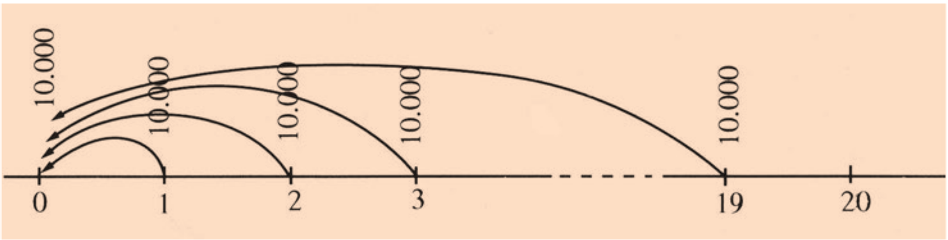
$\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = \dfrac{U^{n-1}-1-i}{1-1-i} = \dfrac{(-1)(U^{n-1}-1-i)}{(-1)(-i)} = \dfrac{1-U^{n-1}}{i} + \dfrac{i}{i} = \alpha_{\overline{n-1|}} + 1$ και $R\cdot\mathbf{a}_{\overline{n|}i} = R\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n-1|}} + R$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η αρχική (παρούσα) αξία προκαταβλητέας ράντας, ετήσιου όρου 10.000 € διάρκειας 20 ετών, με ετήσιο επιτόκιο 6% αν αυτή: α) είναι άμεση, β) πρόκειται να αρχίσει μετά 4 έτη και γ) έχει αρχίσει πριν από 4 χρόνια.

Λύση. R 10.000, $n = 20$, $i = 0{,}06$, $V_{αρχ.} = ;$

α) Άμεση.

Διάγραμμα 8.10

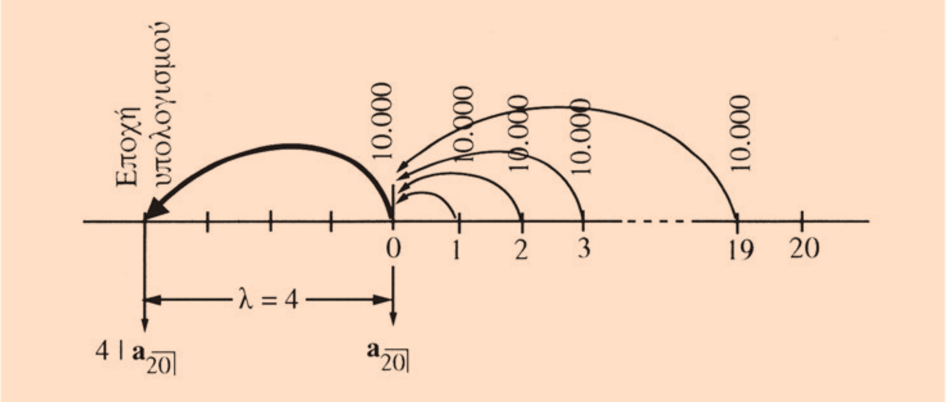


Αντικαθιστούμε στον τύπο (8.10) και βρίσκουμε:

$$V_{αρχ.} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i) = 10.000\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{20}|0,06}(1,06) = 10.000 \cdot 11,46992 \cdot 1,06 =$$
$$= 121.581,15$$

β) Μέλλουσα να αρχίσει μετά 4 έτη.

Διάγραμμα 8.11



Όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 8.11, βρίσκουμε καταρχήν την αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας και ύστερα την προεξοφλούμε για 4 έτη. Δηλαδή:

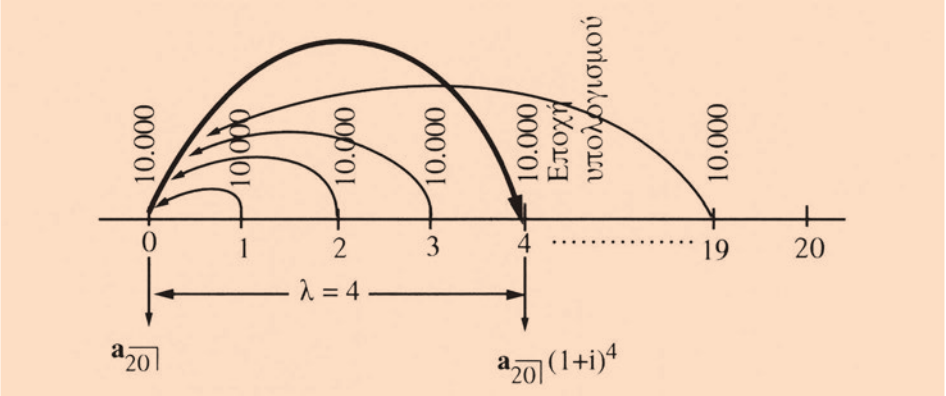
$$V_{\alpha\rho\chi.} = R\,\lambda\,|\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = R\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}U^{\lambda} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i)U^{\lambda} =$$

$$= 10.000\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{20}|0,06}(1,06)U^{4} = 10.000 \cdot 11,46992 \cdot 1,06 \cdot \frac{1}{(1,06)^{4}} =$$

$$= 114.699,20 \cdot 0,83961 = 96.302,59$$

γ) Αρξάμενη πριν από 4 χρόνια.

Διάγραμμα 8.12



Επειδή η ράντα έχει αρχίσει πριν από 4 χρόνια, θα πρέπει να ανατοκίσουμε την αντίστοιχη άμεση ράντα για τέσσερα χρόνια. Δηλαδή:

$$V_{\pi.\alpha.} = R\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{\lambda} = R\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i)(1+i)^{\lambda} =$$

$$= 10.000\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{20}|0,06}(1,06)(1,06)^{4} = 10.000 \cdot 11,46992 \cdot 1,33823 =$$

$$= 153.493,91.$$

8.4. Εύρεση της τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

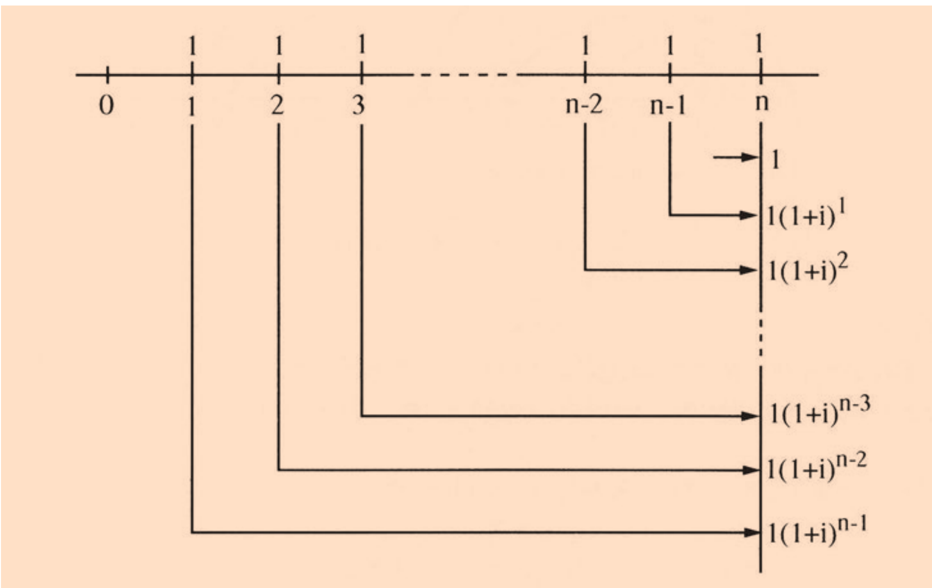
Είπαμε ότι **τελική αξία ράντας** λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στο τέλος της ράντας.

Έστω ότι έχουμε μια **ληξιπρόθεσμη** ράντα n όρων, 1 νομισματικής μονάδας και θέλουμε να βρούμε την αξία όλων των όρων της ράντας στο τέλος της ράντας.

Για να υπολογίσουμε την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, αρκεί να υπολογίσουμε την τελική αξία κάθε όρου της ράντας και κατόπιν να αθροίσουμε τις επιμέρους τελικές αξίες.

Η εύρεση της τελικής αξίας κάθε όρου μιας ράντας γίνεται με τον τύπο του ανατοκισμού: $K_n = K_0(1 + i)^n$, όπου $K_0 = 1$, κατά το ακόλουθο Διάγραμμα 8.13:

Διάγραμμα 8.13



Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 8.13, ο 1ος όρος της ράντας ανατοκίζεται επί (n – 1) χρονικές περιόδους και αποκτά τελική αξία $1(1 + i)^{n-1}$, ο 2ος όρος αποκτά τελική αξία $1(1 + i)^{n-2}$ κ.ο.κ., ο (n – 1) όρος ανατοκίζεται για μία χρονική περίοδο και αποκτά τελική αξία $1(1 + i)^1$. Ο n-ιστός όρος ισούται με τον εαυτό του, επειδή δεν ανατοκίζεται.

Επομένως, η τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία συμβολίζεται με το $S_{\overline{n|}i}$, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τελικών αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή:

$$\boxed{S_{\overline{n|}i} = 1(1+i)^{n-1} + 1(1+i)^{n-2} + \ldots + 1(1+i)^1 + 1} \qquad (8.14)$$

Αν τώρα αντιμεταθέσουμε τους όρους του β' μέλους της σχέσης (8.14) θα έχουμε:

$$\boxed{S_{\overline{n|}i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}} \qquad (8.15)$$

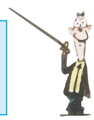
Το β' μέλος της σχέσης (8.15) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α = 1, λόγο ω = (1 + i) και τελευταίο όρο $τ = (1 + i)^{n-1}$. Επομένως, σύμφωνα με το γνωστό τύπο

$Σ = \dfrac{τω - α}{ω - 1}$, θα έχουμε:

$$S_{\overline{n|}i} = Σ = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i)^1 - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^{n-1+1} - 1}{1 + i - 1}$$

και

$$\boxed{S_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \qquad (8.16)$$



Το $S_{\overline{n|}i}$ παρέχει την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας και το βρίσκουμε στον Πίνακα V με ορισμένα i και n (βλέπε στο τέλος του βιβλίου). Για επιτόκια από 9% έως και 20%, που δεν περιέχονται στον Πίνακα V, το $S_{\overline{n|}i}$ βρίσκεται ως εξής: Αν, π.χ., θέλουμε να βρούμε την τιμή

$$S_{\overline{20|}0,12} = \frac{(1{,}12)^{20} - 1}{0{,}12} \qquad (α)$$

εργαζόμαστε ως εξής: Από τον Πίνακα I με i = 0,12 και n = 20 παίρνουμε $(1{,}12)^{20} = 9{,}6462926$. Αντικαθιστούμε το $(1{,}12)^{20}$ με το ίσο του στη σχέση (α) και βρίσκουμε:

$$S_{\overline{20|}0,12} = \frac{9{,}6462926 - 1}{0{,}12} = 72{,}052438$$

Αν τώρα ο όρος μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε η τελική αξία θα υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot \mathbf{S}_{\overline{n}|i} \tag{8.17}$$

Παρατήρηση: Η τελική αξία ράντας μπορεί να βρεθεί και από την αρχική αξία, την οποία ανατοκίζουμε για n έτη, δηλαδή:

$$\mathbf{S}_{\overline{n}|i} = \boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i)^n \tag{8.18}$$

Από τη σχέση (8.18) προκύπτει η σχέση (8.17). Πράγματι:

$$\mathbf{S}_{\overline{n}|i} = \boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{1-U^n}{i}(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n =$$

$$= \frac{(1+i)^n - (1+i)^{-n}(1+i)^n}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \mathbf{S}_{\overline{n}|i}$$

γιατί $\qquad (1+i)^{-n}(1+i)^n = 1.$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε την αρχική αξία ράντας σε συνάρτηση με την τελική αξία της, την οποία προεξοφλούμε για n έτη. Δηλαδή:

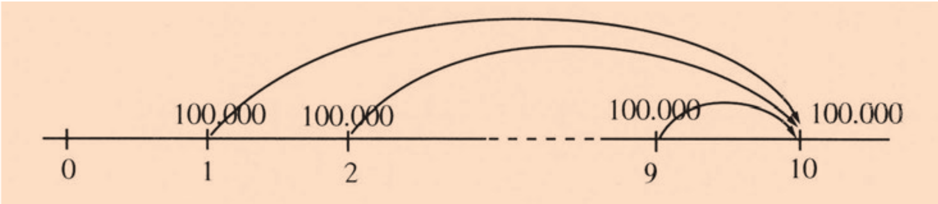
$$\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n}|i} = \mathbf{S}_{\overline{n}|i} U^n \tag{8.19}$$

Παράδειγμα 1ο. Ο εισοδηματίας Ε καταθέτει στην Τράπεζα Τ στο τέλος κάθε χρόνου 100.000 € με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6%. Αυτό γίνεται επί 10 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο λογαριασμό του Ε στο τέλος των 10 χρόνων.

Λύση. Το ποσό που θα συσσωρευτεί στο λογαριασμό του Ε στο τέλος των 10 ετών ισοδυναμεί με την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με τα εξής στοιχεία: R = 100.000, n = 10, i = 0,06.

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.17) και βρίσκουμε:

$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot \mathbf{S}_{\overline{n}|i} = 100.000\,\mathbf{S}_{\overline{10}|0,06} = 100.000 \cdot 13.18079 = 1.318.079$$



Ώστε: Στο τέλος του 10ου έτους ο λογαριασμός του Ε θα εμφανίζει 1.318.079 €.

Παράδειγμα 2ο. Καταθέτει κάποιος στην Τράπεζα Τ στο τέλος κάθε εξαμήνου 30.000 € με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο $3^{1/2}$%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στην Τράπεζα στο τέλος του 10ου έτους.

Λύση. R = 30.000, i = 0,035, n = 10 · 2 = 20 εξάμηνα.

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς και στο προηγούμενο παράδειγμα. Μετατρέπουμε τη διάρκεια της ράντας σε εξάμηνα, επειδή ο ανατοκισμός, ο όρος της ράντας και το επιτόκιο αντιστοιχούν σε εξάμηνο. Επομένως, θα έχουμε:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = R \cdot \mathbf{S}_{\overline{n}|i} = 30.000\,\mathbf{S}_{\overline{20}|0,035} = 30.000 \cdot 28,27968 = 848.390,40.$$

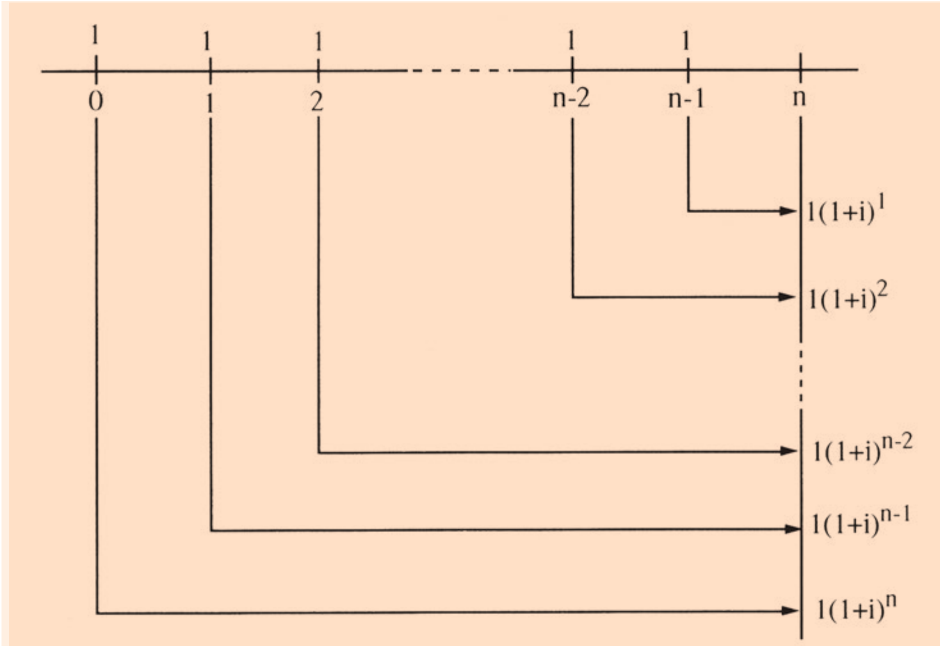
8.5. Εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

Έστω ότι έχουμε μια προκαταβλητέα ράντα n όρων 1 νομισματικής μονάδας και θέλουμε να βρούμε την αξία των όρων της ράντας στο τέλος της ράντας.

Για να υπολογίσουμε την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να υπολογίσουμε την τελική αξία κάθε όρου της ράντας και κατόπιν να αθροίσουμε τις επιμέρους τελικές αξίες, σύμφωνα με το Διάγραμμα 8.14.

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 8.14, ο πρώτος όρος ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους και αποκτά τελική αξία $1(1 + i)^n$, ο δεύτερος όρος ανατοκίζεται επί (n – 1) περιόδους και αποκτά τελική αξία $1(1 + i)^{n-1}$ κ.ο.κ., και ο τελευταίος όρος ανατοκίζεται για μία χρονική περίοδο και αποκτά τελική αξία 1(1 + i).

Διάγραμμα 8.14



Επομένως, η τελική αξία όλων των όρων μιας προκαταβλητέας ράντας -η οποία συμβολίζεται με το $\varsigma_{n\rceil i}$ - ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τελικών αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή:

$$\varsigma_{n\rceil i} = 1(1+i)^n + 1(1+i)^{n-1} + \ldots + 1(1+i)^1$$

Αν τώρα αντιμεταθέσουμε τους όρους του β' μέλους, θα έχουμε:

$$\boxed{\varsigma_{n\rceil i} = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n} \qquad (8.20)$$

Το β' μέλος της σχέσης (8.20) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με α = (1 + i), ω = (1 + i) και τ = $(1 + i)^n$. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο Σ = (τω – α)/ω – 1, θα έχουμε:

$$\varsigma_{n\rceil i} = \Sigma = \frac{(1+i)^n(1+i) - (1+i)}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = \mathbf{S}_{n\rceil i}(1+i).$$

Ώστε: $$\varsigma_{\overline{n}|i} = \mathbf{S}_{\overline{n}|i}(1+i) \qquad (8.21)$$

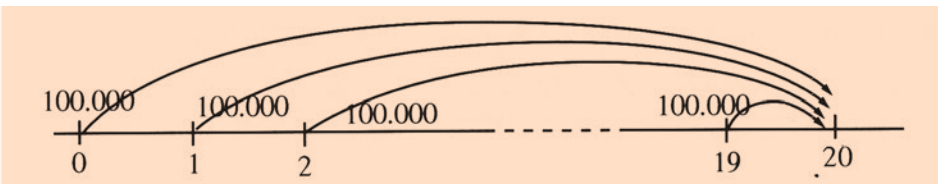
Από τη σχέση (8.21) συνάγεται ότι, για να βρούμε την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να ανατοκίσουμε την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη ράντα για μία ακόμη περίοδο.

Αν τώρα ο όρος της ράντας είναι R νομισματικές μονάδες, τότε η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας θα υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = R \cdot \varsigma_{\overline{n}|i} = R \cdot \mathbf{S}_{\overline{n}|i}(1+i) \qquad (8.22)$$

Παράδειγμα 1ο. Ο έμπορος Υ, μόλις γεννήθηκε η κόρη του, άρχισε να καταθέτει στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο στην αρχή κάθε χρόνου 100.000 € με ετήσιο ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο λογαριασμό του Υ, όταν η κόρη του θα έχει συμπληρώσει το 20ό έτος της ηλικίας της.

Λύση. Πρόκειται για προκαταβλητέα ράντα και ζητείται η τελική της αξία. R = 100.000, i = 0,05, n = 20.



Αντικαθιστούμε στον τύπο (8.22) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} V_{\tau\varepsilon\lambda.} &= 100.000\,\mathbf{S}_{\overline{20}|0,05}(1,05) = \\ &= 100.000 \cdot 33,06595 \cdot 1,05 = 3.471.924,75 \end{aligned}$$

Ώστε: Όταν η κόρη του Υ θα είναι 20 ετών, στο λογαριασμό του Υ θα έχουν συσσωρευτεί 3.471.924,75 €.

Παράδειγμα 2ο. Ο έμπορος Ε καταθέτει σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε εξαμήνου 10.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο λογαριασμό του Ε μετά 8 έτη και 6 μήνες από τότε που έγινε η πρώτη κατάθεση.

Λύση. R = 10.000, n = 8 · 2 + 1 = 17 εξάμηνα, i = 0,04.

Το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο τέλος του 17ου εξαμήνου, αποτελεί την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας.

$$V_{τελ.} = R \cdot S_{\overline{n|}\,i}(1+i) = 10.000\, S_{\overline{17|}\,0,04}(1,04) =$$
$$= 10.000 \cdot 23,69571 \cdot 1,04 = 246.435,40$$

Ερωτήσεις

1. Τι είναι Ράντα; Δώστε παραδείγματα.
2. Τι είναι «ληξιπρόθεσμη» και τι «προκαταβλητέα» ράντα;
3. Τι είναι «αρχή» και τι «τέλος» ράντας;
4. Τι είναι «αρχική» και τι «τελική» αξία ράντας;
5. Τι είναι «εποχή υπολογισμού» της αξίας των όρων μιας ράντας;
6. Τι είναι «άμεσες», «μέλλουσες» και τι «αρξάμενες» ράντες;
7. Τι είναι «πρόσκαιρες», «διηνεκείς» και τι «ράντες ζωής»;

Προβλήματα Ραντών

1. Καταθέτει κάποιος στην αρχή κάθε εξαμήνου 1 0.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%. Τί ποσό θα έχει συσσωρευτεί στο ταμιευτήριο μετά 7 έτη και 6 μήνες από την πρώτη κατάθεση; **(Απ. 226.575)**

2. Κάποιος πατέρας, μόλις η κόρη του συμπλήρωσε το 10ο έτος της ηλικίας της, άρχισε να καταθέτει με ανατοκισμό στην Τράπεζα Τ στο τέλος κάθε χρόνου 100.000 € με ετήσιο επιτόκιο 5,5%. Τι ποσό θα εισπράξει η κόρη του, όταν θα έχει συμπληρώσει το 30ο έτος της ηλικίας της. **(Απ. 3.486.830)**

3. Καταθέτει κάποιος στο τέλος κάθε χρόνου 200.000 € με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, και αυτό συνεχίζεται επί 12 έτη. Το κεφάλαιο που έχει σχηματιστεί στο τέλος του 12ου έτους το τοποθετεί στο ίδιο ταμιευτήριο με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 5,5%. Τι ποσό θα εισπράξει ο καταθέτης στο τέλος του 24ου έτους από την αρχική κατάθεση;
(Απ. 5.880.074)

4. Καταθέτει κάποιος, επί 25 έτη, στην αρχή κάθε χρόνου 30.000 € με ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 3%. Ένα έτος μετά την τελευταία κατάθεση και επί 10 χρόνια αρχίζει να αποσύρει κάθε χρόνο 60.000 €. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει στο τέλος του 35ου έτους από την πρώτη κατάθεση. **(Απ. 805.572)**

5. Ο υπάλληλος Υ καταθέτει στην Τράπεζα Τ στην αρχή κάθε τριμήνου 50.000 € με τριμηνιαίο επιτόκιο $2^{3/4}$%. Τι ποσό θα εμφανίζει ο λογαριασμός του Υ μετά 4 έτη από την πρώτη κατάθεση;
(Απ. 1.015.374)

6. Κάποιος πατέρας άρχισε να καταθέτει σε μια Τράπεζα στο τέλος κάθε εξαμήνου 40.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Η πρώτη κατάθεση έγινε, όταν ο γιος του ήταν 6 μηνών και η τελευταία, όταν ο γιος του ήταν 21 χρονών. Τα χρήματα έμειναν στην Τράπεζα ώσπου ο γιος συμπλήρωσε το 25ο έτος της ηλικίας του. Ποιο χρηματικό ποσό έχει συσσωρευτεί στην Τράπεζα; **(Απ. 4.156.181)**

7. Η βιομηχανία «ΒΗΤΑ» θέλει να αντικαταστήσει το μηχανικό εξοπλισμό της μετά 10 έτη από σήμερα και πρέπει να έχει συγκεντρώσει 12.000.000 €. Τι ποσό πρέπει να καταθέτει (με ανατοκισμό) στο τέλος κάθε χρόνου, έτσι ώστε στο τέλος του 10ου έτους να έχει συγκεντρωθεί στο ταμιευτήριο μιας Τράπεζας το απαιτούμενο χρηματικό ποσό, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 8%; **(Απ. 828.354)**

8. Ο Α δανείστηκε 400.000 € με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 10%. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί με 10 ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση πληρώνεται στο τέλος κάθε χρόνου. Να υπολογιστεί η ετήσια δόση.
(Απ. 65.098)

9. Χρέος 900.000 € εξοφλείται με ετήσια ληξιπρόθεσμη ράντα 20 όρων. Ο ετήσιος όρος είναι 75.000 €. Να βρεθεί το επιτόκιο υπολογισμού.
(Απ. 0,0546)

10. Η βιομηχανία «ΔΕΛΤΑ», για την αγορά σύγχρονου μηχανικού εξοπλισμού, δανείστηκε από την Ε.Τ.Β.Α. 60.000.000 €. Για την εξόφληση του δανείου συμφωνήθηκε να καταθέτει η «ΔΕΛΤΑ» στο ταμιευτήριο της Ε.Τ.Β.Α. 5.000.000 € με ανατοκισμό, στο τέλος κάθε εξαμήνου, ώστε μετά 10 έτη από την τελευταία κατάθεση να έχει εξοφληθεί το δάνειο. Με ποιο εξαμηνιαίο επιτόκιο υπολογίστηκε η εξαμηνιαία δόση; **(Απ. 5,45%)**

11. Κατέθεσε κάποιος με ανατοκισμό 100.000 € για 8 χρόνια και 3 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 4%. Μετά τη λήξη του ανατοκισμού άρχισε να αποσύρει κάθε χρόνο (τέλος) 20.000 €. Επί πόσα έτη θα συνεχίσει τις αναλήψεις, ώσπου να αποσύρει ολόκληρο το ποσό; **(Απ. n = 8,25 έτη)**

12. Ο κτηματίας Κ αγόρασε αγροτικά μηχανήματα αξίας 540.000 € και δανείστηκε το ποσό αυτό από την Α.Τ.Ε. Συμφωνήθηκε να εξοφληθεί το δάνειο με ίσες ετήσιες ληξιπρόθεσμες δόσεις των 40.000 € με ετήσιο επιτόκιο 6%. Ύστερα από πόσα χρόνια θα εξοφληθεί το δάνειο; Αν βρεθεί κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.
(Απ. n = 28,497)

13. Καταθέτει κάποιος, επί 20 έτη, στην αρχή κάθε χρόνου 10.000 με ετήσιο επιτόκιο 6%. Κατόπιν αρχίζει να αποσύρει 20.000 € στο τέλος κάθε εξαμήνου. Επιτόκιο εξαμηνιαίο 3%. Επί πόσα εξάμηνα θα αποσύρει τις 20.000;
(Απ. 2 · n = 29 + 0,75 = 29,75 εξάμηνα ή 14 έτη, 10 μ., 15 ημ.)

14. Ο καταθέτης Κ καταθέτει κάθε εξάμηνο σε ένα Ταμιευτήριο 120.000 € με τη συμφωνία τα χρήματά του να ανατοκίζονται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 7%. Ένα ακριβώς εξάμηνο μετά τη δωδέκατη κατάθεσή του αποσύρει από το Ταμιευτήριο όλο το ποσό που συγκεντρώθηκε και το καταθέτει σε μια Τράπεζα με προθεσμία ενός έτους. Στο τέλος του έτους εισπράττει από την Τράπεζα συνολικό ποσό 2.825.158,68 €. Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο με το οποίο έγινε η προθεσμιακή κατάθεση. **(Απ. 23%)**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΔΑΝΕΙΑ

9.1. Βασικές έννοιες και διάκριση δανείων

Οι διάφοροι οικονομικοί οργανισμοί (Κράτος, Δήμοι, Κοινότητες, Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Ο.Σ.Ε., μεγάλες κεφαλαιουχικές εταιρίες) ή και ιδιώτες, για να καλύψουν έκτακτες (ή και τακτικές) δαπάνες τους, όταν τα έσοδά τους δεν επαρκούν συνάπτουν δάνεια.

Δάνειο λέγεται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο χορηγείται συνήθως εντόκως σε ιδιώτη, επιχείρηση, οργανισμό ή και στο Κράτος, με σκοπό να επιστραφεί στο δανειστή σε ορισμένο χρόνο.

Ο χρόνος που μεσολαβεί από την ημέρα που συνάπτεται το δάνειο έως την ημέρα που εξοφλείται λέγεται **διάρκεια του δανείου.**

Τα δάνεια, ανάλογα με τη διάρκειά τους, διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα.

Βραχυπρόθεσμα λέγονται τα δάνεια τα οποία διαρκούν το πολύ ένα έτος. Τα βραχυπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται μεταξύ ιδιωτών και επιχειρήσεων ή μεταξύ τραπεζών και επιχειρήσεων και γίνονται με συναλλαγματικές και με γραμμάτια. Τα κρατικά βραχυπρόθεσμα δάνεια γίνονται με **Έντοκα Γραμμάτια του Δημοσίου.** Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο απλός τόκος.

Μακροπρόθεσμα λέγονται τα δάνεια τα οποία διαρκούν πολλά χρόνια. Τα μακροπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται μεταξύ ιδιωτών και πιστωτικών ιδρυμάτων (Κτηματική Τράπεζα, Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο, Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων, Εργατική Κατοικία κ.ά.), τα οποία χορηγούν τα στεγαστικά δάνεια, ή μεταξύ τραπεζών και επιχειρήσεων, ή δίνονται από μεγάλους οργανισμούς (Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Δήμοι, Κοινότητες, Κράτος ή από Ανώνυμες Εταιρείες), για να καλύψουν συνήθως έκτακτες δαπάνες, δηλαδή κατασκευή δημόσιων έργων, προμήθεια πολεμικού υλικού, επέκταση εγκαταστάσεων στις δημόσιες και ιδιωτικές επιχειρήσεις κτλ. Στα μακροπρόθεσμα* δάνεια εφαρμόζεται ο ανατοκισμός. Στο παρόν Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα μακροπρόθεσμα δάνεια.

Εξόφληση ενός δανείου είναι η επιστροφή του δανεισμένου ποσού και η πληρωμή των τόκων που έχουν παραχθεί κατά τη διάρκεια του δανείου. Το σύνολο των πράξεων που γίνονται για την εξόφληση ενός δανείου ονομάζεται **απόσβεση**** του **δανείου.**

Τα δάνεια, ανάλογα με το πλήθος των δανειστών, διακρίνονται σε:

I. Δάνεια Ενιαία, όταν ο δανειστής είναι ένα και μόνο (φυσικό ή νομικό) πρόσωπο. Π.χ. Το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο, η Αγροτική Τράπεζα, η Εργατική Κατοικία, η Κτηματική Τράπεζα κ.ά.

II. Δάνεια διά τίτλων ή Ομολογιακά Δάνεια, όταν οι δανειστές είναι πολλά πρόσωπα. Τα Ομολογιακά δάνεια εκδίδονται από το Κράτος ή από τους μεγάλους οργανισμούς. (Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Ε.Τ.Β.Α.) ή από μεγάλες Ανώνυμες Εταιρείες. Επειδή τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν μπορούν να διατεθούν από ένα και μόνο πρόσωπο, γι' αυτό το λόγο το δάνειο (κεφάλαιο) διαιρείται σε τμήματα μικρών ποσών, τα οποία αντιπροσωπεύουν πιστωτικούς τίτλους, που ονομάζονται Ομολογίες.

Τα Ενιαία Δάνεια, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε Πάγια και Εξοφλητέα.

---

* Στην Τραπεζική Τεχνική, τα δάνεια που διαρκούν από 1-3 ή 5 χρόνια ονομάζονται **Μεσοπρόθεσμα**. Η διάκριση όμως αυτή, από μαθηματικής άποψης, δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί και στα μεσοπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο ανατοκισμός.

** Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση του λογιστικού όρου **απόσβεση** (Depreciation) των στοιχείων του πάγιου ενεργητικού με τον όρο **απόσβεση δανείου**, ο οποίος σημαίνει την εξόφληση ενός δανείου με περιοδικές πληρωμές. Πιο σωστοί όροι είναι οι λέξεις: **Χρεολυσία** (amortization) και **χρεολύσιο**, για το οποίο θα μιλήσουμε πιο κάτω.

Α) **Πάγια** λέγονται τα δάνεια εκείνα, στα οποία δεν υπάρχει χρόνος εξόφλησης, αλλά ο οφειλέτης έχει το δικαίωμα να εξοφλήσει οποτεδήποτε το δάνειο· είναι όμως υποχρεωμένος να πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου (έτος, εξάμηνο, κτλ.). Πάγια δάνεια συνάπτουν συνήθως οι οργανισμοί κοινής ωφέλειας, οι Δήμοι, οι Κοινότητες κ.ά.

Β) **Εξοφλητέα** λέγονται εκείνα, στα οποία ο οφειλέτης (= λήπτης του δανείου) είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει σε προκαθορισμένο χρόνο (π.χ. σε 15 χρόνια).

Τα εξοφλητέα, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε:

α) **Εξοφλητέα εφάπαξ,** όταν ολόκληρο το δάνειο εξοφλείται με μία πληρωμή.

β) **Εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς,** όταν η εξόφληση του δανείου γίνεται με δόσεις.

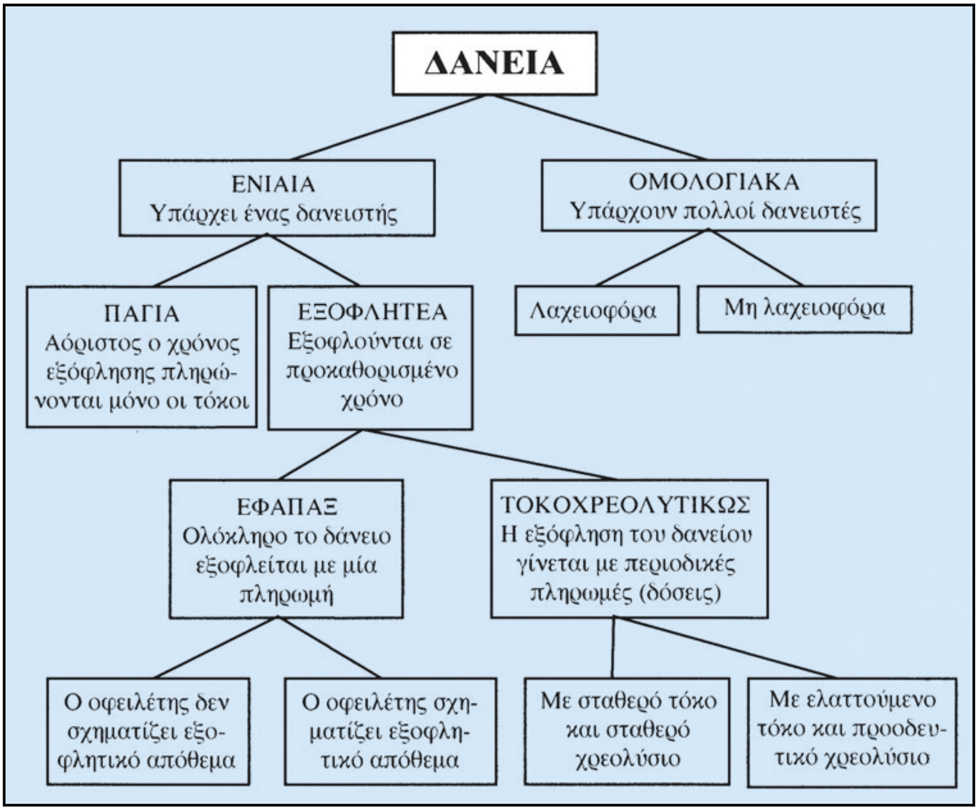
Στα εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα:

1) Ο οφειλέτης να πληρώνει κατά τη διάρκεια του δανείου τους τόκους και κατά τη λήξη του δανείου να επιστρέψει το ποσό που δανείστηκε.
2) Ο οφειλέτης να πληρώσει κατά τη λήξη του δανείου και τους τόκους και το ποσό που δανείστηκε.
3) Ο οφειλέτης (λήπτης του δανείου), επειδή είναι δύσκολο να εξοικονομήσει ολόκληρο το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου, καταθέτει περιοδικά σε μια τράπεζα χρηματικά ποσά με ανατοκισμό, ώστε τα ποσά αυτά μαζί με τους τόκους τους να ανασυστήσουν το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο οφειλέτης σχηματίζει **εξοφλητικό απόθεμα** (accumulating sinking fund).

Τα **Ομολογιακά Δάνεια,** ανάλογα με τον τρόπο εξόφλησής τους, διακρίνονται: 1) σε **Πάγια** και 2) σε **Εξοφλητέα Τοκοχρεολυτικώς.** Τα εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς διακρίνονται: α) σε εξοφλητέα στο **άρτιο,** β) σε εξοφλητέα σε τιμή διαφορετική από το άρτιο και γ) λαχειοφόρα.

Τα Δάνεια αποτελούν το πρακτικό μέρος του Ανατοκισμού και των Ραντών.

Για την πλήρη κατανόηση και εμπέδωση της διάκρισης των Δανείων, παραθέτουμε το πιο πάνω διάγραμμα.



ΔΑΝΕΙΑ ΕΝΙΑΙΑ

9.2. Δάνεια ενιαία εξοφλητέα εφάπαξ

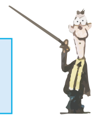
Αν παραστήσουμε με το **Κ** το ποσό του δανείου, με το **n** τις χρονικές περιόδους (έτη, εξάμηνα, κτλ.) που διαρκεί το δάνειο και με το **i** το επιτόκιο υπολογισμού των τόκων του δανείου, τότε η απόσβεση (εξόφληση) ενός ενιαίου δανείου γίνεται ως εξής:

Α) Όταν ο οφειλέτης δε σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Όταν οι τόκοι πληρώνονται. Εφόσον οι τόκοι πληρώνονται, έπεται ότι ο οφειλέτης θα πληρώνει στο τέλος κάθε έτους $K \cdot i$ δραχμές για τόκους και κατά τη λήξη του δανείου θα επιστρέψει το ποσό Κ.

Το ποσό $K \cdot i$ αποτελεί ληξιπρόθεσμη ράντα, της οποίας η παρούσα αξία ισούται με $K \cdot i\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n|}i}$, κατά τη στιγμή που συνάπτεται το δάνειο, ενώ η παρούσα αξία του δανείου ισούται με $K \cdot U^n$. Επομένως, το ποσό του δανείου ισούται με την παρούσα αξία των τόκων συν την παρούσα αξία του δανεισμένου κεφαλαίου. Δηλαδή:

$$K = K \cdot i\,\boldsymbol{\alpha}_{\overline{n|}i} + K \cdot U^n \tag{9.1}$$

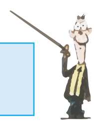


β) Όταν οι τόκοι δεν πληρώνονται, τότε η εξόφληση του δανείου θα γίνει με μία πληρωμή στο τέλος των n ετών, οπότε ο οφειλέτης θα πληρώσει το ποσό $K_0(1 + i)^n = K$, όπου K_0 το αρχικό ποσό του δανείου.

Β) Όταν ο οφειλέτης σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα

α) Αν οι τόκοι ($= K \cdot i$) πληρώνονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδους και ο λήπτης του δανείου καταθέτει στο τέλος κάθε περιόδου ένα σταθερό ποσό R με επιτόκιο t ($t \neq i$) πρέπει στο τέλος των n χρονικών περιόδων να έχει σχηματιστεί το ποσό του δανείου (= K). Επομένως, ο σχηματισμός του **εξοφλητικού αποθέματος** γίνεται με ληξιπρόθεσμη ράντα· η τελική αξία της ράντας πρέπει να ισούται με το ποσό του δανείου. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$R \cdot S_{\overline{n|}t} = K \tag{9.2}$$



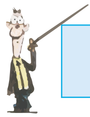
Το t είναι το επιτόκιο, με το οποίο ανατοκίζονται τα ποσά R, τα οποία καταθέτει ο οφειλέτης για το σχηματισμό του εξοφλητικού αποθέματος, και ονομάζεται **επιτόκιο ανασύστασης** του δανεισμένου κεφαλαίου. Το επιτόκιο t είναι συνήθως μικρότερο του επιτοκίου του δανείου i.

Τη σχέση (9.2) λύνουμε ως προς R και έχουμε:

$$R = \frac{K}{S_{\overline{n}|t}} = K \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|t}} \qquad (9.3)$$

Αν τώρα θέσουμε όπου $\dfrac{1}{S_{\overline{n}|t}} = \dfrac{1}{\dfrac{(1+t)^n - 1}{t}} = \dfrac{t}{(1+t)^n - 1} = P_{\overline{n}|t}$,

τότε η σχέση (9.3) γράφεται:



$$R = K \cdot P_{\overline{n}|t} \qquad (9.4)$$

Αν K = 1, τότε θα είναι, και $R = P_{\overline{n}|t}$. Το ποσό πρέπει να καταθέτει ο λήπτης του δανείου στο τέλος κάθε περιόδου, με επιτόκιο t, για να σχηματιστεί ποσό 1 νομισματικής μονάδας μετά παρέλευση n χρονικών περιόδων. Το $P_{\overline{n}|t}$ ονομάζεται Χρεολύσιο (Premium) μιας νομισματικής μονάδας.

Ώστε: **Χρεολύσιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέτει ο λήπτης του δανείου στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, για να εξοφληθεί δάνειο μιας νομισματικής μονάδας.**

Οι τιμές του $P_{\overline{n}|t}$ λαμβάνονται απευθείας από τον Πίνακα VI με ορισμένα επιτόκια και ορισμένα n. Π.χ. με t = i = 0,04 και n = 20 στον Πίνακα VI βρίσκουμε $0{,}03358175 = P_{\overline{20}|0{,}04}$. Ο Πίνακας VI παρέχει τις τιμές του $P_{\overline{n}|i}$ για i = 0,0025 έως και i = 0,08. Αν όμως θέλουμε να βρούμε την τιμή του

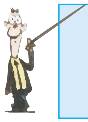
$$P_{\overline{n}|i} = \frac{1}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad (9.5)$$

για i = 0,09 έως και i = 0,20, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I και βρίσκουμε:

$$P_{\overline{20}|0{,}12} = \frac{0{,}12}{(1{,}12)^{20} - 1} = \frac{0{,}12}{9{,}6462926 - 1} = 0{,}0138787$$

β) **Αν τώρα οι τόκοι** (= K · i) δεν πληρώνονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, πρέπει ο λήπτης του δανείου να καταθέτει στο τέλος κάθε περιόδου ένα ποσό R΄ τέτοιο, ώστε κατά τη λήξη του δανείου να έχει σχηματιστεί το οφειλόμενο ποσό $K(1 + i)^n$. Δηλαδή, η τελική αξία του εξοφλητικού αποθέματος (= $R'S_{\overline{n}|t}$) πρέπει να είναι ίση με το οφειλόμενο ποσό $K(1 + i)^n$. Εξισώνουμε τις τελικές αξίες και έχουμε:

$$R' S_{\overline{n}|t} = K(1+i)^n$$



$$\boxed{R' = K(1+i)^n \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|t}} = K(1+i)^n \cdot P_{\overline{n}|t}} \qquad (9.6)$$

Παράδειγμα. Ο βιομήχανος Β, για την επέκταση των εγκαταστάσεων της βιομηχανίας του, δανείστηκε 10.000.000 € με ετήσιο επιτόκιο 6%. Το δάνειο θα εξοφληθεί σε 20 χρόνια. Να υπολογιστεί το χρεολύσιο αν: α) οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε χρόνου και β) αν οι τόκοι και το δάνειο πληρωθούν στο τέλος του 20ού έτους. Επιτόκιο ανασύστασης 4%.

Λύση. K = 10.000.000, n = 20, i = 0,06, t = 0,04

α) Ο Β θα πληρώνει στο τέλος κάθε χρόνου, ποσό K · i = 10.000.000 · 0,06 = 600.000 € για τόκους και για χρεολύσιο (εξοφλητικό απόθεμα):

$$R = K \cdot P_{\overline{n}|t} = 10.000.000\, P_{\overline{20}|0,04} = 10.000.000 \cdot 0,03358175 = 335.817,50$$

β) Αν τώρα ο Β δεν πληρώνει τους τόκους, έπεται ότι οι τόκοι και το κεφάλαιο θα πληρωθούν κατά τη λήξη του δανείου, οπότε το χρεολύσιο θα είναι:

$$R' = K(1+i)^n P_{\overline{n}|t} = 10.000.000\,(1,06)^{20} P_{\overline{20}|0,04} =$$

$$= 10.000.000 \cdot 3,2071355 \cdot 0,03358175 = 1.077.012,22$$

9.3. Δάνεια ενιαία, εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς

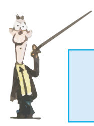
Οι τρόποι εξόφλησης ενός δανείου, τους οποίους εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σπάνια εφαρμόζονται στην πράξη. Η απόσβεση των ενιαίων δανείων γίνεται πάντοτε τοκοχρεολυτικώς (= με δόσεις).

Ο τρόπος εξόφλησης ενός δανείου με δόσεις παρέχει στο λήπτη του δανείου το πλεονέκτημα να το εξοφλεί με περιοδικές πληρωμές, τις οποίες κάνει με ευκολία. Για το δανειστή όμως, ο τρόπος αυτός παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι πρέπει να διαχειρίζεται τα ποσά που εισπράττει κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να εισπράττει τους τόκους από το κεφάλαιο που δάνεισε, αλλά και να ανασυστήσει το κεφάλαιο κατά τη λήξη του δανείου.

Η τοκοχρεολυτική απόσβεση των χορηγούμενων δανείων εφαρμόζεται πολύ συχνά από τα πιστωτικά ιδρύματα (τράπεζες και ταμιευτήρια). Το ποσό (η δόση) που πληρώνει ο λήπτης του δανείου στο τέλος κάθε έτους, εξαμήνου, κτλ., αποτελείται από δύο τμήματα. Το ένα τμήμα είναι ο **τόκος** του κεφαλαίου-δανείου και το άλλο τμήμα είναι το **χρεολύσιο** ανασύστασης του δανεισμένου κεφαλαίου.

Το συνολικό ποσό που πληρώνει ο λήπτης του δανείου, στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλήσει ένα μέρος από το ποσό που δανείστηκε, ονομάζεται **Τοκοχρεολύσιο** (= Τόκος + Χρεολύσιο).

Αν παραστήσουμε με το R το τοκοχρεολύσιο, με το K το ποσό του δανείου, με το i το επιτόκιο του δανείου, με το t το επιτόκιο ανασύστασης του δανεισμένου ποσού και με το $P_{\overline{n|}t}$ το χρεολύσιο, τότε το τοκοχρεολύσιο (η δόση) που πρέπει να πληρώνει ο λήπτης του δανείου, στο τέλος κάθε έτους ή εξαμήνου ή μήνα, υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:



$$\boxed{R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}t}} \qquad (9.7)$$

όπου: $K \cdot i = \text{Τόκος}$ και $K \cdot P_{\overline{n|}t} = \text{Χρεολύσιο}$.

Το επιτόκιο του δανείου (= i) και το επιτόκιο ανασύστασης (= t) του δανεισμένου κεφαλαίου μπορεί να είναι: i = t ή t < i. Αν i = t, τότε η σχέση (9.7) γράφεται:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|i} \qquad (9.8)$$

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του τοκοχρεολυσίου μπορεί να εφαρμοστεί και ο τύπος:

$$R = \frac{K}{\alpha_{\overline{n}|i}} \qquad (9.9)$$

Το $1/\alpha_{\overline{n}|i}$ καλείται **τοκοχρεολύσιο** 1 νομισματικής μονάδας και είναι το αντίστροφο του $\alpha_{\overline{n}|i}$. Στις πρακτικές εφαρμογές, για τον υπολογισμό του τοκοχρεολυσίου πρέπει να χρησιμοποιούνται οι τύποι (9.7) και (9.8), γιατί παρέχουν μεγάλη ευκολία στους υπολογισμούς και δίνουν απευθείας τις συνιστώσες του τοκοχρεολυσίου (= Τόκος + Χρεολύσιο), οι οποίες χρειάζονται για την κατασκευή του πίνακα απόσβεσης του δανείου.

Η τοκοχρεολυτική απόσβεση των ενιαίων δανείων γίνεται με διάφορες μεθόδους: 1) Μέθοδος του σταθερού χρεολυσίου, 2) μέθοδος του προοδευτικού χρεολυσίου, 3) μέθοδος sinking fund, 4) απόσβεση δανείου με ίσα μέρη του κεφαλαίου κ.ά. Εδώ θα αναφέρουμε τις δύο πρώτες.

9.3.1. Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου

Κατά τη μέθοδο του **Σταθερού Χρεολυσίου,** το **τοκοχρεολύσιο** αναλύεται σε **τόκο** -ο οποίος υπολογίζεται πάντοτε με βάση το αρχικό ποσό του δανείου και είναι σταθερός για όλες τις περιόδους - και σε **χρεολύσιο** με το οποίο ο δανειστής θα συγκεντρώσει σιγά σιγά το ποσό που δάνεισε. Τόσο ο τόκος όσο και το **χρεολύσιο παραμένουν σταθερά** καθ’ όλη τη διάρκεια του δανείου.

Παράδειγμα. Χορηγήθηκε δάνειο 100.000 € και πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια, με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογιστεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να κατασκευαστεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Λύση. $K = 100.000, \quad n = 5, \quad i = 0{,}05, \quad R = ;$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (9.8) και βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
R &= 100.000 \cdot 0,05 + 100.000\, P_{\overline{5}|0,05} \\
&= 5.000 \qquad + 100.000 \cdot 0,180975 \\
&= 5.000 \qquad + 18.097,50 = 23.097,50
\end{aligned}
$$

Δηλαδή: Τόκος + Χρεολύσιο = Τοκοχρεολύσιο

Ώστε: Ο λήπτης του δανείου πρέπει να πληρώνει στο τέλος κάθε χρόνου 23.097,50 € (5.000 € για τόκο και 18.097,50 € για χρεολύσιο), για να εξοφλήσει το δάνειο στο τέλος του 5ου έτους.

Για τη συστηματική παρακολούθηση των υποχρεώσεων του οφειλέτη, κατασκευάζεται **Πίνακας Απόσβεσης** (Amortization Schedule) του δανείου. Επίσης, ο Πίνακας Απόσβεσης του δανείου είναι πολύ χρήσιμος στο πιστωτικό ίδρυμα που χορηγεί το δάνειο, γιατί με βάση τον πίνακα αυτό τηρείται και η λογιστική του δανείου στο Λογιστήριο του πιστωτικού ιδρύματος. (Στον Πίνακα 9.1 παραθέτουμε τον «Πίνακα Απόσβεσης»).

Πίνακας 9.1

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

δανείου 100.000 € σε 5 έτη προς 5% με τη μέθοδο του Σταθερού Χρεολυσίου

Τέλος έτους (1)	Τοκοχρεολύσιο (2)	Τόκος (3)	Χρεολύσιο (4)	Εξοφλημένο ποσό δανείου (5)	Υπόλοιπο ανεξόφλητο (6)
1ου	23.097,50	5.000	18.097,50	18.097,50	81.902,50
2ου	23.097,50	5.000	18.097,50	37.099,88	62.900,12
3ου	23.097,50	5.000	18.097,50	57.052,37	42.947,63
4ου	23.097,50	5.000	18.097,50	78.002,49	21.997,51
5ου	23.097,50	5.000	18.097,50	100.000,00	∅

Παρατηρήσεις: 1) Οι στήλες (2), (3) και (4), του Πίνακα 9.1 παραμένουν αμετάβλητες καθ’ όλη τη διάρκεια του δανείου.

2) Η στήλη (5) σχηματίζεται ως εξής: Στο τέλος του 1ου έτους το εξοφλημένο ποσό του δανείου ισούται με το χρεολύσιο (= 18.097,50). Το εξοφλημένο ποσό του κάθε έτους βρίσκεται, αν πολλαπλασιάζουμε το εξοφλημένο ποσό του προηγούμενου έτους επί το $(1 + i)$ και προσθέτουμε το χρεολύσιο. Κατά συνέπεια, θα έχουμε:

Εξοφλημ. ποσό	2ου	έτους:	$18.097{,}50 \cdot 1{,}05 + 18.097{,}50 =$	37.099,88
" "	3ου	" :	$37.099{,}88 \cdot 1{,}05 + 18.097{,}50 =$	57.052,37
" "	4ου	" :	$57.052{,}37 \cdot 1{,}05 + 18.097{,}50 =$	78.002,49
" "	5ου	" :	$78.002{,}49 \cdot 1{,}05 + 18.097{,}50 =$	100.000,00

3) Το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» (στήλη 6) προκύπτει ως διαφορά: Συνολικό ποσό δανείου μείον εξοφλημένο ποσό. Στο παράδειγμα το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» στο τέλος του 4ου έτους είναι:

$$21.997{,}51 = 100.000 - 78.002{,}49$$

9.3.2. Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου

Στην πράξη, η απόσβεση των ενιαίων δανείων γίνεται συνήθως με τη **Μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου ή με το Γαλλικό Σύστημα Απόσβεσης.**

Κατά τη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου ο λήπτης του δανείου καταβάλλει πάντοτε το ίδιο τοκοχρεολύσιο. Δηλαδή, το τοκοχρεολύσιο (δόση) παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια του δανείου και αναλύεται σε δύο τμήματα:

Τοκοχρεολύσιο = Τόκος + Χρεολύσιο

Στη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου, επειδή **ο τόκος** κάθε περιόδου **υπολογίζεται πάνω στο ανεξόφλητο ποσό του δανείου,** έπεται ότι ο τόκος κάθε περιόδου **θα ελαττώνεται** κάθε φορά κατά τον τόκο του χρεολυσίου της προηγούμενης περιόδου. Το **χρεολύσιο** κάθε περιόδου προκύπτει ως διαφορά: **Τοκοχρεολύσιο μείον Τόκος.** Επειδή **ο τόκος ελαττώνεται** κάθε περίοδο, έπεται ότι το χρεολύσιο **θα αυξάνει προοδευτικά,** γι' αυτό και η μέθοδος αυτή ονομάστηκε **Μέθοδος του Προοδευτικού Χρεολυσίου.**

Για να κατασκευάσουμε τον Πίνακα απόσβεσης του δανείου, πρέπει να υπολογίζουμε για κάθε περίοδο τα εξής στοιχεία: i) Το τοκοχρεολύσιο, ii) τον τόκο, iii) το χρεολύσιο, iv) το εξοφλημένο ποσό του δανείου και v) το ανεξόφλητο ποσό του δανείου. Ο υπολογισμός αυτών των στοιχείων γίνεται ως εξής:

Το τοκοχρεολύσιο υπολογίζεται με τον τύπο:

$$\boxed{R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i}} \tag{9.10}$$

Το τοκοχρεολύσιο αναλύεται σε τόκο (= K · i) και σε χρεολύσιο = $K \cdot P_{\overline{n|}\,i} = P_1 =$ χρεολύσιο 1ης περιόδου, το οποίο αποτελεί και το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος της 1ης περιόδου· άρα το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό, στο τέλος της 1ης περιόδου, θα είναι:

$$K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i} = K - P_1$$

Στο τέλος της 2ης περιόδου το **τοκοχρεολύσιο** αναλύεται σε **τόκο** - ο οποίος υπολογίζεται με βάση το υπόλοιπο ανεξόφλητο: $(K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i}) \cdot i = (K - P_1) \cdot i$ - και σε **χρεολύσιο,** το οποίο προκύπτει ως διαφορά: Τοκοχρεολύσιο μείον τόκος. Δηλαδή:

$$(K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}}) - (K - K \cdot P_{\overline{n|}}) \cdot i = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}} - K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}} i =$$

$$K \cdot P_{\overline{n|}}(1+i) = P_1(1+i) = P_2 = \text{Χρεολύσιο 2ης περιόδου.}$$

Το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος της 2ης περιόδου θα είναι: $P_1 + P_2$, άρα το υπόλοιπο ανεξόφλητο θα είναι: $K - (P_1 + P_2)$.

Στο τέλος της 3ης περιόδου το τοκοχρεολύσιο αναλύεται σε **τόκο:**

$[K - (P_1 + P_2)] \cdot i$ και σε **χρεολύσιο:**

$$[K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}}] - [K - (P_1 + P_2)] \cdot i = K \cdot i + P_1 - K \cdot i + P_2 \cdot i + P_1 \cdot i =$$

$$= P_1(1+i) + P_2 \cdot i = P_2 + P_2 \cdot i = P_2(1+i) = P_1(1+i)(1+i) =$$

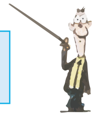
$$= P_1(1+i)^2 = P_3 = \text{ Χρεολύσιο 3ης περιόδου.}$$

Εξοφλημένο ποσό = $P_1 + P_2 + P_3$.

Υπόλοιπο ανεξόφλητο = $K - (P_1 + P_2 + P_3)$.

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι το **χρεολύσιο της μ-ιοστής περιόδου** θα υπολογίζεται με τον τύπο:

$$\boxed{P_\mu = P_1(1+i)^{\mu-1}} \tag{9.11}$$



όπου: $P_1 = K \cdot P_{\overline{n}|i} =$ Χρεολύσιο 1ης περιόδου.

Το **εξοφλημένο ποσό** του δανείου (= E_μ) στο τέλος της μ-ιοστής περιόδου ισούται με το άθροισμα των χρεολυσίων 1ης, 2ης, 3ης, ..., μ-ιοστής περιόδου. Δηλαδή:

$$E_\mu = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_\mu = P_1 + P_1(1+i) + P_1(1+i)^2 + \ldots +$$

$$+ P_1(1+i)^{\mu-1} = P_1[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{\mu-1}] =$$

$$= P_1 \cdot S_{\overline{\mu}|} = K \cdot P_{\overline{n}|} \cdot S_{\overline{\mu}|}$$

Ώστε:

$$\boxed{E_\mu = K \cdot P_{\overline{n}|i} \cdot S_{\overline{\mu}|i}} \tag{9.12}$$

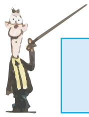
Το **υπόλοιπο ανεξόφλητο** (= Y_μ) στο τέλος της μ-ιοστής περιόδου υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$\boxed{Y_\mu = K - E_\mu = K - K \cdot P_{\overline{n}|i} \cdot S_{\overline{\mu}|i}} \tag{9.13}$$

Ο **Τόκος** της μ-ιοστής περιόδου προκύπτει με πολλαπλασιασμό του υπόλοιπου ανεξόφλητου της (μ – 1) περιόδου επί το επιτόκιο του δανείου. Δηλαδή:

$$\boxed{I_\mu = Y_{\mu-1} \cdot i = [K - K \cdot P_{\overline{n}|i} \cdot S_{\overline{\mu-1}|i}] \cdot i} \tag{9.14}$$

Το **σύνολο των τόκων** που θα πληρώσει ο λήπτης του δανείου θα βρεθεί αν από το σύνολο των δόσεων (= τοκοχρεολυσίων) αφαιρέσουμε το ποσό του δανείου. Δηλαδή:



$$\textbf{Σύνολο Τόκων} = n \cdot R - K \qquad (9.15)$$

Παράδειγμα 1ο. Δάνειο 100.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με ίσα ετήσια τοκοχρεολύσια (δόσεις) και ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογιστεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να κατασκευαστεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Λύση: K = 100.000, n = 5, i = 0,05, R = ;

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}i} = 100.000 \cdot 0,05 + 100.000 P_{\overline{5|}0,05}$$

$$= 5.000 + 100.000 \cdot 0,180975 = 5.000 + 18.097,50 = 23.097,50$$

Πίνακας 9.2

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

δανείου 100.000 € σε 5 έτη προς 5% με τη μέθοδο του

Προοδευτικού Χρεολυσίου

Τέλος έτους (1)	Τοκοχρεολύσιο (2)	Τόκος (3)	Χρεολύσιο (4)	Εξοφλημένο ποσό δανείου (5)	Υπόλοιπο ανεξόφλητο (6)
1ου	23.097,50	5.000,00	18.097,50	18.097,50	81.902,50
2ου	23.097,50	4.095,13	19.002,37	37.099,87	62.900,13
3ου	23.097,50	3.145,00	19.952,50	57.052,37	42.947,63
4ου	23.097,50	2.147,40	20.950,10	78.002,50	21.997,50
5ου	23.097,50	1.100,00	21.997,50	100.000,00	∅

Παρατηρήσεις: 1) Στο τέλος του 1ου έτους: α) Το τοκοχρεολύσιο (= 23.097,50) αναλύεται σε τόκο (= 5.000) και σε χρεολύσιο (= 18.097,50). β) Το εξοφλημένο ποσό του δανείου ισούται με το χρεολύσιο. γ) Το ανεξόφλητο υπόλοιπο είναι η διαφορά: Ποσό δανείου μείον χρεολύσιο (= 100.000 – 18.098,50 = 81.902,50).

2) Ο τόκος κάθε έτους προκύπτει με πολλαπλασιασμό του ανεξόφλητου ποσού του δανείου επί το επιτόκιο.

3) Επειδή Τοκοχρεολύσιο = Τόκος + Χρεολύσιο, έπεται ότι:

Χρεολύσιο = Τοκοχρεολύσιο – Τόκος.

4) Το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος κάθε έτους αποτελείται από το άθροισμα των χρεολυσίων που έχουν υπολογιστεί.

5) Το ανεξόφλητο υπόλοιπο προκύπτει ως διαφορά: Ποσό δανείου μείον υπολογισμένα τοκοχρεολύσια. Επομένως, για τη συμπλήρωση των στηλών (3), (4), (5) και (6) εργαζόμαστε ως εξής:

Στο τέλος του 2ου έτους, θα είναι:

Τόκος	= 81.902,50	·	0,05	= 4.095,13
Χρεολύσιο	= 23.097,50	–	4.095,13	=19.002,37
Εξοφλημένο ποσό	= 18.097,50	+	19.002,37	= 37.009,87
Υπόλοιπο ανεξόφλητο	= 100.000	–	37.099,87	= 62.900,13

Στο τέλος του 3ου έτους, θα έχουμε:

Τόκος	= 62.900,13	·	0,05	= 3.145,00
Χρεολύσιο	= 23.097,50	–	3.145,00	= 19.952,50
Εξοφλημένο ποσό	= 37.099,87	+	19.952,50	= 57.052,37
Υπόλοιπο ανεξόφλητο	= 100.000	–	57.052,37	= 42.947,63

Για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα, των υπόλοιπων ετών, εργαζόμαστε κατά τον ίδιο τρόπο. Αν δεν έχουμε κάνει κάπου λάθος, τότε στο τέλος του τελευταίου έτους το «εξοφλημένο ποσό» πρέπει να ισούται με το ποσό του δανείου, ενώ το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» πρέπει να είναι μηδέν.

Παράδειγμα 2ο. Χορηγήθηκε δάνειο 1.000.000 € και πρέπει να εξοφληθεί σε 20 έτη με ίσες ετήσιες δόσεις, με ετήσιο επιτόκιο 6%. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο. 2) Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου, για τα τέσσερα έτη, με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. 3) Το χρεολύσιο του 8ου έτους. 4) Το εξοφλημένο ποσό και το ανεξόφλητο υπόλοιπο στο τέλος του 5ου έτους. 5) Το σύνολο των τόκων που θα πληρώσει ο οφειλέτης.

Λύση. $K = 1.000.000$, $n = 20$, $i = 0{,}06$.

1) Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\, i}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε:

$$R = 1.000.000 \cdot 0{,}06 + 1.000.000 P_{\overline{20|}\, 0{,}06}$$

$$= 60.000 + 1.000.000 \cdot 0{,}02718456$$

ή $$\mathbf{R = 60.000 + 27.184{,}56 = 87.184{,}56}$$

Ώστε: η ετήσια δόση είναι 87.184,56 €.

2) Το χρεολύσιο του 8ου έτους θα βρεθεί με βάση τον τύπο (9.11). Πράγματι, αν στον τύπο $P_\mu = P_1(1 + i)^{\mu - 1}$ θέσουμε:

$\mu = 8$, $P_1 = 27.184{,}56$ και $i = 0{,}06$, θα έχουμε:

$$P_8 = 27.184{,}56\ (1{,}06)^7 = 27.184{,}56 \cdot 1{,}50363 = 40.875{,}52$$

3) Το εξοφλημένο ποσό, στο τέλος του 5ου έτους, θα υπολογιστεί με βάση τον τύπο: $E_\mu = K \cdot P_{\overline{n|}\, i} \cdot S_{\overline{\mu|}\, i}$.

$$E_5 = 1.000.000 P_{\overline{20|}\, 0{,}06} \cdot S_{\overline{5|}\, 0{,}06}$$

$$= 1.000.000 \cdot 0{,}02718456 \cdot 5{,}637093 = 153.241{,}50$$

Επομένως, το υπόλοιπο ανεξόφλητο στο τέλος του 5ου έτους, θα υπολογιστεί με τον τύπο:

$$Y_\mu = K - K \cdot P_{\overline{n|}\, i} \cdot S_{\overline{\mu|}\, i}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε:

$$Y_5 = 1.000.000 - 1.000.000\, P_{\overline{20}|0,06} \cdot S_{\overline{5}|0,06}$$
$$= 1.000.000 - 153.241,50 = 846.758,50$$

Πίνακας 9.3
ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ
δανείου 1.000.000 € σε 20 έτη προς 6% με τη μέθοδο του
Προοδευτικού Χρεολυσίου

Τέλος έτους (1)	Τοκοχρεο-λύσιο (2)	Τόκος (3)	Χρεολύσιο (4)	Εξοφλημένο ποσό δανείου (5)	Υπόλοιπο ανεξόφλητο (6)
1ου	87.184,56	60.000,00	27.184,56	27.184,56	972.815,50
2ου	87.184,56	58.368,93	28.815,63	56.000,19	943.999,90
3ου	87.184,56	56.639,99	30.544,57	86.544,76	913.455,30
4ου	87.184,56	54.807,32	32.377,24	118.922,00	881.078,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20ου	87.184,56	4.935,00	82.249,56	1.000.000,00	∅

4) Οι συνολικοί τόκοι τους οποίους θα πληρώσει ο λήπτης του δανείου, βρίσκονται αν από το σύνολο των τοκοχρεολυσίων αφαιρέσουμε το ποσό του δανείου. Επομένως, θα έχουμε:

Σύνολο τοκοχρεολυσίων = n · R = 20 · 87.184,56 = 1.743.691
Μείον ποσό δανείου = 1.000.000

Σύνολο τόκων = 743.691

Σημείωση 1η. Έστω ότι χορηγείται δάνειο 1.000.000 € με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 12%, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια. Να υπολογιστεί το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο.

Επειδή ζητείται το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο και το επιτόκιο είναι ετήσιο ονομαστικό, θα μετατρέψουμε τα έτη σε εξάμηνα (10 · 2 = 20 εξάμηνα) και θα διαιρέσουμε το επιτόκιο διά του 2. Οπότε:

$$R_{\varepsilon\xi\alpha\mu.} = K \cdot \frac{i}{2} + K \cdot P_{\overline{2\cdot n|}} \frac{i}{2} \qquad (9.16)$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε:

$$R_{\varepsilon\xi\alpha\mu.} = 1.000.000 x 0,06 + 1.000.000\, P_{\overline{20|}0,06} = 87.184,56$$

Σημείωση 2η. Πληρωμή ετήσιου τοκοχρεολυσίου σε ρ ίσες δόσεις.

Στην πράξη, η πληρωμή του τοκοχρεολυσίου γίνεται με ρ ίσες δόσεις (δηλαδή κάθε εξάμηνο, κάθε τρίμηνο και συνήθως κάθε μήνα) κατά τους ακόλουθους τρόπους:

Αν π.χ. K = 1.000.000, n = 20, i = 0,06 και ρ = 12, δηλαδή η πληρωμή του τοκοχρεολυσίου γίνεται κάθε μήνα, τότε εργαζόμαστε ως εξής: Βρίσκουμε πρώτα το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και κατόπιν το διαιρούμε με το 12 βρίσκουμε το μηνιαίο τοκοχρεολύσιο. Επομένως, θα έχουμε:

$$R_{\varepsilon\tau\acute{\eta}\sigma\iota o} = 1.000.000 \cdot 0,06 + 1.000.000\, P_{\overline{20|}0,06}$$

$$= 60.000 + 1.000.000 \cdot 0,027185 = 87.185$$

και $R_{\mu\eta\nu\iota\alpha\acute{\iota}o} = 87.185 : 12 = 7.265.$

Ερωτήσεις

1. Τι είναι «βραχυπρόθεσμα», «μεσοπρόθεσμα» και τι «μακροπρόθεσμα» δάνεια;
2. Τι είναι «ενιαία» και τι «ομολογιακά» δάνεια;
3. Τι είναι «πάγια» και τι «εξοφλητέα» δάνεια;
4. Τι είναι δάνεια: «εξοφλητέα εφάπαξ» και τι «εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά»;
5. Τι είναι «χρεολύσιο» και τι «τοκοχρεολύσιο»;
6. Περιγράψατε τη διαδικασία απόσβεσης ενός δανείου με τις μεθόδους του «σταθερού» και του «προοδευτικού» χρεολυσίου. Πού διαφέρουν οι δύο μέθοδοι;

Προβλήματα Δανείων

1. Δάνειο 400.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 15 χρόνια με επιτόκιο δανείου 6%. Να βρεθεί το ποσό του εξοφλητικού αποθέματος, όταν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 4,5% και όταν οι τόκοι πληρώνονται ή όχι κάθε χρόνο. **(Απ. 19.244 – 46.119)**

2. Δάνειο 1.000.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο. 2) Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα 4 πρώτα χρόνια με τις μεθόδους: α) του σταθερού χρεολυσίου και β) του προοδευτικού χρεολυσίου. **(Απ. R = 80.242)**

3. Δάνειο 1.000.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις και με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 10%. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο. 2) Ο Πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα 3 πρώτα εξάμηνα με τις μεθόδους: α) του σταθερού χρεολυσίου και β) του προοδευτικού χρεολυσίου. 3) Το χρεολύσιο του 15ου εξαμήνου. 4) Το εξοφλημένο ποσό στο τέλος του 16ου εξαμήνου. 5) Το υπόλοιπο ανεξόφλητο στο τέλος του 12ου εξαμήνου. 6) Ο τόκος του 13ου εξαμήνου. 7) Το σύνολο των τόκων που θα πληρώσει ο λήπτης του δανείου.

(Απ. 80.242 – 59.872 – 481.333 – 24.067 – 604.840)

4. Η Βιομηχανία «ΒΗΤΑ» Α.Ε. θα χρειαστεί 5.000.000 € την 1η Ιουνίου 2009, για να αντικαταστήσει τμήμα του μηχανικού εξοπλισμού της. Για να συγκεντρώσει το πιο πάνω ποσό την 1.6.2009 η βιομηχανία πρέπει να καταθέτει κάθε χρόνο σε μια Τράπεζα ορισμένα χρηματικά ποσά με επιτόκιο 8%. Αν η πρώτη κατάθεση γίνει την 1.6.2004 και η τελευταία την 1.6.2009, ποιό πρέπει να είναι το ύψος κάθε κατάθεσης;

(Απ. 681.577)

5. Δάνειο 1.000.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 20 ίσες ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση είναι 87.184,50 €. Με ποιο επιτόκιο υπολογίστηκαν οι δόσεις; **(Απ. 0,06)**

6. Ο Α. Ανδρέου, για να αγοράσει μηχανήματα, δανείστηκε 1.800.000 €. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί με 10 ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση είναι 268.256 €. Με ποιο επιτόκιο υπολογίστηκε κάθε δόση;

(Απ. 0,08)

7. Η απόσβεση δανείου 2.000.000 € με 5% σε 10 έτη γίνεται με το Γαλλικό σύστημα. Ποια είναι η ετήσια δόση και ποιο το υπόλοιπο του χρέους μετά την πληρωμή και της 8ης δόσης;

(Απ. 259.000 – 481.690)

8. Να βρεθεί ποιο είναι το ποσό του δανείου, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια, με τη Γαλλική μέθοδο απόσβεσης με 8%, αν ο τόκος του όγδοου τοκοχρεολυσίου είναι 30.725 €.

(Απ. 1.000.000)

9. Ο έμπορος Ε θέλει να δανειστεί 2.000.000 € για 6 χρόνια. Η Τράπεζα Χ δανείζει με 5,5%, αν το δάνειο εξοφληθεί με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις. Η Τράπεζα Ψ δανείζει με 5% αν οι τόκοι καταβάλονται κάθε χρόνο και το δανεισμένο ποσό επιστραφεί στο τέλος των 6 ετών, και για την ανασύσταση του δανεισμένου ποσού ο Ε πρέπει να κάνει ίσες ετήσιες καταθέσεις με 3%. Ποιο σχέδιο δανεισμού είναι φθηνότερο και πόσα χρήματα εξοικονομεί ο Ε, αν τελικά δανειστεί;

(Απ. R_x = 400.358, R_ψ = 409.195. Το σχέδιο δανεισμού της Τράπεζας Χ είναι φθηνότερο κατά 8.837 €).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α) Ελληνόγλωσση:

1. Αποστολόπουλου, Θ. «Οικονομικά Μαθηματικά», Τεύχη Α - Β, Αθήνα 1978.
2. Αποστολόπουλου, Θ. «Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών», Αθήνα 1998.
3. Αποστολόπουλου, Θ. «Λυμένα προβλήματα Οικονομικών Μαθηματικών και Πρακτικής Αριθμητικής», Αθήνα 1999.
4. Αλεξανδρή, Ν. «Οικονομικά Μαθηματικά», Εκδ. «Σταμούλη», Πειραιάς 1985.
5. Αλεξανδρή Ν., Γεωργουδάκη Σ., Καΐτσα Γ., «Οικονομικά Μαθηματικά», ΟΕΔΒ, Αθήνα.
6. Κεραμιδά, Τ. «Οικονομικά Μαθηματικά», Τόμοι Α - Β, «Παπαζήσης», Αθήνα 1962.
7. Κουμούση, Ι. «Οικονομικά Μαθηματικά», Εκδ. ΟΕΔΒ, Αθήνα 1985.
8. Μαργαρίτη, Ε. «Οικονομικά Μαθηματικά» Τόμοι Ι-ΙΙ, Αθήνα 1964.
9. Οικονομόπουλου, Ι. «Οικονομικά Μαθηματικά», Εκδ. ΟΕΔΒ, Αθήνα 1983.
10. Παπαμιχαήλ, Δ. «Οικονομικά Μαθηματικά», Αθήνα 1980.
11. Παπούλη, Ε. «Φροντιστηριακά Μαθήματα Οικονομικών Μαθηματικών», Αθήνα 1960.
12. Παπαευθυμίου, Γ. «Φροντιστηριακαί παραδόσεις Οικονομικών Μαθηματικών», Αθήνα 1960.

13. Στεριώτη, Π. «Οικονομικά Μαθηματικά», Τόμ. Ι, Αθήνα 1978.
14. Σφακιανού, Γ. & Π. «Οικονομικά Μαθηματικά», «Interbooks», Αθήνα 1987.
15. Χρυσοκέρη, Ι. «Σύστημα Λελυμένων Ασκήσεων Οικονομικών Μαθηματικών, Τεύχη Α, Β, Γ, Δ, Αθήνα 1943 - 1946.

Β) Ξενόγλωσση:

1. Ayres, F. “Theory and Problems of Mathematics of Finance”, Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill, N.Y. 1963.
2. Beighey, C. Gordon, G. – Borghart, C. “Mathematics for Business”, McGraw-Hill, N.Y. 1965.
3. Cissell, R & Cissell, H. “Mathematics of Finance”, 4th Edition, Houghton Mifflin Co., Boston, Mass. 1973.
4. Donald, D., “Compound Interest and Annuities Certain”, Heinemann, London, 1984.
5. Harper, F. “Unified Mathematics of Finance”, American Society of Pension Actuaries, 1976.
6. Mc Cutcheon, J. and Scott, W. “An Introduction to the Mathematics of Finance”, Heinemann, London.
7. Nartis, E. “An Introduction to Mathematics of Finance”, Glory Book - Economist, Athens 1990.
8. Piper, E.B. & Gruber, J. “Applied Business Mathematics”, South-Western Pubi. Co., Ohio 1973.
9. Rice, L.G. - Boyd, A.C. & Blair, M.F. “Business Mathematics for colleges”, South-Western, Ohio.
10. Rosenberg, R.R. & Lewis, H. “Business Mathematics”, Mc Graw-Hill, N.Y. 1973.
11. Stelson, H. “Mathematics of Finance”, D. Van Nostrand Co., 1967.

ΠΙΝΑΚΕΣ*
ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ - ΡΑΝΤΩΝ - ΧΡΕΟΛΥΣΙΩΝ

* Οι πίνακες αυτοί έχουν ληφθεί από το βιβλίο: «CRC Standard Mathematical Tables» 18th Edition του W.H. Beyer (CRC Press, Inc. 18901 Cranwood Parkway, Cleveland, Ohio, U.S.A.) με την άδεια του εκδότη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΕΣ

Ο Πίνακας Ι παρέχει την τελική αξία κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n ακέραιες χρονικές περιόδους. Δηλαδή ο Πίνακας Ι δίνει τα εξαγόμενα του διώνυμου $(1 + i)^n$ για τα εξής i και n:

$i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}03$ και $n = 1$ έως $n = 100$

$i = 0{,}035$ έως $i = 0{,}20$ και $n = 1$ έως $n = 50$

Ο Πίνακας ΙΙ παρέχει την τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί μ/12 κάθε περιόδου. Δηλαδή ο Πίνακας ΙΙ δίνει τα εξαγόμενα του διώνυμου $(1 + i)^{\mu/12}$ για $\mu = 1$ έως $\mu = 11$ και για $i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}12$.

Ο Πίνακας ΙΙΙ δίνει την παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα. Δηλαδή ο Πίνακας ΙΙΙ παρέχει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$U^n = (1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

για τα εξής i και n:

$i = 0{,}0025$ έως $i = 0{,}03$ και $n = 1$ έως $n = 100$

$i = 0{,}035$ έως $i = 0{,}20$ και $n = 1$ έως $n = 50$

Ο Πίνακας IV δίνει την αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή ο Πίνακας IV δίνει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$\alpha_{\overline{n|}i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

για τα ακόλουθα i και n:

i = 0,0025 έως i = 0,03 και n = 1 έως n = 100

i = 0,035 έως i = 0,20 και n = 1 έως n = 50

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε την τιμή της $\alpha_{\overline{n|}i}$ για i = 0,09, 0,10, ..., 0,20, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα III. Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$\alpha_{\overline{20|}0,12} = \frac{1-U^{20}}{0,12} \qquad (1)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα III, με i = 0,12 και n = 20, βρίσκουμε: U^{20} = 0,10366677.

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_{\overline{20|}0,12} = \frac{1-0,10366677}{0,12} = 7,469444$$

Ο Πίνακας V δίνει την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή ο Πίνακας V δίνει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$S_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

για τα ακόλουθα i και n:

i = 0,0025 έως i = 0,03 και n = 1 έως n = 100

i = 0,035 έως i = 0,20 και n = 1 έως n = 50

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε την τιμή $S_{\overline{n|}i}$ για i = 0,09, 0,10, ..., 0,20, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I. Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$S_{\overline{20}|0,12} = \frac{(1,12)^{20} - 1}{0,12} \qquad (2)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα I με i = 0,12 και n = 20 βρίσκουμε: $(1,12)^{20} = 9,6462926$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$S_{\overline{20}|0,12} = \frac{9,6462926 - 1}{0,12} = 72,052438$$

Ο Πίνακας VI δίνει το χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας, δηλαδή το ποσό που πρέπει να καταβάλεται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, για να εξοφληθεί δάνειο μιας νομισματικής μονάδας. Ο Πίνακας VI δίνει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$P_{\overline{n}|i} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

για i = 0,0025 έως i = 0,08 και n = 1 έως n = 100.

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε την τιμή του $P_{\overline{n}|i}$ για i = 0,09, 0,10, ..., 0,20, τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I. Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0,12}{(1,12)^{20} - 1} \qquad (3)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα I με i = 0,12 και n = 20 βρίσκουμε: $(1,12)^{20} = 9,6462926$.

Αντικαθιστούμε πλέον στη σχέση (3) και βρίσκουμε:

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0,12}{9,6462926} = 0,0138787$$

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.0025 (¼%)	.004167 (5/12%)	.005 (½%)	.005833 (7/12%)	.0075 (¾%)
1	1.0025 0000	1.0041 6667	1.0050 0000	1.0058 3333	1.0075 0000
2	1.0050 0625	1.0083 5069	1.0100 2500	1.0117 0069	1.0150 5625
3	1.0075 1877	1.0125 5216	1.0150 7513	1.0176 0228	1.0226 6917
4	1.0100 3756	1.0167 7112	1.0201 5050	1.0235 3830	1.0303 3919
5	1.0125 6266	1.0210 0767	1.0252 5125	1.0295 0894	1.0380 6673
6	1.0150 9406	1.0252 6187	1.0303 7751	1.0355 1440	1.0458 5224
7	1.0176 3180	1.0295 3379	1.0355 2940	1.0415 5490	1.0536 9613
8	1.0201 7588	1.0338 2352	1.0407 0704	1.0476 3064	1.0615 9885
9	1.0227 2632	1.0381 3111	1.0459 1058	1.0537 4182	1.0695 6084
10	1.0252 8313	1.0424 5666	1.0511 4013	1.0598 8865	1.0775 8255
11	1.0278 4634	1.0468 0023	1.0563 9583	1.0660 7133	1.0856 6441
12	1.0304 1596	1.0511 6190	1.0616 7781	1.0722 9008	1.0938 0690
13	1.0329 9200	1.0555 4174	1.0669 8620	1.0785 4511	1.1020 1045
14	1.0355 7448	1.0599 3983	1.0723 2113	1.0848 3662	1.1102 7553
15	1.0381 6341	1.0643 5625	1.0776 8274	1.0911 6483	1.1186 0259
16	1.0407 5882	1.0687 9106	1.0830 7115	1.0975 2996	1.1269 9211
17	1.0433 6072	1.0732 4436	1.0884 8651	1.1039 3222	1.1354 4455
18	1.0459 6912	1.0777 1621	1.0939 2894	1.1103 7182	1.1439 6039
19	1.0485 8404	1.0822 0670	1.0993 9858	1.1168 4899	1.1525 4009
20	1.0512 0550	1.0867 1589	1.1048 9558	1.1233 6395	1.1611 8414
21	1.0538 3352	1.0912 4387	1.1104 2006	1.1299 1690	1.1698 9302
22	1.0564 6810	1.0957 9072	1.1159 7216	1.1365 0808	1.1786 6722
23	1.0591 0927	1.1003 5652	1.1215 5202	1.1431 3771	1.1875 0723
24	1.0617 5704	1.1049 4134	1.1271 5978	1.1498 0602	1.1964 1353
25	1.0644 1144	1.1095 4526	1.1327 9558	1.1565 1322	1.2053 8663
26	1.0670 7247	1.1141 6836	1.1384 5955	1.1632 5955	1.2144 2703
27	1.0697 4015	1.1188 1073	1.1441 5185	1.1700 4523	1.2235 3523
28	1.0724 1450	1.1234 7244	1.1498 7261	1.1768 7049	1.2327 1175
29	1.0750 9553	1.1281 5358	1.1556 2197	1.1837 3557	1.2419 5709
30	1.0777 8327	1.1328 5422	1.1614 0008	1.1906 4069	1.2512 7176
31	1.0804 7773	1.1375 7444	1.1672 0708	1.1975 8610	1.2606 5630
32	1.0831 7892	1.1423 1434	1.1730 4312	1.2045 7202	1.2701 1122
33	1.0858 8687	1.1470 7398	1.1789 0833	1.2115 9869	1.2796 3706
34	1.0886 0159	1.1518 5346	1.1848 0288	1.2186 6634	1.2892 3434
35	1.0913 2309	1.1566 5284	1.1907 2689	1.2257 7523	1.2989 0359
36	1.0940 5140	1.1614 7223	1.1966 8052	1.2329 2559	1.3086 4537
37	1.0967 8653	1.1663 1170	1.2026 6393	1.2401 1765	1.3184 6021
38	1.0995 2850	1.1711 7133	1.2086 7725	1.2473 5167	1.3283 4866
39	1.1022 7732	1.1760 5121	1.2147 2063	1.2546 2789	1.3383 1128
40	1.1050 3301	1.1809 5142	1.2207 9424	1.2619 4655	1.3483 4861
41	1.1077 9559	1.1858 7206	1.2268 9821	1.2693 0791	1.3584 6123
42	1.1105 6508	1.1908 1319	1.2330 3270	1.2767 1220	1.3686 4969
43	1.1133 4149	1.1957 7491	1.2391 9786	1.2841 5969	1.3789 1456
44	1.1161 2485	1.2007 5731	1.2453 9385	1.2916 5062	1.3892 5642
45	1.1189 1516	1.2057 6046	1.2516 2082	1.2991 8525	1.3996 7584
46	1.1217 1245	1.2107 8446	1.2578 7892	1.3067 6383	1.4101 7341
47	1.1245 1673	1.2158 2940	1.2641 6832	1.3143 8662	1.4207 4971
48	1.1273 2802	1.2208 9536	1.2704 8916	1.3220 5388	1.4314 0533
49	1.1301 4634	1.2259 8242	1.2768 4161	1.3297 6586	1.4421 4087
50	1.1329 7171	1.2310 9068	1.2832 2581	1.3375 2283	1.4529 5693

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.0025 (¼%)	.004167 (5/12%)	.005 (½%)	.005833 (7/12%)	.0075 (¾%)
50	1.1329 7171	1.2310 9068	1.2832 2581	1.3375 2283	1.4529 5693
51	1.1358 0414	1.2362 2022	1.2896 4194	1.3453 2504	1.4638 5411
52	1.1386 4365	1.2413 7114	1.2960 9015	1.3531 7277	1.4748 3301
53	1.1414 9026	1.2465 4352	1.3025 7060	1.3610 6628	1.4858 9426
54	1.1443 4398	1.2517 3745	1.3090 8346	1.3690 0583	1.4970 3847
55	1.1472 0484	1.2569 5302	1.3156 2887	1.3769 9170	1.5082 6626
56	1.1500 7285	1.2621 9033	1.3222 0702	1.3850 2415	1.5195 7825
57	1.1529 4804	1.2674 4946	1.3288 1805	1.3931 0346	1.5309 7509
58	1.1558 3041	1.2727 3050	1.3354 6214	1.4012 2990	1.5424 5740
59	1.1587 1998	1.2780 3354	1.3421 3946	1.4094 0374	1.5540 2583
60	1.1616 1678	1.2833 5868	1.3488 5015	1.4176 2526	1.5656 8103
61	1.1645 2082	1.2887 0601	1.3555 9440	1.4258 9474	1.5774 2363
62	1.1674 3213	1.2940 7561	1.3623 7238	1.4342 1246	1.5892 5431
63	1.1703 5071	1.2994 6760	1.3691 8424	1.4425 7870	1.6011 7372
64	1.1732 7658	1.3048 8204	1.3760 3016	1.4509 9374	1.6131 8252
65	1.1762 0977	1.3103 1905	1.3829 1031	1.4594 5787	1.6252 8139
66	1.1791 5030	1.3157 7872	1.3898 2486	1.4679 7138	1.6374 7100
67	1.1820 9817	1.3212 6113	1.3967 7399	1.4765 3454	1.6497 5203
68	1.1850 5342	1.3267 6638	1.4037 5785	1.4851 4766	1.6621 2517
69	1.1880 1605	1.3322 9458	1.4107 7664	1.4938 1102	1.6745 9111
70	1.1909 8609	1.3378 4580	1.4178 3053	1.5025 2492	1.6871 5055
71	1.1939 6356	1.3434 2016	1.4249 1968	1.5112 8965	1.6998 0418
72	1.1969 4847	1.3490 1774	1.4320 4428	1.5201 0550	1.7125 5271
73	1.1999 4084	1.3546 3865	1.4392 0450	1.5289 7279	1.7253 9685
74	1.2029 4069	1.3602 8298	1.4464 0052	1.5378 9179	1.7383 3733
75	1.2059 4804	1.3659 5082	1.4536 3252	1.5468 6283	1.7513 7486
76	1.2089 6291	1.3716 4229	1.4609 0069	1.5558 8620	1.7645 1017
77	1.2119 8532	1.3773 5746	1.4682 0519	1.5649 6220	1.7777 4400
78	1.2150 1528	1.3830 9645	1.4755 4622	1.5740 9115	1.7910 7708
79	1.2180 5282	1.3888 5935	1.4829 2395	1.5832 7334	1.8045 1015
80	1.2210 9795	1.3946 4627	1.4903 3857	1.5925 0910	1.8180 4398
81	1.2241 5070	1.4004 5729	1.4977 9026	1.6017 9874	1.8316 7931
82	1.2272 1108	1.4062 9253	1.5052 7921	1.6111 4257	1.8454 1691
83	1.2302 7910	1.4121 5209	1.5128 0561	1.6205 4090	1.8592 5753
84	1.2333 5480	1.4180 3605	1.5203 6964	1.6299 9405	1.8732 0196
85	1.2364 3819	1.4239 4454	1.5279 7148	1.6395 0235	1.8872 5098
86	1.2395 2928	1.4298 7764	1.5356 1134	1.6490 6612	1.9014 0536
87	1.2426 2811	1.4358 3546	1.5432 8940	1.6586 8567	1.9156 6590
88	1.2457 3468	1.4418 1811	1.5510 0585	1.6683 6134	1.9300 3339
89	1.2488 4901	1.4478 2568	1.5587 6087	1.6780 9344	1.9445 0865
90	1.2519 7114	1.4538 5829	1.5665 5468	1.6878 8232	1.9590 9246
91	1.2551 0106	1.4599 1603	1.5743 8745	1.6977 2830	1.9737 8565
92	1.2582 3882	1.4659 9902	1.5822 5939	1.7076 3172	1.9885 8905
93	1.2613 8441	1.4721 0735	1.5901 7069	1.7175 9290	2.0035 0346
94	1.2645 3787	1.4782 4113	1.5981 2154	1.7276 1219	2.0185 2974
95	1.2676 9922	1.4844 0047	1.6061 1215	1.7376 8993	2.0336 6871
96	1.2708 6847	1.4905 8547	1.6141 4271	1.7478 2646	2.0489 2123
97	1.2740 4564	1.4967 9624	1.6222 1342	1.7580 2211	2.0642 8814
98	1.2772 3075	1.5030 3289	1.6303 2449	1.7682 7724	2.0797 7030
99	1.2804 2383	1.5092 9553	1.6384 7611	1.7785 9219	2.0953 6858
100	1.2836 2489	1.5155 8426	1.6466 6849	1.7889 6731	2.1110 8384

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
1	1.0100 0000	1.0112 5000	1.0125 0000	1.0150 0000	1.0175 0000
2	1.0201 0000	1.0226 2656	1.0251 5625	1.0302 2500	1.0353 0625
3	1.0303 0100	1.0341 3111	1.0379 7070	1.0456 7838	1.0534 2411
4	1.0406 0401	1.0457 6509	1.0509 4534	1.0613 6355	1.0718 5903
5	1.0510 1005	1.0575 2994	1.0640 8215	1.0772 8400	1.0906 1656
6	1.0615 2015	1.0694 2716	1.0773 8318	1.0934 4326	1.1097 0235
7	1.0721 3535	1.0814 5821	1.0908 5047	1.1098 4491	1.1291 2215
8	1.0828 5671	1.0936 2462	1.1044 8610	1.1264 9259	1.1488 8178
9	1.0936 8527	1.1059 2789	1.1182 9218	1.1433 8998	1.1689 8721
10	1.1046 2213	1.1183 6958	1.1322 7083	1.1605 4083	1.1894 4449
11	1.1156 6835	1.1309 5124	1.1464 2422	1.1779 4894	1.2102 5977
12	1.1268 2503	1.1436 7444	1.1607 5452	1.1956 1817	1.2314 3931
13	1.1380 9328	1.1565 4078	1.1752 6395	1.2135 5244	1.2529 8950
14	1.1494 7421	1.1695 5186	1.1899 5475	1.2317 5573	1.2749 1682
15	1.1609 6896	1.1827 0932	1.2048 2918	1.2502 3207	1.2972 2786
16	1.1725 7864	1.1960 1480	1.2198 8955	1.2689 8555	1.3199 2935
17	1.1843 0443	1.2094 6997	1.2351 3817	1.2880 2033	1.3430 2811
18	1.1961 4748	1.2230 7650	1.2505 7739	1.3073 4064	1.3665 3111
19	1.2081 0895	1.2368 3611	1.2662 0961	1.3269 5075	1.3904 4540
20	1.2201 9004	1.2507 5052	1.2820 3723	1.3468 5501	1.4147 7820
21	1.2323 9194	1.2648 2146	1.2980 6270	1.3670 5783	1.4395 3681
22	1.2447 1586	1.2790 5071	1.3142 8848	1.3875 6370	1.4647 2871
23	1.2571 6302	1.2934 4003	1.3307 1709	1.4083 7715	1.4903 6146
24	1.2697 3465	1.3079 9123	1.3473 5105	1.4295 0281	1.5164 4279
25	1.2824 3200	1.3227 0613	1.3641 9294	1.4509 4535	1.5429 8054
26	1.2952 5631	1.3375 8657	1.3812 4535	1.4727 0953	1.5699 8269
27	1.3082 0888	1.3526 3442	1.3985 1092	1.4948 0018	1.5974 5739
28	1.3212 9097	1.3678 5156	1.4159 9230	1.5172 2218	1.6254 1290
29	1.3345 0388	1.3832 3989	1.4336 9221	1.5399 8051	1.6538 5762
30	1.3478 4892	1.3988 0134	1.4516 1336	1.5630 8022	1.6828 0013
31	1.3613 2740	1.4145 3785	1.4697 5853	1.5865 2642	1.7122 4913
32	1.3749 4068	1.4304 5140	1.4881 3051	1.6103 2432	1.7422 1349
33	1.3886 9009	1.4465 4398	1.5067 3214	1.6344 7918	1.7727 0223
34	1.4025 7699	1.4628 1760	1.5255 6629	1.6589 9637	1.8037 2452
35	1.4166 0276	1.4792 7430	1.5446 3587	1.6838 8132	1.8352 8970
36	1.4307 6878	1.4959 1613	1.5639 4382	1.7091 3954	1.8674 0727
37	1.4450 7647	1.5127 4519	1.5834 9312	1.7347 7663	1.9000 8689
38	1.4595 2724	1.5297 6357	1.6032 8678	1.7607 9828	1.9333 3841
39	1.4741 2251	1.5469 7341	1.6233 2787	1.7872 1025	1.9671 7184
40	1.4888 6373	1.5643 7687	1.6436 1946	1.8140 1841	2.0015 9734
41	1.5037 5237	1.5819 7611	1.6641 6471	1.8412 2868	2.0366 2530
42	1.5187 8989	1.5997 7334	1.6849 6677	1.8688 4712	2.0722 6624
43	1.5339 7779	1.6177 7079	1.7060 2885	1.8968 7982	2.1085 3090
44	1.5493 1757	1.6359 7071	1.7273 5421	1.9253 3302	2.1454 3019
45	1.5648 1075	1.6543 7538	1.7489 4614	1.9542 1301	2.1829 7522
46	1.5804 5885	1.6729 8710	1.7708 0797	1.9835 2621	2.2211 7728
47	1.5962 6344	1.6918 0821	1.7929 4306	2.0132 7910	2.2600 4789
48	1.6122 2608	1.7108 4105	1.8153 5485	2.0434 7829	2.2995 9872
49	1.6283 4834	1.7300 8801	1.8380 4679	2.0741 3046	2.3398 4170
50	1.6446 3182	1.7495 5150	1.8610 2237	2.1052 4242	2.3807 8893

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
50	1.6446 3182	1.7495 5150	1.8610 2237	2.1052 4242	2.3807 8893
51	1.6610 7814	1.7692 3395	1.8842 8515	2.1368 2106	2.4224 5274
52	1.6776 8892	1.7891 3784	1.9078 3872	2.1688 7337	2.4648 4566
53	1.6944 6581	1.8092 6564	1.9316 8670	2.2014 0647	2.5079 8046
54	1.7114 1047	1.8296 1988	1.9558 3279	2.2344 2757	2.5518 7012
55	1.7285 2457	1.8502 0310	1.9802 8070	2.2679 4398	2.5965 2785
56	1.7458 0982	1.8710 1788	2.0050 3420	2.3019 6314	2.6419 6708
57	1.7632 6792	1.8920 6684	2.0300 9713	2.3364 9259	2.6882 0151
58	1.7809 0060	1.9133 5259	2.0554 7335	2.3715 3998	2.7352 4503
59	1.7987 0960	1.9348 7780	2.0811 6676	2.4071 1308	2.7831 1182
60	1.8166 9670	1.9566 4518	2.1071 8135	2.4432 1978	2.8318 1628
61	1.8348 6367	1.9786 5744	2.1335 2111	2.4798 6807	2.8813 7306
62	1.8532 1230	2.0009 1733	2.1601 9013	2.5170 6609	2.9317 9709
63	1.8717 4443	2.0234 2765	2.1871 9250	2.5548 2208	2.9831 0354
64	1.8904 6187	2.0461 9121	2.2145 3241	2.5931 4442	3.0353 0785
65	1.9093 6649	2.0692 1087	2.2422 1407	2.6320 4158	3.0884 2574
66	1.9284 6015	2.0924 8949	2.2702 4174	2.6715 2221	3.1424 7319
67	1.9477 4475	2.1160 2999	2.2986 1976	2.7115 9504	3.1974 6647
68	1.9672 2220	2.1398 3533	2.3273 5251	2.7522 6896	3.2534 2213
69	1.9868 9442	2.1639 0848	2.3564 4442	2.7935 5300	3.3103 5702
70	2.0067 6337	2.1882 5245	2.3858 9997	2.8354 5629	3.3682 8827
71	2.0268 3100	2.2128 7029	2.4157 2372	2.8779 8814	3.4272 3331
72	2.0470 9931	2.2377 6508	2.4459 2027	2.9211 5796	3.4872 0990
73	2.0675 7031	2.2629 3994	2.4764 9427	2.9649 7533	3.5482 3607
74	2.0882 4601	2.2883 9801	2.5074 5045	3.0094 4996	3.6103 3020
75	2.1091 2847	2.3141 4249	2.5387 9358	3.0545 9171	3.6735 1098
76	2.1302 1975	2.3401 7659	2.5705 2850	3.1004 1059	3.7377 9742
77	2.1515 2195	2.3665 0358	2.6026 6011	3.1469 1674	3.8032 0888
78	2.1730 3717	2.3931 2675	2.6351 9336	3.1941 2050	3.8697 6503
79	2.1947 6754	2.4200 4942	2.6681 3327	3.2420 3230	3.9374 8592
80	2.2167 1522	2.4472 7498	2.7014 8494	3.2906 6279	4.0063 9192
81	2.2388 8237	2.4748 0682	2.7352 5350	3.3400 2273	4.0765 0378
82	2.2612 7119	2.5026 4840	2.7694 4417	3.3901 2307	4.1478 4260
83	2.2838 8390	2.5308 0319	2.8040 6222	3.4409 7492	4.2204 2984
84	2.3067 2274	2.5592 7473	2.8391 1300	3.4925 8954	4.2942 8737
85	2.3297 8997	2.5880 6657	2.8746 0191	3.5449 7838	4.3694 3740
86	2.3530 8787	2.6171 8232	2.9105 3444	3.5981 5306	4.4459 0255
87	2.3766 1875	2.6466 2562	2.9469 1612	3.6521 2535	4.5237 0584
88	2.4003 8494	2.6764 0016	2.9837 5257	3.7069 0723	4.6028 7070
89	2.4243 8879	2.7065 0966	3.0210 4948	3.7625 1084	4.6834 2093
90	2.4486 3267	2.7369 5789	3.0588 1260	3.8189 4851	4.7653 8080
91	2.4731 1900	2.7677 4867	3.0970 4775	3.8762 3273	4.8487 7496
92	2.4978 5019	2.7988 8584	3.1357 6085	3.9343 7622	4.9336 2853
93	2.5228 2869	2.8303 7331	3.1749 5786	3.9933 9187	5.0199 6703
94	2.5480 5698	2.8622 1501	3.2146 4483	4.0532 9275	5.1078 1645
95	2.5735 3755	2.8944 1492	3.2548 2789	4.1140 9214	5.1972 0324
96	2.5992 7293	2.9269 7709	3.2955 1324	4.1758 0352	5.2881 5429
97	2.6252 6565	2.9599 0559	3.3367 0716	4.2384 4057	5.3806 9699
98	2.6515 1831	2.9932 0452	3.3784 1600	4.3020 1718	5.4748 5919
99	2.6780 3349	3.0268 7807	3.4206 4620	4.3665 4744	5.5706 6923
100	2.7048 1383	3.0609 3045	3.4634 0427	4.4320 4565	5.6681 5594

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	1.0200 0000	1.0225 0000	1.0250 0000	1.0275 0000	1.0300 0000
2	1.0404 0000	1.0455 0625	1.0506 2500	1.0557 5625	1.0609 0000
3	1.0612 0800	1.0690 3014	1.0768 9063	1.0847 8955	1.0927 2700
4	1.0824 3216	1.0930 8332	1.1038 1289	1.1146 2126	1.1255 0881
5	1.1040 8080	1.1176 7769	1.1314 0821	1.1452 7334	1.1592 7407
6	1.1261 6242	1.1428 2544	1.1596 9342	1.1767 6836	1.1940 5230
7	1.1486 8567	1.1685 3901	1.1886 8575	1.2091 2949	1.2298 7387
8	1.1716 5938	1.1948 3114	1.2184 0290	1.2423 8055	1.2667 7008
9	1.1950 9257	1.2217 1484	1.2488 6297	1.2765 4602	1.3047 7318
10	1.2189 9442	1.2492 0343	1.2800 8454	1.3116 5103	1.3439 1638
11	1.2433 7431	1.2773 1050	1.3120 8666	1.3477 2144	1.3842 3387
12	1.2682 4179	1.3060 4999	1.3448 8882	1.3847 8378	1.4257 6089
13	1.2936 0663	1.3354 3611	1.3785 1104	1.4228 6533	1.4685 3371
14	1.3194 7876	1.3654 8343	1.4129 7382	1.4619 9413	1.5125 8972
15	1.3458 6834	1.3962 0680	1.4482 9817	1.5021 9896	1.5579 6742
16	1.3727 8571	1.4276 2146	1.4845 0562	1.5435 0944	1.6047 0644
17	1.4002 4142	1.4597 4294	1.5216 1826	1.5859 5595	1.6528 4763
18	1.4282 4625	1.4925 8716	1.5596 5872	1.6295 6973	1.7024 3306
19	1.4568 1117	1.5261 7037	1.5986 5019	1.6743 8290	1.7535 0605
20	1.4859 4740	1.5605 0920	1.6386 1644	1.7204 2843	1.8061 1123
21	1.5156 6634	1.5956 2066	1.6795 8185	1.7677 4021	1.8602 9457
22	1.5459 7967	1.6315 2212	1.7215 7140	1.8163 5307	1.9161 0341
23	1.5768 9926	1.6682 313[illegible]	1.7646 1068	1.8663 0278	1.9735 8651
24	1.6084 3725	1.7057 66[illegible]	1.8087 2595	1.9176 2610	2.0327 9411
25	1.6406 0599	1.7441 4632	1.8539 4410	1.9703 6082	2.0937 7793
26	1.6734 1811	1.7833 8962	1.9002 9270	2.0245 4575	2.1565 9127
27	1.7068 8648	1.8235 1588	1.9478 0002	2.0802 2075	2.2212 8901
28	1.7410 2421	1.8645 4499	1.9964 9502	2.1374 2682	2.2879 2768
29	1.7758 4469	1.9064 9725	2.0464 0739	2.1962 0606	2.3565 6551
30	1.8113 6158	1.9493 9344	2.0975 6758	2.2566 0173	2.4272 6247
31	1.8475 8882	1.9932 5479	2.1500 0677	2.3186 5828	2.5000 8035
32	1.8845 4059	2.0381 0303	2.2037 5694	2.3824 2138	2.5750 8276
33	1.9222 3140	2.0839 6034	2.2588 5086	2.4479 3797	2.6523 3524
34	1.9606 7603	2.1308 4945	2.3153 2213	2.5152 5626	2.7319 0530
35	1.9998 8955	2.1787 9356	2.3732 0519	2.5844 2581	2.8138 6245
36	2.0398 8734	2.2278 1642	2.4325 3532	2.6554 9752	2.8982 7833
37	2.0806 8509	2.2779 4229	2.4933 4870	2.7285 2370	2.9852 2668
38	2.1222 9879	2.3291 9599	2.5556 8242	2.8035 5810	3.0747 8348
39	2.1647 4477	2.3816 0290	2.6195 7448	2.8806 5595	3.1670 2698
40	2.2080 3966	2.4351 8897	2.6850 6384	2.9598 7399	3.2620 3779
41	2.2522 0046	2.4899 8072	2.7521 9043	3.0412 7052	3.3598 9893
42	2.2972 4447	2.5460 0528	2.8209 9520	3.1249 0546	3.4606 9589
43	2.3431 8936	2.6032 9040	2.8915 2008	3.2108 4036	3.5645 1677
44	2.3900 5314	2.6618 6444	2.9638 0808	3.2991 3847	3.6714 5227
45	2.4378 5421	2.7217 5639	3.0379 0328	3.3898 6478	3.7815 9584
46	2.4866 1129	2.7829 9590	3.1138 5086	3.4830 8606	3.8950 4372
47	2.5363 4352	2.8456 1331	3.1916 9713	3.5788 7093	4.0118 9503
48	2.5870 7039	2.9096 3961	3.2714 8956	3.6772 8988	4.1322 5188
49	2.6388 1179	2.9751 0650	3.3532 7680	3.7784 1535	4.2562 1944
50	2.6915 8803	3.0420 4640	3.4371 0872	3.8823 2177	4.3839 0602

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
50	2.6915 8803	3.0420 4640	3.4371 0872	3.8823 2177	4.3839 0602
51	2.7454 1979	3.1104 9244	3.5230 3644	3.9890 8562	4.5154 2320
52	2.8003 2819	3.1804 7852	3.6111 1235	4.0987 8547	4.6508 8590
53	2.8563 3475	3.2520 3929	3.7013 9016	4.2115 0208	4.7904 1247
54	2.9134 6144	3.3252 1017	3.7939 2491	4.3273 1838	4.9341 2485
55	2.9717 3067	3.4000 2740	3.8887 7303	4.4463 1964	5.0821 4859
56	3.0311 6529	3.4765 2802	3.9859 9236	4.5685 9343	5.2346 1305
57	3.0917 8859	3.5547 4990	4.0856 4217	4.6942 2975	5.3916 5144
58	3.1536 2436	3.6347 3177	4.1877 8322	4.8233 2107	5.5534 0098
59	3.2166 9685	3.7165 1324	4.2924 7780	4.9559 6239	5.7200 0301
60	3.2810 3079	3.8001 3479	4.3997 8975	5.0922 5136	5.8916 0310
61	3.3466 5140	3.8856 3782	4.5097 8449	5.2322 8827	6.0683 5120
62	3.4135 8443	3.9730 6467	4.6225 2910	5.3761 7620	6.2504 0173
63	3.4818 5612	4.0624 5862	4.7380 9233	5.5240 2105	6.4379 1379
64	3.5514 9324	4.1538 6394	4.8565 4464	5.6759 3162	6.6310 5120
65	3.6225 2311	4.2473 2588	4.9779 5826	5.8320 1974	6.8299 8273
66	3.6949 7357	4.3428 9071	5.1024 0721	5.9924 0029	7.0348 8222
67	3.7688 7304	4.4406 0576	5.2299 6739	6.1571 9130	7.2459 2868
68	3.8442 5050	4.5405 1939	5.3607 1658	6.3265 1406	7.4633 0654
69	3.9211 3551	4.6426 8107	5.4947 3449	6.5004 9319	7.6872 0574
70	3.9995 5822	4.7471 4140	5.6321 0286	6.6792 5676	7.9178 2191
71	4.0795 4939	4.8539 5208	5.7729 0543	6.8629 3632	8.1553 5657
72	4.1611 4038	4.9631 6600	5.9172 2806	7.0516 6706	8.4000 1727
73	4.2443 6318	5.0748 3723	6.0651 5876	7.2455 8791	8.6520 1778
74	4.3292 5045	5.1890 2107	6.2167 8773	7.4448 4158	8.9115 7832
75	4.4158 3546	5.3057 7405	6.3722 0743	7.6495 7472	9.1789 2567
76	4.5041 5216	5.4251 5396	6.5315 1261	7.8599 3802	9.4542 9344
77	4.5942 3521	5.5472 1993	6.6948 0043	8.0760 8632	9.7379 2224
78	4.6861 1991	5.6720 3237	6.8621 7044	8.2981 7869	10.0300 5991
79	4.7798 4231	5.7996 5310	7.0337 2470	8.5263 7861	10.3309 6171
80	4.8754 3916	5.9301 4530	7.2095 6782	8.7608 5402	10.6408 9056
81	4.9729 4794	6.0635 7357	7.3898 0701	9.0017 7751	10.9601 1727
82	5.0724 0690	6.2000 0397	7.5745 5219	9.2493 2639	11.2889 2079
83	5.1738 5504	6.3395 0406	7.7639 1599	9.5036 8286	11.6275 8842
84	5.2773 3214	6.4821 4290	7.9580 1389	9.7650 3414	11.9764 1607
85	5.3828 7878	6.6279 9112	8.1569 6424	10.0335 7258	12.3357 0855
86	5.4905 3636	6.7771 2092	8.3608 8834	10.3094 9583	12.7057 7981
87	5.6003 4708	6.9296 0614	8.5699 1055	10.5930 0696	13.0869 5320
88	5.7123 5402	7.0855 2228	8.7841 5832	10.8843 1465	13.4795 6180
89	5.8266 0110	7.2449 4653	9.0037 6228	11.1836 3331	13.8839 4865
90	5.9431 3313	7.4079 5782	9.2288 5633	11.4911 8322	14.3004 6711
91	6.0619 9579	7.5746 3688	9.4595 7774	11.8071 9076	14.7294 8112
92	6.1832 3570	7.7450 6621	9.6960 6718	12.1318 8851	15.1713 6556
93	6.3069 0042	7.9193 3020	9.9384 6886	12.4655 1544	15.6265 0652
94	6.4330 3843	8.0975 1512	10.1869 3058	12.8083 1711	16.0953 0172
95	6.5616 9920	8.2797 0921	10.4416 0385	13.1605 4584	16.5781 6077
96	6.6929 3318	8.4660 0267	10.7026 4395	13.5224 6085	17.0755 0559
97	6.8267 9184	8.6564 8773	10.9702 1004	13.8943 2852	17.5877 7076
98	6.9633 2768	8.8512 5871	11.2444 6530	14.2764 2255	18.1154 0388
99	7.1025 9423	9.0504 1203	11.5255 7693	14.6690 2417	18.6588 6600
100	7.2446 4612	9.2540 4630	11.8137 1635	15.0724 2234	19.2186 3198

ΠΙΝΑΚΑΣ I. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.035 (3½%)	.04 (4%)	.045 (4½%)	.05 (5%)	.055 (5½%)
1	1.0350 0000	1.0400 0000	1.0450 0000	1.0500 0000	1.0550 0000
2	1.0712 2500	1.0816 0000	1.0920 2500	1.1025 0000	1.1130 2500
3	1.1087 1788	1.1248 6400	1.1411 6613	1.1576 2500	1.1742 4138
4	1.1475 2300	1.1698 5856	1.1925 1860	1.2155 0625	1 2388 2465
5	1.1876 8631	1.2166 5290	1.2461 8194	1.2762 8156	1.3069 6001
6	1.2292 5533	1.2653 1902	1.3022 6012	1.3400 9564	1.3788 4281
7	1.2722 7926	1.3159 3178	1.3608 6183	1.4071 0042	1.4546 7916
8	1.3168 0904	1.3685 6905	1.4221 0061	1.4774 5544	1.5346 8651
9	1.3628 9735	1.4233 1181	1.4860 9514	1.5513 2822	1.6190 9427
10	1.4105 9876	1.4802 4428	1.5529 6942	1.6288 9463	1.7081 4446
11	1.4599 6972	1.5394 5406	1.6228 5305	1.7103 3936	1.8020 9240
12	1.5110 6866	1.6010 3222	1.6958 8143	1.7958 5633	1.9012 0749
13	1.5639 5606	1 6650 7351	1.7721 9610	1.8856 4914	2.0057 7390
14	1.6186 9452	1.7316 7645	1.8519 4492	1.9799 3160	2.1160 9146
15	1.6753 4883	1.8009 4351	1.9352 8244	2.0789 2818	2.2324 7649
16	1.7339 8604	1.8729 8125	2.0223 7015	2.1828 7459	2.3552 6270
17	1.7946 7555	1.9479 0050	2.1133 7681	2.2920 1832	2.4848 0215
18	1 8574 8920	2.0258 1652	2.2084 7877	2.4066 1923	2.6214 6627
19	1.9225 0132	2.1068 4918	2.3078 6031	2.5269 5020	2.7656 4691
20	1.9897 8886	2.1911 2314	2.4117 1402	2.6532 9771	2.9177 5749
21	2.0594 3147	2.2787 6807	2.5202 4116	2.7859 6259	3.0782 3415
22	2.1315 1158	2.3699 1879	2.6336 5201	2.9252 6072	3.2475 3703
23	2.2061 1448	2.4647 1554	2.7521 6635	3.0715 2376	3.4261 5157
24	2.2833 2849	2.5633 0416	2.8760 1383	3.2250 9994	3.6145 8990
25	2.3632 4498	2.6658 3633	3.0054 3446	3.3863 5494	3.8133 9235
26	2.4459 5856	2.7724 6978	3.1406 7901	3.5556 7269	4.0231 2893
27	2.5315 6711	2.8833 6858	3.2820 0956	3.7334 5632	4.2444 0102
28	2.6201 7196	2.9987 0332	3.4296 9999	3.9201 2914	4.4778 4307
29	2.7118 7798	3.1186 5145	3.5840 3649	4.1161 3560	4.7241 2444
30	2.8067 9370	3.2433 9751	3.7453 1813	4.3219 4238	4.9839 5129
31	2.9050 3148	3.3731 3341	3.9138 5745	4.5380 3949	5.2580 6861
32	3.0067 0759	3.5080 5875	4.0899 8104	4.7649 4147	5.5472 6238
33	3.1119 4235	3.6483 8110	4.2740 3018	5.0031 8854	5.8523 6181
34	3.2208 6033	3.7943 1634	4.4663 6154	5.2533 4797	6.1742 4171
35	3.3335 9045	3.9460 8899	4.6673 4781	5.5160 1537	6.5138 2501
36	3.4502 6611	4.1039 3255	4 8773 7846	5.7918 1614	6.8720 8538
37	3.5710 2543	4.2680 8986	5.0968 6049	6.0814 0694	7.2500 5008
38	3.6960 1132	4.4388 1345	5.3262 1921	6.3854 7729	7.6488 0283
39	3.8253 7171	4.6163 6599	5.5658 9908	6.7047 5115	8.0694 8699
40	3.9592 5972	4.8010 2063	5.8163 6454	7.0399 8871	8.5133 0877
41	4.0978 3381	4.9930 6145	6.0781 0094	7.3919 8815	8.9815 4076
42	4.2412 5799	5.1927 8391	6.3516 1548	7.7615 8756	9.4755 2550
43	4.3897 0202	5.4004 9527	6.6374 3818	8.1496 6693	9.9966 7940
44	4.5433 4160	5.6165 1508	6.9361 2290	8.5571 5028	10.5464 9677
45	4.7023 5855	5.8411 7568	7.2482 4843	8.9850 0779	11.1265 5409
46	4.8669 4110	6.0748 2271	7.5744 1961	9 4342 5818	11.7385 1456
47	5.0372 8404	6.3178 1562	7.9152 6849	9.9059 7109	12.3841 3287
48	5.2135 8898	6.5705 2824	8.2714 5557	10.4012 6965	13.0652 6017
49	5.3960 6459	6.8333 4937	8.6436 7107	10.9213 3313	13.7838 4948
50	5.5849 2686	7.1066 8335	9.0326 3627	11.4673 9979	14.5419 6120

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	.06 (6%)	.065 (6½%)	.07 (7%)	.075 (7½%)	.08 (8%)
1	1.0600 0000	1.0650 0000	1.0700 0000	1.0750 0000	1.0800 0000
2	1.1236 0000	1.1342 2500	1.1449 0000	1.1556 2500	1.1664 0000
3	1.1910 1600	1.2079 4963	1.2250 4300	1.2422 9688	1.2597 1200
4	1.2624 7696	1.2864 6635	1.3107 9601	1.3354 6914	1.3604 8896
5	1.3382 2558	1.3700 8666	1.4025 5173	1.4356 2933	1.4693 2808
6	1.4185 1911	1.4591 4230	1.5007 3035	1.5433 0153	1.5868 7432
7	1.5036 3026	1.5539 8655	1.6057 8148	1.6590 4914	1.7138 2427
8	1.5938 4807	1.6549 9567	1.7181 8618	1.7834 7783	1.8509 3021
9	1.6894 7896	1.7625 7039	1.8384 5921	1.9172 3866	1.9990 0463
10	1.7908 4770	1.8771 3747	1.9671 5136	2.0610 3156	2.1589 2500
11	1.8982 9856	1.9991 5140	2.1048 5195	2.2156 0893	2.3316 3900
12	2.0121 9647	2.1290 9624	2.2521 9159	2.3817 7960	2.5181 7012
13	2.1329 2826	2.2674 8750	2.4098 4500	2.5604 1307	2.7196 2373
14	2.2609 0396	2.4148 7418	2.5785 3415	2.7524 4405	2.9371 9362
15	2.3965 5819	2.5718 4101	2.7590 3154	2.9588 7735	3.1721 6911
16	2.5403 5168	2.7390 1067	2.9521 6375	3.1807 9315	3.4259 4264
17	2.6927 7279	2.9170 4637	3.1588 1521	3.4193 5264	3.7000 1805
18	2.8543 3915	3.1066 5438	3.3799 3228	3.6758 0409	3.9960 1950
19	3.0255 9950	3.3085 8691	3.6165 2754	3.9514 8940	4.3157 0106
20	3.2071 3547	3.5236 4506	3.8696 8446	4.2478 5110	4.6609 5714
21	3.3995 6360	3.7526 8199	4.1405 6237	4.5664 3993	5.0338 3372
22	3.6035 3742	3.9966 0632	4.4304 0174	4.9089 2293	5.4365 4041
23	3.8197 4966	4.2563 8573	4.7405 2986	5.2770 9215	5.8714 6365
24	4.0489 3464	4.5330 5081	5.0723 6695	5.6728 7406	6.3411 8074
25	4.2918 7072	4.8276 9911	5.4274 3264	6.0983 3961	6.8484 7520
26	4.5493 8296	5.1414 9955	5.8073 5292	6.5557 1508	7.3963 5321
27	4.8223 4594	5.4756 9702	6.2138 6763	7.0473 9371	7.9880 6147
28	5.1116 8670	5.8316 1733	6.6488 3836	7.5759 4824	8.6271 0639
29	5.4183 8790	6.2106 7245	7.1142 5705	8.1441 4436	9.3172 7490
30	5.7434 9117	6.6143 6616	7.6122 5504	8.7549 5519	10.0626 5689
31	6.0881 0064	7.0442 9996	8.1451 1290	9.4115 7683	10.8676 6944
32	6.4533 8668	7.5021 7946	8.7152 7080	10.1174 4509	11.7370 8300
33	6.8405 8988	7.9898 2113	9.3253 3975	10.8762 5347	12.6760 4964
34	7.2510 2528	8.5091 5950	9.9781 1354	11.6919 7248	13.6901 3361
35	7.6860 8679	9.0622 5487	10.6765 8148	12.5688 7042	14.7853 4429
36	8.1472 5200	9.6513 0143	11.4239 4219	13.5115 3570	15.9681 7184
37	8.6360 8712	10.2786 3603	12.2236 1814	14.5249 0088	17.2456 2558
38	9.1542 5235	10.9467 4737	13.0792 7141	15.6142 6844	18.6252 7563
39	9.7035 0749	11.6582 8595	13.9948 2041	16.7853 3858	20.1152 9768
40	10.2857 1794	12.4160 7453	14.9744 5784	18.0442 3897	21.7245 2150
41	10.9028 6101	13.2231 1938	16.0226 6989	19.3975 5689	23.4624 8322
42	11.5570 3267	14.0826 2214	17.1442 5678	20.8523 7366	25.3394 8187
43	12.2504 5463	14.9979 9258	18.3443 5475	22.4163 0168	27.3666 4042
44	12.9854 8191	15.9728 6209	19.6284 5959	24.0975 2431	29.5559 7166
45	13.7646 1083	17.0110 9813	21.0024 5176	25.9048 3863	31.9204 4939
46	14.5904 8748	18.1168 1951	22.4726 2338	27.8477 0153	34.4740 8534
47	15.4659 1673	19.2944 1278	24.0457 0702	29.9362 7915	37.2320 1217
48	16.3938 7173	20.5485 4961	25.7289 0651	32.1815 0008	40.2105 7314
49	17.3775 0403	21.8842 0533	27.5299 2997	34.5951 1259	43.4274 1899
50	18.4201 5427	23.3066 7868	29.4570 2506	37.1897 4603	46.9016 1251

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	8%	8,5%	9%	9,5%	10%	10,5%
	0.0800	0.0850	0.0900	0.0950	0.1000	0.1050
1	1.0800000	1.0850000	1.0900000	1.0950000	1.1000000	1.1050000
2	1.1664000	1.1772250	1.1881000	1.1990250	1.2100000	1.221025
3	1.2597120	1.2772891	1.2950290	1.3129324	1.3310000	1.34923[illegible]
4	1.3604890	1.3858587	1.4115816	1.4376609	1.4641000	1.4909020
5	1.4693281	1.5036567	1.5386239	1.5742387	1.6105100	1.6474467
6	1.5868743	1.6314675	1.6771001	1.7237914	1.7715610	1.8204287
7	1.7138242	1.7701422	1.8280391	1.8875516	1.9487171	2.0115737
8	1.8509302	1.9206043	1.9925626	2.0668690	2.1435888	2.2227889
9	1.9990046	2.0838557	2.1718932	2.2632215	2.3579476	2.4561817
10	2.1589250	2.2609834	2.3673636	2.4782276	2.5937424	2.7140808
11	2.3316390	2.4531670	2.5804264	2.7136592	2.8531166	2.9990593
12	2.5181701	2.6616862	2.8126647	2.9714568	3.1384283	3.3139605
13	2.7196237	2.8879295	3.0658045	3.2537452	3.4522711	3.6619263
14	2.9371936	3.1334035	3.3417269	3.5628510	3.7974982	4.0464786
15	3.1721690	3.3997428	3.6424824	3.9013218	4.1772480	4.4713036
16	3.4259426	3.6887209	3.9703058	4.2719474	4.5949728	4.9407904
17	3.7000180	4.0022622	4.3276333	4.6777824	5.0544701	5.4595734
18	3.9960194	4.3424545	4.7171203	5.1221717	5.5599171	6.0328286
19	4.3157009	4.7115631	5.1416611	5.6087780	6.1159088	6.6662756
20	4.6609570	5.1120459	5.6044106	6.1416119	6.7274997	7.3662345
21	5.0338335	5.5465698	6.1088075	6.7250650	7.4002496	8.1396891
22	5.4365402	6.0180283	6.6586002	7.3639461	8.1402746	8.9943565
23	5.8714634	6.5295607	7.2578742	8.0635210	8.9543020	9.9387639
24	6.3411805	7.0845733	7.9110828	8.8295555	9.8497322	10.982334
25	6.8484749	7.6867620	8.6230803	9.6683632	10.834705	12.135479
26	7.3963529	8.3401368	9.3991575	10.586858	11.918176	13.409704
27	7.9880611	9.0490484	10.245082	11.592609	13.109993	14.817723
28	8.6271060	9.8182175	11.167139	12.693907	14.420993	16.373584
29	9.3172744	10.652766	12.172181	13.899828	15.863092	18.092811
30	10.062656	11.558251	13.267678	15.220312	17.449401	19.992556
31	10.867669	12.540702	14.461769	16.666241	19.194341	22.091774
32	11.737082	13.606662	15.763328	18.249534	21.113775	24.411410
33	12.676049	14.763228	17.182027	19.983240	23.225153	26.974608
34	13.690133	16.018103	18.728410	21.881648	25.547668	29.806942
35	14.785343	17.379641	20.413967	23.960404	28.102435	32.936671
36	15.968171	18.856911	22.251224	26.236643	30.912678	36.395021
37	17.245625	20.459748	24.253834	28.729124	34.003946	40.216498
38	18.625274	22.198827	26.436679	31.458390	37.404341	44.439230
39	20.115296	24.085727	28.815980	34.446937	41.144775	49.105350
40	21.724520	26.133014	31.409418	37.719396	45.259252	54.261411
41	23.462482	28.354320	34.236265	41.302739	49.785177	59.958859
42	25.339480	30.764437	37.317529	45.226499	54.763695	66.254539
43	27.366638	33.379414	40.676107	49.523016	60.240064	73.211266
44	29.555970	36.216664	44.336956	54.227703	66.264070	80.898448
45	31.920447	39.295081	48.327282	59.379334	72.890477	89.392785
46	34.474083	42.635162	52.676737	65.020371	80.179525	98.779028
47	37.232009	46.259151	57.417644	71.197306	88.197477	109.15083
48	40.210570	50.191179	62.585231	77.961050	97.017224	120.61166
49	43.427415	54.457429	68.217902	85.367350	106.71895	133.27589
50	46.901609	59.086310	74.357513	93.477248	117.39084	147.26985

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	11%	11,5%	12%	12,5%	13%	13,5%
	0.1100	0.1150	0.1200	0.1250	0.1300	0.1350
1	1.1100000	1.1150000	1.1200000	1.1250000	1.1300000	1.1350000
2	1.2321000	1.2432250	1.2544000	1.2656250	1.2769000	1.2882250
3	1.3676310	1.3861959	1.4049280	1.4238281	1.4428970	1.4621354
4	1.5180704	1.5456084	1.5735193	1.6018066	1.6304736	1.6595236
5	1.6850581	1.7233533	1.7623417	1.8020324	1.8424352	1.8835593
6	1.8704145	1.9215390	1.9738227	2.0272865	2.0819517	2.1378398
7	2.0761601	2.1425160	2.2106814	2.2806973	2.3526054	2.4264482
8	2.3045377	2.3889053	2.4759631	2.5657845	2.6584441	2.7540187
9	2.5580369	2.6636294	2.7730787	2.8865075	3.0040419	3.1258112
10	2.8394209	2.9699468	3.1058481	3.2473209	3.3945673	3.5477957
11	3.1517572	3.3114906	3.4785499	3.6532361	3.8358610	4.0267481
12	3.4984505	3.6923120	3.8959759	4.1098906	4.3345230	4.5703591
13	3.8832801	4.1169279	4.3634930	4.6236269	4.8980109	5.1873576
14	4.3104408	4.5903746	4.8871121	5.2015802	5.5347523	5.8876508
15	4.7845893	5.1182677	5.4735656	5.8517777	6.2542701	6.6824837
16	5.3108941	5.7068685	6.1303934	6.5832499	7.0673252	7.5846189
17	5.8950925	6.3631583	6.8660406	7.4061561	7.9860775	8.6085425
18	6.5435526	7.0949215	7.6899655	8.3319256	9.0242675	9.7706957
19	7.2633434	7.9108375	8.6127613	9.3734163	10.197422	11.089740
20	8.0623112	8.8205837	9.6462926	10.545093	11.523087	12.586854
21	8.9491654	9.8349509	10.803848	11.863230	13.021088	14.286080
22	9.9335736	10.965970	12.100309	13.346134	14.713830	16.214700
23	11.026267	12.227057	13.552347	15.014400	16.626628	18.403685
24	12.239156	13.633168	15.178628	16.891200	18.788089	20.888182
25	13.585463	15.200983	17.000063	19.002600	21.230541	23.708087
26	15.079864	16.949095	19.040071	21.377925	23.990511	26.908678
27	16.738649	18.898241	21.324879	24.050166	27.109278	30.541350
28	18.579900	21.071539	23.883865	27.056437	30.633484	34.664432
29	20.623689	23.494766	26.749929	30.438491	34.615836	39.344130
30	22.892295	26.196664	29.959920	34.243302	39.115895	44.655588
31	25.410447	29.209280	33.555110	38.523715	44.200961	50.684092
32	28.205597	32.568348	37.581723	43.339179	49.947086	57.526444
33	31.308212	36.313707	42.091530	48.756577	56.44020,	65.292514
34	34.752115	40.489784	47.142514	54.851149	63.777434	74.107003
35	38.574848	45.146109	52.799615	61.707542	72.068500	84.111449
36	42.818081	50.337911	59.135569	69.420985	81.437405	95.466494
37	47.528070	56.126771	66.231837	78.098608	92.024267	108.35447
38	52.756158	62.581349	74.179657	87.860933	103.98742	122.98232
39	58.559335	69.778204	83.081216	98.843550	117.50579	139.58494
40	65.000862	77.802698	93.050962	111.19899	132.78154	158.42890
41	72.150956	86.750008	104.21708	125.09887	150.04314	179.81680
42	80.087561	96.726258	116.72313	140.73622	169.54874	204.09207
43	88.897193	107.84978	130.72990	158.32825	191.59008	231.64450
44	98.675884	120.25250	146.41745	178.11928	216.49679	262.91651
45	109.53023	134.08154	163.98759	200.38419	244.64137	298.41024
46	121.57856	149.50092	183.66610	225.43222	276.44475	338.69562
47	134.95220	166.69352	205.70603	253.61124	312.38257	384.41952
48	149.79694	185.86328	230.39075	285.31265	352.99230	436.31616
49	166.27460	207.23755	258.03764	320.97673	398.88130	495.21884
50	184.56481	231.06987	289.10216	361.09882	450.73587	562.07338

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
1	1.1400000	1.1450000	1.1500000	1.1550000	1.1600000	1.1650000
2	1.2996000	1.3110250	1.3225000	1.3340250	1.3456000	1.3572250
3	1.4815440	1.5011236	1.5208750	1.5407989	1.5608960	1.5811671
4	1.6889601	1.7187865	1.7490062	1.7796227	1.8106393	1.8420597
5	1.9254146	1.9680106	2.0113572	2.0554642	2.1003416	2.1459995
6	2.1949726	2.2533721	2.3130607	2.3740611	2.4363963	2.5000894
7	2.5022687	2.5801110	2.6600198	2.7420406	2.8262197	2.9126042
8	2.8525864	2.9542271	3.0590228	3.1670569	3.2784148	3.3931839
9	3.2519484	3.3825901	3.5178762	3.6579507	3.8029612	3.9530592
10	3.7072212	3.8730656	4.0455576	4.2249330	4.4114349	4.6053139
11	4.2262322	4.4346601	4.6523912	4.8797976	5.1172645	5.3651907
12	4.8179047	5.0776858	5.3502499	5.6361663	5.9360269	6.2504472
13	5.4924113	5.8139502	6.1527874	6.5097720	6.8857911	7.2817709
14	6.2613489	6.6569730	7.0757055	7.5187866	7.9875176	8.4832631
15	7.1379377	7.6222341	8.1370613	8.6841985	9.2655204	9.8830015
16	8.1372489	8.7274580	9.3576204	10.030244	10.748004	11.513697
17	9.2764638	9.9929394	10.761263	11.584938	12.467684	13.413457
18	10.575169	11.441916	12.375453	13.380603	14.462514	15.626677
19	12.055692	13.100993	14.231771	15.454597	16.776516	18.205078
20	13.743489	15.000637	16.366536	17.850059	19.460758	21.208916
21	15.667578	17.175730	18.821517	20.616818	22.574480	24.708388
22	17.861038	19.666210	21.644744	23.812425	26.186396	28.785271
23	20.361584	22.517811	24.891456	27.503351	30.376219	33.534841
24	23.212205	25.782893	28.625174	31.766370	35.236414	39.068090
25	26.461914	29.521413	32.918950	36.690157	40.874241	45.514324

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1 + i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
26	30.166582	33.802017	37.856793	42.377132	47.414119	53.024188
27	34.389903	38.703310	43.535311	48.945587	55.000378	61.773178
28	39.204490	44.315290	50.065608	56.532153	63.800438	71.965753
29	44.693118	50.741007	57.575449	65.294636	74.008508	83.840102
30	50.950154	58.098452	66.211766	75.415304	85.849869	97.673718
31	58.083176	66.522728	76.143531	87.104676	99.585848	113.78988
32	66.214820	76.168523	87.565060	100.60590	115.51958	132.56521
33	75.484895	87.212959	100.69982	116.19981	134.00272	154.43847
34	86.052780	99.858837	115.80479	134.21079	155.44315	179.92082
35	98.100169	114.33837	133.17551	155.01346	180.31405	209.60775
36	111.83419	130.91743	153.15184	179.04054	209.16430	244.19303
37	127.49098	149.90046	176.12461	206.79183	242.63059	284.48488
38	145.33972	171.63602	202.54330	238.94456	281.45148	331.42488
39	165.68728	196.52325	232.92480	275.86546	326.48372	386.10999
40	188.88349	225.01912	267.86351	318.62461	378.72111	449.41813
41	215.32718	257.64689	308.04304	368.01142	439.31649	524.03812
42	245.47299	295.00569	354.24950	425.05319	509.60712	610.50441
43	279.83920	337.78151	407.38692	490.93644	591.14426	711.23764
44	319.01669	386.75983	468.49496	567.03158	685.72734	828.59185
45	363.67903	442.84000	538.76920	654.92148	795.44372	965.30950
46	414.59409	507.05180	619.58458	756.43430	922.71471	1124.5856
47	472.63726	580.57431	712.52226	873.68162	1070.3491	1310.1422
48	538.80648	664.75759	819.40060	1009.1023	1241.6049	1526.3156
49	614.23938	761.14743	942.31068	1165.5131	1440.2617	1778.1577
50	700.23289	871.51381	1083.6573	1346.1676	1670.7035	2071.5537

n	17%	17,5%	18%	18,5%	19%	20%
	0.1700	0.1750	0.1800	0.1850	0.1900	0.2000
1	1.1700000	1.1750000	1.1800000	1.1850000	1.1900000	1.2000000
2	1.3689000	1.3806250	1.3924000	1.4042250	1.4161000	1.4400000
3	1.6016130	1.6222344	1.6430320	1.6640066	1.6851590	1.7280000
4	1.8738872	1.9061254	1.9387777	1.9718478	2.0053392	2.0736000
5	2.1924480	2.2396973	2.2877577	2.3366397	2.3863536	2.4883200
6	2.5651642	2.6316443	2.6995541	2.7689180	2.8397608	2.9859839
7	3.0012420	3.0921821	3.1854738	3.2811678	3.3793153	3.5831807
8	3.5114532	3.6333139	3.7588591	3.8881838	4.0213852	4.2998168
9	4.1084002	4.2691438	4.4354537	4.6074978	4.7854484	5.1597802
10	4.8068282	5.0162440	5.2338354	5.4598849	5.6946836	6.1917362
11	5.6239890	5.8940867	6.1759257	6.4699636	6.7766734	7.4300834
12	6.5800671	6.9255518	7.2875923	7.6669068	8.0642414	8.9161000
13	7.6986785	8.1375233	8.5993589	9.0852846	9.5964472	10.699320
14	9.0074538	9.5615899	10.147243	10.766062	11.419772	12.839184
15	10.538721	11.234868	11.973747	12.757784	13.589529	15.407021
16	12.330303	13.200970	14.129022	15.117974	16.171539	18.488425
17	14.426455	15.511140	16.672246	17.914799	19.244132	22.186110
18	16.878952	18.225589	19.673250	21.229036	22.900516	26.623331
19	19.748374	21.415067	23.214435	25.156408	27.251615	31.947998
20	23.105598	25.162704	27.393033	29.810343	32.429421	38.337597
21	27.033549	29.566177	32.323779	35.325257	38.591011	46.005116
22	31.629252	34.740258	38.142059	41.860429	45.923303	55.206139
23	37.006225	40.819802	45.007629	49.604608	54.648730	66.247367
24	43.297283	47.963268	53.109002	5[illegible].781460	65.031989	79.496840
25	50.657821	56.356839	62.668622	69.656030	77.388066	95.396208
26	59.269651	66.219286	73.948974	82.542396	92.091799	114.47545
27	69.345491	77.807661	87.259789	97.812739	109.58924	137.37054
28	81.134224	91.424001	102.96655	115.90809	130.41120	164.84465
29	94.927042	107.42320	121.50053	137.35109	155.18932	197.81357
30	111.06464	126.22226	143.37062	162.76104	184.67529	237.37629
31	129.94563	148.31116	169.17734	192.87184	219.76360	284.85154
32	152.03638	174.26561	199.62926	228.55312	261.51868	341.82185
33	177.88257	204.76209	235.56252	270.83545	311.20723	410.18622
34	208.12260	240.59545	277.96377	320.94001	370.33660	492.22346
35	243.50345	282.69966	327.99725	380.31391	440.70055	590.66815
36	284.89903	332.17210	387.03675	450.67198	524.43366	708.80178
37	333.33187	390.30221	456.70337	534.04630	624.07605	850.56213
38	389.99828	458.60510	538.90997	632.84486	742.65049	1020.6746
39	456.29799	538.86099	635.91377	749.92115	883.75408	1224.8095
40	533.86864	633.16166	750.37824	888.65656	1051.6674	1469.7713
41	624.62631	743.96494	885.44632	1053.0580	1251.4841	1763.7256
42	730.81278	874.15881	1044.8267	1247.8738	1489.2661	2116.4707
43	855.05095	1027.1366	1232.8955	1478.7304	1772.2267	2539.7649
44	1000.4096	1206.8855	1454.8166	1752.2955	2108.9498	3047.7178
45	1170.4792	1418.0904	1716.6836	2076.4702	2509.6502	3657.2614
46	1369.4607	1666.2563	2025.6867	2460.6171	2986.4837	4388.7136
47	1602.2690	1957.8511	2390.3102	2915.8313	3553.9156	5266.4563
48	1874.6547	2300.4751	2820.5661	3455.2601	4229.1596	6319.7476
49	2193.3460	2703.0582	3328.2680	4094.4832	5032.6999	7583.6971
50	2566.2149	3176.0933	3927.3562	4851.9626	5988.9128	9100.4365

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ. $(1+i)^{\mu/12}$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί 1, 2, 3,..., 11 δωδέκατα τῆς ἀκεραίας χρονικῆς περιόδου.

i%	$(1+i)^{\frac{1}{12}}$	$(1+i)^{\frac{2}{12}}$	$(1+i)^{\frac{3}{12}}$	$(1+i)^{\frac{4}{12}}$	$(1+i)^{\frac{5}{12}}$	$(1+i)^{\frac{6}{12}}$	i%
1/4 %	1.000208	1,000416	1,000624	1,000832	1,001040	1,001249	1/4 %
1/2 %	1,000415	1,000831	1,001247	1,000663	1,002080	1,002496	1/2 %
3/4 %	1,000622	1,001246	1,001879	1,002499	1,003118	1,003743	3/4 %
1 %	1,000829	1,001659	1,002490	1,003322	1,004154	1,004987	1%
1 1/4 %	1,001035	1,002072	1,003110	1,004149	1,005189	1,006230	1 1/4 %
1 1/2 %	1,001241	1,002484	1,003729	1,004975	1,006222	1,007472	1 1/2 %
1 3/4 %	1,001446	1,002895	1,004346	1,005789	1,007254	1,008712	1 3/4 %
2 %	1,001651	1,003305	1,004962	1,006622	1,008285	1,009950	2 %
2 1/4 %	1,001855	1,003715	1,005578	1,007444	1,009314	1,011187	2 1/4 %
2 1/2 %	1,002059	1,004123	1,006192	1,008264	1,010341	1,012422	2 1/2 %
2 3/4 %	1,002263	1,004531	1,006805	1,009083	1,011367	1,013656	2 3/4 %
3 %	1,002466	1,004938	1,007417	1,009901	1,012392	1,014889	3 %
3 1/4 %	1,002668	1,005344	1,008027	1,010718	1,013415	1,016120	3 1/4 %
3 1/2 %	1,002870	1,005750	1,008637	1,011533	1,014437	1,017349	3 1/2 %
3 3/4 %	1,003072	1,006154	1,009245	1,012346	1,015457	1,018577	3 3/4 %
4 %	1,003273	1,006558	1,009853	1,013159	1,016476	1,019803	4 %
4 1/4 %	1,003474	1,006961	1,010459	1,013970	1,017493	1,021028	4 1/4 %
4 1/2 %	1,003674	1,007363	1,011064	1,014780	1,018509	1,022252	4 1/2 %
4 3/4 %	1,003874	1,007764	1,011669	1,015589	1,019524	1,023474	4 3/4 %
5 %	1,004074	1,008164	1,012272	1,016396	1,020537	1,024695	5 %
5 1/4 %	1,004273	1,008564	1,012874	1,017202	1,021549	1,025914	5 1/4 %
5 1/2 %	1,004471	1,008963	1,013475	1,018007	1,022559	1,027131	5 1/2 %
5 3/4 %	1,004669	1,009361	1,014075	1,018810	1,023568	1,028348	5 3/4 %
6 %	1,004867	1,009758	1,014673	1,019612	1,024575	1,029563	6 %
6 1/4 %	1,005064	1,010155	1,015271	1,020413	1,025582	1,030776	6 1/4
6 1/2 %	1,005261	1,010551	1,015868	1,021213	1,026586	1,031988	6 1/2 %
6 3/4 %	1,005458	1,010946	1,016463	1,022011	1,027590	1,033198	6 3/4 %
7 %	1,005654	1,011340	1,017058	1,022809	1,028592	1,034408	7 %
7 1/2 %	1,006044	1,012126	1,018244	1,024399	1,030592	1,036822	7 1/2 %
8 %	1,006434	1,012909	1,019426	1,025985	1,032586	1,039230	8 %
8 1/2 %	1,006821	1,013687	1,020601	1,027584	1,034563	1,041631	8 1/2 %
9 %	1,007207	1,014466	1,021778	1,029142	1,036559	1,044030	9 %
9 1/2 %	1,007593	1,015239	1,022946	1,030721	1,038546	1,046432	9 1/2 %
10 %	1,007974	1,016011	1,024113	1,032280	1,040511	1,048808	10 %
11 %	1,008742	1,017556	1,026448	1,035437	1,044484	1,053608	11 %
12 %	1,009511	1,019101	1,028781	1,038594	1,048457	1,058408	12 %

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ. $(1+i)^{\mu/12}$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί 1, 2, 3,..., 11 δωδέκατα τῆς ἀκεραίας χρονικῆς περιόδου.

i%	$(1+i)^{\frac{7}{12}}$	$(1+i)^{\frac{8}{12}}$	$(1+i)^{\frac{9}{12}}$	$(1+i)^{\frac{10}{12}}$	$(1+i)^{\frac{11}{12}}$	i%
1/4 %	1,001457	1,001665	1,001874	1,002082	1,002291	1/4 %
1/2 %	1,002913	1,003340	1,003747	1,004164	1,004582	1/2 %
3/4 %	1,004368	1,004993	1,005619	1,006246	1,006872	3/4 %
1 %	1,005821	1,006655	1,007490	1,008326	1,009162	1 %
1 1/4 %	1,007272	1,008316	1,009260	1,010405	1,011452	1 1/4 %
1 1/2 %	1,008722	1,009975	1,011229	1,012484	1,013741	1 1/2 %
1 3/4 %	1,010171	1,011632	1,013096	1,014562	1,016030	1 3/4 %
2 %	1,011618	1,013289	1,014962	1,016639	1,018318	2 %
2 1/4 %	1,013064	1,014944	1,016827	1,018715	1,020605	2 1/4 %
2 1/2 %	1,014508	1,016597	1,018692	1,020790	1,022893	2 1/2 %
2 3/4 %	1,015950	1,018250	1,020554	1,022864	1,025179	2 3/4 %
3 %	1,017392	1,019901	1,022416	1,024938	1,027465	3 %
3 1/4 %	1,018831	1,021550	1,024277	1,027010	1,029751	3 1/4 %
3 1/2 %	1,020270	1,023199	1,026136	1,029082	1,032037	3 1/2 %
3 3/4 %	1,021707	1,024846	1,027995	1,031153	1,034322	3 3/4 %
4 %	1,023142	1,026491	1,029852	1,033223	1,036606	4 %
4 1/4 %	1,024576	1,028136	1,031708	1,035293	1,038890	4 1/4 %
4 1/2 %	1,026009	1,029779	1,033563	1,037361	1,041173	4 1/2 %
4 3/4 %	1,027440	1,031421	1,035417	1,039429	1,043456	4 3/4 %
5 %	1,028869	1,033061	1,037270	1,041496	1,045739	5 %
5 1/4 %	1,030298	1,034700	1,039122	1,043562	1,048021	5 1/4 %
5 1/2 %	1,031724	1,036338	1,040972	1,045627	1,050303	5 1/2 %
5 3/4 %	,1033150	1,037975	1,042822	1,047692	1,052584	5 3/4 %
6 %	1,034574	1,039610	1,044670	1,049755	1,054865	6 %
6 1/4 %	1,035997	1,041244	1,046518	1,051818	1,057145	6 1/4 %
6 1/2 %	1,037418	1,042876	1,048364	1,053880	1,059425	6 1/2 %
6 3/4 %	1,038838	1,044508	1,050209	1,055941	1,061705	6 3/4 %
7 %	1,040256	1,046138	1,052053	1,058001	1,063984	7 %
7 1/2 %	1,043089	1,049394	1,055738	1,062120	1,068540	7 1/2 %
8 %	1,045916	1,052646	1,059419	1,066235	1,073095	8 %
8 1/2 %	1,048736	1,055892	1,063093	1,070346	1,077648	8 1/2 %
9 %	1,051555	1,059134	1,066767	1,074456	1,082200	9 %
9 1/2 %	1,054375	1,062378	1,070441	1,078567	1,086753	9 1/2 %
10 %	1,057172	1,065602	1,074099	1,082664	1,091297	10 %
11 %	1,062802	1,072090	1,081447	1,090885	1,100402	11 %
12 %	1,068441	1,078578	1,088795	1,099106	1,109507	12 %

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.0025 (1/4%)	.004167 (5/12%)	.005 (1/2%)	.005833 (7/12%)	.0075 (3/4%)
1	.9975 0623	.9958 5062	.9950 2488	.9942 0050	.9925 5583
2	.9950 1869	.9917 1846	.9900 7450	.9884 3463	.9851 6708
3	.9925 3734	.9876 0345	.9851 4876	.9827 0220	.9778 3333
4	.9900 6219	.9835 0551	.9802 4752	.9770 0301	.9705 5417
5	.9875 9321	.9794 2457	.9753 7067	.9713 3688	.9633 2920
6	.9851 3038	.9753 6057	.9705 1808	.9657 0361	.9561 5802
7	.9826 7370	.9713 1343	.9656 8963	.9601 0301	.9490 4022
8	.9802 2314	.9672 8308	.9608 8520	.9545 3489	.9419 7540
9	.9777 7869	.9632 6946	.9561 0468	.9489 9906	.9349 6318
10	.9753 4034	.9592 7249	.9513 4794	.9434 9534	.9280 0315
11	.9729 0807	.9552 9211	.9466 1487	.9380 2354	.9210 9494
12	.9704 8187	.9513 2824	.9419 0534	.9325 8347	.9142 3815
13	.9680 6171	.9473 8082	.9372 1924	.9271 7495	.9074 3241
14	.9656 4759	.9434 4978	.9325 5646	.9217 9779	.9006 7733
15	.9632 3949	.9395 3505	.9279 1688	.9164 5182	.8939 7254
16	.9608 3740	.9356 3657	.9233 0037	.9111 3686	.8873 1766
17	.9584 4130	.9317 5426	.9187 0684	.9058 5272	.8807 1231
18	.9560 5117	.9278 8806	.9141 3616	.9005 9922	.8741 5614
19	.9536 6700	.9240 3790	.9095 8822	.8953 7619	.8676 4878
20	.9512 8878	.9202 0372	.9050 6290	.8901 8346	.8611 8985
21	.9489 1649	.9163 8544	.9005 6010	.8850 2084	.8547 7901
22	.9465 5011	.9125 8301	.8960 7971	.8798 8815	.8484 1589
23	.9441 8964	.9087 9636	.8916 2160	.8747 8524	.8421 0014
24	.9418 3505	.9050 2542	.8871 8567	.8697 1192	.8358 3140
25	.9394 8634	.9012 7013	.8827 7181	.8646 6802	.8296 0933
26	.9371 4348	.8975 3042	.8783 7991	.8596 5338	.8234 3358
27	.9348 0646	.8938 0623	.8740 0986	.8546 6782	.8173 0380
28	.9324 7527	.8900 9749	.8696 6155	.8497 1117	.8112 1966
29	.9301 4990	.8864 0414	.8653 3488	.8447 8327	.8051 8080
30	.9278 3032	.8827 2611	.8610 2973	.8398 8394	.7991 8690
31	.9255 1653	.8790 6335	.8567 4600	.8350 1303	.7932 3762
32	.9232 0851	.8754 1578	.8524 8358	.8301 7037	.7873 3262
33	.9209 0624	.8717 8335	.8482 4237	.8253 5580	.7814 7158
34	.9186 0972	.8681 6599	.8440 2226	.8205 6914	.7756 5418
35	.9163 1892	.8645 6365	.8398 2314	.8158 1025	.7698 8008
36	.9140 3384	.8609 7624	.8356 4492	.8110 7896	.7641 4896
37	.9117 5445	.8574 0373	.8314 8748	.8063 7510	.7584 6051
38	.9094 8075	.8538 4604	.8273 5073	.8016 9853	.7528 1440
39	.9072 1272	.8503 0311	.8232 3455	.7970 4907	.7472 1032
40	.9049 5034	.8467 7488	.8191 3886	.7924 2659	.7416 4796
41	.9026 9361	.8432 6129	.8150 6354	.7878 3091	.7361 2701
42	.9004 4250	.8397 6228	.8110 0850	.7832 6188	.7306 4716
43	.8981 9701	.8362 7779	.8069 7363	.7787 1935	.7252 0809
44	.8959 5712	.8328 0776	.8029 5884	.7742 0316	.7198 0952
45	.8937 2281	.8293 5212	.7989 6402	.7697 1317	.7144 5114
46	.8914 9407	.8259 1083	.7949 8907	.7652 4922	.7091 3264
47	.8892 7090	.8224 8381	.7910 3390	.7608 1115	.7038 5374
48	.8870 5326	.8190 7102	.7870 9841	.7563 9883	.6986 1414
49	.8848 4116	.8156 7238	.7831 8250	.7520 1209	.6934 1353
50	.8826 3457	.8122 8785	.7792 8607	.7476 5079	.6882 5165

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$%)	.004167 ($\frac{5}{12}$%)	.005 ($\frac{1}{2}$%)	.005833 ($\frac{7}{12}$%)	.0075 ($\frac{3}{4}$%)
50	.8826 3457	.8122 8785	.7792 8607	.7476 5079	.6882 5165
51	.8804 3349	.8089 1736	.7754 0902	.7433 1479	.6831 2819
52	.8782 3790	.8055 6086	.7715 5127	.7390 0393	.6780 4286
53	.8760 4778	.8022 1828	.7677 1270	.7347 1808	.6729 9540
54	.8738 6312	.7988 8957	.7638 9324	.7304 5708	.6679 8551
55	.8716 8391	.7955 7468	.7600 9277	.7262 2079	.6630 1291
56	.8695 1013	.7922 7354	.7563 1122	.7220 0907	.6580 7733
57	.8673 4178	.7889 8610	.7525 4847	.7178 2178	.6531 7849
58	.8651 7883	.7857 1230	.7488 0445	.7136 5877	.6483 1612
59	.8630 2128	.7824 5208	.7450 7906	.7095 1990	.6434 8995
60	.8608 6911	.7792 0539	.7413 7220	.7054 0504	.6386 9970
61	.8587 2230	.7759 7217	.7376 8378	.7013 1404	.6339 4511
62	.8565 8085	.7727 5237	.7340 1371	.6972 4677	.6292 2592
63	.8544 4474	.7695 4593	.7303 6190	.6932 0308	.6245 4185
64	.8523 1395	.7663 5279	.7267 2826	.6891 8285	.6198 9266
65	.8501 8848	.7631 7291	.7231 1269	.6851 8593	.6152 7807
66	.8480 6831	.7600 0621	.7195 1512	.6812 1219	.6106 9784
67	.8459 5343	.7568 5266	.7159 3544	.6772 6150	.6061 5170
68	.8438 4382	.7537 1219	.7123 7357	.6733 3372	.6016 3940
69	.8417 3947	.7505 8476	.7088 2943	.6694 2872	.5971 6070
70	.8396 4037	.7474 7030	.7053 0291	.6655 4637	.5927 1533
71	.8375 4650	.7443 6876	.7017 9394	.6616 8653	.5883 0306
72	.8354 5786	.7412 8009	.6983 0243	.6578 4908	.5839 2363
73	.8333 7442	.7382 0424	.6948 2829	.6540 3338	.5795 7681
74	.8312 9618	.7351 4115	.6913 7143	.6502 4081	.5752 6234
75	.8292 2312	.7320 9078	.6879 3177	.6464 6973	.5709 7999
76	.8271 5523	.7290 5306	.6845 0923	.6427 2053	.5667 2952
77	.8250 9250	.7260 2794	.6811 0371	.6389 9306	.5625 1069
78	.8230 3491	.7230 1537	.6777 1513	.6352 8723	.5583 2326
79	.8209 8246	.7200 1531	.6743 4342	.6316 0288	.5541 6701
80	.8189 3512	.7170 2770	.6709 8847	.6279 3989	.5500 4170
81	.8168 9289	.7140 5248	.6676 5022	.6242 9816	.5459 4710
82	.8148 5575	.7110 8960	.6643 2858	.6206 7754	.5418 8297
83	.8128 2369	.7081 3902	.6610 2346	.6170 7792	.5378 4911
84	.8107 9670	.7052 0069	.6577 3479	.6134 9917	.5338 4527
85	.8087 7476	.7022 7454	.6544 6248	.6099 4118	.5298 7123
86	.8067 5787	.6993 6054	.6512 0644	.6064 0382	.5259 2678
87	.8047 4600	.6964 5863	.6479 6661	.6028 8698	.5220 1169
88	.8027 3915	.6935 6876	.6447 4290	.5993 9054	.5181 2575
89	.8007 3731	.6906 9088	.6415 3522	.5959 1437	.5142 6873
90	.7987 4046	.6878 2495	.6383 4350	.5924 5836	.5104 4043
91	.7967 4859	.6849 7090	.6351 6766	.5890 2240	.5066 4063
92	.7947 6168	.6821 2870	.6320 0763	.5856 0636	.5028 6911
93	.7927 7973	.6792 9829	.6288 6331	.5822 1014	.4991 2567
94	.7908 0273	.6764 7962	.6257 3464	.5788 3361	.4954 1009
95	.7888 3065	.6736 7265	.6226 2153	.5754 7666	.4917 2217
96	.7868 6349	.6708 7733	.6195 2391	.5721 3918	.4880 6171
97	.7849 0124	.6680 9361	.6164 4170	.5688 2106	.4844 2850
98	.7829 4388	.6653 2143	.6133 7483	.5655 2218	.4808 2233
99	.7809 9140	.6625 6076	.6103 2321	.5622 4243	.4772 4301
100	.7790 4379	.6598 1155	.6072 8678	.5589 8171	.4736 9033

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.01 (1%)	.01125 ($1\frac{1}{8}$%)	.0125 ($1\frac{1}{4}$%)	.015 ($1\frac{1}{2}$%)	.0175 ($1\frac{3}{4}$%)
1	.9900 9901	.9888 7515	.9876 5432	.9852 2167	.9828 0098
2	.9802 9605	.9778 7407	.9754 6106	.9706 6175	.9658 9777
3	.9705 9015	.9669 9537	.9634 1833	.9563 1699	.9492 8528
4	.9609 8034	.9562 3770	.9515 2428	.9421 8423	.9329 5851
5	.9514 6569	.9455 9970	.9397 7706	.9282 6033	.9169 1254
6	.9420 4524	.9350 8005	.9281 7488	.9145 4219	.9011 4254
7	.9327 1805	.9246 7743	.9167 1593	.9010 2679	.8856 4378
8	.9234 8322	.9143 9054	.9053 9845	.8877 1112	.8704 1157
9	.9143 3982	.9042 1808	.8942 2069	.8745 9224	.8554 4135
10	.9052 8695	.8941 5880	.8831 8093	.8616 6723	.8407 2860
11	.8963 2372	.8842 1142	.8722 7746	.8489 3323	.8262 6889
12	.8874 4923	.8743 7470	.8615 0860	.8363 8742	.8120 5788
13	.8786 6260	.8646 4742	.8508 7269	.8240 2702	.7980 9128
14	.8699 6297	.8550 2835	.8403 6809	.8118 4928	.7843 6490
15	.8613 4947	.8455 1629	.8299 9318	.7998 5150	.7708 7459
16	.8528 2126	.8361 1005	.8197 4635	.7880 3104	.7576 1631
17	.8443 7749	.8268 0846	.8096 2602	.7763 8526	.7445 8605
18	.8360 1731	.8176 1034	.7996 3064	.7649 1159	.7317 7990
19	.8277 3992	.8085 1455	.7897 5866	.7536 0747	.7191 9401
20	.8195 4447	.7995 1995	.7800 0855	.7424 7042	.7068 2458
21	.8114 3017	.7906 2542	.7703 7881	.7314 9795	.6946 6789
22	.8033 9621	.7818 2983	.7608 6796	.7206 8763	.6827 2028
23	.7954 4179	.7731 3210	.7514 7453	.7100 3708	.6709 7817
24	.7875 6613	.7645 3112	.7421 9707	.6995 4392	.6594 3800
25	.7797 6844	.7560 2583	.7330 3414	.6892 0583	.6480 9632
26	.7720 4796	.7476 1516	.7239 8434	.6790 2052	.6369 4970
27	.7644 0392	.7392 9806	.7150 4626	.6689 8574	.6259 9479
28	.7568 3557	7310 7348	.7062 1853	.6590 9925	.6152 2829
29	.7493 4215	.7229 4040	.6974 9978	.6493 5887	.6046 4697
30	.7419 2292	.7148 9780	.6888 8867	.6397 6243	.5942 4764
31	.7345 7715	7069 4467	.6803 8387	.6303 0781	.5840 2716
32	.7273 0411	.6990 8002	.6719 8407	.6209 9292	.5739 8247
33	.7201 0307	.6913 0287	.6636 8797	.6118 1568	.5641 1053
34	.7129 7334	.6836 1223	.6554 9429	.6027 7407	.5544 0839
35	.7059 1420	.6760 0715	.6474 0177	.5938 6608	.5448 7311
36	.6989 2495	.6684 8667	.6394 0916	.5850 8974	.5355 0183
37	.6920 0490	.6610 4986	.6315 1522	.5764 4309	.5262 9172
38	.6851 5337	.6536 9578	.6237 1873	.5679 2423	.5172 4002
39	.6783 6967	.6464 2352	.6160 1850	.5595 3126	.5083 4400
40	.6716 5314	.6392 3216	.6084 1334	.5512 6232	.4996 0098
41	.6650 0311	.6321 2080	.6009 0206	.5431 1559	.4910 0834
42	.6584 1892	.6250 8855	.5934 8352	.5350 8925	.4825 6348
43	.6518 9992	.6181 3454	.5861 5656	.5271 8153	.4742 6386
44	.6454 4546	.6112 5789	.5789 2006	.5193 9067	.4661 0699
45	.6390 5492	.6044 5774	.5717 7290	.5117 1494	.4580 9040
46	.6327 2764	.5977 3324	.5647 1397	.5041 5265	.4502 1170
47	.6264 6301	.5910 8355	.5577 4219	.4967 0212	.4424 6850
48	.6202 6041	.5845 0784	.5508 5649	.4893 6170	.4348 5848
49	.6141 1921	.5780 0528	.5440 5579	.4821 2975	.4273 7934
50	.6080 3882	.5715 7506	.5373 3905	.4750 0468	.4200 2883

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
50	.6080 3882	.5715 7506	.5373 3905	.4750 0468	.4200 2883
51	.6020 1864	.5652 1637	.5307 0524	.4679 8491	.4128 0475
52	.5960 5806	.5589 2843	.5241 5332	.4610 6887	.4057 0492
53	.5901 5649	.5527 1044	.5176 8229	.4542 5505	.3987 2719
54	.5843 1336	.5465 6162	.5112 9115	.4475 4192	.3918 6947
55	.5785 2808	.5404 8120	.5049 7892	.4409 2800	.3851 2970
56	.5728 0008	.5344 6843	.4987 4461	.4344 1182	.3785 0585
57	.5671 2879	.5285 2256	.4925 8727	.4279 9194	.3719 9592
58	.5615 1365	.5226 4282	.4865 0594	.4216 6694	.3655 9796
59	.5559 5411	.5168 2850	.4804 9970	.4154 3541	.3593 1003
60	.5504 4962	.5110 7887	.4745 6760	.4092 9597	.3531 3025
61	.5449 9962	.5053 9319	.4687 0874	.4032 4726	.3470 5676
62	.5396 0358	.4997 7077	.4629 2222	.3972 8794	.3410 8772
63	.5342 6097	.4942 1090	.4572 0713	.3914 1669	.3352 2135
64	.5289 7126	.4887 1288	.4515 6259	.3856 3221	.3294 5587
65	.5237 3392	.4832 7602	.4459 8775	.3799 3321	.3237 8956
66	.5185 4844	.4778 9965	.4404 8173	.3743 1843	.3182 2069
67	.5134 1429	.4725 8309	.4350 4368	.3687 8663	.3127 4761
68	.5083 3099	.4673 2568	.4296 7277	.3633 3658	.3073 6866
69	.5032 9801	.4621 2675	.4243 6817	.3579 6708	.3020 8222
70	.4983 1486	.4569 8566	.4191 2905	.3526 7692	.2968 8670
71	.4933 8105	.4519 0177	.4139 5462	.3474 6495	.2917 8054
72	.4884 9609	.4468 7443	.4088 4407	.3423 3000	.2867 6221
73	.4836 5949	.4419 0302	.4037 9661	.3372 7093	.2818 3018
74	.4788 7078	.4369 8692	.3988 1147	.3322 8663	.2769 8298
75	.4741 2949	.4321 2551	.3938 8787	.3273 7599	.2722 1914
76	.4694 3514	.4273 1818	.3890 2506	.3225 3793	.2675 3724
77	.4647 8726	.4225 6433	.3842 2228	.3177 7136	.2629 3586
78	.4601 8541	.4178 6337	.3794 7879	.3130 7523	.2584 1362
79	.4556 2912	.4132 1470	.3747 9387	.3084 4850	.2539 6916
80	.4511 1794	.4086 1775	.3701 6679	.3038 9015	.2496 0114
81	.4466 5142	.4040 7194	.3655 9683	.2993 9916	.2453 0825
82	.4422 2913	.3995 7670	.3610 8329	.2949 7454	.2410 8919
83	.4378 5063	.3951 3148	.3566 2547	.2906 1531	.2369 4269
84	.4335 1547	.3907 3570	.3522 2268	.2863 2050	.2328 6751
85	.4292 2324	.3863 8882	.3478 7426	.2820 8917	.2288 6242
86	.4249 7350	.3820 9031	.3435 7951	.2779 2036	.2249 2621
87	.4207 6585	.3778 3961	.3393 3779	.2738 1316	.2210 5770
88	.4165 9985	.3736 3621	.3351 4843	.2697 6666	.2172 5572
89	.4124 7510	.3694 7956	.3310 1080	.2657 7996	.2135 1914
90	.4083 9119	.3653 6916	.3269 2425	.2618 5218	.2098 4682
91	.4043 4771	.3613 0448	.3228 8814	.2579 8245	.2062 3766
92	.4003 4427	.3572 8503	.3189 0187	.2541 6990	.2026 9057
93	.3963 8046	.3533 1029	.3149 6481	.2504 1369	.1992 0450
94	.3924 5590	.3493 7976	.3110 7636	.2467 1300	.1957 7837
95	.3885 7020	.3454 9297	.3072 3591	.2430 6699	.1924 1118
96	.3847 2297	.3416 4941	.3034 4287	.2394 7487	.1891 0190
97	.3809 1383	.3378 4861	.2996 9666	.2359 3583	.1858 4953
98	.3771 4241	.3340 9010	.2959 9670	.2324 4909	.1826 5310
99	.3734 0832	.3303 7340	.2923 4242	.2290 1389	.1795 1165
100	.3697 1121	.3266 9805	.2887 3326	.2256 2944	.1764 2422

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	.9803 9216	.9779 9511	.9756 0976	.9732 3601	.9708 7379
2	.9611 6878	.9564 7444	.9518 1440	.9471 8833	.9425 9591
3	.9423 2233	.9354 2732	.9285 9941	.9218 3779	.9151 4166
4	.9238 4543	.9148 4335	.9059 5064	.8971 6573	.8884 8705
5	.9057 3081	.8947 1232	.8838 5429	.8731 5400	.8626 0878
6	.8879 7138	.8750 2427	.8622 9687	.8497 8491	.8374 8426
7	.8705 6018	.8557 6946	.8412 6524	.8270 4128	.8130 9151
8	.8534 9037	.8369 3835	.8207 4657	.8049 0635	.7894 0923
9	.8367 5527	.8185 2161	.8007 2836	.7833 6385	.7664 1673
10	.8203 4830	.8005 1013	.7811 9840	.7623 9791	.7440 9391
11	.8042 6304	.7828 9499	.7621 4478	.7419 9310	.7224 2128
12	.7884 9318	.7656 6748	.7435 5589	.7221 3440	.7013 7988
13	.7730 3253	.7488 1905	.7254 2038	.7028 0720	.6809 5134
14	.7578 7502	.7323 4137	.7077 2720	.6839 9728	.6611 1781
15	.7430 1473	.7162 2628	.6904 6556	.6656 9078	.6418 6195
16	.7284 4581	.7004 6580	.6736 2493	.6478 7424	.6231 6694
17	.7141 6256	.6850 5212	.6571 9506	.6305 3454	.6050 1645
18	.7001 5937	.6699 7763	.6411 6591	.6136 5892	.5873 9461
19	.6864 3076	.6552 3484	.6255 2772	.5972 3496	.5702 8603
20	.6729 7133	.6408 1647	.6102 7094	.5812 5057	.5536 7575
21	.6597 7582	.6267 1538	.5953 8629	.5656 9398	.5375 4928
22	.6468 3904	.6129 2457	.5808 6467	.5505 5375	.5218 9250
23	.6341 5592	.5994 3724	.5666 9724	.5358 1874	.5066 9175
24	.6217 2149	.5862 4668	.5528 7535	.5214 7809	.4919 3374
25	.6095 3087	.5733 4639	.5393 9059	.5075 2126	.4776 0557
26	.5975 7928	.5607 2997	.5262 3472	.4939 3796	.4636 9473
27	.5858 6204	.5483 9117	.5133 9973	.4807 1821	.4501 8906
28	.5743 7455	.5363 2388	.5008 7778	.4678 5227	.4370 7675
29	.5631 1231	.5245 2213	.4886 6125	.4553 3068	.4243 4636
30	.5520 7089	.5129 8008	.4767 4269	.4431 4421	.4119 8676
31	.5412 4597	.5016 9201	.4651 1481	.4312 8391	.3999 8715
32	.5306 3330	.4906 5233	.4537 7055	.4197 4103	.3883 3703
33	.5202 2873	.4798 5558	.4427 0298	.4085 0708	.3770 2625
34	.5100 2817	.4692 9641	.4319 0534	.3975 7380	.3660 4490
35	.5000 2761	.4589 6960	.4213 7107	.3869 3314	.3553 8340
36	.4902 2315	.4488 7002	.4110 9372	.3765 7727	.3450 3243
37	.4806 1093	.4389 9268	.4010 6705	.3664 9856	.3349 8294
38	.4711 8719	.4293 3270	.3912 8492	.3566 8959	.3252 2615
39	.4619 4822	.4198 8528	.3817 4139	.3471 4316	.3157 5355
40	.4528 9042	.4106 4575	.3724 3062	.3378 5222	.3065 5684
41	.4440 1021	.4016 0954	.3633 4695	.3288 0995	.2976 2800
42	.4353 0413	.3927 7216	.3544 8483	.3200 0968	.2889 5922
43	.4267 6875	.3841 2925	.3458 3886	.3114 4495	.2805 4294
44	.4184 0074	.3756 7653	.3374 0376	.3031 0944	.2723 7178
45	.4101 9680	.3674 0981	.3291 7440	.2949 9702	.2644 3862
46	.4021 5373	.3593 2500	.3211 4576	.2871 0172	.2567 3653
47	.3942 6836	.3514 1809	.3133 1294	.2794 1773	.2492 5876
48	.3865 3761	.3436 8518	.3056 7116	.2719 3940	.2419 9880
49	.3789 5844	.3361 2242	.2982 1576	.2646 0122	.2349 5029
50	.3715 2788	.3287 2608	.2909 4221	.2575 7783	.2281 0708

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	0275 (2¾%)	.03 (3%)
50	.3715 2788	.3287 2608	.2909 4221	.2575 7783	.2281 0708
51	.3642 4302	.3214 9250	.2838 4606	.2506 8402	.2214 6318
52	.3571 0100	.3144 1810	.2769 2298	.2439 7471	.2150 1280
53	.3500 9902	.3074 9936	.2701 6876	.2374 4497	.2087 5029
54	.3432 3433	.3007 3287	.2635 7928	.2310 9000	.2026 7019
55	.3365 0425	.2941 1528	.2571 5952	.2249 0511	.1967 6717
56	.3299 0513	.2876 4330	.2508 7855	.2188 8575	.1910 3609
57	.3234 3738	.2813 1374	.2447 5956	.2130 2749	.1854 7193
58	.3170 9547	.2751 2347	.2387 8982	.2073 2603	.1800 6984
59	.3108 7791	.2690 6940	.2329 6568	.2017 7716	.1748 2508
60	.3047 8227	.2631 4856	.2272 8359	.1963 7679	.1697 3309
61	.2988 0614	.2573 5801	.2217 4069	.1911 2097	.1647 8941
62	.2929 4720	.2516 9487	.2163 3179	.1860 0581	.1599 8972
63	.2872 0314	.2461 5635	.2110 5541	.1810 2755	.1553 2982
64	.2815 7170	.2407 3971	.2059 0771	.1761 8253	.1508 0565
65	.2760 5069	.2354 4226	.2008 8557	.1714 6718	.1464 1325
66	.2706 3793	.2302 6138	.1959 8593	.1668 7804	.1421 4879
67	.2653 3130	.2251 9450	.1912 0578	.1624 1172	.1380 0853
68	.2601 2873	.2202 3912	.1865 4223	.1580 6493	.1339 8887
69	.2550 2817	.2153 9278	.1819 9241	.1538 3148	.1300 8628
70	.2500 2761	.2106 5309	.1775 5358	.1497 1726	.1262 9736
71	.2451 2511	.2060 1769	.1732 2300	.1457 1023	.1226 1880
72	.2403 1874	.2014 8429	.1689 9805	.1418 1044	.1190 4737
73	.2356 0661	.1970 5065	.1648 7615	.1389 1503	.1155 7998
74	.2309 8687	.1927 1458	.1608 5478	.1343 2119	.1122 1357
75	.2264 5771	.1884 7391	.1569 3149	.1307 2622	.1089 4521
76	.2220 1737	.1843 2657	.1531 0389	.1272 2747	.1057 7205
77	.2176 6408	.1802 7048	.1493 6965	.1238 2235	.1026 9131
78	.2133 9616	.1763 0365	.1457 2649	.1205 0837	.0997 0030
79	.2092 1192	.1724 2411	.1421 7218	.1172 8309	.0967 9641
80	.2051 0973	.1686 2993	.1387 0457	.1141 4412	.0939 7710
81	.2010 8797	.1649 1925	.1353 2153	.1110 8917	.0912 3990
82	.1971 4507	.1612 9022	.1320 2101	.1081 1598	.0885 8243
83	.1932 7948	.1577 4105	.1288 0098	.1052 2237	.0860 0236
84	.1894 8968	.1542 6997	.1256 5949	.1024 0620	.0834 9743
85	.1857 7420	.1508 7528	.1225 9463	.0996 6540	.0810 6547
86	.1821 3157	.1475 5528	.1196 0452	.0969 9795	.0787 0434
87	.1785 6036	.1443 0835	.1166 8733	.0944 0190	.0764 1198
88	.1750 5918	.1411 3286	.1138 4130	.0918 7533	.0741 8639
89	.1716 2665	.1380 2724	.1110 6468	.0894 1638	.0720 2562
90	.1682 6142	.1349 8997	.1083 5579	.0870 2324	.0699 2779
91	.1649 6217	.1320 1953	.1057 1296	.0846 9415	.0678 9105
92	.1617 2762	.1291 1445	.1031 3460	.0824 2740	.0659 1364
93	.1585 5649	.1262 7331	.1006 1912	.0802 2131	.0639 9383
94	.1554 4754	.1234 9468	.0981 6500	.0780 7427	.0621 2993
95	.1523 9955	.1207 7719	.0957 7073	.0759 8469	.0603 2032
96	.1494 1132	.1181 1950	.0934 3486	.0739 5104	.0585 6342
97	.1464 8169	.1155 2029	.0911 5596	.0719 7181	.0568 5769
98	.1436 0950	.1129 7828	.0889 3264	.0700 4556	.0552 0164
99	.1407 9363	.1104 9221	.0867 6355	.0681 7086	.0535 9383
100	.1380 3297	.1080 6084	.0846 4737	.0663 4634	.0520 3284

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.035 ($3\frac{1}{2}$%)	.04 (4%)	.045 ($4\frac{1}{2}$%)	.05 (5%)	.055 ($5\frac{1}{2}$%)
1	.9661 8357	.9615 3846	.9569 3780	.9523 8095	.9478 6730
2	.9335 1070	.9245 5621	.9157 2995	.9070 2948	.8984 5242
3	.9019 4271	.8889 9636	.8762 9660	.8638 3760	.8516 1366
4	.8714 4223	.8548 0419	.8385 6134	.8227 0247	.8072 1674
5	.8419 7317	.8219 2711	.8024 5105	.7835 2617	.7651 3435
6	.8135 0064	.7903 1453	.7678 9574	.7462 1540	.7252 4583
7	.7859 9096	.7599 1781	.7348 2846	.7106 8133	.6874 3681
8	.7594 1156	.7306 9021	.7031 8513	.6768 3936	.6515 9887
9	.7337 3097	.7025 8674	.6729 0443	.6446 0892	.6176 2926
10	.7089 1881	.6755 6417	.6439 2768	.6139 1325	.5854 3058
11	.6849 4571	.6495 8093	.6161 9874	.5846 7929	.5549 1050
12	.6617 8330	.6245 9705	.5896 6386	.5568 3742	.5259 8152
13	.6394 0415	.6005 7409	.5642 7164	.5303 2135	.4985 6068
14	.6177 8179	.5774 7508	.5399 7286	.5050 6795	.4725 6937
15	.5968 9062	.5552 6450	.5167 2044	.4810 1710	.4479 3305
16	.5767 0591	.5339 0818	.4944 6932	.4581 1152	.4245 8109
17	.5572 0378	.5133 7325	.4731 7639	.4362 9669	.4024 4653
18	.5383 6114	.4936 2812	.4528 0037	.4155 2065	.3814 6590
19	.5201 5569	.4746 4242	.4333 0179	.3957 3396	.3615 7906
20	.5025 6588	.4563 8695	.4146 4286	.3768 8948	.3427 2896
21	.4855 7090	.4388 3360	.3967 8743	.3589 4236	.3248 6158
22	.4691 5063	.4219 5539	.3797 0089	.3418 4987	.3079 2567
23	.4532 8563	.4057 2633	.3633 5013	.3255 7131	.2918 7267
24	.4379 5713	.3901 2147	.3477 0347	.3100 6791	.2766 5656
25	.4231 4699	.3751 1680	.3327 3060	.2953 0277	.2622 3370
26	.4088 3767	.3606 8923	.3184 0248	.2812 4073	.2485 6275
27	.3950 1224	.3468 1657	.3046 9137	.2678 4832	.2356 0450
28	.3816 5434	.3334 7747	.2915 7069	.2550 9364	.2233 2181
29	.3687 4815	.3206 5141	.2790 1502	.2429 4632	.2116 7944
30	.3562 7841	.3083 1867	2670 0002	.2313 7745	.2006 4402
31	.3442 3035	.2964 6026	.2555 0241	.2203 5947	.1901 8390
32	.3325 8971	.2850 5794	.2444 9991	.2098 6617	.1802 6910
33	.3213 4271	.2740 9417	.2339 7121	.1998 7254	.1708 7119
34	.3104 7605	.2635 5209	.2238 9589	.1903 5480	.1619 6321
35	.2999 7686	.2534 1547	.2142 5444	.1812 9029	.1535 1963
36	.2898 3272	.2436 6872	.2050 2817	.1726 5741	.1455 1624
37	.2800 3161	.2342 9685	.1961 9921	.1644 3563	.1379 3008
38	.2705 6194	.2252 8543	.1877 5044	.1566 0536	.1307 3941
39	.2614 1250	.2166 2061	.1796 6549	.1491 4797	.1239 2362
40	.2525 7247	.2082 8904	.1719 2870	.1420 4568	.1174 6314
41	.2440 3137	.2002 7793	.1645 2507	.1352 8160	.1113 3947
42	.2357 7910	.1925 7493	.1574 4026	.1288 3962	.1055 3504
43	.2278 0590	.1851 6820	.1506 6054	.1227 0440	.1000 3322
44	.2201 0231	.1780 4635	.1441 7276	.1168 6133	.0948 1822
45	.2126 5924	.1711 9841	.1379 6437	.1112 9651	.0898 7509
46	.2054 6787	.1646 1386	.1320 2332	.1059 9668	.0851 8965
47	.1985 1968	.1582 8256	.1263 3810	.1009 4921	.0807 4849
48	.1918 0645	.1521 9476	.1208 9771	.0961 4211	.0765 3885
49	.1853 2024	.1463 4112	.1156 9158	.0915 6391	.0725 4867
50	.1790 5337	.1407 1262	.1107 0965	.0872 0373	.0687 6652

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	.06 (6%)	.065 (6½%)	.07 (7%)	.075 (7½%)	.08 (8%)
1	.9433 9623	.9389 6714	.9345 7944	.9302 3256	.9259 2593
2	.8899 9644	.8816 5928	.8734 3873	.8653 3261	.8573 3882
3	.8396 1928	.8278 4909	.8162 9788	.8049 6057	.7938 3224
4	.7920 9366	.7773 2309	.7628 9521	.7488 0053	.7350 2985
5	.7472 5817	.7298 8084	.7129 8618	.6965 5863	.6805 8320
6	.7049 6054	.6853 3412	.6663 4222	.6479 6152	.6301 6963
7	.6650 5711	.6435 0621	.6227 4974	.6027 5490	.5834 9040
8	.6274 1237	.6042 3119	.5820 0910	.5607 0223	.5402 6888
9	.5918 9846	.5673 5323	.5439 3374	.5215 8347	.5002 4897
10	.5583 9478	.5327 2604	.5083 4929	.4851 9393	.4631 9349
11	.5267 8753	.5002 1224	.4750 9280	.4513 4319	.4288 8286
12	.4969 6936	.4696 8285	.4440 1196	.4198 5413	.3971 1376
13	.4688 3902	.4410 1676	.4149 6445	.3905 6198	.3676 9792
14	.4423 0096	.4141 0025	.3878 1724	.3633 1347	.3404 6104
15	.4172 6506	.3888 2652	.3624 4602	.3379 6602	.3152 4170
16	.3936 4628	.3650 9533	.3387 3460	.3143 8699	.2918 9047
17	.3713 6442	.3428 1251	.3165 7439	.2924 5302	.2702 6895
18	.3503 4379	.3218 8969	.2958 6392	.2720 4932	.2502 4903
19	.3305 1301	.3022 4384	.2765 0833	.2530 6913	.2317 1206
20	.3118 0473	.2837 9703	.2584 1900	.2354 1315	.2145 4821
21	.2941 5540	.2664 7608	.2415 1309	.2189 8897	.1986 5575
22	.2775 0510	.2502 1228	.2257 1317	.2037 1067	.1839 4051
23	.2617 9726	.2349 4111	.2109 4688	.1894 9830	.1703 1528
24	.2469 7855	.2206 0198	.1971 4662	.1762 7749	.1576 9934
25	.2329 9863	.2071 3801	.1842 4918	.1639 7906	.1460 1790
26	.2198 1003	.1944 9579	.1721 9549	.1525 3866	.1352 0176
27	.2073 6795	.1826 2515	.1609 3037	.1418 9643	.1251 8682
28	.1956 3014	.1714 7902	.1504 0221	.1319 9668	.1159 1372
29	.1845 5674	.1610 1316	.1405 6282	.1227 8761	.1073 2752
30	.1741 1013	.1511 8607	.1313 6712	.1142 2103	.0993 7733
31	.1642 5484	.1419 5875	.1227 7301	.1062 5212	.0920 1605
32	.1549 5740	.1332 9460	.1147 4113	.0988 3918	.0852 0005
33	.1461 8622	.1251 5925	.1072 3470	.0919 4343	.0788 8893
34	.1379 1153	.1175 2042	.1002 1934	.0855 2877	.0730 4531
35	.1301 0522	.1103 4781	.0936 6294	.0795 6164	.0676 3454
36	.1227 4077	.1036 1297	.0875 3546	.0740 1083	.0626 2458
37	.1157 9318	.0972 8917	.0818 0884	.0688 4729	.0579 8572
38	.1092 3885	.0913 5134	.0764 5686	.0640 4399	.0536 9048
39	.1030 5552	.0857 7590	.0714 5501	.0595 7580	.0497 1341
40	.0972 2219	.0805 4075	.0667 8038	.0554 1935	.0460 3093
41	.0917 1905	.0756 2512	.0624 1157	.0515 5288	.0426 2123
42	.0865 2740	.0710 0950	.0583 2857	.0479 5617	.0394 6411
43	.0816 2962	.0666 7559	.0545 1268	.0446 1039	.0365 4084
44	.0770 0908	.0626 0619	.0509 4643	.0414 9804	.0338 3411
45	.0726 5007	.0587 8515	.0476 1349	.0386 0283	.0313 2788
46	.0685 3781	.0551 9733	.0444 9859	.0359 0961	.0290 0730
47	.0646 5831	.0518 2848	.0415 8747	.0334 0428	.0268 5861
48	.0609 9840	.0486 6524	.0388 6679	.0310 7375	.0248 6908
49	.0575 4566	.0456 9506	.0363 2410	.0289 0582	.0230 2693
50	.0542 8836	.0429 0616	.0339 4776	.0268 8913	.0213 2123

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	8%	8,5%	9%	9,5%	10%	10,5%
	0.0800	0.0850	0.0900	0.0950	0.1000	0.1050
1	0.92592593	0.92165899	0.91743119	0.91324201	0.90909091	0.90497738
2	0.85733882	0.84945529	0.84168000	0.83401097	0.82644628	0.81898405
3	0.79383224	0.78290810	0.77218348	0.76165386	0.75131481	0.74116204
4	0.73502986	0.72157429	0.70842522	0.69557430	0.68301346	0.67073488
5	0.68058320	0.66504543	0.64993139	0.63522767	0.62092133	0.60699989
6	0.63016963	0.61294510	0.59626733	0.58011660	0.56447394	0.54932117
7	0.58349040	0.56492636	0.54703425	0.52978685	0.51315813	0.49712323
8	0.54026889	0.52066946	0.50186629	0.48382361	0.46650739	0.44988528
9	0.50024897	0.47987968	0.46042779	0.44184804	0.42409763	0.40713600
10	0.46319350	0.44228542	0.42241081	0.40351419	0.38554330	0.36844887
11	0.42888287	0.40763634	0.38753286	0.36850611	0.35049391	0.33343789
12	0.39711377	0.37570169	0.35553473	0.33653527	0.31863083	0.30175375
13	0.36769793	0.34626884	0.32617865	0.30733814	0.28966439	0.27308032
14	0.34046105	0.31914179	0.29924647	0.28067410	0.26333126	0.24713151
15	0.31524171	0.29413990	0.27453805	0.25632338	0.23939206	0.22364842
16	0.29189048	0.27109668	0.25186977	0.23408528	0.21762914	0.20239676
17	0.27026896	0.24985869	0.23107318	0.21377651	0.19784468	0.18316449
18	0.25024904	0.23028451	0.21199375	0.19522969	0.17985880	0.16575972
19	0.23171207	0.21224379	0.19448968	0.17829196	0.16350800	0.15000880
20	0.21454821	0.19561640	0.17843090	0.16282371	0.14864363	0.13575457
21	0.19865575	0.18029161	0.16369807	0.14869745	0.13513058	0.12285481
22	0.18394051	0.16616738	0.15018172	0.13579676	0.12284598	0.11118083
23	0.17031529	0.15314966	0.13778139	0.12401530	0.11167816	0.10061613
24	0.15769934	0.14115176	0.12640495	0.11325598	0.10152560	0.91055325D-01
25	0.14601791	0.13009379	0.11596784	0.10343012	0.92296003D-01	0.82403009D-01
26	0.13520177	0.11990211	0.10639251	0.94456734D-01	0.83905457D-01	0.74572859D-01
27	0.12518682	0.11050886	0.97607812D-01	0.86261857D-01	0.76277689D-01	0.67486751D-01
28	0.11591373	0.10185148	0.89548451D-01	0.78777952D-01	0.69343353D-01	0.61073983D-01
29	0.10732752	0.93872334D-01	0.82154543D-01	0.71943335D-01	0.63039412D-01	0.55270573D-01
* 30	0.99377337D-01	0.86518280D-01	0.75371140D-01	0.65701676D-01	0.57308557D-01	0.50018618D-01
31	0.92016053D-01	0.79740350D-01	0.69147835D-01	0.60001531D-01	0.52098688D-01	0.45265718D-01
32	0.85200050D-01	0.73493411D-01	0.63438381D-01	0.54795919D-01	0.47362444D-01	0.40964450D-01
33	0.78888935D-01	0.67735862D-01	0.58200350D-01	0.50041935D-01	0.43056767D-01	0.37071901D-01
34	0.73045310D-01	0.62429366D-01	0.53394816D-01	0.45700397D-01	0.39142516D-01	0.33549232D-01
35	0.67634547D-01	0.57538587D-01	0.48986070D-01	0.41735523D-01	0.35584105D-01	0.30361296D-01
36	0.62624580D-01	0.53030956D-01	0.44941349D-01	0.38114633D-01	0.32349187D-01	0.27476286D-01
37	0.57985723D-01	0.48876457D-01	0.41230595D-01	0.34807884D-01	0.29408352D-01	0.24865417D-01
38	0.53690484D-01	0.45047426D-01	0.37826234D-01	0.31788022D-01	0.26734865D-01	0.22502640D-01
39	0.49713411D-01	0.41518365D-01	0.34702967D-01	0.29030157D-01	0.24304423D-01	0.20364380D-01
40	0.46030936D-01	0.38265774D-01	0.31837585D-01	0.26511559D-01	0.22094930D-01	0.18429303D-01
41	0.42621237D-01	0.35267995D-01	0.29208793D-01	0.24211469D-01	0.20086300D-01	0.16678103D-01
42	0.39464109D-01	0.32505064D-01	0.26797058D-01	0.22110931D-01	0.18260273D-01	0.15093305D-01
43	0.36540842D-01	0.29958585D-01	0.24584457D-01	0.20192631D-01	0.16600248D-01	0.13659100D-01
44	0.33834113D-01	0.27611599D-01	0.22554548D-01	0.18440759D-01	0.15091135D-01	0.12361177D-01
45	0.31327882D-01	0.25448478D-01	0.20692246D-01	0.16840876D-01	0.13719213D-01	0.11186585D-01
46	0.29007298D-01	0.23454819D-01	0.18983712D-01	0.15379795D-01	0.12472012D-01	0.10123606D-01
47	0.26858610D-01	0.21617344D-01	0.17416249D-01	0.14045475D-01	0.11338193D-01	0.91616348D-02
48	0.24869083D-01	0.19923820D-01	0.15978210D-01	0.12826918D-01	0.10307448D-01	0.82910722D-02
49	0.23026929D-01	0.18362968D-01	0.14658909D-01	0.11714080D-01	** 0.93704073D-02	0.75032328D-02
50	0.21321230D-01	0.16924394D-01	0.13448540D-01	0.10697790D-01	0.85185521D-02	0.67902560D-02

Σημείωση: Οἱ ἀριθμοί 01, 02 καί 03, πού ὑπάρχουν στό τέλος ὁρισμένων ἀριθμῶν τοῦ Πίνακα ΙΙΙ, δηλώνουν ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί πρέπει νά διαιρεθοῦν μέ: 10, 100 ἤ 1000, ἤ νά πολλαπλασιασθοῦν ἐπί: 10^{-1}, 10^{-2} ἤ 10^{-3}.

* $(0{,}993773370 - 01) = (0{,}993773370)(10^{-1}) = 0{,}0993773370$

** $(0{,}93704073 - 02) = (0{,}93704073)(10^{-2}) = 0{,}0093704073$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	11%	11,5%	12%	12,5%	13%	13,5%
	0.1100	0.1150	0.1200	0.1250	0.1300	0.1350
1	0.90090090	0.89686099	0.89285714	0.88888889	0.88495575	0.88105727
2	0.81162244	0.80435963	0.79719388	0.79012346	0.78314669	0.77626191
3	0.73119139	0.72139878	0.71178025	0.70233197	0.69305017	0.68393120
4	0.65873098	0.64699442	0.63551808	0.62429508	0.61331873	0.60258256
5	0.59345133	0.58026405	0.56742686	0.55492896	0.54275994	0.53090975
6	0.53464084	0.52041619	0.50663113	0.49327019	0.48031853	0.46776189
7	0.48165842	0.46674098	0.45234922	0.43846239	0.42506065	0.41212502
8	0.43392650	0.41860178	0.40388324	0.38974435	0.37615987	0.36310574
9	0.39092478	0.37542760	0.36061003	0.34643942	0.33288484	0.31991695
10	0.35218449	0.33670637	0.32197324	0.30794616	0.29458836	0.28186516
11	0.31728332	0.30197881	0.28747611	0.27372992	0.26069766	0.24833935
12	0.28584083	0.27083301	0.25667510	0.24331548	0.23070589	0.21880119
13	0.25751426	0.24289956	0.22917420	0.21628043	0.20416451	0.19277638
14	0.23199483	0.21784714	0.20461982	0.19224927	0.18067656	0.16984703
15	0.20900435	0.19537860	0.18269627	0.17088824	0.15989076	0.14964496
16	0.18829221	0.17522745	0.16312167	0.15190066	0.14149625	0.13184578
17	0.16963262	0.15715466	0.14564435	0.13502281	0.12521792	0.11616368
18	0.15282218	0.14094589	0.13003960	0.12002027	0.11081232	0.10234686
19	0.13767764	0.12640887	0.11610678	0.10668469	0.980639980-01	0.901734430-01
20	0.12403391	0.11337118	0.10366677	0.948308350-01	0.867822990-01	0.794479680-01
21	0.11174226	0.10167819	0.925596160-01	0.842940750-01	0.767984950-01	0.699982100-01
22	0.10066871	0.911912020-01	0.826425150-01	0.749280670-01	0.679632700-01	0.616724320-01
23	0.906925280-01	0.817858310-01	0.737879600-01	0.666027270-01	0.601444870-01	0.543369440-01
24	0.817049810-01	0.733505220-01	0.658821070-01	0.592024240-01	0.532252100-01	0.478739600-01
25	0.736080910-01	0.657852210-01	0.588233100-01	0.526243770-01	0.471019560-01	0.421797000-01
26	0.663135960-01	0.590001990-01	0.525208130-01	0.467772240-01	0.416831470-01	0.371627320-01
27	0.597419780-01	0.529149770-01	0.468935830-01	0.415797550-01	0.368877410-01	0.327424950-01
28	0.538216020-01	0.474573780-01	0.418692710-01	0.369597820-01	0.326440180-01	0.288480130-01
29	0.484879300-01	0.425626710-01	0.373832770-01	0.328531400-01	0.288885120-01	0.254167520-01
30	0.436828200-01	0.381727990-01	0.333779260-01	0.292027910-01	0.255650550-01	0.223936140-01
31	0.393538920-01	0.342356940-01	0.298017200-01	0.259580360-01	0.226239420-01	0.197300560-01
32	0.354539570-01	0.307046590-01	0.266086790-01	0.230738100-01	0.200211880-01	0.173833100-01
33	0.319405020-01	0.275378110-01	0.237577490-01	0.205100540-01	0.177178660-01	0.153156910-01
34	0.287752270-01	0.246975880-01	0.212122760-01	0.182311590-01	0.156795270-01	0.134940010-01
35	0.259236280-01	0.221503030-01	0.189395320-01	0.162054750-01	0.138756880-01	0.118889880-01
36	0.233546200-01	0.198657430-01	0.169102960-01	0.144048660-01	0.122793700-01	0.104748790-01
37	0.210401980-01	0.178168100-01	0.150984790-01	0.128043260-01	0.108666990-01	0.922896860-02
38	0.189551330-01	0.159792020-01	0.134807850-01	0.113816230-01	0.961654770-02	0.813124980-02
39	0.170766970-01	0.143311230-01	0.120364150-01	0.101169980-01	0.851021920-02	0.716409680-02
40	0.153844110-01	0.128530250-01	0.107467990-01	0.899288720-02	0.753116750-02	0.631197960-02
41	0.138598300-01	0.115273770-01	0.959535650-02	0.799367750-02	0.666475000-02	0.556121550-02
42	0.124863340-01	0.103384540-01	0.856728260-02	0.710549110-02	0.589800890-02	0.489974940-02
43	0.112489490-01	0.927215630-02	0.764935950-02	0.631599210-02	0.521947690-02	0.431695980-02
44	0.101341880-01	0.831583530-02	0.682978520-02	0.561421530-02	0.461900610-02	0.380348880-02
45	0.912989950-02	0.745814830-02	0.609802260-02	0.499041360-02	0.408761600-02	0.335109150-02
46	0.822513470-02	0.668892220-02	0.544466300-02	0.443592320-02	0.361735930-02	0.295250350-02
47	0.741003130-02	0.599903340-02	0.486130630-02	0.394304280-02	0.320120300-02	0.260132470-02
48	0.667570390-02	0.538029900-02	0.434045200-02	0.350492700-02	0.283292300-02	0.229191600-02
49	0.601414770-02	0.482538030-02	0.387540360-02	0.311549070-02	0.250701150-02	0.201930930-02
50	0.541815110-02	0.432769540-02	0.346018180-02	0.276932500-02	0.221859420-02	0.177912710-02

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
1	0.87719298	0.87336245	0.86956522	0.86580087	0.86206897	0.85836910
2	0.76946753	0.76276197	0.75614367	0.74961114	0.74316291	0.73679751
3	0.67497152	0.66616766	0.65751624	0.64901398	0.64065768	0.63244422
4	0.59208028	0.58180582	0.57175325	0.56191687	0.55229110	0.54287058
5	0.51936867	0.50812735	0.49717674	0.48650811	0.47611302	0.46598333
6	0.45558656	0.44377935	0.43232760	0.42121915	0.41044226	0.39998569
7	0.39963733	0.38758022	0.37593705	0.36469190	0.35382954	0.34333536
8	0.35055906	0.33849801	0.32690178	0.31575057	0.30502546	0.29470846
9	0.30750795	0.29563145	0.28426242	0.27337711	0.26295299	0.25296864
10	0.26974382	0.25819341	0.24718471	0.23669014	0.22668361	0.21714046
11	0.23661738	0.22549642	0.21494323	0.20492653	0.19541691	0.18638666
12	0.20755911	0.19694011	0.18690716	0.17742557	0.16846285	0.15998855
13	0.18206939	0.17200010	0.16252796	0.15361521	0.14522660	0.13732923
14	0.15971000	0.15021842	0.14132866	0.13300018	0.12519534	0.11787917
15	0.14009649	0.13119513	0.12289449	0.11515167	0.10792702	0.10118384
16	0.12289166	0.11458090	0.10686477	0.996984190-01	0.930405340-01	0.868530780-01
17	0.10779970	0.10007066	0.929258910-01	0.863189780-01	0.802073570-01	0.745519990-01
18	0.945611400-01	0.873979530-01	0.808051230-01	0.747350460-01	0.691442740-01	0.639931320-01
19	0.829483680-01	0.763300900-01	0.702653250-01	0.647056680-01	0.596071330-01	0.549297270-01
20	0.727617270-01	0.666638350-01	0.611002830-01	0.560222230-01	0.513854590-01	0.471499810-01
21	0.638260760-01	0.582216900-01	0.531306810-01	0.485040900-01	0.442978100-01	0.404720870-01
22	0.559877860-01	0.508486370-01	0.462005920-01	0.419948830-01	0.381877670-01	0.347399890-01
23	0.491120930-01	0.444092900-01	0.401744280-01	0.363592060-01	0.329204890-01	0.298197330-01
24	0.430807840-01	0.387854070-01	0.349342850-01	0.314798320-01	0.283797320-01	0.255963370-01
25	0.377901610-01	0.338737180-01	0.303776390-01	0.272552660-01	0.244652860-01	0.219711050-01

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (ἀρχική) ἀξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ τελική ἀξία μετά n χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
26	0.33149264D-01	0.29584033D-01	0.26415339D-01	0.23597633D-01	0.21090764D-01	0.18859318D-01
27	0.29078302D-01	0.25837583D-01	0.22969860D-01	0.20430851D-01	0.18181693D-01	0.16188256D-01
28	0.25507283D-01	0.22565575D-01	0.19973791D-01	0.17689049D-01	0.15673874D-01	0.13895498D-01
29	0.22374809D-01	0.19707926D-01	0.17368514D-01	0.15315194D-01	0.13511960D-01	0.11927466D-01
30	0.19627026D-01	0.17212162D-01	0.15103056D-01	0.13259908D-01	0.11648241D-01	0.10238169D-01
31	0.17216689D-01	0.15032456D-01	0.13133092D-01	0.11480440D-01	0.10041587D-01	0.87841276D-02
32	0.15102359D-01	0.13128783D-01	0.11420080D-01	0.99397748D-02	0.86565409D-02	0.75434572D-02
33	0.13247684D-01	0.11466186D-01	0.99305044D-02	0.86058657D-02	0.74625353D-02	0.64750706D-02
34	0.11620775D-01	0.10014136D-01	0.86352213D-02	0.74509660D-02	0.64332201D-02	0.55580005D-02
35	0.10193662D-01	0.87459705D-02	0.75098881D-02	0.64510528D-02	0.55458794D-02	0.47708159D-02
36	0.89418091D-02	0.76384022D-02	0.65294679D-02	0.55853271D-02	0.47809306D-02	0.40951210D-02
37	0.78436922D-02	0.66710937D-02	0.56777982D-02	0.48357811D-02	0.41214919D-02	0.35151253D-02
38	0.68804318D-02	0.58262827D-02	0.49372159D-02	0.41868235D-02	0.35530102D-02	0.30172750D-02
39	0.60354665D-02	0.50884565D-02	0.42932312D-02	0.36249554D-02	0.30629399D-02	0.25899356D-02
40	0.52942689D-02	0.44440668D-02	0.37332445D-02	0.31384895D-02	0.26404654D-02	0.22231207D-02
41	0.46440955D-02	0.38812811D-02	0.32462996D-02	0.27173070D-02	0.22762633D-02	0.19082581D-02
42	0.40737680D-02	0.33897652D-02	0.28228692D-02	0.23526467D-02	0.19622960D-02	0.16379498D-02
43	0.35734807D-02	0.29604936D-02	0.24546684D-02	0.20369236D-02	0.16916344D-02	0.14059998D-02
44	0.31346322D-02	0.25855839D-02	0.21344947D-02	0.17635702D-02	0.14583056D-02	0.12068668D-02
45	0.27496774D-02	0.22581519D-02	0.18560824D-02	0.15269006D-02	0.12571600D-02	0.10359372D-02
46	0.24119977D-02	0.19721851D-02	0.16139847D-02	0.13219919D-02	0.10837586D-02	0.88921647D-03
47	0.21157875D-02	0.17224324D-02	0.14034649D-02	0.11445817D-02	0.93427466D-03	0.76327594D-03
48	0.18559539D-02	0.15043078D-02	0.12204043D-02	0.99097984D-03	0.80540919D-03	0.65517248D-03
49	0.16280298D-02	0.13138059D-02	0.10612211D-02	0.85799121D-03	0.69431827D-03	0.56237982D-03
50	0.14280963D-02	0.11474288D-02	0.92280098D-03	0.74284953D-03	0.59855023D-03	0.48272946D-03

n	17%	17,5%	18%	18,5%		20%
	0.1700	0.1750	0.1800	0.1850	0.1900	0.2000
1	0.85470086	0.85106383	0.84745763	0.84388186	0.84033614	0.83333334
2	0.73051356	0.72430965	0.71818443	0.71213659	0.70616482	0.69444445
3	0.62437056	0.61643374	0.60863088	0.60095915	0.59341582	0.57870371
4	0.53365006	0.52462447	0.51578888	0.50713853	0.49866876	0.48225309
5	0.45611116	0.44648891	0.43710922	0.42796500	0.41904938	0.40187758
6	0.38983860	0.37999056	0.37043155	0.36115190	0.35214234	0.33489798
7	0.33319539	0.32339622	0.31392504	0.30476954	0.29591793	0.27908165
8	0.28478238	0.27523083	0.26603817	0.25718949	0.24867053	0.23256805
9	0.24340375	0.23423900	0.22545608	0.21703754	0.20896683	0.19380671
10	0.20803739	0.19935234	0.19106447	0.18315404	0.17560238	0.16150559
11	0.17780974	0.16966157	0.16191905	0.15456038	0.14756503	0.13458799
12	0.15197413	0.14439283	0.13721953	0.13043070	0.12400422	0.11215666
13	0.12989242	0.12288751	0.11628774	0.11006810	0.10420523	0.93463884D-01
14	0.11101916	0.10458512	0.98548931D-01	0.92884472D-01	0.87567422D-01	0.77886570D-01
15	0.94888175D-01	0.89008611D-01	0.83516044D-01	0.78383521D-01	0.73586069D-01	0.64905475D-01
16	0.81101005D-01	0.75752009D-01	0.70776308D-01	0.66146431D-01	0.61837033D-01	0.54087896D-01
17	0.69317098D-01	0.64469795D-01	0.59979923D-01	0.55819773D-01	0.51963893D-01	0.45073247D-01
18	0.59245383D-01	0.54867911D-01	0.50830443D-01	0.47105294D-01	0.43667137D-01	0.37561039D-01
19	0.50637080D-01	0.46696095D-01	0.43076647D-01	0.39751303D-01	0.36695074D-01	0.31300866D-01
20	0.43279556D-01	0.39741357D-01	0.36505633D-01	0.33545404D-01	0.30836196D-01	0.26084055D-01
21	0.36991073D-01	0.33822432D-01	0.30936977D-01	0.28308358D-01	0.25912770D-01	0.21736713D-01
22	0.31616302D-01	0.28785049D-01	0.26217777D-01	0.23888910D-01	0.21775437D-01	0.18113927D-01
23	0.27022481D-01	0.24497914D-01	0.22218456D-01	0.20159417D-01	0.18298687D-01	0.15094940D-01
24	0.23096137D-01	0.20849288D-01	0.18829200D-01	0.17012167D-01	0.15377048D-01	0.12579116D-01
25	0.19740288D-01	0.17744075D-01	0.15956949D-01	0.14356259D-01	0.12921889D-01	0.10482597D-01
26	0.16872041D-01	0.15101341D-01	0.13522838D-01	0.12114986D-01	0.10858730D-01	0.87354975D-02
27	0.14420548D-01	0.12852205D-01	0.11460032D-01	0.10223617D-01	0.91249834D-02	0.72795813D-02
28	0.12325255D-01	0.10938047D-01	0.97118918D-02	0.86275251D-02	0.76680533D-02	0.60663178D-02
29	0.10534406D-01	0.93089760D-02	0.82304168D-02	0.72806119D-02	0.64437423D-02	0.50552648D-02
30	0.90037658D-02	0.79225328D-02	0.69749295D-02	0.61439763D-02	0.54149095D-02	0.42127207D-02
31	0.76955264D-02	0.67425811D-02	0.59109573D-02	0.51847902D-02	0.45503442D-02	0.35106006D-02
32	0.65773730D-02	0.57383669D-02	0.50092858D-02	0.43753504D-02	0.38238186D-02	0.29255005D-02
33	0.56216863D-02	0.48837166D-02	0.42451575D-02	0.36922788D-02	0.32132930D-02	0.24379171D-02
34	0.48048601D-02	0.41563545D-02	0.35975911D-02	0.31158471D-02	0.27002462D-02	0.20315976D-02
35	0.41067181D-02	0.35373230D-02	0.30488060D-02	0.26294069D-02	0.22691145D-02	0.16929980D-02
36	0.35100154D-02	0.30104877D-02	0.25837339D-02	0.22189087D-02	0.19068189D-02	0.14108317D-02
37	0.30000132D-02	0.25621172D-02	0.21896050D-02	0.18724968D-02	0.16023688D-02	0.11756931D-02
38	0.25641139D-02	0.21805253D-02	0.18555975D-02	0.15801661D-02	0.13465284D-02	0.97974422D-03
39	0.21915503D-02	0.18557662D-02	0.15725403D-02	0.13334735D-02	0.11315365D-02	0.81645352D-03
40	0.18731199D-02	0.15793755D-02	0.13326612D-02	0.11252941D-02	0.95087101D-03	0.68037794D-03
41	0.16009572D-02	0.13441494D-02	0.11293739D-02	0.94961529D-03	0.79905127D-03	0.56698162D-03
42	0.13683395D-02	0.11439569D-02	0.95709656D-03	0.80136312D-03	0.67147166D-03	0.47248468D-03
43	0.11695209D-02	0.97358035D-03	0.81109878D-03	0.67625580D-03	0.56426190D-03	0.39373724D-03
44	0.99959056D-03	0.82857902D-03	0.68737185D-03	0.57068000D-03	0.47416967D-03	0.32811437D-03
45	0.85435091D-03	0.70517364D-03	0.58251852D-03	0.48158650D-03	0.39846191D-03	0.27342864D-03
46	0.73021445D-03	0.60014778D-03	0.49365976D-03	0.40640211D-03	0.33484194D-03	0.22785720D-03
47	0.62411492D-03	0.51076407D-03	0.41835573D-03	0.34295537D-03	0.28137978D-03	0.18988100D-03
48	0.53343156D-03	0.43469283D-03	0.35453876D-03	0.28941381D-03	0.23645360D-03	0.15823417D-03
49	0.45592441D-03	0.36995134D-03	0.30045658D-03	0.24423107D-03	0.19870050D-03	0.13186181D-03
50	0.38967898D-03	0.31485221D-03	0.25462422D-03	0.20610217D-03	0.16697521D-03	0.10988484D-03

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$ %)	.004167 ($\frac{5}{12}$ %)	.005 ($\frac{1}{2}$ %)	.005833 ($\frac{7}{12}$ %)	.0075 ($\frac{3}{4}$ %)
50	46.9461 7037	45.0509 1617	44.1427 8635	43.2598 6428	41.5664 4707
51	47.8266 0386	45.8598 3353	44.9181 9537	44.0031 7907	42.2495 7525
52	48.7048 4176	46.6653 9439	45.6897 4664	44.7421 8301	42.9276 1812
53	49.5808 8953	47.4676 1267	46.4574 5934	45.4769 0108	43.6006 1351
54	50.4547 5265	48.2665 0224	47.2213 5258	46.2073 5816	44.2685 9902
55	51.3264 3656	49.0620 7692	47.9814 4535	46.9335 7895	44.9316 1193
56	52.1959 4669	49.8543 5046	48.7377 5657	47.6555 8802	45.5896 8926
57	53.0632 8847	50.6433 3656	49.4903 0505	48.3734 0980	46.2428 6776
58	53.9284 6730	51.4290 4885	50.2391 0950	49.0870 6856	46.8911 8388
59	54.7914 8858	52.2115 0093	50.9841 8856	49.7965 8846	47.5346 7382
60	55.6523 5769	52.9907 0632	51.7255 6075	50.5019 9350	48.1733 7352
61	56.5110 7999	53.7666 7850	52.4632 4453	51.2033 0754	48.8073 1863
62	57.3676 6083	54.5394 3087	53.1972 5824	51.9005 5431	49.4365 4455
63	58.2221 0557	55.3089 7680	53.9276 2014	52.5937 5739	50.0610 8640
64	59.0744 1952	56.0753 2959	54.6543 4840	53.2829 4024	50.6809 7906
65	59.9246 0800	56.8385 0250	55.3774 6109	53.9681 2617	51.2962 5713
66	60.7726 7631	57.5985 0871	56.0969 7621	54.6493 3836	51.9069 5497
67	61.6186 2974	58.3553 6137	56.8129 1165	55.3265 9986	52.5131 0667
68	62.4624 7355	59.1090 7357	57.5252 8522	55.9999 3358	53.1147 4607
69	63.3042 1302	59.8596 5832	58.2341 1465	56.6693 6230	53.7119 0677
70	64.1438 5339	60.6071 2862	58.9394 1756	57.3349 0867	54.3046 2210
71	64.9813 9989	61.3514 9738	59.6412 1151	57.9965 9520	54.8929 2516
72	65.8168 5774	62.0927 7748	60.3395 1394	58.6544 4427	55.4768 4880
73	66.6502 3216	62.8309 8172	61.0343 4222	59.3084 7815	56.0564 2561
74	67.4815 2834	63.5661 2287	61.7257 1366	59.9587 1896	56.6316 8795
75	68.3107 5146	64.2982 1365	62.4136 4543	60.6051 8869	57.2026 6794
76	69.1379 0670	65.0272 6670	63.0981 5466	61.2479 0922	57.7693 9746
77	69.9629 9920	65.7532 9464	63.7792 5836	61.8869 0229	58.3319 0815
78	70.7860 3411	66.4763 1002	64.4569 7350	62.5221 8952	58.8902 3141
79	71.6070 1657	67.1963 2533	65.1313 1691	63.1537 9239	59.4443 9842
80	72.4259 5169	67.9133 5303	65.8023 0539	63.7817 3229	59.9944 4012
81	73.2428 4458	68.6274 0550	66.4699 5561	64.4060 3044	60.5403 8722
82	74.0577 0033	69.3384 9511	67.1342 8419	65.0267 0798	61.0822 7019
83	74.8705 2402	70.0466 3413	67.7953 0765	65.6437 8590	61.6201 1930
84	75.6813 2072	70.7518 3482	68.4530 4244	66.2572 8507	62.1539 6456
85	76.4900 9548	71.4541 0936	69.1075 0491	66.8672 2625	62.6838 3579
86	77.2968 5335	72.1534 6991	69.7587 1135	67.4736 3007	63.2097 6257
87	78.1015 9935	72.8499 2854	70.4066 7796	68.0765 1706	63.7317 7427
88	78.9043 3850	73.5434 9730	71.0514 2086	68.6759 0759	64.2499 0002
89	79.7050 7581	74.2341 8818	71.6929 5608	69.2718 2197	64.7641 6875
90	80.5038 1627	74.9220 1313	72.3312 9958	69.8642 8033	65.2746 0918
91	81.3005 6486	75.6069 8403	72.9664 6725	70.4533 0273	65.7812 4981
92	82.0953 2654	76.2891 1272	73.5984 7487	71.0389 0910	66.2841 1892
93	82.8881 0628	76.9684 1101	74.2273 3818	71.6211 1923	66.7832 4458
94	83.6789 0901	77.6448 9063	74.8530 7282	72.1999 5284	67.2786 5467
95	84.4677 3966	78.3185 6329	75.4756 9434	72.7754 2950	67.7703 7685
96	85.2546 0315	78.9894 4062	76.0952 1825	73.3475 6869	68.2584 3856
97	86.0395 0439	79.6575 3422	76.7116 5995	73.9163 8975	68.7428 6705
98	86.8224 4827	80.3228 5566	77.3250 3478	74.4819 1193	69.2236 8938
99	87.6034 3967	80.9854 1642	77.9353 5799	75.0441 5436	69.7009 3239
100	88.3824 8346	81.6452 2797	78.5426 4477	75.6031 3607	70.1746 2272

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n}|\, i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.0025 ($\frac{1}{4}$ %)	.004167 ($\frac{5}{12}$ %)	.005 ($\frac{1}{2}$ %)	.005833 ($\frac{7}{12}$ %)	.0075 ($\frac{3}{4}$ %)
50	46.9461 7037	45.0509 1617	44.1427 8635	43.2598 6428	41.5664 4707
51	47.8266 0386	45.8598 3353	44.9181 9537	44.0031 7907	42.2495 7525
52	48.7048 4176	46.6653 9439	45.6897 4664	44.7421 8301	42.9276 1812
53	49.5808 8953	47.4676 1267	46.4574 5934	45.4769 0108	43.6006 1351
54	50.4547 5265	48.2665 0224	47.2213 5258	46.2073 5816	44.2685 9902
55	51.3264 3656	49.0620 7692	47.9814 4535	46.9335 7895	44.9316 1193
56	52.1959 4669	49.8543 5046	48.7377 5657	47.6555 8802	45.5896 8926
57	53.0632 8847	50.6433 3656	49.4903 0505	48.3734 0980	46.2428 6776
58	53.9284 6730	51.4290 4885	50.2391 0950	49.0870 6856	46.8911 8388
59	54.7914 8858	52.2115 0093	50.9841 8856	49.7965 8846	47.5346 7382
60	55.6523 5769	52.9907 0632	51.7255 6075	50.5019 9350	48.1733 7352
61	56.5110 7999	53.7666 7850	52.4632 4453	51.2033 0754	48.8073 1863
62	57.3676 6083	54.5394 3087	53.1972 5824	51.9005 5431	49.4365 4455
63	58.2221 0557	55.3089 7680	53.9276 2014	52.5937 5739	50.0610 8640
64	59.0744 1952	56.0753 2959	54.6543 4840	53.2829 4024	50.6809 7906
65	59.9246 0800	56.8385 0250	55.3774 6109	53.9681 2617	51.2962 5713
66	60.7726 7631	57.5985 0871	56.0969 7621	54.6493 3836	51.9069 5497
67	61.6186 2974	58.3553 6137	56.8129 1165	55.3265 9986	52.5131 0667
68	62.4624 7355	59.1090 7357	57.5252 8522	55.9999 3358	53.1147 4607
69	63.3042 1302	59.8596 5832	58.2341 1465	56.6693 6230	53.7119 0677
70	64.1438 5339	60.6071 2862	58.9394 1756	57.3349 0867	54.3046 2210
71	64.9813 9989	61.3514 9738	59.6412 1151	57.9965 9520	54.8929 2516
72	65.8168 5774	62.0927 7748	60.3395 1394	58.6544 4427	55.4768 4880
73	66.6502 3216	62.8309 8172	61.0343 4222	59.3084 7815	56.0564 2561
74	67.4815 2834	63.5661 2287	61.7257 1366	59.9587 1896	56.6316 8795
75	68.3107 5146	64.2982 1365	62.4136 4543	60.6051 8869	57.2026 6794
76	69.1379 0670	65.0272 6670	63.0981 5466	61.2479 0922	57.7693 9746
77	69.9629 9920	65.7532 9464	63.7792 5836	61.8869 0229	58.3319 0815
78	70.7860 3411	66.4763 1002	64.4569 7350	62.5221 8952	58.8902 3141
79	71.6070 1657	67.1963 2533	65.1313 1691	63.1537 9239	59.4443 9842
80	72.4259 5169	67.9133 5303	65.8023 0539	63.7817 3229	59.9944 4012
81	73.2428 4458	68.6274 0550	66.4699 5561	64.4060 3044	60.5403 8722
82	74.0577 0033	69.3384 9511	67.1342 8419	65.0267 0798	61.0822 7019
83	74.8705 2402	70.0466 3413	67.7953 0765	65.6437 8590	61.6201 1930
84	75.6813 2072	70.7518 3482	68.4530 4244	66.2572 8507	62.1539 6456
85	76.4900 9548	71.4541 0936	69.1075 0491	66.8672 2625	62.6838 3579
86	77.2968 5335	72.1534 6991	69.7587 1135	67.4736 3007	63.2097 6257
87	78.1015 9935	72.8499 2854	70.4066 7796	68.0765 1706	63.7317 7427
88	78.9043 3850	73.5434 9730	71.0514 2086	68.6759 0759	64.2499 0002
89	79.7050 7581	74.2341 8818	71.6929 5608	69.2718 2197	64.7641 6875
90	80.5038 1627	74.9220 1313	72.3312 9958	69.8642 8033	65.2746 0918
91	81.3005 6486	75.6069 8403	72.9664 6725	70.4533 0273	65.7812 4981
92	82.0953 2654	76.2891 1272	73.5984 7487	71.0389 0910	66.2841 1892
93	82.8881 0628	76.9684 1101	74.2273 3818	71.6211 1923	66.7832 4458
94	83.6789 0901	77.6448 9063	74.8530 7282	72.1999 5284	67.2786 5467
95	84.4677 3966	78.3185 6329	75.4756 9434	72.7754 2950	67.7703 7685
96	85.2546 0315	78.9894 4062	76.0952 1825	73.3475 6869	68.2584 3856
97	86.0395 0439	79.6575 3422	76.7116 5995	73.9163 8975	68.7428 6705
98	86.8224 4827	80.3228 5566	77.3250 3478	74.4819 1193	69.2236 8938
99	87.6034 3967	80.9854 1642	77.9353 5799	75.0441 5436	69.7009 3239
100	88.3824 8346	81.6452 2797	78.5426 4477	75.6031 3607	70.1746 2272

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 ($1\frac{1}{8}$%)	.0125 ($1\frac{1}{4}$%)	.015 ($1\frac{1}{2}$%)	.0175 ($1\frac{3}{4}$%)
1	0.9900 9901	0.9888 7515	0.9876 5432	0.9852 2167	0.9828 0098
2	1.9703 9506	1.9667 4923	1.9631 1538	1.9558 8342	1.9486 9875
3	2.9409 8521	2.9337 4460	2.9265 3371	2.9122 0042	2.8979 8403
4	3.9019 6555	3.8899 8230	3.8780 5798	3.8543 8465	3.8309 4254
5	4.8534 3124	4.8355 8200	4.8178 3504	4.7826 4497	4.7478 5508
6	5.7954 7647	5.7706 6205	5.7460 0992	5.6971 8717	5.6489 9762
7	6.7281 9453	6.6953 3948	6.6627 2585	6.5982 1396	6.5346 4139
8	7.6516 7775	7.6097 3002	7.5681 2429	7.4859 2508	7.4050 5297
9	8.5660 1758	8.5139 4810	8.4623 4498	8.3605 1732	8.2604 9432
10	9.4713 0453	9.4081 0690	9.3455 2591	9.2221 8455	9.1012 2291
11	10.3676 2825	10.2923 1832	10.2178 0337	10.0711 1779	9.9274 9181
12	11.2550 7747	11.1666 9302	11.0793 1197	10.9075 0521	10.7395 4969
13	12.1337 4007	12.0313 4044	11.9301 8466	11.7315 3222	11.5376 4097
14	13.0037 0304	12.8863 6880	12.7705 5275	12.5433 8150	12.3220 0587
15	13.8650 5252	13.7318 8509	13.6005 4592	13.3432 3301	13.0928 8046
16	14.7178 7378	14.5679 9514	14.4202 9227	14.1312 6405	13.8504 9677
17	15.5622 5127	15.3948 0360	15.2299 1829	14.9076 4931	14.5950 8282
18	16.3982 6858	16.2124 1395	16.0295 4893	15.6725 6089	15.3268 6272
19	17.2260 0850	17.0209 2850	16.8193 0759	16.4261 6837	16.0460 5673
20	18.0455 5297	17.8204 4845	17.5993 1613	17.1686 3879	16.7528 8130
21	18.8569 8313	18.6110 7387	18.3696 9495	17.9001 3673	17.4475 4919
22	19.6603 7934	19.3929 0371	19.1305 6291	18.6208 2437	18.1302 6948
23	20.4558 2113	20.1660 3580	19.8820 3744	19.3308 6145	18.8012 4764
24	21.2433 8726	20.9305 6693	20.6242 3451	20.0304 0537	19.4606 8565
25	22.0231 5570	21.6865 9276	21.3572 6865	20.7196 1120	20.1087 8196
26	22.7952 0366	22.4342 0792	22.0812 5299	21.3986 3172	20.7457 3166
27	23.5596 0759	23.1735 0598	22.7962 9925	22.0676 1746	21.3717 2644
28	24.3164 4316	23.9045 7946	23.5025 1778	22.7267 1671	21.9869 5474
29	25.0657 8530	24.6275 1986	24.2000 1756	23.3760 7558	22.5916 0171
30	25.8077 0822	25.3424 1766	24.8889 0623	24.0158 3801	23.1858 4934
31	26.5422 8537	26.0493 6233	25.5692 9010	24.6461 4582	23.7698 7650
32	27.2695 8947	26.7484 4236	26.2412 7418	25.2671 3874	24.3438 5897
33	27.9896 9255	27.4397 4522	26.9049 6215	25.8789 5442	24.9079 6951
34	28.7026 6589	28.1233 5745	27.5604 5644	26.4817 2849	25.4623 7789
35	29.4085 8009	28.7993 6460	28.2078 5822	27.0755 9458	26.0072 5100
36	30.1075 0504	29.4678 5127	28.8472 6737	27.6606 8431	26.5427 5283
37	30.7995 0994	30.1289 0114	29.4787 8259	28.2371 2740	27.0690 4455
38	31.4846 6330	30.7825 9692	30.1025 0133	28.8050 5163	27.5862 8457
39	32.1630 3298	31.4290 2044	30.7185 1983	29.3645 8288	28.0946 2857
40	32.8346 8611	32.0682 5260	31.3269 3316	29.9158 4520	28.5942 2955
41	33.4996 8922	32.7003 7340	31.9278 3522	30.4589 6079	29.0852 3789
42	34.1581 0814	33.3254 6195	32.5213 1874	30.9940 5004	29.5678 0136
43	34.8100 0806	33.9435 9649	33.1074 7530	31.5212 3157	30.0420 6522
44	35.4554 5352	34.5548 5438	33.6863 9536	32.0406 2223	30.5081 7221
45	36.0945 0844	35.1593 1212	34.2581 6825	32.5523 3718	30.9662 6261
46	36.7272 3608	35.7570 4536	34.8228 8222	33.0564 8983	31.4164 7431
47	37.3536 9909	36.3481 2891	35.3806 2442	33.5531 9195	31.8589 4281
48	37.9739 5949	36.9326 3674	35.9314 8091	34.0425 5365	32.2938 0129
49	38.5880 7871	37.5106 4202	36.4755 3670	34.5246 8339	32.7211 8063
50	39.1961 1753	38.0822 1708	37.0128 7575	34.9996 8807	33.1412 0946

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n|}\, i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 ($1\frac{1}{8}$%)	.0125 ($1\frac{1}{4}$%)	.015 ($1\frac{1}{2}$%)	.0175 ($1\frac{3}{4}$%)
50	39.1961 1753	38.0822 1708	37.0128 7575	34.9996 8807	33.1412 0946
51	39.7981 3617	38.6474 3345	37.5435 8099	35.4676 7298	33.5540 1421
52	40.3941 9423	39.2063 6188	38.0677 3431	35.9287 4185	33.9597 1913
53	40.9843 5072	39.7590 7232	38.5854 1660	36.3829 9690	34.3584 4632
54	41.5686 6408	40.3056 3394	39.0967 0776	36.8305 3882	34.7503 1579
55	42.1471 9216	40.8461 1514	39.6016 8667	37.2714 6681	35.1354 4550
56	42.7199 9224	41.3805 8358	40.1004 3128	37.7058 7863	35.5139 5135
57	43.2871 2102	41.9091 0613	40.5930 1855	38.1338 7058	35.8859 4727
58	43.8486 3468	42.4317 4896	41.0795 2449	38.5555 3751	36.2515 4523
59	44.4045 8879	42.9485 7746	41.5600 2419	38.9709 7292	36.6108 5526
60	44.9550 3841	43.4596 5633	42.0345 9179	39.3802 6889	36.9639 8552
61	45.5000 3803	43.9650 4952	42.5033 0054	39.7835 1614	37.3110 4228
62	46.0396 4161	44.4648 2029	42.9662 2275	40.1808 0408	37.6521 3000
63	46.5739 0258	44.9590 3119	43.4234 2988	40.5722 2077	37.9873 5135
64	47.1028 7385	45.4477 4407	43.8749 9247	40.9578 5298	38.3168 0723
65	47.6266 0777	45.9310 2009	44.3209 8022	41.3377 8618	38.6405 9678
66	48.1451 5621	46.4089 1975	44.7614 6195	41.7121 0461	38.9588 1748
67	48.6585 7050	46.8815 0284	45.1965 0563	42.0808 9125	39.2715 6509
68	49.1669 0149	47.3488 2852	45.6261 7840	42.4442 2783	39.5789 3375
69	49.6701 9949	47.8109 5527	46.0505 4656	42.8021 9490	39.8810 1597
70	50.1685 1435	48.2679 4094	46.4696 7562	43.1548 7183	40.1779 0267
71	50.6618 9539	48.7198 4270	46.8836 3024	43.5023 3678	40.4696 8321
72	51.1503 9148	49.1667 1714	47.2924 7431	43.8446 6677	40.7564 4542
73	51.6340 5097	49.6086 2016	47.6962 7093	44.1819 3771	41.0382 7560
74	52.1129 2175	50.0456 0708	48.0950 8240	44.5142 2434	41.3152 5857
75	52.5870 5124	50.4777 3259	48.4889 7027	44.8416 0034	41.5874 7771
76	53.0564 8638	50.9050 5077	48.8779 9533	45.1641 3826	41.8550 1495
77	53.5212 7364	51.3276 1510	49.2622 1761	45.4819 0962	42.1179 5081
78	53.9814 5905	51.7454 7847	49.6416 9640	45.7949 8485	42.3763 6443
79	54.4370 8817	52.1586 9317	50.0164 9027	46.1034 3335	42.6303 3359
80	54.8882 0611	52.5673 1092	50.3866 5706	46.4073 2349	42.8799 3474
81	55.3348 5753	52.9713 8286	50.7522 5389	46.7067 2265	43.1252 4298
82	55.7770 8666	53.3709 5957	51.1133 3717	47.0016 9720	43.3663 3217
83	56.2149 3729	53.7660 9104	51.4699 6264	47.2923 1251	43.6032 7486
84	56.6484 5276	54.1568 2674	51.8221 8532	47.5786 3301	43.8361 4237
85	57.0776 7600	54.5432 1557	52.1700 5958	47.8607 2218	44.0650 0479
86	57.5026 4951	54.9253 0588	52.5136 3909	48.1386 4254	44.2899 3099
87	57.9234 1535	55.3031 4549	52.8529 7688	48.4124 5571	44.5109 8869
88	58.3400 1520	55.6767 8169	53.1881 2531	48.6822 2237	44.7282 4441
89	58.7524 9030	56.0462 6126	53.5191 3611	48.9480 0234	44.9417 6355
90	59.1608 8148	56.4116 3041	53.8460 6035	49.2098 5452	45.1516 1037
91	59.5652 2919	56.7729 3490	54.1689 4850	49.4678 3696	45.3578 4803
92	59.9655 7346	57.1302 1992	54.4878 5037	49.7220 0686	45.5605 3860
93	60.3619 5392	57.4835 3021	54.8028 1518	49.9724 2055	45.7597 4310
94	60.7544 0982	57.8329 0997	55.1138 9154	50.2191 3355	45.9555 2147
95	61.1429 8002	58.1784 0294	55.4211 2744	50.4622 0054	46.1479 3265
96	61.5277 0299	58.5200 5235	55.7245 7031	50.7016 7541	46.3370 3455
97	61.9086 1682	58.8579 0096	56.0242 6698	50.9376 1124	46.5228 8408
98	62.2857 5923	59.1919 9106	56.3202 6368	51.1700 6034	46.7055 3718
99	62.6591 6755	59.5223 6446	56.6126 0610	51.3990 7422	46.8850 4882
100	63.0288 7877	59.8490 6251	56.9013 3936	51.6247 0367	47.0614 7304

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	0.9803 9216	0.9779 9511	0.9756 0976	0.9732 3601	0.9708 7379
2	1.9415 6094	1.9344 6955	1.9274 2415	1.9204 2434	1.9134 6970
3	2.8838 8327	2.8698 9687	2.8560 2356	2.8422 6213	2.8286 1135
4	3.8077 2870	3.7847 4021	3.7619 7421	3.7394 2787	3.7170 9840
5	4.7134 5951	4.6794 5253	4.6458 2850	4.6125 8186	4.5797 0719
6	5.6014 3089	5.5544 7680	5.5081 2536	5.4623 6678	5.4171 9144
7	6.4719 9107	6.4102 4626	6.3493 9060	6.2894 0806	6.2302 8296
8	7.3254 8144	7.2471 8461	7.1701 3717	7.0943 1441	7.0196 9219
9	8.1622 3671	8.0657 0622	7.9708 6553	7.8776 7826	7.7861 0892
10	8.9825 8501	8.8662 1635	8.7520 6393	8.6400 7616	8.5302 0284
11	9.7868 4805	9.6491 1134	9.5142 0871	9.3820 6926	9.2526 2411
12	10.5753 4122	10.4147 7882	10.2577 6460	10.1042 0366	9.9540 0399
13	11.3483 7375	11.1635 9787	10.9831 8497	10.8070 1086	10.6349 5533
14	12.1062 4877	11.8959 3924	11.6909 1217	11.4910 0814	11.2960 7314
15	12.8492 6350	12.6121 6551	12.3813 7773	12.1566 9892	11.9379 3509
16	13.5777 0931	13.3126 3131	13.0550 0266	12.8045 7315	12.5611 0203
17	14.2918 7188	13.9976 8343	13.7121 9772	13.4351 0769	13.1661 1847
18	14.9920 3125	14.6676 6106	14.3533 6363	14.0487 6661	13.7535 1308
19	15.6784 6201	15.3228 9590	14.9788 9134	14.6460 0157	14.3237 9911
20	16.3514 3334	15.9637 1237	15.5891 6229	15.2272 5213	14.8774 7486
21	17.0112 0916	16.5904 2775	16.1845 4857	15.7929 4612	15.4150 2414
22	17.6580 4820	17.2033 5232	16.7654 1324	16.3434 9987	15.9369 1664
23	18.2922 0412	17.8027 8955	17.3321 1048	16.8793 1861	16.4436 0839
24	18.9139 2560	18.3890 3624	17.8849 8583	17.4007 9670	16.9355 4212
25	19.5234 5647	18.9623 8263	18.4243 7642	17.9083 1795	17.4131 4769
26	20.1210 3576	19.5231 1260	18.9506 1114	18.4022 5592	17.8768 4242
27	20.7068 9780	20.0715 0376	19.4640 1087	18.8829 7413	18.3270 3147
28	21.2812 7236	20.6078 2764	19.9648 8866	19.3508 2640	18.7641 0823
29	21.8443 8466	21.1323 4977	20.4535 4991	19.8061 5708	19.1884 5459
30	22.3964 5555	21.6453 2985	20.9302 9259	20.2493 0130	19.6004 4135
31	22.9377 0152	22.1470 2186	21.3954 0741	20.6805 8520	20.0004 2849
32	23.4683 3482	22.6376 7419	21.8491 7796	21.1003 2623	20.3887 6553
33	23.9885 6355	23.1175 2977	22.2918 8094	21.5088 2332	20.7657 9178
34	24.4985 9172	23.5868 2618	22.7237 8628	21.9064 0712	21.1318 3668
35	24.9986 1933	24.0457 9577	23.1451 5734	22.2933 4026	21.4872 2007
36	25.4888 4248	24.4946 6579	23.5562 5107	22.6699 1753	21.8322 5250
37	25.9694 5341	24.9336 5848	23.9573 1812	23.0364 1609	22.1672 3544
38	26.4406 4060	25.3629 9118	24.3486 0304	23.3931 0568	22.4924 6159
39	26.9025 8883	25.7828 7646	24.7303 4443	23.7402 4884	22.8082 1513
40	27.3554 7924	26.1935 2221	25.1027 7505	24.0781 0106	23.1147 7197
41	27.7994 8945	26.5951 3174	25.4661 2200	24.4069 1101	23.4123 9997
42	28.2347 9358	26.9879 0390	25.8206 0683	24.7269 2069	23.7013 5920
43	28.6615 6233	27.3720 3316	26.1664 4569	25.0383 6563	23.9819 0213
44	29.0799 6307	27.7477 0969	26.5038 4945	25.3414 7507	24.2542 7392
45	29.4901 5987	28.1151 1950	26.8330 2386	25.6364 7209	24.5187 1254
46	29.8923 1360	28.4744 4450	27.1541 6962	25.9235 7381	24.7754 4907
47	30.2865 8196	28.8258 6259	27.4674 8255	26.2029 9154	25.0247 0783
48	30.6731 1957	29.1695 4777	27.7731 5371	26.4749 3094	25.2667 0664
49	31.0520 7801	29.5056 7019	28.0713 6947	26.7395 9215	25.5016 5693
50	31.4236 0589	29.8343 9627	28.3623 1168	26.9971 6998	25.7297 6401

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
50	31.4236 0589	29.8343 9627	28.3623 1168	26.9971 6998	25.7297 6401
51	31.7878 4892	30.1558 8877	28.6461 5774	27.2478 5400	25.9512 2719
52	32.1449 4992	30.4703 0687	28.9230 8072	27.4918 2871	26.1662 3999
53	32.4950 4894	30.7778 0623	29.1932 4948	27.7292 7368	26.3749 9028
54	32.8382 8327	31.0785 3910	29.4568 2876	27.9603 6368	26.5776 6047
55	33.1747 8752	31.3726 5438	29.7139 7928	28.1852 6879	26.7744 2764
56	33.5046 9365	31.6602 9768	29.9648 5784	28.4041 5454	26.9654 6373
57	33.8281 3103	31.9416 1142	30.2096 1740	28.6171 8203	27.1509 3566
58	34.1452 2650	32.2167 3489	30.4484 0722	28.8245 0806	27.3310 0549
59	34.4561 0441	32.4858 0429	30.6813 7290	29.0262 8522	27.5058 3058
60	34.7608 8668	32.7489 5285	30.9086 5649	29.2226 6201	27.6755 6367
61	35.0596 9282	33.0063 1086	31.1303 9657	29.4137 8293	27.8403 5307
62	35.3526 4002	33.2580 0573	31.3467 2836	29.5997 8879	28.0003 4279
63	35.6398 4316	33.5041 6208	31.5577 8377	29.7808 1634	28.1556 7261
64	35.9214 1486	33.7449 0179	31.7636 9148	29.9569 9887	28.3064 7826
65	36.1974 6555	33.9803 4405	31.9645 7705	30.1284 6605	28.4528 9152
66	36.4681 0348	34.2106 0543	32.1605 6298	30.2953 4409	28.5950 4031
67	36.7334 3478	34.4357 9993	32.3517 6876	30.4577 5581	28.7330 4884
68	36.9935 6351	34.6560 3905	32.5383 1099	30.6158 2074	28.8670 3771
69	37.2485 9168	34.8714 3183	32.7203 0340	30.7696 5522	28.9971 2399
70	37.4986 1929	35.0820 8492	32.8978 5698	30.9193 7247	29.1234 2135
71	37.7437 4441	35.2881 0261	33.0710 7998	31.065[illegible] 8270	29.2460 4015
72	37.9840 6314	35.4895 8691	33.2400 7803	31.2068 9314	29.3650 8752
73	38.2196 6975	35.6866 3756	33.4049 5417	31.3449 0816	29.4806 6750
74	38.4506 5662	35.8793 5214	33.5658 0895	31.4792 2936	29.5928 8107
75	38.6771 1433	36.0678 2605	33.7227 4044	31.6099 5558	29.7018 2628
76	38.8991 3170	36.2521 5262	33.8758 4433	31.7371 8304	29.8075 9833
77	39.1167 9578	36.4324 2310	34.0252 1398	31.8610 0540	29.9102 8964
78	39.3301 9194	36.6087 2675	34.1709 4047	31.9815 1377	30.0099 8994
79	39.5394 0386	36.7811 5085	34.3131 1265	32.0987 9685	30.1067 8635
80	39.7445 1359	36.9497 8079	34.4518 1722	32.2129 4098	30.2007 6345
81	39.9456 0156	37.1147 0004	34.5871 3875	32.3240 3015	30.2920 0335
82	40.1427 4663	37.2759 9026	34.7191 5976	32.4321 4613	30.3805 8577
83	40.3360 2611	37.4337 3130	34.8479 6074	32.5373 6850	30.4665 8813
84	40.5255 1579	37.5880 0127	34.9736 2023	32.6397 7469	30.5500 8556
85	40.7112 8999	37.7388 7655	35.0962 1486	32.7394 4009	30.6311 5103
86	40.8934 2156	37.8864 3183	35.2158 1938	32.8364 3804	30.7098 5537
87	41.0719 8192	38.0307 4018	35.3325 0671	32.9308 3994	30.7862 6735
88	41.2470 4110	38.1718 7304	35.4463 4801	33.0227 1527	30.8604 5374
89	41.4186 6774	38.3099 0028	35.5574 1269	33.1121 3165	30.9324 7936
90	41.5869 2916	38.4448 9025	35.6657 6848	33.1991 5489	31.0024 0714
91	41.7518 9133	38.5769 0978	35.7714 8144	33.2838 4905	31.0702 9820
92	41.9136 1895	38.7060 2423	35.8746 1604	33.3662 7644	31.1362 1184
93	42.0721 7545	38.8322 9754	35.9752 3516	33.4464 9776	31.2002 0567
94	42.2276 2299	38.9557 9221	36.0734 0016	33.5245 7202	31.2623 3560
95	42.3800 2254	39.0765 6940	36.1691 7089	33.6005 5671	31.3226 5592
96	42.5294 3386	39.1946 8890	36.2626 0574	33.6745 0775	31.3812 1934
97	42.6759 1555	39.3102 0920	36.3537 6170	33.7464 7956	31.4380 7703
98	42.8195 2505	39.4231 8748	36.4426 9434	33.8165 2512	31.4932 7867
99	42.9603 1867	39.5336 7968	36.5294 5790	33.8846 9598	31.5468 7250
100	43.0983 5164	39.6417 4052	36.6141 0526	33.9510 4232	31.5989 0534

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n|}\,i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.035 (3½%)	.04 (4%)	.045 (4½%)	.05 (5%)	.055 (5½%)
1	0.9661 8357	0.9615 3846	0.9569 3780	0.9523 8095	0.9478 6730
2	1.8996 9428	1.8860 9467	1.8726 6775	1.8594 1043	1.8463 1971
3	2.8016 3698	2.7750 9103	2.7489 6435	2.7232 4803	2.6979 3338
4	3.6730 7921	3.6298 9522	3.5875 2570	3.5459 5050	3.5051 5012
5	4.5150 5238	4.4518 2233	4.3899 7674	4.3294 7667	4.2702 8448
6	5.3285 5302	5.2421 3686	5.1578 7248	5.0756 9207	4.9955 3031
7	6.1145 4398	6.0020 5467	5.8927 0094	5.7863 7340	5.6829 6712
8	6.8739 5554	6.7327 4487	6.5958 8607	6.4632 1276	6.3345 6599
9	7.6076 8651	7.4353 3161	7.2687 9050	7.1078 2168	6.9521 9525
10	8.3166 0532	8.1108 9578	7.9127 1818	7.7217 3493	7.5376 2583
11	9.0015 5104	8.7604 7671	8.5289 1692	8.3064 1422	8.0925 3633
12	9.6633 3433	9.3850 7376	9.1185 8078	8.8632 5164	8.6185 1785
13	10.3027 3849	9.9856 4785	9.6828 5242	9.3935 7299	9.1170 7853
14	10.9205 2028	10.5631 2293	10.2228 2528	9.8986 4094	9.5896 4790
15	11.5174 1090	11.1183 8743	10.7395 4573	10.3796 5804	10.0375 8094
16	12.0941 1681	11.6522 9561	11.2340 1505	10.8377 6956	10.4621 6203
17	12.6513 2059	12.1656 6885	11.7071 9143	11.2740 6625	10.8646 0856
18	13.1896 8173	12.6592 9697	12.1599 9180	11.6895 8690	11.2460 7447
19	13.7098 3742	13.1339 3940	12.5932 9359	12.0853 2086	11.6076 5352
20	14.2124 0330	13.5903 2634	13.0079 3645	12.4622 1034	11.9503 8248
21	14.6979 7420	14.0291 5995	13.4047 2388	12.8211 5271	12.2752 4406
22	15.1671 2484	14.4511 1533	13.7844 2476	13.1630 0258	12.5831 6973
23	15.6204 1047	14.8568 4167	14.1477 7489	13.4885 7388	12.8750 4239
24	16.0583 6760	15.2469 6314	14.4954 7837	13.7986 4179	13.1516 9895
25	16.4815 1459	15.6220 7994	14.8282 0896	14.0939 4457	13.4139 3266
26	16.8903 5226	15.9827 6918	15.1466 1145	14.3751 8530	13.6624 9541
27	17.2853 6451	16.3295 8575	15.4513 0282	14.6430 3362	13.8980 9991
28	17.6670 1885	16.6630 6322	15.7428 7351	14.8981 2726	14.1214 2172
29	18.0357 6700	16.9837 1463	16.0218 8853	15.1410 7358	14.3331 0116
30	18.3920 4541	17.2920 3330	16.2888 8854	15.3724 5103	14.5337 4517
31	18.7362 7576	17.5884 9356	16.5443 9095	15.5928 1050	14.7239 2907
32	19.0688 6547	17.8735 5150	16.7888 9086	15.8026 7667	14.9041 9817
33	19.3902 0818	18.1476 4567	17.0228 6207	16.0025 4921	15.0750 6936
34	19.7006 8423	18.4111 9776	17.2467 5796	16.1929 0401	15.2370 3257
35	20.0006 6110	18.6646 1323	17.4610 1240	16.3741 9429	15.3905 5220
36	20.2904 9381	18.9082 8195	17.6660 4058	16.5468 5171	15.5360 6843
37	20.5705 2542	19.1425 7880	17.8622 3979	16.7112 8734	15.6739 9851
38	20.8410 8736	19.3678 6423	18.0499 9023	16.8678 9271	15.8047 3793
39	21.1024 9987	19.5844 8484	18.2296 5572	17.0170 4067	15.9286 6154
40	21.3550 7234	19.7927 7388	18.4015 8442	17.1590 8635	16.0461 2469
41	21.5991 0371	19.9930 5181	18.5661 0949	17.2943 6796	16.1574 6416
42	21.8348 8281	20.1856 2674	18.7235 4975	17.4232 0758	16.2629 9920
43	22.0626 8870	20.3707 9494	18.8742 1029	17.5459 1198	16.3630 3242
44	22.2827 9102	20.5488 4129	19.0183 8305	17.6627 7331	16.4578 5063
45	22.4954 5026	20.7200 3970	19.1563 4742	17.7740 6982	16.5477 2572
46	22.7009 1813	20.8846 5356	19.2883 7074	17.8800 6650	16.6329 1537
47	22.8994 3780	21.0429 3612	19.4147 0884	17.9810 1571	16.7136 6386
48	23.0912 4425	21.1951 3088	19.5356 0654	18.0771 5782	16.7902 0271
49	23.2765 6450	21.3414 7200	19.6512 9813	18.1687 2173	16.8627 5139
50	23.4556 1787	21.4821 8462	19.7620 0778	18.2559 2546	16.9315 1790

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $\alpha_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Ἀρχική (παρούσα) ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.06 (6%)	.065 (6½%)	.07 (7%)	.075 (7½%)	.08 (8%)
1	0.9433 9623	0.9389 6714	0.9345 7944	0.9302 3256	0.9259 2593
2	1.8333 9267	1.8206 2642	1.8080 1817	1.7955 6517	1.7832 6475
3	2.6730 1195	2.6484 7551	2.6243 1604	2.6005 2574	2.5770 9699
4	3.4651 0561	3.4257 9860	3.3872 1126	3.3493 2627	3.3121 2684
5	4.2123 6379	4.1556 7944	4.1001 9744	4.0458 8490	3.9927 1004
6	4.9173 2433	4.8410 1356	4.7665 3966	4.6938 4642	4.6228 7966
7	5.5823 8144	5.4845 1977	5.3892 8940	5.2966 0132	5.2063 7006
8	6.2097 9381	6.0887 5096	5.9712 9851	5.8573 0355	5.7466 3894
9	6.8016 9227	6.6561 0419	6.5152 3225	6.3788 8703	6.2468 8791
10	7.3600 8705	7.1888 3022	7.0235 8154	6.8640 8096	6.7100 8140
11	7.8868 7458	7.6890 4246	7.4986 7434	7.3154 2415	7.1389 6426
12	8.3838 4394	8.1587 2532	7.9426 8630	7.7352 7827	7.5360 7802
13	8.8526 8296	8.5997 4208	8.3576 5074	8.1258 4026	7.9037 7594
14	9.2949 8393	9.0138 4233	8.7454 6799	8.4891 5373	8.2442 3698
15	9.7122 4899	9.4026 6885	9.1079 1401	8.8271 1975	8.5594 7869
16	10.1058 9527	9.7677 6418	9.4466 4860	9.1415 0674	8.8513 6916
17	10.4772 5969	10.1105 7670	9.7632 2299	9.4339 5976	9.1216 3811
18	10.8276 0348	10.4324 6638	10.0590 8691	9.7060 0908	9.3718 8714
19	11.1581 1649	10.7347 1022	10.3355 9524	9.9590 7821	9.6035 9920
20	11.4699 2122	11.0185 0725	10.5940 1425	10.1944 9136	9.8181 4741
21	11.7640 7662	11.2849 8333	10.8355 2733	10.4134 8033	10.0168 0316
22	12.0415 8172	11.5351 9562	11.0612 4050	10.6171 9101	10.2007 4366
23	12.3033 7898	11.7701 3673	11.2721 8738	10.8066 8931	10.3710 5895
24	12.5503 5753	11.9907 3871	11.4693 3400	10.9829 6680	10.5287 5828
25	12.7833 5616	12.1978 7673	11.6535 8318	11.1469 4586	10.6747 7619
26	13.0031 6619	12.3923 7251	11.8257 7867	11.2994 8452	10.8099 7795
27	13.2105 3414	12.5749 9766	11.9867 0904	11.4413 8095	10.9351 6477
28	13.4061 6428	12.7464 7668	12.1371 1125	11.5733 7763	11.0510 7849
29	13.5907 2102	12.9074 8984	12.2776 7407	11.6961 6524	11.1584 0601
30	13.7648 3115	13.0586 7591	12.4090 4118	11.8103 8627	11.2577 8334
31	13.9290 8599	13.2006 3465	12.5318 1419	11.9166 3839	11.3497 9939
32	14.0840 4339	13.3339 2925	12.6465 5532	12.0154 7757	11.4349 9944
33	14.2302 2961	13.4590 8850	12.7537 9002	12.1074 2099	11.5138 8837
34	14.3681 4114	13.5766 0892	12.8540 0936	12.1929 4976	11.5869 3367
35	14.4982 4636	13.6869 5673	12.9476 7230	12.2725 1141	11.6545 6822
36	14.6209 8713	13.7905 6970	13.0352 0776	12.3465 2224	11.7171 9279
37	14.7367 8031	13.8878 5887	13.1170 1660	12.4153 6952	11.7751 7851
38	14.8460 1916	13.9792 1021	13.1934 7345	12.4794 1351	11.8288 6899
39	14.9490 7468	14.0649 8611	13.2649 2846	12.5389 8931	11.8785 8240
40	15.0462 9687	14.1455 2687	13.3317 0884	12.5944 0866	11.9246 1333
41	15.1380 1592	14.2211 5199	13.3941 2041	12.6459 6155	11.9672 3457
42	15.2245 4332	14.2921 6149	13.4524 4898	12.6939 1772	12.0066 9867
43	15.3061 7294	14.3588 3708	13.5069 6167	12.7385 2811	12.0432 3951
44	15.3831 8202	14.4214 4327	13.5579 0810	12.7800 2615	12.0770 7362
45	15.4558 3209	14.4802 2842	13.6055 2159	12.8186 2898	12.1084 0150
46	15.5243 6990	14.5354 2575	13.6500 2018	12.8545 3858	12.1374 0880
47	15.5890 2821	14.5872 5422	13.6916 0764	12.8879 4287	12.1642 6741
48	15.6500 2661	14.6359 1946	13.7304 7443	12.9190 1662	12.1891 3649
49	15.7075 7227	14.6816 1451	13.7667 9853	12.9479 2244	12.2121 6341
50	15.7618 6064	14.7245 2067	13.8007 4629	12.9748 1157	12.2334 8464

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.0025 (¼ %)	.004167 (5/12 %)	.005 (½ %)	.005833 (7/12 %)	.0075 (¾ %)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0025 0000	2.0041 6667	2.0050 0000	2.0058 3333	2.0075 0000
3	3.0075 0625	3.0125 1736	3.0150 2500	3.0175 3403	3.0225 5625
4	4.0150 2502	4.0250 6952	4.0301 0013	4.0351 3631	4.0452 2542
5	5.0250 6258	5.0418 4064	5.0502 5063	5.0586 7460	5.0755 6461
6	6.0376 2523	6.0628 4831	6.0755 0188	6.0881 8354	6.1136 3135
7	7.0527 1930	7.0881 1018	7.1058 7939	7.1236 9794	7.1594 8358
8	8.0703 5110	8.1176 4397	8.1414 0879	8.1652 5285	8.2131 7971
9	9.0905 2697	9.1514 6749	9.1821 1583	9.2128 8349	9.2747 7856
10	10.1132 5329	10.1895 9860	10.2280 2641	10.2666 2531	10.3443 3940
11	11.1385 3642	11.2320 5526	11.2791 6654	11.3265 1396	11.4219 2194
12	12.1663 8277	12.2788 5549	12.3355 6237	12.3925 8529	12.5075 8636
13	13.1967 9872	13.3300 1739	13.3972 4018	13.4648 7537	13.6013 9325
14	14.2297 9072	14.3855 5913	14.4642 2639	14.5434 2048	14.7034 0370
15	15.2653 6520	15.4454 9896	15.5365 4752	15.6282 5710	15.8136 7923
16	16.3035 2861	16.5098 5520	16.6142 3026	16.7194 2193	16.9322 8183
17	17.3442 8743	17.5786 4627	17.6973 0141	17.8169 5189	18.0592 7394
18	18.3876 4815	18.6518 9063	18.7857 8791	18.9208 8411	19.1947 1849
19	19.4336 1727	19.7296 0684	19.8797 1685	20.0312 5593	20.3386 7888
20	20.4822 0131	20.8118 1353	20.9791 1544	21.1481 0493	21.4912 1897
21	21.5334 0682	21.8985 2942	22.0840 1101	22.2714 6887	22.6524 0312
22	22.5872 4033	22.9897 7330	23.1944 3107	23.4013 8577	23.8222 9614
23	23.6437 0843	24.0855 6402	24.3104 0323	24.5378 9386	25.0009 6336
24	24.7028 1770	25.1859 2053	25.4319 5524	25.6810 3157	26.1884 7059
25	25.7645 7475	26.2908 6187	26.5591 1502	26.8308 3759	27.3848 8411
26	26.8289 8619	27.4004 0713	27.6919 1059	27.9873 5081	28.5902 7075
27	27.8960 5865	28.5145 7549	28.8303 7015	29.1506 1036	29.8046 9778
28	28.9657 9880	29.6333 8622	29.9745 2200	30.3206 5558	31.0282 3301
29	30.0382 1330	30.7568 5866	31.1243 9461	31.4975 2607	32.2609 4476
30	31.1133 0883	31.8850 1224	32.2800 1658	32.6812 6164	33.5029 0184
31	32.1910 9210	33.0178 6646	33.4414 1666	33.8719 0233	34.7541 7361
32	33.2715 6983	34.1554 4090	34.6086 2375	35.0694 8843	36.0148 2991
33	34.3547 4876	35.2977 5524	35.7816 6686	36.2740 6045	37.2849 4113
34	35.4406 3563	36.4448 2922	36.9605 7520	37.4856 5913	38.5645 7819
35	36.5292 3722	37.5966 8268	38.1453 7807	38.7043 2548	39.8538 1253
36	37.6205 6031	38.7533 3552	39.3361 0497	39.9301 0071	41.1527 1612
37	38.7146 1171	39.9148 0775	40.5327 8549	41.1630 2630	42.4613 6149
38	39.8113 9824	41.0811 1945	41.7354 4942	42.4031 4395	43.7798 2170
39	40.9109 2674	42.2522 9078	42.9441 2666	43.6504 9562	45.1081 7037
40	42.0132 0405	43.4283 4199	44.1588 4730	44.9051 2352	46.4464 8164
41	43.1182 3706	44.6092 9342	45.3796 4153	46.1670 7007	47.7948 3026
42	44.2260 3265	45.7951 6547	46.6065 3974	47.4363 7798	49.1532 9148
43	45.3365 9774	46.9859 7866	47.8395 7244	48.7130 9018	50.5219 4117
44	46.4499 3923	48.1817 5357	49.0787 7030	49.9972 4988	51.9008 5573
45	47.5660 6408	49.3825 1088	50.3241 6415	51.2889 0050	53.2901 1215
46	48.6849 7924	50.5882 7134	51.5757 8498	52.5880 8575	54.6897 8799
47	49.8066 9169	51.7990 5581	52.8336 6390	53.8948 4959	56.0999 6140
48	50.9312 0842	53.0148 8521	54.0978 3222	55.2092 3621	57.5207 1111
49	52.0585 3644	54.2357 8056	55.3683 2138	56.5312 9009	58.9521 1644
50	53.1886 8278	55.4617 6298	56.6451 6299	57.8610 5595	60.3942 5732

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $S_{\overline{n|}\,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.0025 (1/4 %)	.004167 (5/12 %)	.005 (1/2 %)	.005833 (7/12 %)	.0075 (3/4 %)
50	53.1886 828	55.4617 630	56.6451 630	57.8610 559	60.3942 573
51	54.3216 545	56.6928 537	57.9283 888	59.1985 788	61.8472 142
52	55.4574 586	57.9290 739	59.2180 307	60.5439 038	63.3110 684
53	56.5961 023	59.1704 450	60.5141 209	61.8970 766	64.7859 014
54	57.7375 925	60.4169 885	61.8166 915	63.2581 429	66.2717 956
55	58.8819 365	61.6687 260	63.1257 750	64.6271 487	67.7688 341
56	60.0291 413	62.9256 790	64.4414 038	66.0041 404	69.2771 003
57	61.1792 142	64.1878 694	65.7636 109	67.3891 646	70.7966 786
58	62.3321 622	65.4553 188	67.0924 289	68.7822 680	72.3276 537
59	63.4879 926	66.7280 493	68.4278 911	70.1834 979	73.8701 111
60	64.6467 126	68.0060 828	69.7700 305	71.5929 016	75.4241 369
61	65.8083 294	69.2894 415	71.1188 807	73.0105 269	76.9898 180
62	66.9728 502	70.5781 475	72.4744 751	74.4364 216	78.5672 416
63	68.1402 824	71.8722 231	73.8368 474	75.8706 341	80.1564 959
64	69.3106 331	73.1716 907	75.2060 317	77.3132 128	81.7576 696
65	70.4839 096	74.4765 728	76.5820 618	78.7642 065	83.3708 521
66	71.6601 194	75.7868 918	77.9649 721	80.2236 644	84.9961 335
67	72.8392 697	77.1026 706	79.3547 970	81.6916 358	86.6336 045
68	74.0213 679	78.4239 317	80.7515 710	83.1681 703	88.2833 566
69	75.2064 213	79.7506 981	82.1553 288	84.6533 180	89.9454 817
70	76.3944 374	81.0829 926	83.5661 055	86.1471 290	91.6200 729
71	77.5854 235	82.4208 384	84.9839 360	87.6496 539	93.3072 234
72	78.7793 870	83.7642 586	86.4088 557	89.1609 436	95.0070 276
73	79.9763 355	85.1132 753	87.8409 000	90.6810 491	96.7195 803
74	81.1762 763	86.4679 150	89.2801 045	92.2100 219	98.4449 771
75	82.3792 170	87.8281 980	90.7265 050	93.7479 137	100.1833 145
76	83.5851 651	89.1941 488	92.1801 375	95.2947 765	101.9346 893
77	84.7941 280	90.5657 911	93.6410 382	96.8506 627	103.6991 995
78	86.0061 133	91.9431 485	95.1092 434	98.4156 249	105.4769 435
79	87.2211 286	93.3262 450	96.5847 896	99.9897 160	107.2680 206
80	88.4391 814	94.7151 044	98.0677 136	101.5729 894	109.0725 307
81	89.6602 793	96.1097 506	99.5580 521	103.1654 985	110.8905 747
82	90.8844 300	97.5102 079	101.0558 424	104.7672 972	112.7222 540
83	92.1116 411	98.9165 004	102.5611 216	106.3784 398	114.5676 709
84	93.3419 202	100.3286 525	104.0739 272	107.9989 807	116.4269 284
85	94.5752 750	101.7466 886	105.5942 969	109.6289 748	118.3001 304
86	95.8117 132	103.1706 331	107.1222 683	111.2684 771	120.1873 814
87	97.0512 425	104.6005 108	108.6578 797	112.9175 432	122.0887 867
88	98.2938 706	106.0363 462	110.2011 691	114.5762 289	124.0044 526
89	99.5396 053	107.4781 643	111.7521 749	116.2445 902	125.9344 860
90	100.7884 543	108.9259 900	113.3109 358	117.9226 837	127.8789 947
91	102.0404 254	110.3798 483	114.8774 905	119.6105 660	129.8380 871
92	103.2955 265	111.8397 643	116.4518 779	121.3082 943	131.8118 728
93	104.5537 653	113.3057 634	118.0341 373	123.0159 260	133.8004 618
94	105.8151 497	114.7778 707	119.6243 080	124.7335 189	135.8039 653
95	107.0796 876	116.2561 118	121.2224 295	126.4611 311	137.8224 951
96	108.3473 868	117.7405 123	122.8285 417	128.1988 210	139.8561 638
97	109.6182 553	119.2310 978	124.4426 844	129.9466 475	141.9050 850
98	110.8923 009	120.7278 940	126.0648 978	131.7046 696	143.9693 731
99	112.1695 317	122.2309 269	127.6952 223	133.4729 468	146.0491 434
100	113.4499 555	123.7402 224	129.3336 984	135.2515 390	148.1445 120

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $S_{\overline{n|}\,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 ($1\frac{1}{8}$%)	.0125 ($1\frac{1}{4}$%)	.015 ($1\frac{1}{2}$%)	.0175 ($1\frac{3}{4}$%)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0100 0000	2.0112 5000	2.0125 0000	2.0150 0000	2.0175 0000
3	3.0301 0000	3.0338 7656	3.0376 5625	3.0452 2500	3.0528 0625
4	4.0604 0100	4.0680 0767	4.0756 2695	4.0909 0338	4.1062 3036
5	5.1010 0501	5.1137 7276	5.1265 7229	5.1522 6693	5.1780 8939
6	6.1520 1506	6.1713 0270	6.1906 5444	6.2295 5093	6.2687 0596
7	7.2135 3521	7.2407 2986	7.2680 3762	7.3229 9419	7.3784 0831
8	8.2856 7056	8.3221 8807	8.3588 8809	8.4328 3911	8.5075 3045
9	9.3685 2727	9.4158 1269	9.4633 7420	9.5593 3169	9.6564 1224
10	10.4622 1254	10.5217 4058	10.5816 6637	10.7027 2167	10.8253 9945
11	11.5668 3467	11.6401 1016	11.7139 3720	11.8632 6249	12.0148 4394
12	12.6825 0301	12.7710 6140	12.8603 6142	13.0412 1143	13.2251 0371
13	13.8093 2804	13.9147 3584	14.0211 1594	14.2368 2960	14.4565 4303
14	14.9474 2132	15.0712 7662	15.1963 7988	15.4503 8205	15.7095 3253
15	16.0968 9554	16.2408 2848	16.3863 3463	16.6821 3778	16.9844 4935
16	17.2578 6449	17.4235 3780	17.5911 6382	17.9323 6984	18.2816 7721
17	18.4304 4314	18.6195 5260	18.8110 5336	19.2013 5539	19.6016 0656
18	19.6147 4757	19.8290 2257	20.0461 9153	20.4893 7572	20.9446 3468
19	20.8108 9504	21.0520 9907	21.2967 6893	21.7967 1636	22.3111 6578
20	22.0190 0399	22.2889 3519	22.5629 7854	23.1236 6710	23.7016 1119
21	23.2391 9403	23.5396 8571	23.8450 1577	24.4705 2211	25.1163 8938
22	24.4715 8598	24.8045 0717	25.1430 7847	25.8375 7994	26.5559 2620
23	25.7163 0183	26.0835 5788	26.4573 6695	27.2251 4364	28.0206 5490
24	26.9734 6485	27.3769 9790	27.7880 8403	28.6335 2080	29.5110 1637
25	28.2431 9950	28.6849 8913	29.1354 3508	30.0630 2361	31.0274 5915
26	29.5256 3150	30.0076 9526	30.4996 2802	31.5139 6896	32.5704 3969
27	30.8208 8781	31.3452 8183	31.8808 7337	32.9866 7850	34.1404 2238
28	32.1299 9669	32.6979 1625	33.2793 8429	34.4814 7867	35.7378 7977
29	33.4503 8766	34.0657 6781	34.6953 7659	35.9987 0085	37.3632 9267
30	34.7848 9153	35.4490 0769	36.1290 6880	37.5386 8137	39.0171 5029
31	36.1327 4045	36.8478 0903	37.5806 8216	39.1017 6159	40.6999 5042
32	37.4940 6785	38.2623 4688	39.0504 4069	40.6882 8801	42.4121 9955
33	38.8690 0853	39.6927 9829	40.5385 7120	42.2986 1233	44.1544 1305
34	40.2576 9862	41.1393 4227	42.0453 0334	43.9330 9152	45.9271 1527
35	41.6602 7560	42.6021 5987	43.5708 6963	45.5920 8789	47.7308 3979
36	43.0768 7836	44.0814 3417	45.1155 0550	47.2759 6921	49.5661 2949
37	44.5076 4714	45.5773 5030	46.6794 4932	48.9351 0874	51.4335 3675
38	45.9527 2361	47.0900 9549	48.2629 4243	50.7198 8538	53.3336 2365
39	47.4122 5085	48.6198 5906	49.8662 2921	52.4806 8366	55.2669 6206
40	48.8863 7336	50.1668 3248	51.4895 5708	54.2678 9391	57.2341 3390
41	50.3752 3709	51.7312 0934	53.1331 7654	56.0819 1232	59.2357 3124
42	51.8789 8946	53.3131 8545	54.7973 4125	57.9231 4100	61.2723 5654
43	53.3977 7936	54.9129 5879	56.4823 0801	59.7919 8812	63.3446 2278
44	54.9317 5715	56.5307 2957	58.1883 3686	61.6858 6794	65.4531 5367
45	56.4810 7472	58.1667 0028	59.9156 9108	63.6142 0096	67.5985 8386
46	58.0458 8547	59.8210 7566	61.6646 3721	65.5684 1398	69.7815 5908
47	59.6263 4432	61.4940 6276	63.4354 4518	67.5519 4018	72.0027 3637
48	61.2226 0777	63.1858 7097	65.2283 8824	69.5652 1929	74.2627 8425
49	62.8348 3385	64.8967 1201	67.0437 4310	71.6086 9758	76.5623 8298
50	64.4631 8218	66.6268 0002	68.8817 8989	73.6828 2804	78.9022 2468

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1+i)^n$

Τελική ἀξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπί n χρονικές περιόδους.

.0025 (¼%)	.004167 (5/12%)	.005 (½%)	.005833 (7/12%)	.0075 (¾%)
1.0025 0000	1.0041 6667	1.0050 0000	1.0058 3333	1.0075 0000
1.0050 0625	1.0083 5069	1.0100 2500	1.0117 0069	1.0150 5625
1.0075 1877	1.0125 5216	1.0150 7513	1.0176 0228	1.0226 6917
1.0100 3756	1.0167 7112	1.0201 5050	1.0235 3830	1.0303 3919
1.0125 6266	1.0210 0767	1.0252 5125	1.0295 0894	1.0380 6673
1.0150 9406	1.0252 6187	1.0303 7751	1.0355 1440	1.0458 5224
1.0176 3180	1.0295 3379	1.0355 2940	1.0415 5490	1.0536 9613
1.0201 7588	1.0338 2352	1.0407 0704	1.0476 3064	1.0615 9885
1.0227 2632	1.0381 3111	1.0459 1058	1.0537 4182	1.0695 6084
1.0252 8313	1.0424 5666	1.0511 4013	1.0598 8865	1.0775 8255
1.0278 4634	1.0468 0023	1.0563 9583	1.0660 7133	1.0856 6441
1.0304 1596	1.0511 6190	1.0616 7781	1.0722 9008	1.0938 0690
1.0329 9200	1.0555 4174	1.0669 8620	1.0785 4511	1.1020 1045
1.0355 7448	1.0599 3983	1.0723 2113	1.0848 3662	1.1102 7553
1.0381 6341	1.0643 5625	1.0776 8274	1.0911 6483	1.1186 0259
1.0407 5882	1.0687 9106	1.0830 7115	1.0975 2996	1.1269 9211
1.0433 6072	1.0732 4436	1.0884 8651	1.1039 3222	1.1354 4455
1.0459 6912	1.0777 1621	1.0939 2894	1.1103 7182	1.1439 6039
1.0485 8404	1.0822 0670	1.0993 9858	1.1168 4899	1.1525 4009
1.0512 0550	1.0867 1589	1.1048 9558	1.1233 6395	1.1611 8414
1.0538 3352	1.0912 4387	1.1104 2006	1.1299 1690	1.1698 9302
1.0564 6810	1.0957 9072	1.1159 7216	1.1365 0808	1.1786 6722
1.0591 0927	1.1003 5652	1.1215 5202	1.1431 3771	1.1875 0723
1.0617 5704	1.1049 4134	1.1271 5978	1.1498 0602	1.1964 1353
1.0644 1144	1.1095 4526	1.1327 9558	1.1565 1322	1.2053 8663
1.0670 7247	1.1141 6836	1.1384 5955	1.1632 5955	1.2144 2703
1.0697 4015	1.1188 1073	1.1441 5185	1.1700 4523	1.2235 3523
1.0724 1450	1.1234 7244	1.1498 7261	1.1768 7049	1.2327 1175
1.0750 9553	1.1281 5358	1.1556 2197	1.1837 3557	1.2419 5709
1.0777 8327	1.1328 5422	1.1614 0008	1.1906 4069	1.2512 7176
1.0804 7773	1.1375 7444	1.1672 0708	1.1975 8610	1.2606 5630
1.0831 7892	1.1423 1434	1.1730 4312	1.2045 7202	1.2701 1122
1.0858 8687	1.1470 7398	1.1789 0833	1.2115 9869	1.2796 3706
1.0886 0159	1.1518 5346	1.1848 0288	1.2186 6634	1.2892 3434
1.0913 2309	1.1566 5284	1.1907 2689	1.2257 7523	1.2989 0359
1.0940 5140	1.1614 7223	1.1966 8052	1.2329 2559	1.3086 4537
1.0967 8653	1.1663 1170	1.2026 6393	1.2401 1765	1.3184 6021
1.0995 2850	1.1711 7133	1.2086 7725	1.2473 5167	1.3283 4866
1.1022 7732	1.1760 5121	1.2147 2063	1.2546 2789	1.3383 1128
1.1050 3301	1.1809 5142	1.2207 9424	1.2619 4655	1.3483 4861
1.1077 9559	1.1858 7206	1.2268 9821	1.2693 0791	1.3584 6123
1.1105 6508	1.1908 1319	1.2330 3270	1.2767 1220	1.3686 4969
1.1133 4149	1.1957 7491	1.2391 9786	1.2841 5969	1.3789 1456
1.1161 2485	1.2007 5731	1.2453 9385	1.2916 5062	1.3892 5642
1.1189 1516	1.2057 6046	1.2516 2082	1.2991 8525	1.3996 7584
1.1217 1245	1.2107 8446	1.2578 7892	1.3067 6383	1.4101 7341
1.1245 1673	1.2158 2940	1.2641 6832	1.3143 8662	1.4207 4971
1.1273 2802	1.2208 9536	1.2704 8916	1.3220 5388	1.4314 0533
1.1301 4634	1.2259 8242	1.2768 4161	1.3297 6586	1.4421 4087
1.1329 7171	1.2310 9068	1.2832 2581	1.3375 2283	1.4529 5693

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0200 0000	2.0225 0000	2.0250 0000	2.0275 0000	2.0300 0000
3	3.0604 0000	3.0680 0625	3.0756 2500	3.0832 5625	3.0909 0000
4	4.1216 0800	4.1370 3639	4.1525 1563	4.1680 4580	4.1836 2700
5	5.2040 4016	5.2301 1971	5.2563 2852	5.2826 6706	5.3091 3581
6	6.3081 2096	6.3477 9740	6.3877 3673	6.4279 4040	6.4684 0988
7	7.4342 8338	7.4906 2284	7.5474 3015	7.6047 0876	7.6624 6218
8	8.5829 6905	8.6591 6186	8.7361 1590	8.8138 3825	8.8923 3605
9	9.7546 2843	9.8539 9300	9.9545 1880	10.0562 1880	10.1591 0613
10	10.9497 2100	11.0757 0784	11.2033 8177	11.3327 6482	11.4638 7931
11	12.1687 1542	12.3249 1127	12.4834 6631	12.6444 1585	12.8077 9569
12	13.4120 8973	13.6022 2177	13.7955 5297	13.9921 3729	14.1920 2956
13	14.6803 3152	14.9082 7176	15.1404 4179	15.3769 2107	15.6177 9045
14	15.9739 3815	16.2437 0788	16.5189 5284	16.7997 8639	17.0863 2416
15	17.2934 1692	17.6091 9130	17.9319 2666	18.2617 8052	18.5989 1389
16	18.6392 8525	19.0053 9811	19.3802 2483	19.7639 7948	20.1568 8130
17	20.0120 7096	20.4330 1957	20.8647 3045	21.3074 8892	21.7615 8774
18	21.4123 1238	21.8927 6251	22.3863 4871	22.8934 4487	23.4144 3537
19	22.8405 5863	23.3853 4966	23.9460 0743	24.5230 1460	25.1168 6844
20	24.2973 6980	24.9115 2003	25.5446 5761	26.1973 9750	26.8703 7449
21	25.7833 1719	26.4720 2923	27.1832 7405	27.9178 2593	28.6764 8572
22	27.2989 8354	28.0676 4989	28.8628 5590	29.6855 6615	30.5367 8030
23	28.8449 6321	29.6991 7201	30.5844 2730	31.5019 1921	32.4528 8370
24	30.4218 6247	31.3674 0338	32.3490 3798	33.3682 2199	34.4264 7022
25	32.0302 9972	33.0731 6996	34.1577 6393	35.2858 4810	36.4592 6432
26	33.6709 0572	34.8173 1628	36.0117 0803	37.2562 0892	38.5530 4225
27	35.3443 2383	36.6007 0590	37.9120 0073	39.2807 5467	40.7096 3352
28	37.0512 1031	38.4242 2178	39.8598 0075	41.3609 7542	42.9309 2252
29	38.7922 3451	40.2887 6677	41.8562 9577	43.4984 0224	45.2188 5020
30	40.5680 7921	42.1952 6402	43.9027 0316	45.6946 0831	47.5754 1571
31	42.3794 4079	44.1446 5746	46.0002 7074	47.9512 1003	50.0026 7818
32	44.2270 2961	46.1379 1226	48.1502 7751	50.2698 6831	52.5027 5852
33	46.1115 7020	48.1760 1528	50.3540 3445	52.6522 8969	55.0778 4128
34	48.0338 0160	50.2599 7563	52.6128 8531	55.1002 2765	57.7301 7652
35	49.9944 7763	52.3908 2508	54.9282 0744	57.6154 8391	60.4620 8181
36	51.9943 6719	54.5696 1864	57.3014 1263	60.1999 0972	63.2759 4427
37	54.0342 5453	56.7974 3506	59.7339 4794	62.8554 0724	66.1742 2259
38	56.1149 3962	59.0753 7735	62.2272 9664	65.5839 3094	69.1594 4927
39	58.2372 3841	61.4045 7334	64.7829 7906	68.3874 8904	72.2342 3275
40	60.4019 8318	63.7861 7624	67.4025 5354	71.2681 4499	75.4012 5973
41	62.6100 2284	66.2213 6521	70.0876 1737	74.2280 1898	78.6632 9753
42	64.8622 2330	68.7113 4592	72.8398 0781	77.2692 8950	82.0231 9645
43	67.1594 6777	71.2573 5121	75.6608 0300	80.3941 9496	85.4838 9234
44	69.5026 5712	73.8606 4161	78.5523 2308	83.6050 3532	89.0484 0911
45	71.8927 1027	76.5225 0605	81.5161 3116	86.9041 7379	92.7198 6139
46	74.3305 6447	79.2442 6243	84.5540 3443	90.2940 3857	96.5014 5723
47	76.8171 7576	82.0272 5834	87.6678 8530	93.7771 2463	100.3965 0095
48	79.3535 1928	84.8728 7165	90.8595 8243	97.3559 9556	104.4083 9598
49	81.9405 8966	87.7825 1126	94.1310 7199	101.0332 8544	108.5406 4785
50	84.5794 0145	90.7576 1776	97.4843 4879	104.8117 0079	112.7968 6729

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.02 (2 %)	.0225 (2¼ %)	.025 (2½ %)	.0275 (2¾ %)	.03 (3 %)
50	84.5794 015	90.7576 178	97.4843 488	104.8117 008	112.7968 673
51	87.2709 895	93.7096 642	100.9214 575	108.6940 226	117.1807 733
52	90.0164 093	96.9101 566	104.4444 939	112.6831 082	121.6961 965
53	92.8167 375	100.0906 351	108.0556 063	116.7818 937	126.3470 824
54	95.6730 722	103.3426 744	111.7569 965	120.9933 957	131.1374 949
55	98.5865 337	106.6678 846	115.5509 214	125.3207 141	136.0716 197
56	101.5582 643	110.0679 120	119.4396 944	129.7670 337	141.1537 683
57	104.5894 296	113.5444 400	123.4256 868	134.3356 272	146.3883 814
58	107.6812 182	117.0991 899	127.5113 289	139.0298 569	151.7800 328
59	110.8348 426	120.7339 217	131.6991 121	143.8531 780	157.3334 338
60	114.0515 394	124.4504 349	135.9915 900	148.8091 404	163.0534 368
61	117.3325 702	128.2505 697	140.3913 797	153.9013 917	168.9450 399
62	120.6792 216	132.1362 075	144.9011 642	159.1336 800	175.0133 911
63	124.0928 060	136.1092 722	149.5236 933	164.5098 562	181.2637 928
64	127.5746 622	140.1717 308	154.2617 856	170.0338 773	187.7017 066
65	131.1261 554	144.3255 948	159.1183 303	175.7098 089	194.3327 578
66	134.7486 785	148.5729 207	164.0962 885	181.5418 286	201.1627 406
67	138.4436 521	152.9158 114	169.1986 957	187.5342 289	208.1976 228
68	142.2125 251	157.3564 171	174.4286 631	193.6914 202	215.4435 515
69	146.0567 756	161.8969 365	179.7893 797	200.0179 343	222.9068 580
70	149.9779 111	166.5396 176	185.2841 142	206.5184 275	230.5940 637
71	153.9774 694	171.2867 590	190.9162 171	213.1976 842	238.5118 856
72	158.0570 188	176.1407 111	196.6891 225	220.0606 205	246.6672 422
73	162.2181 591	181.1038 771	202.6063 506	227.1122 876	255.0672 595
74	166.4625 223	186.1787 143	208.6715 093	234.3578 755	263.7192 773
75	170.7917 728	191.3677 354	214.8862 970	241.8027 171	272.6308 556
76	175.2076 082	196.6735 094	221.2605 045	249.4522 918	281.8097 813
77	179.7117 604	202.0986 634	227.7920 171	257.3122 298	291.2640 747
78	184.3059 956	207.6458 833	234.4868 175	265.3883 162	301.0019 969
79	188.9921 155	213.3179 157	241.3489 880	273.6864 948	311.0320 568
80	193.7719 578	219.1175 688	248.3827 126	282.2128 735	321.3630 185
81	198.6473 970	225.0477 141	255.5922 805	290.9737 275	332.0039 091
82	203.6203 449	231.1112 876	262.9820 875	299.9755 050	342.9640 264
83	208.6927 518	237.3112 916	270.5566 397	309.2248 314	354.2529 472
84	213.8666 068	243.6507 957	278.3205 557	318.7285 142	365.8805 356
85	219.1439 390	250.1329 386	286.2785 695	328.4935 484	377.8569 517
86	224.5268 178	256.7609 297	294.4355 338	338.5271 209	390.1926 602
87	230.0173 541	263.5380 506	302.7964 221	348.8366 168	402.8984 400
88	235.6177 012	270.4676 567	311.3663 327	359.4296 237	415.9853 932
89	241.3300 552	277.5531 790	320.1504 910	370.3139 384	429.4649 550
90	247.1566 563	284.7981 255	329.1542 533	381.4975 717	443.3489 037
91	253.0997 894	292.2060 834	338.3831 096	392.9887 549	457.6493 708
92	259.1617 852	299.7807 202	347.8426 873	404.7959 457	472.3788 519
93	265.3450 209	307.5257 865	357.5387 545	416.9278 342	487.5502 174
94	271.6519 214	315.4451 166	367.4772 234	429.3933 496	503.1767 240
95	278.0849 598	323.5426 318	377.6641 540	442.2016 667	519.2720 257
96	284.6466 590	331.8223 410	388.1057 578	455.3622 126	535.8501 865
97	291.3395 922	340.2883 437	398.8084 018	468.8846 734	552.9256 920
98	298.1663 840	348.9448 314	409.7786 118	482.7790 019	570.5134 628
99	305.1297 117	357.7960 901	421.0230 771	497.0554 245	588.6288 667
100	312.2323 059	366.8465 021	432.5486 540	511.7244 487	607.2877 327

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.035 (3½ %)	.04 (4 %)	.045 (4½ %)	.05 (5 %)	.055 (5½ %)
1	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000
2	2.0350 000	2.0400 000	2.0450 000	2.0500 000	2.0550 000
3	3.1062 250	3.1216 000	3.1370 250	3.1525 000	3.1680 250
4	4.2149 429	4.2464 640	4.2781 911	4.3101 250	4.3422 664
5	5.3624 659	5.4163 226	5.4707 097	5.5256 313	5.5810 910
6	6.5501 522	6.6329 755	6.7168 917	6.8019 128	6.8880 510
7	7.7794 075	7.8982 945	8.0191 518	8.1420 085	8.2668 938
8	9.0516 868	9.2142 263	9.3800 136	9.5491 089	9.7215 730
9	10.3684 958	10.5827 953	10.8021 142	11.0265 643	11.2562 595
10	11.7313 932	12.0061 071	12.2882 094	12.5778 925	12.8753 538
11	13.1419 919	13.4863 514	13.8411 788	14.2067 872	14.5834 982
12	14.6019 616	15.0258 055	15.4640 318	15.9171 265	16.3855 907
13	16.1130 303	16.6268 377	17.1599 133	17.7129 828	18.2867 981
14	17.6769 864	18.2919 112	18.9321 094	19.5986 320	20.2925 720
15	19.2956 809	20.0235 876	20.7840 543	21.5785 636	22.4086 635
16	20.9710 297	21.8245 311	22.7193 367	23.6574 918	24.6411 400
17	22.7050 157	23.6975 124	24.7417 069	25.8403 664	26.9964 027
18	24.4996 913	25.6454 129	26.8550 837	28.1323 847	29.4812 048
19	26.3571 805	27.6712 294	29.0635 625	30.5390 039	32.1026 711
20	28.2796 818	29.7780 786	31.3714 228	33.0659 541	34.8683 180
21	30.2694 707	31.9692 017	33.7831 368	35.7192 518	37.7860 755
22	32.3289 022	34.2479 698	36.3033 780	38.5052 144	40.8643 097
23	34.4604 137	36.6178 886	38.9370 300	41.4304 751	44.1118 467
24	36.6665 282	39.0826 041	41.6891 963	44.5019 989	47.5379 983
25	38.9498 567	41.6459 083	44.5652 101	47.7270 988	51.1525 882
26	41.3131 017	44.3117 446	47.5706 446	51.1134 538	54.9659 805
27	43.7590 602	47.0842 144	50.7113 236	54.6691 264	58.9891 094
28	46.2906 273	49.9675 830	53.9933 332	58.4025 828	63.2335 105
29	48.9107 993	52.9662 863	57.4230 332	62.3227 119	67.7113 535
30	51.6226 773	56.0849 378	61.0070 697	66.4388 475	72.4354 780
31	54.4294 710	59.3283 353	64.7523 878	70.7607 899	77.4194 293
32	57.3345 025	62.7014 687	68.6662 452	75.2988 294	82.6774 979
33	60.3412 101	66.2095 274	72.7562 263	80.0637 708	88.2247 603
34	63.4531 524	69.8579 085	77.0302 565	85.0669 594	94.0771 221
35	66.6740 127	73.6522 249	81.4966 180	90.3203 074	100.2513 638
36	70.0076 032	77.5983 138	86.1639 658	95.8363 227	106.7651 888
37	73.4578 693	81.7022 464	91.0413 443	101.6281 389	113.6372 742
38	77.0288 947	85.9703 363	96.1382 048	107.7095 458	120.8873 242
39	80.7249 060	90.4091 497	101.4644 240	114.0950 231	128.5361 271
40	84.5502 777	95.0255 157	107.0303 231	120.7997 742	136.6056 141
41	88.5095 375	99.8265 363	112.8466 876	127.8397 630	145.1189 228
42	92.6073 713	104.8195 978	118.9247 885	135.2317 511	154.1004 636
43	96.8486 293	110.0123 817	125.2764 040	142.9933 387	163.5759 891
44	101.2383 313	115.4128 770	131.9138 422	151.1430 056	173.5726 685
45	105.7816 729	121.0293 920	138.8499 651	159.7001 559	184.1191 653
46	110.4840 314	126.8705 677	146.0982 135	168.6851 637	195.2457 194
47	115.3509 725	132.9453 904	153.6726 331	178.1194 218	206.9842 339
48	120.3882 566	139.2632 060	161.5879 016	188.0253 929	219.3683 668
49	125.6018 456	145.8337 343	169.8593 572	198.4266 626	232.4336 270
50	130.9979 102	152.6670 837	178.5030 283	209.3479 957	246.2174 764

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $S_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική ἀξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας n ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	.06 (6 %)	.065 (6½ %)	.07 (7 %)	.075 (7½ %)	.08 (8 %)
1	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000
2	2.0600 000	2.0650 000	2.0700 000	2.0750 000	2.0800 000
3	3.1836 000	3.1992 250	3.2149 000	3.2306 250	3.2464 000
4	4.3746 160	4.4071 746	4.4399 430	4.4729 219	4.5061 120
5	5.6370 930	5.6936 410	5.7507 390	5.8083 910	5.8666 010
6	6.9753 185	7.0637 276	7.1532 907	7.2440 203	7.3359 290
7	8.3938 376	8.5228 699	8.6540 211	8.7873 219	8.9228 034
8	9.8974 679	10.0768 565	10.2598 026	10.4463 710	10.6366 276
9	11.4913 160	11.7318 522	11.9779 887	12.2298 488	12.4875 578
10	13.1807 949	13.4944 225	13.8164 480	14.1470 875	14.4865 625
11	14.9716 426	15.3715 600	15.7835 993	16.2081 191	16.6454 875
12	16.8699 412	17.3707 114	17.8884 513	18.4237 280	18.9771 265
13	18.8821 377	19.4998 076	20.1406 429	20.8055 076	21.4952 966
14	21.0150 659	21.7672 951	22.5504 879	23.3659 207	24.2149 203
15	23.2759 699	24.1821 693	25.1290 220	26.1183 647	27.1521 139
16	25.6725 281	26.7540 103	27.8880 536	29.0772 421	30.3242 830
17	28.2128 798	29.4930 210	30.8402 173	32.2580 352	33.7502 257
18	30.9056 525	32.4100 674	33.9990 325	35.6773 879	37.4502 437
19	33.7599 917	35.5167 218	37.3789 648	39.3531 919	41.4462 632
20	36.7855 912	38.8253 087	40.9954 923	43.3046 813	45.7619 643
21	39.9927 267	42.3489 537	44.8651 768	47.5525 324	50.4229 214
22	43.3922 903	46.1016 357	49.0057 392	52.1189 724	55.4567 552
23	46.9958 277	50.0982 420	53.4361 409	57.0278 953	60.8932 956
24	50.8155 774	54.3546 278	58.1766 708	62.3049 874	66.7647 592
25	54.8645 120	58.8876 786	63.2490 377	67.9778 615	73.1059 400
26	59.1563 827	63.7153 777	68.6764 704	74.0762 011	79.9544 151
27	63.7057 657	68.8568 772	74.4838 233	80.6319 162	87.3507 684
28	68.5281 116	74.3325 743	80.6976 909	87.6793 099	95.3388 298
29	73.6397 983	80.1641 916	87.3465 293	95.2552 582	103.9659 362
30	79.0581 862	86.3748 640	94.4607 863	103.3994 025	113.2832 111
31	84.8016 774	92.9892 302	102.0730 414	112.1543 577	123.3458 680
32	90.8897 780	100.0335 302	110.2181 543	121.5659 345	134.2135 374
33	97.3431 647	107.5357 096	118.9334 251	131.6833 796	145.9506 204
34	104.1837 546	115.5255 308	128.2587 648	142.5596 331	158.6266 701
35	111.4347 799	124.0346 903	138.2368 784	154.2516 056	172.3168 037
36	119.1208 667	133.0969 451	148.9134 598	166.8204 760	187.1021 480
37	127.2681 187	142.7482 466	160.3374 020	180.3320 117	203.0703 198
38	135.9042 058	153.0268 826	172.5610 202	194.8569 126	220.3159 454
39	145.0584 581	163.9736 300	185.6402 916	210.4711 810	238.9412 210
40	154.7619 656	175.6319 159	199.6351 120	227.2565 196	259.0565 187
41	165.0476 836	188.0479 904	214.6095 698	245.3007 586	280.7810 402
42	175.9505 446	201.2711 098	230.6322 397	264.6983 155	304.2435 234
43	187.5075 772	215.3537 320	247.7764 965	285.5506 891	329.5830 053
44	199.7580 319	230.3517 245	266.1208 513	307.9669 908	356.9496 457
45	212.7435 138	246.3245 866	285.7493 108	332.0645 151	386.5056 174
46	226.5081 246	263.3356 848	306.7517 626	357.9693 537	418.4260 668
47	241.0986 121	281.4525 043	329.2243 860	385.8170 553	452.9001 521
48	256.5645 288	300.7469 170	353.2700 930	415.7533 344	490.1321 643
49	272.9584 006	321.2954 666	378.9989 995	447.9348 345	530.3427 374
50	290.3359 046	343.1796 720	406.5289 295	482.5299 471	573.7701 564

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n|}\,i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	$\frac{1}{4}$%	$\frac{1}{3}$%	$\frac{5}{12}$%	$\frac{1}{2}$%	$\frac{7}{12}$%	$\frac{2}{3}$%	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4993 7578	0.4991 6805	0.4989 6050	0.4987 5312	0.4985 4591	0.4983 3887	2
3	0.3325 0139	0.3322 2469	0.3319 4829	0.3316 7221	0.3313 9643	0.3311 2095	3
4	0.2490 6445	0.2487 5347	0.2484 4291	0.2481 3279	0.2478 2310	0.2475 1384	4
5	0.1990 0250	0.1986 7110	0.1983 4026	0.1980 0997	0.1976 8024	0.1973 5105	5
6	0.1656 2803	0.1652 8317	0.1649 3898	0.1645 9546	0.1642 5260	0.1639 1042	6
7	0.1417 8928	0.1414 3491	0.1410 8133	0.1407 2854	0.1403 7653	0.1400 2531	7
8	0.1239 1035	0.1235 4895	0.1231 8845	0.1228 2886	0.1224 7018	0.1221 1240	8
9	0.1100 0462	0.1096 3785	0.1092 7209	0.1089 0736	0.1085 4365	0.1081 8096	9
10	0.0988 8015	0.0985 0915	0.0981 3929	0.0977 7057	0.0974 0299	0.0970 3654	10
11	0.0897 7840	0.0894 0402	0.0890 3090	0.0886 5903	0.0882 8842	0.0879 1905	11
12	0.0821 9370	0.0818 1657	0.0814 4082	0.0810 6643	0.0806 9341	0.0803 2176	12
13	0.0757 7595	0.0753 9656	0.0750 1866	0.0746 4224	0.0742 6730	0.0738 9385	13
14	0.0702 7510	0.0698 9383	0.0695 1416	0.0691 3609	0.0687 5962	0.0638 8474	14
15	0.0655 0777	0.0651 2491	0.0647 4378	0.0643 6436	0.0639 8666	0.0636 1067	15
16	0.0613 3642	0.0609 5223	0.0605 6988	0.0601 8937	0.0598 1068	0.0594 3382	16
17	0.0576 5587	0.0572 7056	0.0568 8720	0.0565 0579	0.0561 2632	0.0557 4880	17
18	0.0543 8433	0.0539 9807	0.0536 1387	0.0532 3173	0.0528 5165	0.0524 7363	18
19	0.0514 5722	0.0510 7015	0.0506 8525	0.0503 0253	0.0499 2198	0.0495 4361	19
20	0.0488 2288	0.0484 3511	0.0480 4963	0.0476 6645	0.0472 8556	0.0469 0696	20
21	0.0464 3947	0.0460 5111	0.0456 6517	0.0452 8163	0.0449 0050	0.0445 2176	21
22	0.0442 7278	0.0438 8393	0.0434 9760	0.0431 1380	0.0427 3251	0.0423 5374	22
23	0.0422 9455	0.0419 0528	0.0415 1865	0.0411 3465	0.0407 5329	0.0403 7456	23
24	0.0404 8121	0.0400 9159	0.0397 0472	0.0393 2061	0.0389 3925	0.0385 6062	24
25	0.0388 1298	0.0384 2307	0.0380 3603	0.0376 5186	0.0372 7055	0.0368 9210	25
26	0.0372 7312	0.0368 8297	0.0364 9581	0.0361 1163	0.0357 3043	0.0353 5220	26
27	0.0358 4736	0.0354 5702	0.0350 6978	0.0346 8565	0.0343 0460	0.0339 2664	27
28	0.0345 2347	0.0341 3299	0.0337 4572	0.0333 6167	0.0329 8082	0.0326 0317	28
29	0.0332 9093	0.0329 0033	0.0325 1307	0.0321 2914	0.0317 4853	0.0313 7123	29
30	0.0321 4059	0.0317 4992	0.0313 6270	0.0309 7892	0.0305 9857	0.0302 2166	30
31	0.0310 6449	0.0306 7378	0.0302 8663	0.0299 0304	0.0295 2299	0.0291 4649	31
32	0.0300 5569	0.0296 6496	0.0292 7791	0.0288 9453	0.0285 1482	0.0281 3875	32
33	0.0291 0806	0.0287 1734	0.0283 3041	0.0279 4727	0.0275 6791	0.0271 9231	33
34	0.0282 1620	0.0278 2551	0.0274 3873	0.0270 5586	0.0266 7687	0.0263 0176	34
35	0.0273 7533	0.0269 8470	0.0265 9809	0.0262 1550	0.0258 3691	0.0254 6231	35
36	0.0265 8121	0.0261 9065	0.0258 0423	0.0254 2194	0.0250 4376	0.0246 6970	36
37	0.0258 3004	0.0254 3957	0.0250 5336	0.0246 7139	0.0242 9365	0.0239 2013	37
38	0.0251 1843	0.0247 2808	0.0243 4208	0.0239 6045	0.0235 8316	0.0232 1020	38
39	0.0244 4335	0.0240 5311	0.0236 6736	0.0232 8607	0.0229 0925	0.0225 3687	39
40	0.0238 0204	0.0234 1194	0.0230 2644	0.0226 4552	0.0222 6917	0.0218 9739	40
41	0.0231 9204	0.0228 0209	0.0224 1685	0.0220 3631	0.0216 6046	0.0212 8928	41
42	0.0226 1112	0.0222 2133	0.0218 3637	0.0214 5622	0.0210 8087	0.0207 1031	42
43	0.0220 5724	0.0216 6762	0.0212 8295	0.0209 0320	0.0205 2836	0.0201 5843	43
44	0.0215 2855	0.0211 3912	0.0207 5474	0.0203 7541	0.0200 0110	0.0196 3180	44
45	0.0210 2339	0.0206 3415	0.0202 5008	0.0198 7117	0.0194 9740	0.0191 2875	45
46	0.0205 4022	0.0201 5118	0.0197 6743	0.0193 8894	0.0190 1571	0.0186 4772	46
47	0.0200 7762	0.0196 8880	0.0193 0537	0.0189 2733	0.0185 5465	0.0181 8732	47
48	0.0196 3433	0.0192 4572	0.0188 6263	0.0184 8503	0.0181 1291	0.0177 4626	48
49	0.0192 0915	0.0188 2077	0.0184 3801	0.0180 6087	0.0176 8932	0.0173 2334	49
50	0.0188 0099	0.0184 1285	0.0180 3044	0.0176 5376	0.0172 8278	0.0169 1749	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
51	0.0184 0886	0.0180 2096	0.0176 3891	0.0172 6269	0.0168 9230	0.0165 2770	51
52	0.0180 3184	0.0176 4418	0.0172 6249	0.0168 8675	0.0165 1694	0.0161 5304	52
53	0.0176 6906	0.0172 8165	0.0169 0033	0.0165 2507	0.0161 5585	0.0157 9266	53
54	0.0173 1974	0.0169 3259	0.0165 5164	0.0161 7686	0.0158 0824	0.0154 4576	54
55	0.0169 8314	0.0165 9625	0.0162 1567	0.0158 4139	0.0154 7337	0.0151 1160	55
56	0.0166 5858	0.0162 7196	0.0158 9176	0.0155 1797	0.0151 5056	0.0147 8951	56
57	0.0163 4542	0.0159 5907	0.0155 7927	0.0152 0598	0.0148 3918	0.0144 7885	57
58	0.0160 4308	0.0156 5701	0.0152 7760	0.0149 0481	0.0145 3863	0.0141 7903	58
59	0.0157 5101	0.0153 6522	0.0149 8620	0.0146 1392	0.0142 4836	0.0138 8949	59
60	0.0154 6869	0.0150 8319	0.0147 0457	0.0143 3280	0.0139 6787	0.0136 0973	60
61	0.0151 9564	0.0148 1043	0.0144 3221	0.0140 6096	0.0136 9666	0.0133 3926	61
62	0.0149 3142	0.0145 4650	0.0141 6869	0.0137 9796	0.0134 3428	0.0130 7763	62
63	0.0146 7561	0.0142 9098	0.0139 1358	0.0135 4337	0.0131 8033	0.0128 2442	63
64	0.0144 2780	0.0140 4348	0.0136 6649	0.0132 9681	0.0129 3440	0.0125 7923	64
65	0.0141 8764	0.0138 0361	0.0134 2704	0.0130 5789	0.0126 9612	0.0123 4171	65
66	0.0139 5476	0.0135 7105	0.0131 9489	0.0128 2627	0.0124 6515	0.0121 1149	66
67	0.0137 2886	0.0133 4545	0.0129 6972	0.0126 0163	0.0122 4116	0.0118 8825	67
68	0.0135 0961	0.0131 2652	0.0127 5121	0.0123 8366	0.0120 2383	0.0116 7168	68
69	0.0132 9674	0.0129 1395	0.0125 3908	0.0121 7206	0.0118 1289	0.0114 6150	69
70	0.0130 8996	0.0127 0749	0.0123 3304	0.0119 6657	0.0116 0805	0.0112 5742	70
71	0.0128 8902	0.0125 0687	0.0121 3285	0.0117 6693	0.0114 0906	0.0110 5919	71
72	0.0126 9368	0.0123 1185	0.0119 3827	0.0115 7289	0.0112 1567	0.0108 6657	72
73	0.0125 0370	0.0121 2220	0.0117 4905	0.0113 8422	0.0110 2766	0.0106 7933	73
74	0.0123 1887	0.0119 3769	0.0115 6498	0.0112 0070	0.0108 4481	0.0104 9725	74
75	0.0121 3898	0.0117 5813	0.0113 8586	0.0110 2214	0.0106 6690	0.0103 2011	75
76	0.0119 6385	0.0115 8332	0.0112 1150	0.0108 4832	0.0104 9375	0.0101 4773	76
77	0.0117 9327	0.0114 1308	0.0110 4170	0.0106 7908	0.0103 2517	0.0099 7993	77
78	0.0116 2708	0.0112 4722	0.0108 7629	0.0105 1423	0.0101 6099	0.0098 1652	78
79	0.0114 6511	0.0110 8559	0.0107 1510	0.0103 5360	0.0100 0103	0.0096 5733	79
80	0.0113 0721	0.0109 2802	0.0105 5798	0.0101 9704	0.0098 4514	0.0095 0222	80
81	0.0111 5321	0.0107 7436	0.0104 0477	0.0100 4439	0.0096 9316	0.0093 5102	81
82	0.0110 0298	0.0106 2447	0.0102 5534	0.0098 9552	0.0095 4496	0.0092 0360	82
83	0.0108 5639	0.0104 7822	0.0101 0954	0.0097 5028	0.0094 0040	0.0090 5982	83
84	0.0107 1330	0.0103 3547	0.0099 6724	0.0096 0855	0.0092 5935	0.0089 1955	84
85	0.0105 7359	0.0101 9610	0.0098 2833	0.0094 7021	0.0091 2168	0.0087 8266	85
86	0.0104 3714	0.0100 6000	0.0096 9268	0.0093 3513	0.0089 8727	0.0086 4904	86
87	0.0103 0384	0.0099 2704	0.0095 6018	0.0092 0320	0.0088 5602	0.0085 1857	87
88	0.0101 7357	0.0097 9713	0.0094 3073	0.0090 7431	0.0087 2781	0.0083 9115	88
89	0.0100 4625	0.0096 7015	0.0093 0422	0.0089 4837	0.0086 0255	0.0082 6667	89
90	0.0099 2177	0.0095 4602	0.0091 8055	0.0088 2527	0.0084 8013	0.0081 4504	90
91	0.0098 0004	0.0094 2464	0.0090 5962	0.0087 0493	0.0083 6047	0.0080 2616	91
92	0.0096 8096	0.0093 0592	0.0089 4136	0.0085 8724	0.0082 4346	0.0079 0994	92
93	0.0095 6446	0.0091 8976	0.0088 2568	0.0084 7213	0.0081 2903	0.0077 9629	93
94	0.0094 5044	0.0090 7610	0.0087 1248	0.0083 5950	0.0080 1709	0.0076 8514	94
95	0.0093 3884	0.0089 6485	0.0086 0170	0.0082 4930	0.0079 0757	0.0075 7641	95
96	0.0092 2957	0.0088 5594	0.0084 9325	0.0081 4143	0.0078 0038	0.0074 7001	96
97	0.0091 2257	0.0087 4929	0.0083 8707	0.0080 3583	0.0076 9547	0.0073 6588	97
98	0.0090 1776	0.0086 4484	0.0082 8309	0.0079 3242	0.0075 9275	0.0072 6394	98
99	0.0089 1508	0.0085 4252	0.0081 8124	0.0078 3115	0.0074 9216	0.0071 6415	99
100	0.0088 1446	0.0084 4226	0.0080 8145	0.0077 3194	0.0073 9363	0.0070 6642	100

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|\, i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	$\frac{1}{4}$%	$\frac{1}{3}$%	$\frac{5}{12}$%	$\frac{1}{2}$%	$\frac{7}{12}$%	$\frac{2}{3}$%	n
101	0.0087 1584	0.0083 4400	0.0079 8366	0.0076 3473	0.0072 9711	0.0069 7069	101
102	0.0086 1917	0.0082 4769	0.0078 8782	0.0075 3947	0.0072 0254	0.0068 7690	102
103	0.0085 2439	0.0081 5327	0.0077 9387	0.0074 4610	0.0071 0986	0.0067 8501	103
104	0.0084 3144	0.0080 6068	0.0077 0175	0.0073 5457	0.0070 1901	0.0066 9495	104
105	0.0083 4027	0.0079 6987	0.0076 1142	0.0072 648[illegible]	0.0069 2994	0.0066 0668	105
106	0.0082 5082	0.0078 8079	0.0075 2281	0.0071 7679	0.0068 4261	0.0065 2013	106
107	0.0081 6307	0.0077 9340	0.0074 3589	0.0070 9045	0.0067 5696	0.0064 3527	107
108	0.0080 7694	0.0077 0764	0.0073 5061	0.0070 0575	0.0066 7294	0.0063 5205	108
109	0.0079 9241	0.0076 2347	0.0072 6691	0.0069 2264	0.0065 9052	0.0062 7042	109
110	0.0079 0942	0.0075 4084	0.0071 8476	0.0068 4107	0.0065 0965	0.0061 9033	110
111	0.0078 2793	0.0074 5972	0.0071 0412	0.0067 6102	0.0064 3028	0.0061 1175	111
112	0.0077 4791	0.0073 8007	0.0070 2495	0.0066 8242	0.0063 5237	0.0060 3464	112
113	0.0076 6932	0.0073 0184	0.0069 4720	0.0066 0526	0.0062 7590	0.0059 5895	113
114	0.0075 9211	0.0072 2500	0.0068 7083	0.0065 2948	0.0062 0081	0.0058 8465	114
115	0.0075 1626	0.0071 4952	0.0067 9582	0.0064 5506	0.0061 2708	0.0058 1171	115
116	0.0074 4172	0.0070 7535	0.0067 2213	0.0063 8195	0.0060 5466	0.0057 4008	116
117	0.0073 6846	0.0070 0246	0.0066 4973	0.0063 1013	0.0059 8353	0.0056 6974	117
118	0.0072 9646	0.0069 3082	0.0065 7857	0.0062 3956	0.0059 1365	0.0056 0065	118
119	0.0072 2567	0.0068 6041	0.0065 0863	0.0061 7021	0.0058 4499	0.0055 3278	119
120	0.0071 5607	0.0067 9118	0.0064 3988	0.0061 0205	0.0057 7751	0.0054 6609	120
121	0.0070 8764	0.0067 2311	0.0063 7230	0.0060 3505	0.0057 1120	0.0054 0057	121
122	0.0070 2033	0.0066 5617	0.0063 0584	0.0059 6918	0.0056 4602	0.0053 3618	122
123	0.0069 5412	0.0065 9034	0.0062 4049	0.0059 0441	0.0055 8194	0.0052 7289	123
124	0.0068 8899	0.0065 2558	0.0061 7621	0.0058 4072	0.0055 1894	0.0052 1067	124
125	0.0068 2491	0.0064 6188	0.0061 1298	0.0057 7808	0.0054 5700	0.0051 4951	125
126	0.0067 6186	0.0063 9919	0.0060 5078	0.0057 1647	0.0053 9607	0.0050 8937	126
127	0.0066 9981	0.0063 3751	0.0059 8959	0.0056 5586	0.0053 3615	0.0050 3024	127
128	0.0066 3873	0.0062 7681	0.0059 2937	0.0055 9623	0.0052 7721	0.0049 7208	128
129	0.0065 7861	0.0062 1707	0.0058 7010	0.0055 3755	0.0052 1922	0.0049 1488	129
130	0.0065 1942	0.0061 5825	0.0058 1177	0.0054 7981	0.0051 6216	0.0048 5861	130
131	0.0064 6115	0.0061 0035	0.0057 5435	0.0054 2298	0.0051 0602	0.0048 0325	131
132	0.0064 0376	0.0060 4334	0.0056 9782	0.0053 6703	0.0050 5077	0.0047 4878	132
133	0.0063 4725	0.0059 8720	0.0056 4216	0.0053 1197	0.0049 9639	0.0046 9518	133
134	0.0062 9159	0.0059 3191	0.0055 8736	0.0052 5775	0.0049 4286	0.0046 4244	134
135	0.0062 3675	0.0058 7745	0.0055 3339	0.0052 0436	0.0048 9016	0.0045 9052	135
136	0.0061 8274	0.0058 2381	0.0054 8023	0.0051 5179	0.0048 3828	0.0045 3942	136
137	0.0061 2952	0.0057 7097	0.0054 2787	0.0051 0002	0.0047 8719	0.0044 8911	137
138	0.0060 7707	0.0057 1890	0.0053 7628	0.0050 4902	0.0047 3688	0.0044 3959	138
139	0.0060 2539	0.0056 6760	0.0053 2546	0.0049 9879	0.0046 8733	0.0043 9082	139
140	0.0059 7446	0.0056 1704	0.0052 7539	0.0049 4930	0.0046 3853	0.0043 4280	140
141	0.0059 2425	0.0055 6721	0.0052 2604	0.0049 0055	0.0045 9046	0.0042 9551	141
142	0.0058 7476	0.0055 1809	0.0051 7741	0.0048 5250	0.0045 4311	0.0042 4893	142
143	0.0058 2597	0.0054 6968	0.0051 2948	0.0048 0516	0.0044 9645	0.0042 0305	143
144	0.0057 7787	0.0054 2195	0.0050 8224	0.0047 5850	0.0044 5048	0.0041 5786	144
145	0.0057 3043	0.0053 7489	0.0050 3566	0.0047 1252	0.0044 0518	0.0041 1333	145
146	0.0056 8365	0.0053 2849	0.0049 8975	0.0046 6718	0.0043 6053	0.0040 6947	146
147	0.0056 3752	0.0052 8273	0.0049 4447	0.0046 2250	0.0043 1653	0.0040 2624	147
148	0.0055 9201	0.0052 3760	0.0048 9983	0.0045 7844	0.0042 7316	0.0039 8364	148
149	0.0055 4712	0.0051 9309	0.0048 5580	0.0045 3500	0.0042 3040	0.0039 4166	149
150	0.0055 0284	0.0051 4919	0.0048 1238	0.0044 9217	0.0041 8825	0.0039 0029	150

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n|}\,i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4981 3200	0.4975 1244	0.4968 9441	0.4962 7792	0.4956 6295	0.4950 4950	2
3	0.3308 4579	0.3300 2211	0.3292 0117	0.3283 8296	0.3275 6746	0.3267 5467	3
4	0.2472 0501	0.2462 8109	0.2453 6102	0.2444 4479	0.2435 3237	0.2426 2375	4
5	0.1970 2242	0.1960 3980	0.1950 6211	0.1940 8932	0.1931 2142	0.1921 5839	5
6	0.1635 6891	0.1625 4837	0.1615 3381	0.1605 2521	0.1595 2256	0.1585 2581	6
7	0.1396 7488	0.1386 2828	0.1375 8872	0.1365 5616	0.1355 3059	0.1345 1196	7
8	0.1217 5552	0.1206 9029	0.1196 3314	0.1185 8402	0.1175 4292	0.1165 0980	8
9	0.1078 1929	0.1067 4036	0.1056 7055	0.1046 0982	0.1035 5813	0.1025 1544	9
10	0.0966 7123	0.0955 8208	0.0945 0307	0.0934 3418	0.0923 7534	0.0913 2653	10
11	0.0875 5094	0.0864 5408	0.0853 6839	0.0842 9384	0.0832 3038	0.0821 7794	11
12	0.0799 5148	0.0788 4879	0.0777 5831	0.0766 7999	0.0756 1377	0.0745 5960	12
13	0.0735 2188	0.0724 1482	0.0713 2100	0.0702 4036	0.0691 7283	0.0681 1835	13
14	0.0680 1146	0.0669 0117	0.0658 0515	0.0647 2332	0.0636 5562	0.0626 0197	14
15	0.0632 3639	0.0621 2378	0.0610 2646	0.0599 4436	0.0588 7739	0.0578 2547	15
16	0.0590 5879	0.0579 4460	0.0568 4672	0.0557 6508	0.0546 9958	0.0536 5013	16
17	0.0553 7321	0.0542 5806	0.0531 6023	0.0520 7966	0.0510 1623	0.0499 6984	17
18	0.0520 9766	0.0509 8205	0.0498 8479	0.0488 0578	0.0477 4492	0.0467 0210	18
19	0.0491 6740	0.0480 5175	0.0469 5548	0.0458 7847	0.0448 2061	0.0437 8177	19
20	0.0465 3063	0.0454 1531	0.0443 2039	0.0432 4574	0.0421 9122	0.0411 5672	20
21	0.0441 4543	0.0430 3075	0.0419 3749	0.0408 6550	0.0398 1464	0.0387 8477	21
22	0.0419 7748	0.0408 6372	0.0397 7238	0.0387 0332	0.0376 5638	0.0366 3140	22
23	0.0399 9846	0.0388 8584	0.0377 9666	0.0367 3075	0.0356 8796	0.0346 6810	23
24	0.0381 8474	0.0370 7347	0.0359 8665	0.0349 2410	0.0338 8565	0.0328 7110	24
25	0.0365 1650	0.0354 0675	0.0343 2247	0.0332 6345	0.0322 2952	0.0312 2044	25
26	0.0349 7693	0.0338 6888	0.0327 8729	0.0317 3196	0.0307 0269	0.0296 9923	26
27	0.0335 5176	0.0324 4553	0.0313 6677	0.0303 1527	0.0292 9079	0.0282 9309	27
28	0.0322 2871	0.0311 2444	0.0300 4863	0.0290 0108	0.0279 8151	0.0269 8967	28
29	0.0309 9723	0.0298 9502	0.0288 2228	0.0277 7878	0.0267 6424	0.0257 7836	29
30	0.0298 4816	0.0287 4811	0.0276 7854	0.0266 3919	0.0256 2975	0.0246 4992	30
31	0.0287 7352	0.0276 7573	0.0266 0942	0.0255 7430	0.0245 7005	0.0235 9635	31
32	0.0277 6634	0.0266 7089	0.0256 0791	0.0245 7710	0.0235 7812	0.0226 1061	32
33	0.0268 2048	0.0257 2744	0.0246 6786	0.0236 4144	0.0226 4779	0.0216 8653	33
34	0.0259 3053	0.0248 3997	0.0237 8387	0.0227 6189	0.0217 7363	0.0208 1867	34
35	0.0250 9170	0.0240 0368	0.0229 5111	0.0219 3363	0.0209 5082	0.0200 0221	35
36	0.0242 9973	0.0232 1431	0.0221 6533	0.0211 5240	0.0201 7507	0.0192 3285	36
37	0.0235 5082	0.0224 6805	0.0214 2270	0.0204 1437	0.0194 4257	0.0185 0678	37
38	0.0228 4157	0.0217 6150	0.0207 1983	0.0197 1613	0.0187 4990	0.0178 2057	38
39	0.0221 6893	0.0210 9160	0.0200 5365	0.0190 5463	0.0180 9399	0.0171 7114	39
40	0.0215 3016	0.0204 5560	0.0194 2141	0.0184 2710	0.0174 7209	0.0165 5575	40
41	0.0209 2276	0.0198 5102	0.0188 2063	0.0178 3106	0.0168 8170	0.0159 7188	41
42	0.0203 4452	0.0192 7563	0.0182 4906	0.0172 6426	0.0163 2057	0.0154 1729	42
43	0.0197 9338	0.0187 2737	0.0177 0466	0.0167 2465	0.0157 8666	0.0148 8993	43
44	0.0192 6751	0.0182 0441	0.0171 8557	0.0162 1038	0.0152 7810	0.0143 8794	44
45	0.0187 6521	0.0177 0505	0.0166 9012	0.0157 1976	0.0147 9321	0.0139 0962	45
46	0.0182 8495	0.0172 2775	0.0162 1675	0.0152 5125	0.0143 3043	0.0134 5342	46
47	0.0178 2532	0.0167 7111	0.0157 6406	0.0148 0342	0.0138 8836	0.0130 1792	47
48	0.0173 8504	0.0163 3384	0.0153 3075	0.0143 7500	0.0134 6569	0.0126 0184	48
49	0.0169 6292	0.0159 1474	0.0149 1563	0.0139 6478	0.0130 6124	0.0122 0396	49
50	0.0165 5787	0.0155 1273	0.0145 1763	0.0135 7168	0.0126 7391	0.0118 2321	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|\,i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	¾%	1%	1¼%	1½%	1¾%	2%	n
51	0.0161 6888	0.0151 2680	0.0141 3571	0.0131 9469	0.0123 0269	0.0114 5856	51
52	0.0157 9503	0.0147 5603	0.0137 6897	0.0128 3287	0.0119 4665	0.0111 0909	52
53	0.0154 3546	0.0143 9956	0.0134 1653	0.0124 8537	0.0116 0492	0.0107 7392	53
54	0.0150 8938	0.0140 5658	0.0130 7760	0.0121 5138	0.0112 7672	0.0104 5226	54
55	0.0147 5605	0.0137 2637	0.0127 5145	0.0118 3018	0.0109 6129	0.0101 4337	55
56	0.0144 3478	0.0134 0824	0.0124 3739	0.0115 2106	0.0106 5795	0.0098 4656	56
57	0.0141 2496	0.0131 0156	0.0121 3478	0.0112 2341	0.0103 6606	0.0095 6120	57
58	0.0138 2597	0.0128 0573	0.0118 4303	0.0109 3661	0.0100 8503	0.0092 8667	58
59	0.0135 3727	0.0125 2020	0.0115 6158	0.0106 6012	0.0098 1430	0.0090 2243	59
60	0.0132 5836	0.0122 4445	0.0112 8993	0.0103 9343	0.0095 5336	0.0087 6797	60
61	0.0129 8873	0.0119 7800	0.0110 2758	0.0101 3604	0.0093 0172	0.0085 2278	61
62	0.0127 2795	0.0117 2041	0.0107 7410	0.0098 8751	0.0090 5892	0.0082 8643	62
63	0.0124 7560	0.0114 7125	0.0105 2904	0.0096 4741	0.0088 2455	0.0080 5848	63
64	0.0122 3127	0.0112 3013	0.0102 9203	0.0094 1534	0.0085 9821	0.0078 3855	64
65	0.0119 9460	0.0109 9667	0.0100 6268	0.0091 9094	0.0083 7952	0.0076 2624	65
66	0.0117 6524	0.0107 7052	0.0098 4065	0.0089 7386	0.0081 6813	0.0074 2122	66
67	0.0115 4286	0.0105 5136	0.0096 2560	0.0087 6376	0.0079 6372	0.0072 2316	67
68	0.0113 2716	0.0103 3889	0.0094 1724	0.0085 6033	0.0077 6597	0.0070 3173	68
69	0.0111 1785	0.0101 3280	0.0092 1527	0.0083 6329	0.0075 7459	0.0068 4665	69
70	0.0109 1464	0.0099 3282	0.0090 1941	0.0081 7235	0.0073 8930	0.0066 6765	70
71	0.0107 1728	0.0097 3870	0.0088 2941	0.0079 8727	0.0072 0985	0.0064 9446	71
72	0.0105 2554	0.0095 5019	0.0086 4501	0.0078 0779	0.0070 3600	0.0063 2683	72
73	0.0103 3917	0.0093 6706	0.0084 6600	0.0076 3368	0.0068 6750	0.0061 6454	73
74	0.0101 5796	0.0091 8910	0.0082 9215	0.0074 6473	0.0067 0413	0.0060 0736	74
75	0.0099 8170	0.0090 1609	0.0081 2325	0.0073 0072	0.0065 4570	0.0058 5508	75
76	0.0098 1020	0.0088 4784	0.0079 5910	0.0071 4146	0.0063 9200	0.0057 0751	76
77	0.0096 4328	0.0086 8416	0.0077 9953	0.0069 8676	0.0062 4285	0.0055 6447	77
78	0.0094 8074	0.0085 2488	0.0076 4436	0.0068 3645	0.0060 9806	0.0054 2576	78
79	0.0093 2244	0.0083 6983	0.0074 9341	0.0066 9036	0.0059 5748	0.0052 9123	79
80	0.0091 6821	0.0082 1885	0.0073 4652	0.0065 4832	0.0058 2093	0.0051 6071	80
81	0.0090 1790	0.0080 7179	0.0072 0356	0.0064 1019	0.0056 8828	0.0050 3405	81
82	0.0088 7136	0.0079 2851	0.0070 6437	0.0062 7583	0.0055 5936	0.0049 1110	82
83	0.0087 2847	0.0077 8887	0.0069 2881	0.0061 4509	0.0054 3406	0.0047 9173	83
84	0.0085 8908	0.0076 5273	0.0067 9675	0.0060 1784	0.0053 1223	0.0046 7581	84
85	0.0084 5308	0.0075 1998	0.0066 6808	0.0058 9396	0.0051 9375	0.0045 6321	85
86	0.0083 2034	0.0073 9050	0.0065 4267	0.0057 7333	0.0050 7850	0.0044 5381	86
87	0.0081 9076	0.0072 6418	0.0064 2041	0.0056 5584	0.0049 6636	0.0043 4750	87
88	0.0080 6423	0.0071 4089	0.0063 0119	0.0055 4138	0.0048 5724	0.0042 4416	88
89	0.0079 4064	0.0070 2056	0.0061 8491	0.0054 2984	0.0047 5102	0.0041 4370	89
90	0.0078 1989	0.0069 0306	0.0060 7146	0.0053 2113	0.0046 4760	0.0040 4602	90
91	0.0077 0190	0.0067 8832	0.0059 6076	0.0052 1516	0.0045 4690	0.0039 5101	91
92	0.0075 8657	0.0066 7624	0.0058 5272	0.0051 1182	0.0044 4882	0.0038 5859	92
93	0.0074 7382	0.0065 6673	0.0057 4724	0.0050 1104	0.0043 5327	0.0037 6868	93
94	0.0073 6356	0.0064 5971	0.0056 4425	0.0049 1273	0.0042 6017	0.0036 8118	94
95	0.0072 5571	0.0063 5511	0.0055 4366	0.0048 1681	0.0041 6944	0.0035 9602	95
96	0.0071 5020	0.0062 5284	0.0054 4541	0.0047 2321	0.0040 8101	0.0035 1313	96
97	0.0070 4696	0.0061 5284	0.0053 4941	0.0046 3186	0.0039 9480	0.0034 3242	97
98	0.0069 4592	0.0060 5503	0.0052 5560	0.0045 4268	0.0039 1074	0.0033 5383	98
99	0.0068 4701	0.0059 5936	0.0051 6391	0.0044 5560	0.0038 2876	0.0032 7729	99
100	0.0067 5017	0.0058 6574	0.0050 7428	0.0043 7057	0.0037 4880	0.0032 0274	100

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n|}\,i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4938 2716	0.4926 1084	0.4914 0049	0.4901 9608	0.4889 9756	0.4878 0488	2
3	0.3251 3717	0.3235 3036	0.3219 3418	0.3203 4854	0.3187 7336	0.3172 0856	3
4	0.2408 1788	0.2390 2705	0.2372 5114	0.2354 9005	0.2337 4365	0.2320 1183	4
5	0.1902 4686	0.1883 5457	0.1864 8137	0.1846 2711	0.1827 9164	0.1809 7480	5
6	0.1565 4997	0.1545 9750	0.1526 6821	0.1507 6190	0.1488 7839	0.1470 1747	6
7	0.1324 9543	0.1305 0635	0.1285 4449	0.1266 0961	0.1247 0147	0.1228 1982	7
8	0.1144 6735	0.1124 5639	0.1104 7665	0.1085 2783	0.1066 0965	0.1047 2181	8
9	0.1004 5689	0.0984 3386	0.0964 4601	0.0944 9299	0.0925 7447	0.0906 9008	9
10	0.0892 5876	0.0872 3051	0.0852 4137	0.0832 9094	0.0813 7882	0.0795 0457	10
11	0.0801 0596	0.0780 7745	0.0760 9197	0.0741 4904	0.0722 4818	0.0703 8889	11
12	0.0724 8713	0.0704 6209	0.0684 8395	0.0665 5217	0.0646 6619	0.0628 2541	12
13	0.0660 4827	0.0640 2954	0.0620 6157	0.0601 4373	0.0582 7535	0.0564 5577	13
14	0.0605 3652	0.0585 2634	0.0565 7073	0.0546 6897	0.0528 2032	0.0510 2397	14
15	0.0557 6646	0.0537 6658	0.0518 2507	0.0499 4110	0.0481 1381	0.0463 4229	15
16	0.0515 9899	0.0496 1085	0.0476 8483	0.0458 2000	0.0440 1537	0.0422 6991	16
17	0.0479 2777	0.0459 5253	0.0440 4313	0.0421 9852	0.0404 1758	0.0386 9914	17
18	0.0446 7008	0.0427 0870	0.0408 1684	0.0389 9333	0.0372 3690	0.0355 4622	18
19	0.0417 6062	0.0398 1388	0.0379 4033	0.0361 3862	0.0344 0734	0.0327 4501	19
20	0.0391 4713	0.0372 1571	0.0353 6108	0.0335 8175	0.0318 7614	0.0302 4259	20
21	0.0367 8733	0.0348 7178	0.0330 3659	0.0312 8011	0.0296 0057	0.0279 9611	21
22	0.0346 4661	0.0327 4739	0.0309 3207	0.0291 9881	0.0275 4565	0.0259 7051	22
23	0.0326 9638	0.0308 1390	0.0290 1880	0.0273 0906	0.0256 8249	0.0241 3682	23
24	0.0309 1282	0.0290 4742	0.0272 7283	0.0255 8683	0.0239 8703	0.0224 7090	24
25	0.0292 7592	0.0274 2787	0.0256 7404	0.0240 1196	0.0224 3903	0.0209 5246	25
26	0.0277 6875	0.0259 3829	0.0242 0540	0.0225 6738	0.0210 2137	0.0195 6432	26
27	0.0263 7687	0.0245 6421	0.0228 5241	0.0212 3854	0.0197 1946	0.0182 9186	27
28	0.0250 8793	0.0232 9323	0.0216 0265	0.0200 1298	0.0185 2081	0.0171 2253	28
29	0.0238 9127	0.0221 1467	0.0204 4538	0.0188 7993	0.0174 1461	0.0160 4551	29
30	0.0227 7764	0.0210 1926	0.0193 7133	0.0178 3010	0.0163 9154	0.0150 5144	30
31	0.0217 3900	0.0199 9893	0.0183 7240	0.0168 5535	0.0154 4345	0.0141 3212	31
32	0.0207 6831	0.0190 4662	0.0174 4150	0.0159 4859	0.0145 6320	0.0132 8042	32
33	0.0198 5938	0.0181 5612	0.0165 7242	0.0151 0357	0.0137 4453	0.0124 9004	33
34	0.0190 0675	0.0173 2196	0.0157 5966	0.0143 1477	0.0129 8191	0.0117 5545	34
35	0.0182 0558	0.0165 3929	0.0149 9835	0.0135 7732	0.0122 7045	0.0110 7171	35
36	0.0174 5158	0.0158 0379	0.0142 8416	0.0128 8688	0.0116 0578	0.0104 3446	36
37	0.0167 4090	0.0151 1162	0.0136 1325	0.0122 3957	0.0109 8402	0.0098 3979	37
38	0.0160 7012	0.0144 5934	0.0129 8214	0.0116 3192	0.0104 0169	0.0092 8423	38
39	0.0154 3615	0.0138 4385	0.0123 8775	0.0110 6083	0.0098 5567	0.0087 6462	39
40	0.0148 3623	0.0132 6238	0.0118 2728	0.0105 2349	0.0093 4315	0.0082 7816	40
41	0.0142 6786	0.0127 1241	0.0112 9822	0.0100 1738	0.0088 6158	0.0078 2229	41
42	0.0137 2876	0.0121 9167	0.0107 9828	0.0095 4020	0.0084 0868	0.0073 9471	42
43	0.0132 1688	0.0116 9811	0.0103 2539	0.0090 8989	0.0079 8235	0.0069 9333	43
44	0.0127 3037	0.0112 2985	0.0098 7768	0.0086 6454	0.0075 8071	0.0066 1625	44
45	0.0122 6751	0.0107 8518	0.0094 5343	0.0082 6246	0.0072 0202	0.0062 6173	45
46	0.0118 2676	0.0103 6254	0.0090 5108	0.0078 8205	0.0068 4471	0.0059 2820	46
47	0.0114 0669	0.0099 6051	0.0086 6919	0.0075 2189	0.0065 0734	0.0056 1421	47
48	0.0110 0599	0.0095 7777	0.0083 0646	0.0071 8065	0.0061 8858	0.0053 1843	48
49	0.0106 2348	0.0092 1314	0.0079 6167	0.0068 5712	0.0058 8722	0.0050 3965	49
50	0.0102 5806	0.0088 6549	0.0076 3371	0.0065 5020	0.0056 0215	0.0047 7674	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n|}\,i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	n
51	0.0099 0870	0.0085 3382	0.0073 2156	0.0062 5885	0.0053 3232	0.0045 2867	51
52	0.0095 7446	0.0082 1718	0.0070 2429	0.0059 8212	0.0050 7679	0.0042 9450	52
53	0.0092 5449	0.0079 1471	0.0067 4100	0.0057 1915	0.0048 3469	0.0040 7334	53
54	0.0089 4799	0.0076 2558	0.0064 7090	0.0054 6910	0.0046 0519	0.0038 6438	54
55	0.0086 5419	0.0073 4907	0.0062 1323	0.0052 3124	0.0043 8754	0.0036 6686	55
56	0.0083 7243	0.0070 8447	0.0059 6730	0.0050 0487	0.0041 8105	0.0034 8010	56
57	0.0081 0204	0.0068 3114	0.0057 3245	0.0047 8932	0.0039 8506	0.0033 0343	57
58	0.0078 4244	0.0065 8848	0.0055 0810	0.0045 8401	0.0037 9897	0.0031 3626	58
59	0.0075 9307	0.0063 5593	0.0052 9366	0.0043 8836	0.0036 2221	0.0029 7802	59
60	0.0073 5340	0.0061 3296	0.0050 8862	0.0042 0185	0.0034 5426	0.0028 2818	60
61	0.0071 2294	0.0059 1908	0.0048 9249	0.0040 2398	0.0032 9462	0.0026 8627	61
62	0.0069 0126	0.0057 1385	0.0047 0480	0.0038 5430	0.0031 4284	0.0025 5183	62
63	0.0066 8790	0.0055 1682	0.0045 2513	0.0036 9237	0.0029 9848	0.0024 2442	63
64	0.0064 8249	0.0053 2760	0.0043 5308	0.0035 3780	0.0028 6115	0.0023 0365	64
65	0.0062 8463	0.0051 4581	0.0041 8826	0.0033 9019	0.0027 3047	0.0021 8915	65
66	0.0060 9398	0.0049 7110	0.0040 3031	0.0032 4921	0.0026 0608	0.0020 8057	66
67	0.0059 1021	0.0048 0313	0.0038 7892	0.0031 1451	0.0024 8765	0.0019 7758	67
68	0.0057 3300	0.0046 4159	0.0037 3375	0.0029 8578	0.0023 7487	0.0018 7986	68
69	0.0055 6206	0.0044 8618	0.0035 9453	0.0028 6272	0.0022 6745	0.0017 8715	69
70	0.0053 9712	0.0043 3663	0.0034 6095	0.0027 4506	0.0021 6511	0.0016 9915	70
71	0.0052 3790	0.0041 9266	0.0033 3277	0.0026 3253	0.0020 6759	0.0016 1563	71
72	0.0050 8417	0.0040 5404	0.0032 0973	0.0025 2489	0.0019 7465	0.0015 3633	72
73	0.0049 3568	0.0039 2053	0.0030 9160	0.0024 2190	0.0018 8606	0.0014 6103	73
74	0.0047 9222	0.0037 9191	0.0029 7816	0.0023 2334	0.0018 0159	0.0013 8953	74
75	0.0046 5358	0.0036 6796	0.0028 6919	0.0022 2900	0.0017 2104	0.0013 2161	75
76	0.0045 1956	0.0035 4849	0.0027 6450	0.0021 3869	0.0016 4422	0.0012 5709	76
77	0.0043 8997	0.0034 3331	0.0026 6390	0.0020 5221	0.0015 7094	0.0011 9580	77
78	0.0042 6463	0.0033 2224	0.0025 6721	0.0019 6939	0.0015 0104	0.0011 3756	78
79	0.0041 4338	0.0032 1510	0.0024 7426	0.0018 9007	0.0014 3434	0.0010 8222	79
80	0.0040 2605	0.0031 1175	0.0023 8489	0.0018 1408	0.0013 7069	0.0010 2962	80
81	0.0039 1248	0.0030 1201	0.0022 9894	0.0017 4127	0.0013 0995	0.0009 7963	81
82	0.0038 0254	0.0029 1576	0.0022 1628	0.0016 7150	0.0012 5197	0.0009 3211	82
83	0.0036 9608	0.0028 2284	0.0021 3676	0.0016 0463	0.0011 9663	0.0008 8694	83
84	0.0035 9298	0.0027 3313	0.0020 6025	0.0015 4054	0.0011 4379	0.0008 4399	84
85	0.0034 9310	0.0026 4650	0.0019 8662	0.0014 7909	0.0010 9334	0.0008 0316	85
86	0.0033 9633	0.0025 6284	0.0019 1576	0.0014 2018	0.0010 4516	0.0007 6433	86
87	0.0033 0255	0.0024 8202	0.0018 4756	0.0013 6370	0.0009 9915	0.0007 2740	87
88	0.0032 1165	0.0024 0393	0.0017 8190	0.0013 0953	0.0009 5522	0.0006 9228	88
89	0.0031 2353	0.0023 2848	0.0017 1868	0.0012 5758	0.0009 1325	0.0006 5888	89
90	0.0030 3809	0.0022 5556	0.0016 5781	0.0012 0775	0.0008 7316	0.0006 2711	90
91	0.0029 5523	0.0021 8508	0.0015 9919	0.0011 5995	0.0008 3486	0.0005 9689	91
92	0.0028 7486	0.0021 1694	0.0015 4273	0.0011 1410	0.0007 9827	0.0005 6815	92
93	0.0027 9690	0.0020 5107	0.0014 8834	0.0010 7010	0.0007 6331	0.0005 4080	93
94	0.0027 2126	0.0019 8737	0.0014 3594	0.0010 2789	0.0007 2991	0.0005 1478	94
95	0.0026 4786	0.0019 2577	0.0013 8546	0.0009 8738	0.0006 9799	0.0004 9003	95
96	0.0025 7662	0.0018 6619	0.0013 3682	0.0009 4850	0.0006 6749	0.0004 6648	96
97	0.0025 0747	0.0018 0856	0.0012 8995	0.0009 1119	0.0006 3834	0.0004 4407	97
98	0.0024 4034	0.0017 5281	0.0012 4478	0.0008 7538	0.0006 1048	0.0004 2274	98
99	0.0023 7517	0.0016 9886	0.0012 0124	0.0008 4100	0.0005 8385	0.0004 0245	99
100	0.0023 1188	0.0016 4667	0.0011 5927	0.0008 0800	0.0005 5839	0.0003 8314	100

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικῆς μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά ἐξοφλεῖται δάνειο 1 νομισματικῆς μονάδας.

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4866 1800	0.4854 3689	0.4842 6150	0.4830 9179	0.4819 2771	0.4807 6923	2
3	0.3156 5407	0.3141 0981	0.3125 7570	0.3110 5167	0.3095 3763	0.3080 3351	3
4	0.2302 9449	0.2285 9149	0.2269 0274	0.2252 2812	0.2235 6751	0.2219 2080	4
5	0.1791 7644	0.1773 9640	0.1756 3454	0.1738 9069	0.1721 6472	0.1704 5645	5
6	0.1451 7895	0.1433 6263	0.1415 6831	0.1397 9580	0.1380 4489	0.1363 1539	6
7	0.1209 6442	0.1191 3502	0.1173 3137	0.1155 5322	0.1138 0032	0.1120 7240	7
8	0.1028 6401	0.1010 3594	0.0992 3730	0.0974 6776	0.0957 2702	0.0940 1476	8
9	0.0888 3946	0.0870 2224	0.0852 3803	0.0834 8647	0.0817 6716	0.0800 7971	9
10	0.0776 6777	0.0758 6796	0.0741 0469	0.0723 7750	0.0706 8593	0.0690 2949	10
11	0.0685 7065	0.0667 9294	0.0650 5521	0.0633 5690	0.0616 9747	0.0600 7634	11
12	0.0610 2923	0.0592 7703	0.0575 6817	0.0559 0199	0.0542 7783	0.0526 9502	12
13	0.0546 8426	0.0529 6011	0.0512 8256	0.0496 5085	0.0480 6420	0.0465 2181	13
14	0.0492 7912	0.0475 8491	0.0459 4048	0.0443 4494	0.0427 9737	0.0412 9685	14
15	0.0446 2560	0.0429 6276	0.0413 5278	0.0397 9462	0.0382 8724	0.0368 2954	15
16	0.0405 8254	0.0389 5214	0.0373 7757	0.0358 5765	0.0343 9116	0.0329 7687	16
17	0.0370 4197	0.0354 4480	0.0339 0633	0.0324 2519	0.0310 0003	0.0296 2943	17
18	0.0339 1992	0.0323 5654	0.0308 5461	0.0294 1260	0.0280 2896	0.0267 0210	18
19	0.0311 5006	0.0296 2086	0.0281 5575	0.0267 5301	0.0254 1090	0.0241 2763	19
20	0.0286 7933	0.0271 8456	0.0257 5640	0.0243 9293	0.0230 9219	0.0218 5221	20
21	0.0264 6478	0.0250 0455	0.0236 1333	0.0222 8900	0.0210 2937	0.0198 3225	21
22	0.0244 7123	0.0230 4557	0.0216 9120	0.0204 0577	0.0191 8687	0.0180 3207	22
23	0.0226 6965	0.0212 7848	0.0199 6078	0.0187 1393	0.0175 3528	0.0164 2217	23
24	0.0210 3580	0.0196 7900	0.0183 9770	0.0171 8902	0.0160 5008	0.0149 7796	24
25	0.0195 4935	0.0182 2672	0.0169 8148	0.0158 1052	0.0147 1067	0.0136 7878	25
26	0.0181 9307	0.0169 0435	0.0156 9480	0.0145 6103	0.0134 9961	0.0125 0713	26
27	0.0169 5228	0.0156 9717	0.0145 2288	0.0134 2573	0.0124 0204	0.0114 4810	27
28	0.0158 1440	0.0145 9255	0.0134 5305	0.0123 9193	0.0114 0520	0.0104 8891	28
29	0.0147 6857	0.0135 7961	0.0124 7440	0.0114 4865	0.0104 9811	0.0096 1654	29
30	0.0138 0539	0.0126 4891	0.0115 7744	0.0105 8640	0.0096 7124	0.0088 2743	30
31	0.0129 1665	0.0117 9222	0.0107 5393	0.0097 9691	0.0089 1628	0.0081 0728	31
32	0.0120 9519	0.0110 0234	0.0099 9665	0.0090 7292	0.0082 2599	0.0074 5081	32
33	0.0113 3469	0.0102 7293	0.0092 9924	0.0084 0807	0.0075 9397	0.0068 5163	33
34	0.0106 2958	0.0095 9843	0.0086 5610	0.0077 9674	0.0070 1461	0.0063 0411	34
35	0.0099 7493	0.0089 7386	0.0080 6226	0.0072 3396	0.0064 8291	0.0058 0326	35
36	0.0093 6635	0.0083 9483	0.0075 1332	0.0067 1531	0.0059 9447	0.0053 4467	36
37	0.0087 9993	0.0078 5743	0.0070 0534	0.0062 3685	0.0055 4533	0.0049 2440	37
38	0.0082 7217	0.0073 5812	0.0065 3480	0.0057 9505	0.0051 3197	0.0045 3894	38
39	0.0077 7991	0.0068 9377	0.0060 9854	0.0053 8676	0.0047 5124	0.0041 8513	39
40	0.0073 2034	0.0064 6154	0.0056 9373	0.0050 0914	0.0044 0031	0.0038 6016	40
41	0.0068 9090	0.0060 5886	0.0053 1779	0.0046 5962	0.0040 7663	0.0035 6149	41
42	0.0064 8927	0.0056 8342	0.0049 6842	0.0043 3591	0.0037 7789	0.0032 8684	42
43	0.0061 1337	0.0053 3312	0.0046 4352	0.0040 3590	0.0035 0201	0.0030 3414	43
44	0.0057 6128	0.0050 0606	0.0043 4119	0.0037 5769	0.0032 4710	0.0028 0152	44
45	0.0054 3127	0.0047 0050	0.0040 5968	0.0034 9957	0.0030 1146	0.0025 8728	45
46	0.0051 2175	0.0044 1485	0.0037 9743	0.0032 5996	0.0027 9354	0.0023 8991	46
47	0.0048 3129	0.0041 4768	0.0035 5300	0.0030 3744	0.0025 9190	0.0022 0799	47
48	0.0045 5854	0.0038 9765	0.0033 2505	0.0028 3070	0.0024 0527	0.0020 4027	48
49	0.0043 0230	0.0036 6356	0.0031 1240	0.0026 3853	0.0022 3247	0.0018 8557	49
50	0.0040 6145	0.0034 4429	0.0029 1393	0.0024 5985	0.0020 7241	0.0017 4286	50

Κωδικός βιβλίου: 0-24-0198
ISBN 978-960-06-2975-0

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 24 0198 0