ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ



Β΄ ΕΠΑ.Λ.

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

- **Νικόλαος Ροζάκος**
- **Πέτρος Σπυρίδωνος**
- **Δημήτρης Παπαγεωργίου**

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ:

- **Ροζάκος Νικόλαος**

ΚΡΙΤΕΣ:

- **Μπούρκας Περικλής**
- **Ευταξιόπουλος Δημήτριος**
- **Παπαδάκης Εμμανουήλ**

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

- **Ελευθερόπουλος Γεώργιος**

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ν. Ροζάκος Π. Σπυρίδωνος Δ. Παπαγεωργίου

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Β΄ ΕΠΑΛ



**ΤΟΜΕΑΣ
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ**

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο ***Τεχνική Μηχανική*** – ***Αντοχή των Υλικών*** που έχετε στα χέρια σας προορίζεται να εξυπηρετήσει το μάθημα με τον ίδιο τίτλο, περιέχει γνώσεις χρήσιμες σε όλους τους τεχνικούς, αλλά έχει προσαρμοστεί και απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ τάξης του 1ου κύκλου του Μηχανολογικού Τομέα, δηλαδή στους μαθητές εκείνους, οι οποίοι στη Β΄ τάξη θα επιλέξουν συγκεκριμένες μηχανολογικές ειδικότητες.

Στις αναλύσεις των επαγγελμάτων των διαφόρων ειδικοτήτων του μηχανολογικού τομέα αναφέρονται ένα πλήθος εννοιών και όρων που ανήκουν στο περιεχόμενο της τεχνικής μηχανικής και της αντοχής των υλικών, όπως π.χ. παραμορφώσεις, τροχαλίες, ροπές, άξονες, άτρακτοι, οδοντωτοί τροχοί,

φορτία, διαγράμματα, αλυσίδες, συρματόσχοινα, γερανοί, πρέσες, ψαλίδια, σωληνώσεις, σπειρώματα, λέβητες, στοιχεία ρευστών, υδροδυναμικής, κάμψη, κοίλανση, εξέλαση, σφυρηλασία, ολκιμότητα κ.λπ.

Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι το περιεχόμενο του μαθήματος και του βιβλίου περιλαμβάνει τέσσερις (4) θεματικές ενότητες: **Στατική, Δυναμική, Αντοχή των Υλικών** και **Ρευστομηχανική.**

Τα διδακτικά αντικείμενα του βιβλίου, είναι αντικείμενα γενικού τεχνικού ενδιαφέροντος και δεν στηρίζονται σε εμπειρικούς κανόνες αλλά σε γενικές αρχές, των οποίων η γνώση και η κατανόηση θα κρίνει αποφασιστικά την επιτυχία του αυριανού επαγγελματία. Το βιβλίο γράφτηκε με βάση την αντιληπτική ικανότητα των μαθητών αυτής της βαθμίδας και τις γνώσεις που έχουν από τα προηγούμενα χρόνια των σπουδών τους και περιλαμβάνει τα αναγκαία διδακτικά αντικείμενα, από τις παραπάνω θεματικές ενότητες, έτσι ώστε να παρέχει όλα όσα απαιτούνται να γνωρίζει ο επαγγελματίας του επιπέδου αυτού, από το συγκεκριμένο γνωστικό χώρο. Θα δώσει ακόμη τη δυνατότητα στο μαθητή να μπορέσει να προχωρήσει σε περαιτέρω εμβάθυνση και επέκταση των γνώσεών του, στα σχετικά με το περιεχόμενο του βιβλίου αντικείμενα, που θα κληθεί να αντιμετωπίσει ως εργαζόμενος, κατά τη διάρκεια της επαγγελματικής του σταδιοδρομίας. Θα βοηθήσει, επίσης το μαθητή στην περίπτωση που θα επιζητήσει παραπέρα σπουδές.

Σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς σκοπούς του μαθήματος, όπως αυτοί αναφέρονται στο Πρόγραμμα Σπουδών που συνέταξε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο και την ανάλυσή τους από τους συγγραφείς, το βιβλίο επιδιώκει, (εκτός των γενικών σκοπών που αφορούν σε όλα τα μαθήματα), να δώσει στους μαθητές τη δυνατότητα:

▲ Να αντιληφθούν ότι το μάθημα συσχετίζει τη γνώση με την πραγματικότητα, προωθεί και οξύνει την τεχνική - τεχνολογική σκέψη και να πεισθούν με συγκεκριμένες αναφορές, εφαρμογές, παραδείγματα και ασκήσεις ότι «ό,τι μαθαίνουν εφαρμόζονται στην επίλυση υπαρκτών πρακτικών προβλημάτων».

▲ Να εισαχθούν στο ευρύτερο φάσμα των τεχνικών επιστημών, ώστε να βοηθηθούν μελλοντικά, «να έχουν λόγο» και να συμβάλλουν στην επίλυση τεχνολογικών, περιβαλλοντικών και κοινωνικών προβλημάτων, αναπτύσσοντας και αξιοποιώντας το ταλέντο τους, τα ενδιαφέροντά τους, τις γνώσεις και τις δεξιότητές τους, είτε ως επαγγελματίες είτε ως περαιτέρω ακαδημαϊκοί πολίτες.

▲ Να εισαχθούν στην τεχνική ορολογία και γενικότερα στην «τεχνική γλώσσα» που είναι μία σύνθεση περιγραφικών στοιχείων, μαθηματικών σχέσεων, διαγραμμάτων, τεχνικών σχεδίων και συμβόλων.

▲ Να γνωρίσουν και να κατανοήσουν έννοιες, θεωρίες, νόμους και αρχές, η στέρεη γνώση των οποίων θα τους βοηθήσει ως αυριανούς επαγγελματίες ή φοιτητές να ακολουθήσουν μεθόδους αντιμετώπισης των προβλημάτων περισσότερο γενικευμένους, αποφεύγοντας τη στενή αντιμετώπισή τους με μεθόδους «τυποποιημένους χωρίς ορίζοντα».

▲ Να μάθουν να χρησιμοποιούν σωστά τους τεχνικούς πίνακες, τις μηχανικές σταθερές των υλικών, καθώς και τα γεωμετρικά στοιχεία των κατασκευών που σχετίζονται με το αντικείμενο, για τις εφαρμογές τους στην πράξη.

Ειδικότερα:

- Να μπορούν οι μαθητές να κατανοούν απλά προβλήματα, να τα σχηματοποιούν και να τα αναγάγουν σε απλούστερες μορφές, που να είναι δυνατόν να εκφραστούν με απλό μαθηματικό τρόπο.
- Να μπορούν να επιλύουν τα παραπάνω προβλήματα με τη βοήθεια απλών μαθηματικών.
- Να ελέγχουν και να αξιολογούν τα αποτελέσματα σε σχέση πάντοτε με το αρχικό πρόβλημα και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.
- Να αποκτήσουν οι μαθητές το αναγκαίο υπόβαθρο, προκειμένου να δεχτούν τη γνώση άλλων μαθημάτων όπως τα Στοιχεία Μηχανών, τις Μεταλλικές Κατασκευές κ.λπ.

Οι παραπάνω σκοποί αναλύονται περαιτέρω και εξειδικεύονται σε συγκεκριμμένους στόχους, οι οποίοι αναφέρονται στην αρχή κάθε κεφαλαίου του βιβλίου.

Οι συγγραφείς

Οι αναγνώστες, οι οποίοι θα διαπιστώσουν πιθανές παραλείψεις, αναγκαίες προσθήκες ή επιθυμούν να διατυπώσουν γενικότερες παρατηρήσεις, που θα βελτιώσουν το βιβλίο στην επόμενη έκδοσή του παρακαλούμε να απευθύνονται προς το: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τομέας Μηχανολογικός, Μεσογείων 396, Αγία Παρασκευή 153 41, Αθήνα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος Α΄

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ..... 1

Ε.1 Οι μονάδες των φυσικών μεγεθών 5

Ε.2 Τα συστήματα των μονάδων..... 5

Ε.3 Μετατροπή καταργημένων μονάδων σε μονάδες του SI 10

Ε.4 Οδηγίες ISO και ΕΛΟΤ για τη χρησιμοποίηση των μονάδων του SI 11

Ε.5 Μονάδες εκτός SI που επιτρέπεται η χρησιμοποίησή τους 13
Ε.6 Βασικές γνώσεις τριγωνομετρίας..... 14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ 21

1.1 Η δύναμη και τα χαρακτηριστικά της - Είδη δυνάμεων 23
1.2 Οι αρχές της στατικής 26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΡΟΠΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ..... 35

2.1 Ροπή δύναμης..... 37
2.2 Θεώρημα των ροπών ή του Varignon 41
2.3 Ζεύγος δυνάμεων - Ροπή ζεύγους..... 44
2.4 Μετάθεση δύναμης σε διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνσή της..... 46

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΣΥΝΘΕΣΗ - ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ 49

3.1 Απλές περιπτώσεις σύνθεσης δυνάμεων..... 51
3.2 Συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων με κοινό σημείο εφαρμογής..... 53
3.3 Σύνθεση δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων 58
3.4 Σύνθεση δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων..... 60
3.5 Σύνθεση τυχουσών ομοεπιπέδων δυνάμεων 61
3.6 Απλές περιπτώσεις ανάλυσης δυνάμεων 62
3.7 Ανάλυση δύναμης σε δύο παράλληλες συνιστώσες (1η περίπτωση) 65
3.8 Ανάλυση δύναμης σε δύο παράλληλες συνιστώσες (2η περίπτωση) 67
3.9 Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος 69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ - ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ 75

4.1 Κέντρο βάρους 77
4.2 Κεντροειδές γραμμών και επιφανειών 79
4.3 Κεντροειδή μερικών γεωμετρικών σχημάτων 81
4.4 Προσδιορισμός του κεντροειδούς - αναλυτική μέθοδος 86
4.5 Ισορροπία και είδη ισορροπίας 89

Μέρος Β΄

ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ 99

5.1 Η αντοχή των υλικών..... 100
5.2 Βασικές εισαγωγικές έννοιες..... 101
5.3 Τα είδη των φορτίων 101
5.4 Οι σπουδαιότερες καταπονήσεις 102
5.5 Η έννοια της τάσης..... 104
5.6 Νόμος του Hooke..... 106
5.7 Επιμήκυνση - Επιβράχυνση 107
5.8 Η δοκιμή σε εφελκυσμό ή θλίψη 109
5.9 Επιτρεπόμενη τάση - συντελεστής ασφάλειας 114
5.10 Επιτρεπόμενη τάση στην περίπτωση μεταβλητών φορτίων - τύπος SEEFEHLNER.....115

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΞΟΝΙΚΟΣ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΛΙΨΗ 121

6.1 Αξονικός εφελκυσμός και θλίψη..... 123
6.2 Επιφανειακή πίεση 125

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ 133

7.1 Γενικά 135
7.2 Ροπή αδράνειας ορθογωνικής διατομής..... 136
7.3 Στατική ροπή..... 138
7.4 Ροπή αντίστασης. Πολική ροπή αδράνειας - αντίστασης..... 142
7.5 Ακτίνα αδράνειας..... 146
7.6 Θεώρημα Steiner..... 147
7.7 Εφαρμογές 149

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 ΦΟΡΕΙΣ - ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ - ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ ... 169

8.1 Φορείς. Στοιχεία μιας κατασκευής..... 171
8.2 Είδη στηρίξεων δοκών..... 175

8.3 Υπολογισμός αντιδράσεων δοκών (αναλυτικός) 177
8.4 Ασκήσεις 181
8.5 Αρχή της ισοδυναμίας μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων ... 183
8.6 Επίλυση δοκών. Διαγράμματα [M], [Q], [N] 187

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 ΔΙΑΤΜΗΣΗ 209

9.1 Γενικά 211
9.2 Η παραμόρφωση και οι τάσεις 212
9.3 Τα ποσοτικά μεγέθη της διάτμησης 213
9.4 Τα όρια φόρτισης 214
9.5 Τμήση - ψαλιδισμός 215
9.6 Η επίδραση της τέμνουσας δύναμης 215
9.7 Εφαρμογές 217

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 ΚΑΜΨΗ 229

10.1 Γενικά - Είδη κάμψεων 231
10.2 Τάσεις που αναπτύσσονται σε καμπτόμενη δοκό 236
10.3 Δοκός ίσης αντοχής σε κάμψη 240

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 ΣΤΡΕΨΗ 255

11.1 Γενικά 257
11.2 Η παραμόρφωση και οι τάσεις στη στρέψη 259
11.3 Η στρεπτική ροπή και οι σχέσεις της με τις τάσεις και τις παραμορφώσεις 262
11.4 Η ιδιομορφία της στρέψης 265
11.5 Τύπος για την τάση και την παραμόρφωση σε διάφορες διατομές φορέων κατά τη στρέψη 266
11.6 Υπολογισμός ατράκτου σε στρέψη 269
11.7 Εφαρμογές 271

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ 289

12.1 Εισαγωγικά 291
12.2 Η έρευνα στα φαινόμενα των σύνθετων καταπονήσεων 293
12.3 Λυγισμός 294
12.4 Απλές περιπτώσεις σύνθετων καταπονήσεων 305
12.5 Εφαρμογές 313

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 ΕΡΓΟ - ΙΣΧΥΣ - ΑΠΛΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ 325

13.1 Γενικά - Περί μηχανής (απλής) 327
13.2 Έργο 328
13.3 Μηχανική ισχύς 333
13.4 Απλές μηχανές 335
13.5 Κεκλιμένο επίπεδο 353
13.6 Ο κοχλίας του Αρχιμήδη 358
13.7 Μετάδοση περιστροφικής κίνησης 366

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14 ΤΡΙΒΗ 373

14.1 Γενικά 375
14.2 Η φυσική ερμηνεία της τριβής 376
14.3 Κινητήρια δύναμη - αντίσταση - παθητικές αντιστάσεις 377
14.4 Τα είδη και οι νόμοι της τριβής 379
14.4 Έργο, ισχύς και ροπή τριβής 386
14.5 Εφαρμογές 388

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15 ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ 421

15.1 Εισαγωγικά 423
15.2 Γενικά - ορισμοί 424
15.3 Υδροστατική πίεση 427
15.4 Η μεταβολή της υδροστατικής πίεσης μετά του βάθους 428
15.5 Τα Χαρακτηριστικά της υδροστατικής πίεσης 431
15.6 Η μεταφορά της πίεσης- Αρχή του Pascal 431
15.7 Αρχή του Αρχιμήδη 433

15.8 Όργανα μέτρησης της πίεσης 434
15.9 Εφαρμογές 438

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16 ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ 447

16.1 Γενικά - ορισμοί 449
16.2 Τρόποι κίνησης των υγρών 450
16.3 Τέλεια ή ιδανικά υγρά 453
16.4 Οι νόμοι ροής των ιδανικών ρευστών 454
16.5 Ροή υγρών σε σωλήνες 458
16.6 Θεώρημα του Torricelli 460
16.7 Ροή υγρών γύρω από γεωμετρικά σχήματα 462
16.7 Εφαρμογές 464

ΠΙΝΑΚΕΣ 475

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 489

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

F	Δύναμη ή φορτίο
A	διατομή
σ	ορθή τάση
τ	διατμητική τάση
d, D	διάμετρος
Δℓ	επιμήκυνση
ε	επιμήκυνση ανά μονάδα μήκους (ή επιβράχυνση)
ε%	επιμήκυνση επί τοις εκατό (ή επιβράχυνση)
$\mathbf{F_{μ}}$	μέγιστο φορτίο
$\mathbf{F_{θρ}}$	φορτίο θραύσης
$\mathbf{F_{δ}}$	όριο (φορτίο) διαρροής
$\mathbf{F_{ε}}$	όριο (φορτίο) ελαστικότητας
$\mathbf{F_{α}}$	όριο (φορτίο) αναλογίας
$\mathbf{σ_{μ}}$	μέγιστη τάση
$\mathbf{σ_{θρ}}$	τάση θραύσης
$\mathbf{σ_{δ}}$	όριο (τάση) διαρροής
$\mathbf{σ_{ε}}$	όριο (τάση) ελαστικότητας
$\mathbf{σ_{α}}$	όριο (τάση) αναλογίας
E,G	μέτρο ελαστικότητας ή μόντουλο του Young
$\mathbf{Δ_{d}}$	εγκάρσια συστολή (ή διόγκωση)
$\mathbf{ε_{ε}}$	εγκάρσια συστολή ανά μονάδα μήκους (ή διόγκωση)
μ	σταθερά του POISSON
$\mathbf{σ_{επ}}$	επιτρεπόμενη τάση
v	συντελεστής ασφάλειας
p	επιφανειακή πίεση
G	βάρος
ρ	πυκνότητα
V	όγκος
g	επιτάχυνση της βαρύτητας
$\mathbf{I_{x}}$	ροπή αδράνειας επιφάνειας ως προς άξονα χ-χ΄
$\mathbf{I_{ψ}}$	ροπή αδράνειας επιφάνειας ως προς άξονα ψ-ψ΄
$\mathbf{I_{x}}$	ακτίνα αδράνειας μίας διατομής ως προς άξονα χ-χ΄
$\mathbf{I_{ψ}}$	ακτίνα αδράνειας μίας διατομής ως προς άξονα ψ-ψ΄

$\mathbf{W_{\varepsilon 1}}$	ροπή αντίστασης ως προς άξονα ε1 – ε1
$\mathbf{I_p}$	πολική ροπή αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες αδράνειας χ-χ΄, ψ-ψ΄ κάθετους μεταξύ τους
$\mathbf{W_p}$	πολική ροπή αντίστασης μίας διατομής
$\mathbf{Q}$	τέμνουσα δύναμη
$\mathbf{M_b}$	καμπτική ροπή
$\mathbf{M_g}$	στρεπτική ροπή
$\mathbf{M}$	ροπή δύναμης
$\mathbf{F_k}$	κρίσιμο φορτίο λυγισμού
$\boldsymbol{\sigma_K}$	κρίσιμη τάση λυγισμού
$\boldsymbol{\kappa}$	ανοιγμένο μήκος
$\boldsymbol{\lambda}$	λυγηρότητα
$\boldsymbol{\omega}$	συντελεστής λυγισμού
÷	από - έως
≅	περίπου

ΔΔΤ 53.081:003.62:004.1
1985-09-20 ISO 1000-1981

ΕΛΟΤ 100

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

HELLENIC STANDARD ELOT 100

ΕΛΟΤ

ΜΟΝΑΔΕΣ ΔΙΕΘΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (SI) ΚΑΙ ΣΥΣΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΤΟΥΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΑΛΛΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

SI UNITS AND RECOMMENDATIONS FOR THE USE OF THEIR MULTIPLES AND OF CERTAIN OTHER UNITS

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ε.1 Οι μονάδες των φυσικών μεγεθών

Ε.2 Τα συστήματα των μονάδων

Ε.3 Μετατροπή καταργημένων μονάδων σε μονάδες του SI

Ε.4 Οδηγίες ISO και ΕΛΟΤ για τη χρησιμοποίηση των μονάδων του SI.

Ε.5 Μονάδες εκτός SI που επιτρέπεται η χρησιμοποίησή τους

Ε.6 Βασικές γνώσεις τριγωνομετρίας



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να γνωρίσετε τα συστήματα των μονάδων και τις μονάδες μέτρησης των φυσικών μεγεθών.
  Ειδικότερα, να κατανοήσετε, ότι η πλήρης γνώση των μονάδων μέτρησης θα σας βοηθήσει απεριόριστα στη μελέτη και την κατανόηση των τεχνικών κειμένων, στην εκτίμηση των μεγεθών που συνυπάρχουν με τις κατασκευές και τα στοιχεία τους, καθώς και στην επίλυση συγκεκριμένων τεχνικών προβλημάτων.

- Να μάθετε τις μονάδες, τα σύμβολά τους, τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά τους, και ιδιαίτερα τις μονάδες του διεθνούς συστήματος (S.I.) και αυτές άλλων συστημάτων, που επιτρέπεται η χρησιμοποίησή τους.

- Να μάθετε τις αντιστοιχίες των χρησιμοποιουμένων μονάδων άλλων συστημάτων με αυτές του S.I.

- Να αποκτήσετε την ευχέρεια μετατροπών των μονάδων στα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά τους.

- Να μάθετε πολύ καλά τους τρόπους χρησιμοποίησης των μονάδων του S.I., βάσει των οδηγιών ISO και ΕΛΟΤ.

- Να θυμηθείτε ορισμένες βασικές γνώσεις της τριγωνομετρίας, που θα σας βοηθήσουν στην κατανόηση του μαθήματος και στην επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων.

- Να γνωρίσετε το εκτεταμένο πεδίο της τεχνικής μηχανικής και πώς διαφοροποιούνται τα δύο τμήματά της, δηλ. της στατικής των στερεών και της αντοχής των υλικών.

Ε1. ΟΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ε.1.1 Γενικά

Στο θέμα των μονάδων των φυσικών μεγεθών υπήρχε μεγάλη σύγχυση, παρά το γεγονός ότι οι προσπάθειες για την καθιέρωση ενός συστήματος μονάδων κοινής αποδοχής άρχισαν στις αρχές του προηγούμενου αιώνα.

Στο 11ο γενικό συνέδριο μέτρων και σταθμών, που έγινε το έτος 1960, αποφασίστηκε η καθιέρωση του Διεθνούς Συστήματος μονάδων **(Δ.Σ.) ή SYSTEME INTERNATIONAL D´ UNITES (S.I.).**

Πολλές χώρες έχουν καθιερώσει νομοθετικά το σύστημα αυτό, μεταξύ δε αυτών περιλαμβάνεται και η Ελλάδα, που το καθιέρωσε στις 30-12-1983 με το Προεδρικό Διάταγμα 515, που δημοσιεύτηκε στο αριθ. 196 φύλλο της Εφημερίδας της Κυβέρνησης.

Ο Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης (ΕΛΟΤ) έχει αρχίσει τη σύνταξη μιας σειράς προδιαγραφών για το Δ.Σ. - S.I. Το πρότυπο ΕΛΟΤ 100 για παράδειγμα, αντιστοιχεί στο πρότυπο ISO* 1000.

Ε2. ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

Ε.2.1 Το σύστημα C.G.S. ή απόλυτο σύστημα

Είναι ένα πλήρες σύστημα μονάδων, που προτάθηκε από τον KELVIN* το έτος 1881. Οι βασικές διαστάσεις και οι μονάδες του συστήματος αυτού, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας: Ε.1.1.α
ΣΥΣΤΗΜΑ C.G.S.: Βασικές διαστάσεις και μονάδες

μέγεθος	μήκος	μάζα	χρόνος
σύμβολο	ℓ	**m**	**t**
μονάδα	εκατοστόμετρο	γραμμάριο	δευτερόλεπτο
σύμβολο	**cm**	**g**	**sec**

*ISO, INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARIZATION (Διεθνής Οργανισμός Τυποποίησης).

***LORD KELVIN** Άγγλος φυσικός (1829 – 1907). Σπούδασε στα Πανεπιστήμια της Γλασκώβης και του Καίμπριτζ. Ασχολήθηκε με θέματα θερμότητας και ηλεκτρισμού. Μελέτησε, μεταξύ των άλλων, τη μεταβολή του σημείου τήξης του πάγου και καθιέρωσε τη γνωστή κλίμακα θερμοκρασιών που φέρει το όνομά του.

Το πλεονέκτημα του συστήματος αυτού, είναι η ικανοποιητική εφαρμογή του στα θέματα της μηχανικής, χωρίς όμως να συμβαίνει το ίδιο και στην ηλεκτρολογία, στην οποία οι μονάδες που προκύπτουν, είναι δυνάμεις με κλασματικούς εκθέτες των βασικών μονάδων.

Ε.2.2 Το τεχνικό σύστημα

Το σύστημα αυτό που ονομάζεται και πρακτικό σύστημα, χρησιμοποιεί σαν βασικό μέγεθος τη δύναμη και αυτή είναι και η διαφορά του από το απόλυτο σύστημα. Οι βασικές διαστάσεις και οι μονάδες του συστήματος αυτού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας: Ε.2α
Τεχνικό Σύστημα: Βασικές διαστάσεις και μονάδες

μέγεθος	μήκος	δύναμη	χρόνος
σύμβολο	ℓ	**F**	**t**
μονάδα	μέτρο	χιλιοπόντ	δευτερόλεπτο
σύμβολο	**m**	**kp**	**s**

Τα προβλήματα που προκύπτουν από τη χρήση του συστήματος αυτού είναι τα ίδια με τα προβλήματα του απόλυτου συστήματος.

Ε.2.3 Το σύστημα MKSA

Είναι το σύστημα που επεκράτησε παγκόσμια και που περιλαμβάνει στα βασικά του μεγέθη το ηλεκτρικό ρεύμα (ένταση). Οι βασικές διαστάσεις και οι μονάδες του συστήματος αυτού φαίνονται στον πίνακα:

* ISO, INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARIZATION (Διεθνής Οργανισμός Τυποποίησης).

Πίνακας: Ε.2β
Σύστημα MKSA: Βασικές διαστάσεις και μονάδες

μέγεθος	μήκος	μάζα	χρόνος	ηλεκτρικό ρεύμα
σύμβολο	ℓ	**m**	**t**	**I**
μονάδα	μέτρο	χιλιόγραμμο	δευτερόλεπτο	Αμπέρ
σύμβολο	**m**	**kg**	**s**	**A**

Ε.2.4 Το διεθνές σύστημα (S.I.)

Οι τέσσερις πρώτες βασικές μονάδες του συστήματος αυτού, είναι οι βασικές μονάδες του συστήματος MKSA. Συνολικά, στο διεθνές σύστημα χρησιμοποιούνται εφτά βασικά και δύο συμπληρωματικά μεγέθη, τα σύμβολα και οι μονάδες των οποίων φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ: Ε.2.γ
Διεθνές Σύστημα (SI): Σύμβολα φυσικών μεγεθών και μονάδες

Βασικά μεγέθη								**Συμπληρωματικά μεγέθη**	
μέγεθος	μήκος	μάζα	χρόνος	ηλ. ρεύμα	θερμο-δυναμική θερ/σία	ποσότητα ουσίας	φωτεινή ένταση	επίπεδη γωνία	στερεή γωνία
σύμβολο	ℓ	**m**	**t**	**I**	**T, Θ**	**n**	**Iv**	**φ**	**Ω**
μονάδα	μέτρο	χιλιό-γραμμο	δευτερό-λεπτο	Αμπέρ	Κέλβιν	μολ	καντέλα	ακτίνιο	στερα-κτίνιο
σύμβολο	**m**	**kg**	**s**	**A**	**K**	**mol**	**cd**	**rad**	**Sr**

Σύμφωνα με την οδηγία 80/181 της Ευρωπαϊκής Ένωσης, το διεθνές σύστημα δεν αφορά τις αεροπορικές, θαλάσσιες και σιδηροδρομικές μεταφορές, αν από διεθνείς συμβάσεις προβλέπονται άλλες μονάδες. Τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των μονάδων του SI, με τους αντίστοιχους συντελεστές τους, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας: Ε.2.δ
SI: Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια

Πρόθεμα		
όνομα	**σύμβολο**	**συντελεστής**
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
hekto	H	10^{2}
deka	da	10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

Τα σύμβολα και οι μονάδες μιας ομάδας φυσικών μεγεθών, που έχουμε επιλέξει, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας: Ε.2.ε.
S.I. : Σύμβολα και μονάδες μερικών μεγεθών
ISO 31. I, II, III. - ΕΛΟΤ 200. 1,2,3.

Μέγεθος	**Σύμβολο**	**Μονάδα**
Επιφάνεια	A, S	m^2
όγκος	v	m^3
ταχύτητα	u, v, w	m/s
επιτάχυνση	a	m/s^2
γωνιακή ταχύτητα	ω	rad/s
γωνιακή επιτάχυνση	a	rad/s^2
περίοδος	T	s
συχνότητα	f	Hz
κυκλική συχνότητα	ω	s^{-1}=1/s
πυκνότητα μάζας	ρ	Kg/m^3
δύναμη	F	N (Νιούτον)*
βάρος	G	N
ροπή δύναμης	M	N·m
πίεση	p	Pa (Πασκάλ)
ροπή αδράνειας	I	$kg\cdot m^2$
έργο	W	J (Τζάουλ)
ενέργεια	E	J
ισχύς	P	W (Βάτ)
θερμοκρασία	θ	°C (βαθμ. Κελσίου)
θερμότητα	Q	J

* SIR ISAAC NEWTON Άγγλος φυσικός, μαθηματικός και φιλόσοφος (1642 – 1727). Διατύπωσε το νόμο της βαρύτητας και της παγκόσμιας έλξης. Το όνομά του φέρει η ομώνυμη μονάδα της δύναμης.

Οι μονάδες πίεσης: **στήλη νερού, Torr** και **atû** έχουν καταργηθεί. Αποκλειστική μονάδα για την πίεση είναι το πασκάλ (Pa). Σε εξαιρετικές περιπτώσεις επιτρέπεται η χρησιμοποίηση της μονάδας μπάρ (bar), που δεν ανήκει στο SI. Αξίζει να σημειωθεί η σχέση:

$$\mathbf{1\ bar = 10^5\ Pa}$$

Πρέπει επίσης να σημειωθεί, ότι με το πρότυπο DIN* 1314/1977 έχει καταργηθεί ο όρος «υποπίεση».

Οι μονάδες ισχύος: **PS, HP** και **CV** έχουν καταργηθεί εδώ και πολλά χρόνια (προ εικοσαετίας περίπου). Αποκλειστική μονάδα ισχύος είναι το Βατ (W).

Ε.3. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΑΤΑΡΓΗΜΕΝΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΕ ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΟΥ SI

Οι αντιστοιχίες μερικών καταργημένων μονάδων με τις μονάδες του SI φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας: Ε.3.β
Μετατροπή καταργημένων μονάδων σε μονάδες του SI

καταργημένη μονάδα	μονάδα του SI
1 kp	9,81 N
1 PS	0,736 kW
1 HP	0,746 kW
1 cal	4,186 J

Όταν στους υπολογισμούς δεν ενδιαφέρει η μεγάλη ακρίβεια, μπορούμε, αντί της σχέσης:

$$\mathbf{1\ kp = 9{,}81\ N}$$

να χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\mathbf{1\ kp \cong 10\ N\ (^{**})}$$

και το λάθος γι' αυτή την απλοποίηση, είναι μικρότερο του 2%.

---

* DIN, ο Γερμανικός Οργανισμός Τυποποίησης.

**Σημαίνει «κατά προσέγγιση»

Ε.4 ΟΔΗΓΙΕΣ ISO ΚΑΙ ΕΛΟΤ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΤΟΥ SI

Οδηγία 1η:

Τα σύμβολα των μονάδων γράφονται ακριβώς, όπως έχουν τυποποιηθεί, χωρίς αλλοιώσεις και προσθήκες.

Οδηγία 2η:

Ο διεθνής οργανισμός τυποποίησης ISO δεν προβλέπει για τις μονάδες πληθυντικό αριθμό.

Σωστό	Λάθος
Newton	Newtons

Το πρότυπο ΕΛΟΤ 100 προβλέπει τα ονόματα των μονάδων να γράφονται ελληνικά και τα σύμβολα των μονάδων, όπως διεθνώς έχουν τυποποιηθεί:

Όνομα μονάδας	Σύμβολο
νιούτον	N
βολτ	V

Οδηγία 3η:

Τα σύμβολα που προέρχονται από κύρια ονόματα, και μόνο αυτά, γράφονται με κεφαλαία γράμματα του λατινικού ή του Ελληνικού αλφαβήτου, (όπως N, Pa).

Οδηγία 4η:

Ο διεθνής οργανισμός ISO και ο ΕΛΟΤ δεν προβλέπουν αναγραφή μονάδων στη δεξιά πλευρά των τύπων.

Σωστό	Λάθος
$U = \frac{S}{t}$	$U = \frac{S}{t}$ σε $\frac{m}{s}$

Οι μονάδες αναγράφονται, στην περίπτωση που γίνεται αριθμητική αντικατάσταση σε τύπους, ύστερα από ολόκληρη την αριθμητική τιμή στη διατύπωση ενός μεγέθους. Επίσης, μεταξύ της αριθμητικής τιμής και του συμβόλου της μονάδας, πρέπει να υπάρχει ένα μικρό διάστημα.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν στον παραπάνω τύπο της ταχύτητας αντικατασταθούν οι τιμές:

$$S=10m \quad \text{και} \quad t=2s$$

Τότε:

$$U = \frac{S}{t} = \frac{10m}{2s} = 5\frac{m}{s}$$

Οδηγία 5η:

Τα γινόμενα και τα πηλίκα των μονάδων μπορούν να γράφονται κατά τους εξής τρόπους:

$$\frac{m}{s} = m/s = m \cdot s^{-1}$$

Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού η τελεία (·), είναι δυνατόν να παραλείπεται, όπου δεν υπάρχει κίνδυνος να υπονοηθούν άλλα αριθμητικά δεδομένα, όπως ένας δεκαδικός αριθμός, π.χ. 10.5.

Οδηγία 6η:

Το πρόθεμα (πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια) των μονάδων, πρέπει να επιλέγεται με τρόπο, ώστε οι αριθμητικές τιμές που προκύπτουν, να είναι μεταξύ 0,1 και 1000.

Σωστό	Λάθος
50 μm	0,05 mm

Οδηγία 7η:

Εξαίρεση στο πρόθεμα, αποτελεί η μονάδα μάζας το χιλιόγραμμο, της οποίας το 1/ 1000 δεν ονομάζεται μιλιχιλιόγραμμο (m kg), αλλά γραμμάριο (g).

Οδηγία 8η:

Η χρησιμοποίηση περισσοτέρων του ενός προθεμάτων, δεν επιτρέπεται.

Σωστό	Λάθος
3.000.000.000 = 3 Gg	3.000.000.000 = 3 kMg

Οδηγία 9η:

Αν μία μονάδα έχει πρόθεμα και υψώνεται σε δύναμη, δεν χρησιμοποιείται παρένθεση. Η δύναμη ισχύει και για το πρόθεμα.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$1\text{cm}^2 = \left(\frac{1}{100}\text{m}\right)^2 = \frac{1}{10000}\text{m}^2 = 0,0001\text{m}^2$$

Ε.5 ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΚΤΟΣ SI ΠΟΥ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ Η ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥΣ

Οι μονάδες που δεν ανήκουν στο SI και επιτρέπεται η χρησιμοποίησή τους, φαίνονται στον πίνακα, που ακολουθεί.

ΠΙΝΑΚΑΣ: Ε.5.α
Μονάδες εκτός SI που επιτρέπεται η χρησιμοποίησή τους.
ISO 31

Μέγεθος	Μονάδα	Σύμβολο	Παρατηρήσεις
χρόνος	πρώτο λεπτό ώρα ημέρα έτος	**min** **h** **d** **a**	1 min = 60 sec 1 h = 60 min 1d = 24 h 1 a = 365 d
επίπεδη γωνία	μοίρα πρώτο λεπτό δεύτερο λεπτό	**°** **´** **´´**	1° = (π/180) rad 1´=(1/60)° 1´´= (1/60)´
όγκος μάζα ενέργεια πίεση ρευστού	λίτρο τόνος ηλεκτρονιοβόλτ μπαρ	**l** **t** **ev** **bar**	1l = 1dm^3 = 1/1000m^3 1t = 10^3 kg 1ev = 1,602×10^{-19} J 1bar = 10^5 Pa

Ε.6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Οι γνώσεις που προέρχονται από την τριγωνομετρία, είναι γνώσεις απαραίτητες για την κατανόηση των ενοτήτων που θα ακολουθήσουν.

Έτσι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, είναι οι εξής:

Τριγωνομετρικός αριθμός	Ελληνικό σύμβολο	Διεθνές σύμβολο
Ημίτονο	**ημ**	**sin**
Συνημίτονο	**συν**	**cos**
Εφαπτομένη	**εφ**	**tag**
Συνεφαπτομένη	**σφ**	**cotag**

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, ορίζονται ως εξής:

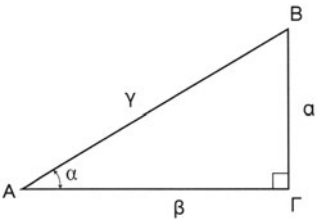
$$\text{ημα} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{συνα} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{εφα} = \frac{\text{ημα}}{\text{συνα}} = \frac{\alpha/\gamma}{\beta/\gamma} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$$

επομένως:

$$\text{εφα} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$



$$\text{σφα} = \frac{\text{συνα}}{\text{ημα}} = \frac{\beta/\gamma}{\alpha/\gamma} = \frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha\cdot\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$$

επομένως:

$$\text{σφα} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μερικών γωνιών, είναι:

Τριγωνομετρικός αριθμός	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
ημα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
σφα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Μέρος Α

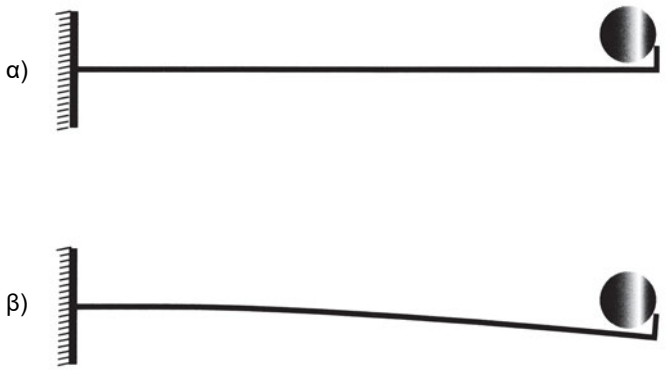
ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Η Τεχνική Μηχανική

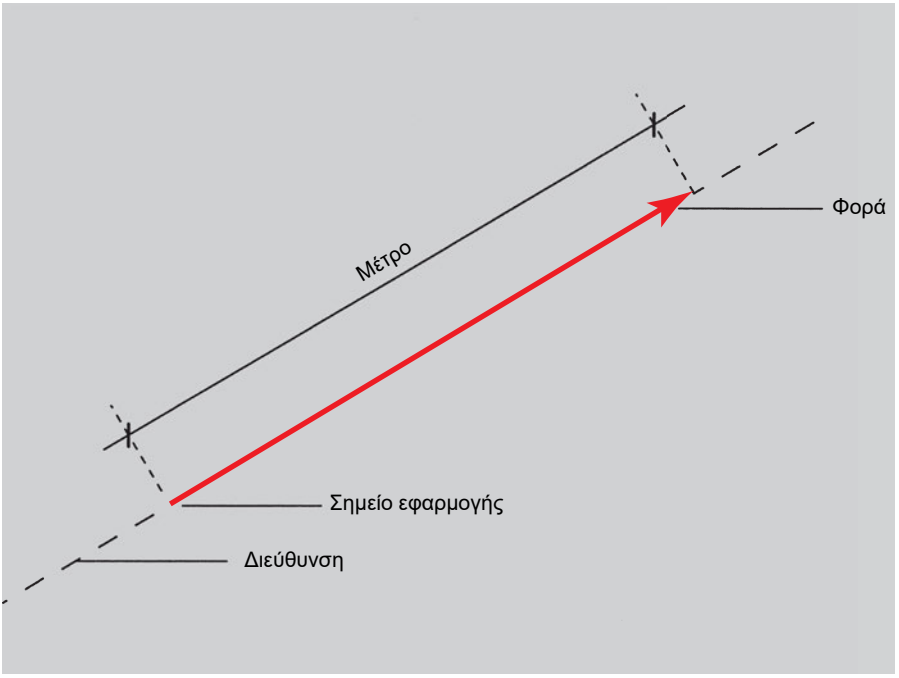
Η **Μηχανική** είναι η επιστήμη, η οποία εξετάζει την ισορροπία και την κίνηση των σωμάτων.

Η **στατική** είναι το τμήμα της μηχανικής, που εξετάζει την ισορροπία των σωμάτων, τα οποία θεωρεί **μη παραμορφώσιμα,** όταν πάνω σε αυτά ενεργούν δυνάμεις.

Η **αντοχή των υλικών** είναι το τμήμα της Μηχανικής, το οποίο εξετάζει τα **παραμορφώσιμα** σώματα και τις παραμορφώσεις τους, όταν πάνω σε αυτά ενεργούν δυνάμεις.



α) Η στατική, β) η αντοχή των υλικών



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1.1 Η δύναμη και τα χαρακτηριστικά της - Είδη δυνάμεων

1.2 Οι αρχές της στατικής

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

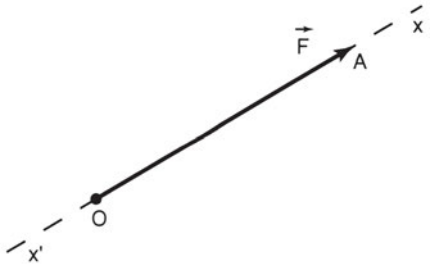
- Να ορίζετε τη δύναμη, να περιγράφετε τα χαρακτηριστικά της και να αναφέρετε παραδείγματα.
- Να περιγράφετε –αναφέροντας και παραδείγματα από τη πράξη– τα είδη των δυνάμεων, το σύστημα των δυνάμεων, τη συνισταμένη και τις συνιστώσες.
- Να αναφέρετε και να περιγράφετε τις αρχές της στατικής και να αντιληφθείτε τη σπουδαιότητά τους, για τη θεμελίωσή της.
- Να λύνετε προβλήματα που αναφέρονται στις ενότητες αυτού του κεφαλαίου, να συγκρίνετε και να μελετάτε τα αποτελέσματα και να καταλήγετε στη διατύπωση χρήσιμων συμπερασμάτων.

1.1 Η ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ - ΕΙΔΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Η **δύναμη** χαρακτηρίζεται σαν το αίτιο, το οποίο προκαλεί τη μεταβολή της κινητικής κατάστασης των σωμάτων.

Παραδείγματα δυνάμεων αποτελούν, το βάρος των σωμάτων, η έλξη που ασκούν οι μαγνήτες, η έλξη που ασκεί η μηχανή σε ένα συρμό κ.λ.π.

Η δύναμη είναι μέγεθος **διανυσματικό,** (παρίσταται ως $\vec{F}$ ή $\overrightarrow{OA}$) και έχει τα χαρακτηριστικά του διανύσματος (σχ. 1.1α), δηλαδή:



Σχήμα 1.1α *Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος*

● **Το σημείο εφαρμογής** είναι το σημείο (Ο) στο οποίο η δύναμη ενεργεί, δηλαδή το σημείο του σώματος, στο οποίο συγκεντρώνεται η επίδρασή της. Το γεγονός της σημειακής επίδρασης της δύναμης είναι οπωσδήποτε ένα

φαινόμενο, το οποίο διευκολύνει τη μελέτη των συνθηκών ισορροπίας των σωμάτων, χωρίς αισθητή αλλοίωση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν. Γίνεται οπωσδήποτε αντιληπτό, ότι η δύναμη ενεργεί σε μία συγκεκριμένη επιφάνεια ή σε ένα συγκεκριμένο όγκο. Η δύναμη π.χ. της βαρύτητας, κατανέμεται στο συνολικό όγκο των σωμάτων.

● **Τη διεύθυνση ή το φορέα,** που διέρχεται από το σημείο εφαρμογής της δύναμης και συμπίπτει με την ευθεία, κατά την οποία τείνει να κινηθεί το σώμα π.χ. η χχ΄ .

Η διεύθυνση ή ο φορέας της δύναμης προσδιορίζει την ευθεία ενέργειάς της, χωρίς να προσδιορίζει προς τα πού τείνει να κινήσει το σώμα στο οποίο ενεργεί, δηλαδή, από το χ προς το χ΄ ή αντίστροφα. Αυτό υποδηλώνεται με το βέλος του διανύσματος, που καθορίζει το χαρακτηριστικό της **φοράς της δύναμης.**

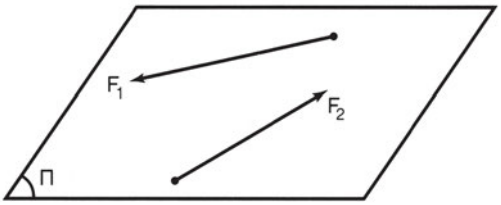
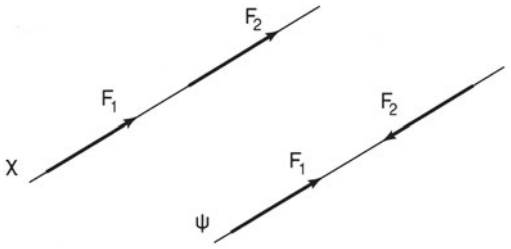
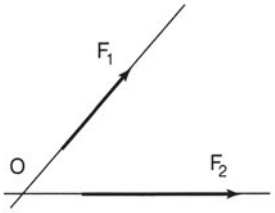
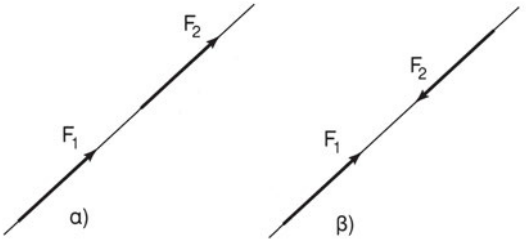
Το ποσοτικό χαρακτηριστικό που εκφράζει τη δύναμη, είναι η **ένταση ή το μέτρο,** που υποδηλώνεται από το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$, βεβαίως υπό καθορισμένη κλίμακα.

Οι δυνάμεις, με βάση τα χαρακτηριστικά τους, διακρίνονται (σχ. 1.1 β) σε:

- **Ομοεπίπεδες**· αυτές δηλ. που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
- **Ομοευθειακές ή συγγραμικές**· δηλ. οι δυνάμεις που έχουν την ίδια διεύθυνση.
- **Συντρέχουσες**· αυτές οι δυνάμεις, των οποίων οι διευθύνσεις τέμνονται σε ένα σημείο.
- **Ομόφορες**· δηλ. οι δυνάμεις που έχουν την ίδια φορά.
- **Αντίφορες**· δηλ. οι δυνάμεις που έχουν αντίθετη φορά.
- **Ίσες δυνάμεις**· είναι αυτές που έχουν κοινά, τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο.
- **Αντίθετες δυνάμεις**· είναι αυτές που έχουν κοινά τη διεύθυνση και το μέτρο, αλλά αντίθετη τη φορά.
- **Κατεύθυνση δύναμης**· είναι ο όρος που περιλαμβάνει τη διεύθυνση και τη φορά μιας δύναμης.

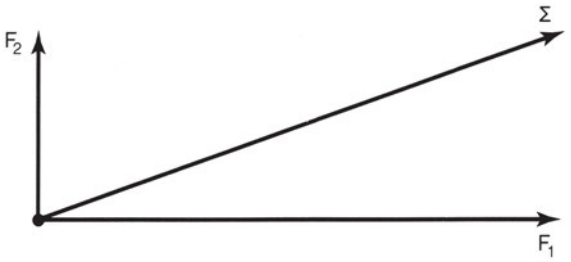
Διευκρινίζουμε ακόμη, ότι οι παράλληλες δυνάμεις έχουν κοινή διεύθυνση.

Σύστημα δυνάμεων είναι ένα σύνολο δυνάμεων, που δρούν σε ένα ή περισσότερα σώματα.

	Ομοεπίπεδες δυνάμεις
	Συγγραμμικές δυνάμεις
	Συντρέχουσες δυνάμεις
	α. Ομόφορες δυνάμεις β. Αντίφορες δυνάμεις

Σχήμα 1.1β *Τα είδη των δυνάμεων*

Συνισταμένη ενός συστήματος δυνάμεων (σχ. 1.1γ) που ενεργούν σε ένα σώμα, είναι η δύναμη, που μπορεί να αντικαταστήσει το σύστημα, του οποίου οι δυνάμεις που το αποτελούν, ονομάζονται στην περίπτωση αυτή, **συνιστώσες.**

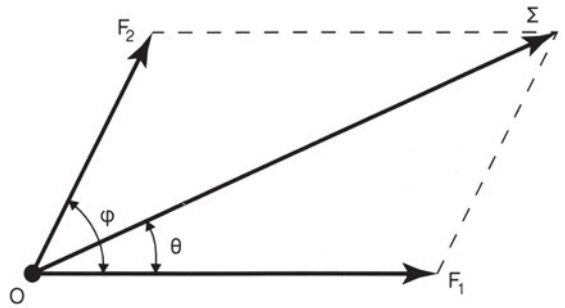


Σχήμα 1.1γ *Συνισταμένη και συνιστώσες·*
Σ είναι η συνισταμένη, F_1, F_2 οι συνιστώσες

1.2 ΟΙ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ

1.2.1 Πρώτη αρχή: το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων

Η συνισταμένη δύο δυνάμεων F_1 και F_2, που ενεργούν (σχ. 1.2α) στο ίδιο σημείο Ο ενός σώματος και σχηματίζουν γωνία φ, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές F_1 και F_2 που έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής με τις συνιστώσες.



Σχήμα 1.2α *Το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων*

Το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης (Σ)* ευρίσκονται από τις σχέσεις:

* Από το θεώρημα του συνημιτόνου, στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο (της υποσημείωσης) προκύπτει για το μέτρο της συνισταμένης:

$$\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \text{συν}\left(180^o - \varphi\right) \rightarrow$$

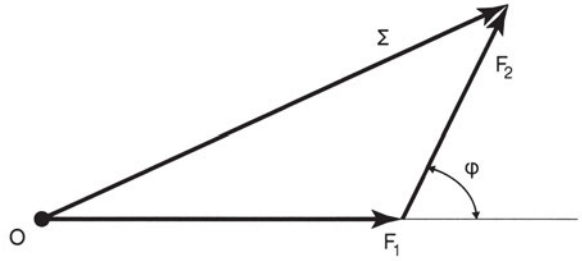
$$\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \left(-\text{συν}\varphi\right) \rightarrow$$

Η υποσημείωση συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα.

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

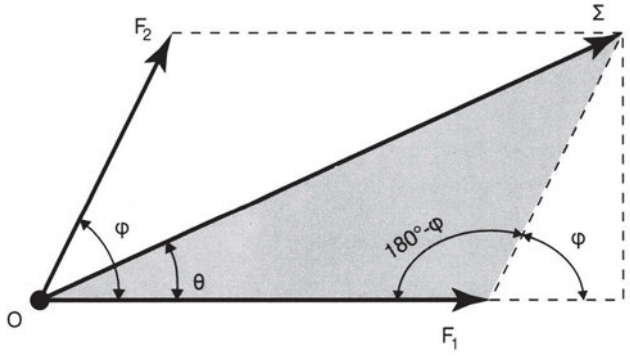
$$\eta\mu\theta = \frac{F_2}{\Sigma}\eta\mu\varphi \text{, αντίστοιχα}$$

Η ίδια συνισταμένη (Σ) είναι δυνατόν να προσδιοριστεί με τη μέθοδο του δυναμοπολυγώνου, ως εξής: με αρχή το πέρας της δύναμης F_1 σχεδιάζουμε τη δύναμη F_2 (σχ. 1.2β) παράλληλη και ίση της F_2. Η τρίτη πλευρά του δυναμοπολυγώνου (στην περίπτωση αυτή πρόκειται περί τριγώνου), δίνει τη συνισταμένη Σ των δύο αρχικών δυνάμεων και έχει αρχή το σημείο Ο (αρχή της δύναμης F_1) και πέρας, το πέρας της δύναμης F_2.



Σχήμα 1.2β *Προσδιορισμός συνισταμένης με τη μέθοδο του δυναμοπολυγώνου*

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$



Από το θεώρημα του ημιτόνου στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο προκύπτει, για τη διεύθυνση της συνισταμένης:

$$\frac{F_2}{\eta\mu\theta} = \frac{\Sigma}{\eta\mu\left(180^\circ - \varphi\right)} \rightarrow \frac{F_2}{\eta\mu\theta} = \frac{\Sigma}{\eta\mu\varphi} \rightarrow \eta\mu\theta = \frac{F_2}{\Sigma}\eta\mu\varphi$$

Η **γραφική μέθοδος** προσδιορισμού της συνισταμένης ή των συνιστωσών, αφορά την κατασκευή, με τη χρήση καθορισμένης κλίμακας, του παραλληλογράμμου των δυνάμεων ή του δυναμοπολυγώνου. Το μέτρο της συνισταμένης, προκύπτει από τη μέτρηση του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος το οποίο την αποτυπώνει, και την αναγωγή του με την κλίμακα που χρησιμοποιήσαμε. Η γωνία που προσδιορίζει τη διεύθυνση, προκύπτει μετά από μέτρηση με το μοιρογνωμόνιο.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι δυνάμεις $F_1 = 60$ N και $F_2 = 70$N ενεργούν υπό γωνία 60°. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη με την αναλυτική και τη γραφική μέθοδο.

Δίνονται	**Ζητούνται**
$F_1 = 60$ N	Η συνισταμένη (Σ)
$F_2 = 70$N	α) Με την αναλυτική μέθοδο
$\varphi = 60°$	β) Με τη γραφική μέθοδο

Λύση

α) Με την αναλυτική μέθοδο:

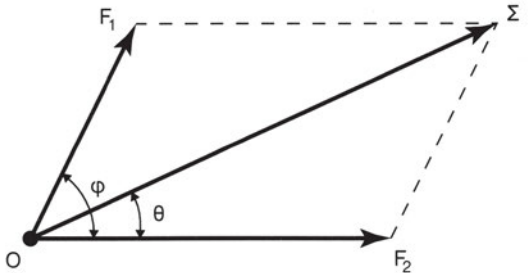
i) Το μέτρο της συνισταμένης, είναι:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}\varphi}$$

$$\Sigma = \sqrt{60^2 N^2 + 70^2 N^2 + 2 \cdot 60 \cdot 70 N^2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\Sigma = \sqrt{12700 N^2}$$

$$\Sigma = 112{,}6 N$$



ii) Η διεύθυνση της συνισταμένης (σε μοίρες), είναι:

$$\eta\mu\theta = \frac{F_1}{\Sigma}\eta\mu\varphi$$

$$\eta\mu\theta = \frac{60\ N}{112,6\ N}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

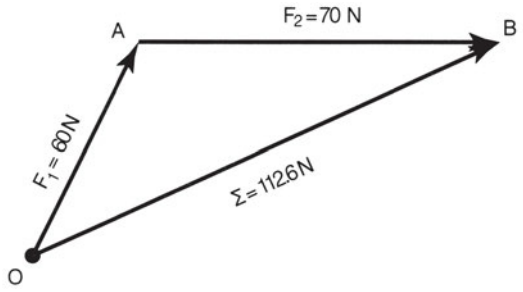
$$\eta\mu\theta = 0,46$$

$$\theta \cong 27^{o}$$

β) Με τη γραφική μέθοδο:

Καθορίζουμε κλίμακα: 1 cm =10N

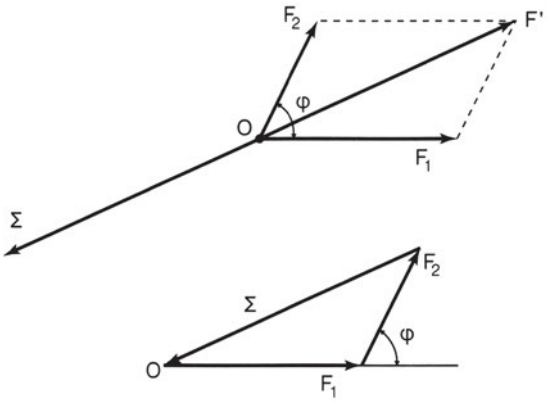
Από το σημείο Ο σχεδιάζουμε υπό κλίμακα το διάνυσμα ΟΑ με διεύθυνση παράλληλη προς τη δύναμη F_1, και με την ίδια φορά. Με την ίδια μέθοδο σχεδιάζουμε από το σημείο Α το διάνυσμα ΑΒ που εκπροσωπεί την δύναμη F_2. Το διάνυσμα ΟΒ με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα εκπροσωπεί, υπό την κλίμακα που ορίσαμε, τη συνισταμένη **Σ =112,6 N.**



1.2.2 Δεύτερη αρχή: Η ισορροπία των δυνάμεων

Δύο δυνάμεις βρίσκονται σε ισορροπία, όταν έχουν το ίδιο μέτρο, είναι συγγραμμικές και αντίφορες.

Επιστρέφοντας σε ένα ανάλογο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου και εφαρμόζοντας τη δεύτερη αρχή της στατικής που εξετάζουμε (σχ. 1.2γ), μπορούμε να ισορροπήσουμε το σύστημα των δυνάμεων (F_1,F_2), αν στο σημείο Ο εφαρμόσουμε μία δύναμη Σ ίση και αντίθετη της συνισταμένης F΄ (τελική συνισταμένη ίση με μηδέν).



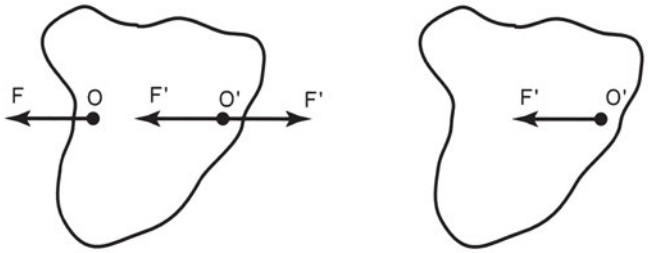
Σχήμα 1.2γ *Οι δυνάμεις Σ, F΄ ισορροπούν.*

Από την κατασκευή του δυναμοπολυγώνου (δυναμοτριγώνου), προκύπτει μία διαφορά σε σχέση με το δυναμοπολύγωνο της προηγούμενης παραγράφου, που εντοπίζεται στη φορά της δύναμης Σ. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: το δυναμοπολύγωνο (δυναμοτρίγωνο) τριών δυνάμεων με κοινό σημείο εφαρμογής, που βρίσκονται σε ισορροπία, είναι ένα **κλειστό δυναμοπολύγωνο** (συνισταμένη ίση με μηδέν).

1.2.3 Τρίτη αρχή: Μετακίνηση δύναμης στη διεύθυνσή της

Η δράση ενός συστήματος δυνάμεων σε ένα σώμα δεν μεταβάλλεται, αν προστεθεί ή αφαιρεθεί από αυτό, ένα άλλο σύστημα δυνάμεων, που βρίσκεται σε ισορροπία.

Με βάση την αρχή αυτή, προσθέτουμε στο σώμα (σχ. 1.2.δ), στο σημείο Ο του οποίου ενεργεί η δύναμη F, το σύστημα των δύο δυνάμεων F΄ F΄ που ενεργούν σε ένα άλλο σημείο του σώματος Ο΄, έχουν αντίθετη φορά, είναι ίσες με την F και έχουν την ίδια διεύθυνση με αυτή. Αν πάλι εφαρμόσουμε την αρχή που διατυπώσαμε παραπάνω, δηλαδή αν αφαιρέσουμε από το σώμα το σύστημα των δυνάμεων F F΄, θα παραμείνει να ενεργεί στο σώμα μόνη η δύναμη F΄, ίση με την F, αλλά στο σημείο Ο΄.



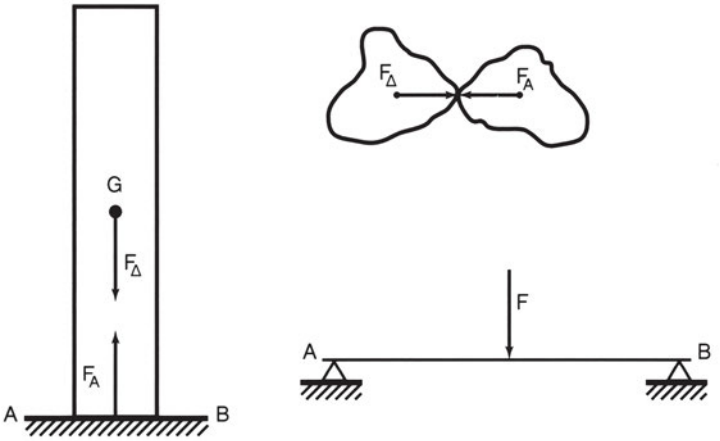
Σχήμα 1.2 δ *Η δύναμη είναι ολισθαίνον διάνυσμα.*

Από όσα αναφέρθηκαν, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα: **Η δύναμη που ασκείται στα στερεά σώματα, μπορεί να μετατοπιστεί πάνω στο φορέα της, δηλαδή είναι ένα ολισθαίνον διάνυσμα.**

1.2.4 Τέταρτη αρχή: Δράσης – αντίδρασης

Κάθε επίδραση δύναμης (δράση), επάνω σε ένα σώμα, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας άλλης δύναμης (αντίδρασης), ώστε η δράση και η αντίδραση να είναι δυνάμεις αντίθετες.

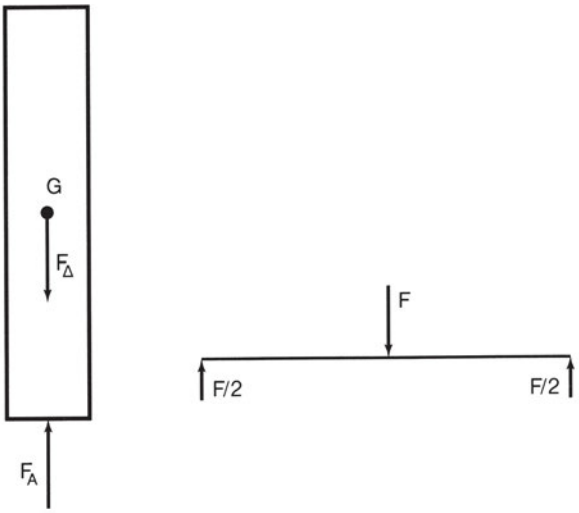
Το σώμα (σχ. 1.2.ε) υποβαστάζεται από ένα σταθερό επίπεδο ΑΒ και το ίδιο συμβαίνει στη περίπτωση της ράβδου, που με τη σειρά της υποβαστάζεται από τα στηρίγματα Α και Β.



Σχήμα 1.2ε *Δράση - αντίδραση ($F_Δ$ = δράση, F_A = αντίδραση)*

Προκειμένου να μελετήσουμε τις συνθήκες ισορροπίας ενός σώματος, θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο του ελεύθερου σώματος, δηλαδή θα απαλείψουμε τις στηρίξεις (συνδέσμους) του και στη θέση τους, θα σχεδιάσουμε

τις αντίστοιχες αντιδράσεις (σχ. 1.2.στ). Το διάγραμμα που προκύπτει, ονομάζεται **διάγραμμα ελεύθερου σώματος.**



Σχήμα 1.2στ *Διαγράμματα ελευθέρων σωμάτων.*

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε, ότι για να βρίσκεται ένα σώμα σε ισορροπία, δεν αρκεί να είναι σε ισορροπία μόνες οι δυνάμεις δράσης, αλλά θα πρέπει όλες οι δυνάμεις δράσης και αντίδρασης, να αποτελούν ένα σύστημα δυνάμεων που βρίσκεται σε ισορροπία.

Η πορεία που περιγράψαμε, είναι πρωταρχικής σημασίας για τη μελέτη των συνθηκών ισορροπίας των σωμάτων και πρέπει να πραγματοποιείται με μεγάλη προσοχή, γιατί μία λανθασμένη εκτίμηση του συστήματος των δυνάμεων που εμφανίζεται στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος, θα μας οδηγήσει ασφαλώς σε λανθασμένα αποτελέσματα και συμπεράσματα.



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΠΡΩΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Η δύναμη είναι το αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή της κινητικής κατάστασης των σωμάτων. Είναι διανυσματικό μέγεθος και έχει τα χαρακτηριστικά του διανύσματος.

Οι δυνάμεις διακρίνονται σε ομοεπίπεδες, συγγραμμικές, συντρέχουσες, ομόφορες και αντίφορες.

Οι αρχές της στατικής συνοψίζονται ως εξής :

• Πρώτη αρχή: το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων

Η συνισταμένη δύο δυνάμεων F_1 και F_2, που ενεργούν στο ίδιο σημείο Ο ενός σώματος και σχηματίζουν γωνία φ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές F_1 και F_2 που έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής με τις συνιστώσες.

• Δεύτερη αρχή: Η ισορροπία των δυνάμεων.

Δύο δυνάμεις βρίσκονται σε ισορροπία, όταν έχουν το ίδιο μέτρο, είναι συγγραμμικές και αντίφορες.

• Τρίτη αρχή: Μετακίνηση δύναμης στη διεύθυνσή της

Η δράση ενός συστήματος δυνάμεων σε ένα σώμα δεν μεταβάλλεται αν προστεθεί ή αφαιρεθεί από αυτό, ένα άλλο σύστημα δυνάμεων, που βρίσκεται σε ισορροπία.

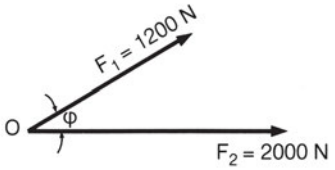
• Τέταρτη αρχή: Δράσης – αντίδρασης

Κάθε επίδραση δύναμης (δράση), επάνω σε ένα σώμα, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας άλλης δύναμης (αντίδρασης), ώστε η δράση και η αντίδραση να είναι δυνάμεις αντίθετες.



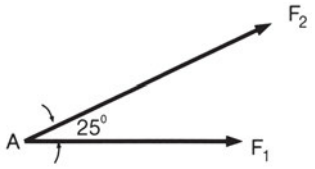
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη των δυνάμεων F_1 και F_2 που ενεργούν στο κοινό σημείο Ο, υπό γωνία 30°

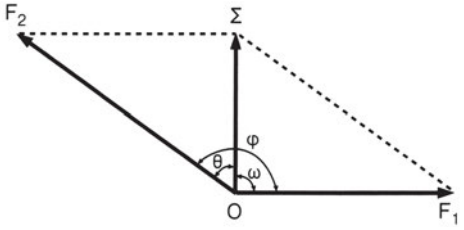


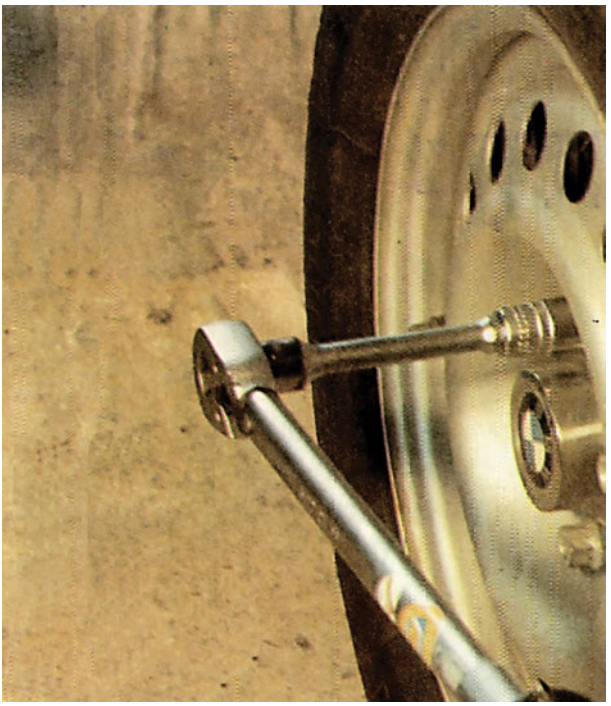
2. Να αποδειχθεί ότι η συνισταμένη των δυνάμεων $F_1 = F_2 = 2N$ μειώνεται από 4 N έως 0 N, όταν η γωνία υπό την οποία ενεργούν οι δυνάμεις αυξάνεται από 0° έως 180° (και παίρνει διαδοχικά τις τιμές 0°, 60°, 120°, 180°).

3. Στο σημείο Α ενός σώματος ενεργούν δύο δυνάμεις 80 N και 100 N των οποίων οι διευθύνσεις σχηματίζουν γωνία 25°. Να προσδιορίσετε το μέτρο και τη διεύθυνση της συνισταμένης με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.



4. Μία δύναμη μέτρου $F_1 = 20\sqrt{3}$ N και μία δύναμη μέτρου F_2 ενεργούν στο σημείο Ο. Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων έχει μέτρο Σ = 20 N και είναι κάθετη στη δύναμη F_1. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F_2 και η γωνία της με την F_1.





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΡΟΠΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

2.1 Ροπή δύναμης

2.2 Θεώρημα των ροπών ή του Varignon

2.3 Ζεύγος δυνάμεων - Ροπή ζεύγους

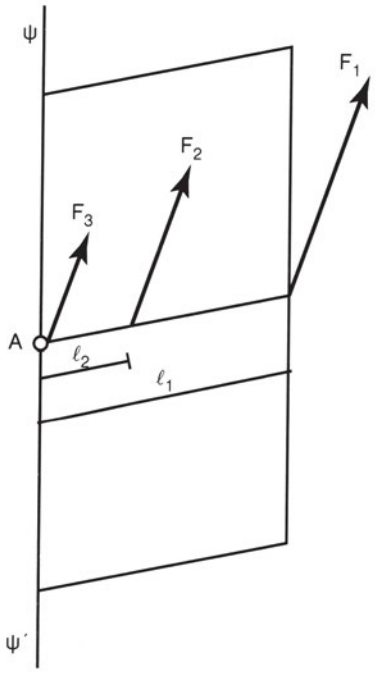
2.4 Μετάθεση δύναμης σε διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνσή της

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να ορίζετε τη ροπή δύναμης και τη ροπή ζεύγους, να περιγράφετε τα χαρακτηριστικά τους και να αναφέρετε παραδείγματα από την πράξη.
- Να περιγράφετε το θεώρημα των ροπών και τον τρόπο μετάθεσης δύναμης παράλληλα προς τη διεύθυνσή της.
- Να λύνετε πρακτικά προβλήματα, σχετικά με όσα αναφέρονται παραπάνω, να συγκρίνετε και να μελετάτε τα αποτελέσματα, ώστε να καταλήγετε στη διατύπωση χρήσιμων συμπερασμάτων.

2.1 ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Η πόρτα του σπιτιού μας περιστρέφεται περί τον άξονά της, αν ασκήσουμε σε αυτήν μία δύναμη F_1, τέτοια που ο φορέας της να μη διέρχεται από τον άξονα περιστροφής της ψ-ψ΄ (σχ. 2.1α). Δεν θα περιστραφεί, αν συμβεί ο φορέας της δύναμης, να τέμνει τον άξονα αυτόν. (Η δύναμη F_3 δεν περιστρέφει την πόρτα).



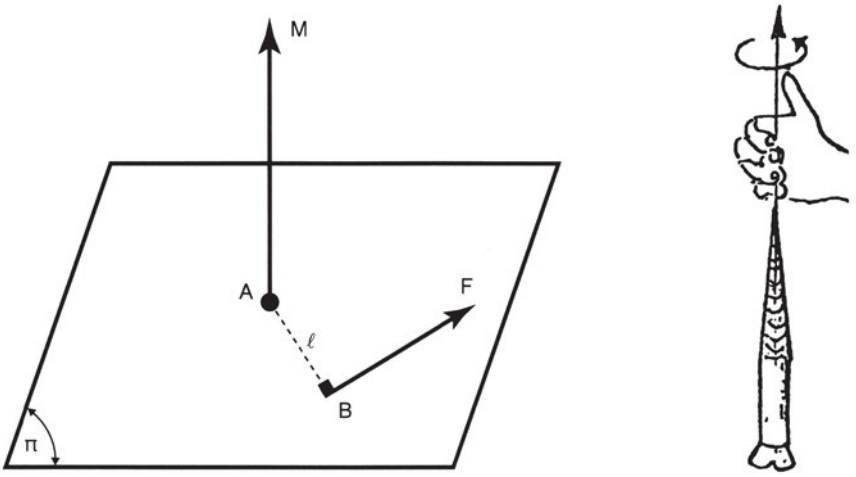
Σχήμα 2.1α *Η ροπή δύναμης*

Στο παραπάνω παράδειγμα διαπιστώνουμε, ότι για την περιστροφή ενός σώματος σημαντικό ρόλο παίζουν, εκτός από τις δυνάμεις που επενεργούν σε αυτό, και η απόσταση των δυνάμεων από τον άξονα περιστροφής.

Με τα φαινόμενα της περιστροφής συνδέεται το φυσικό μέγεθος, που ονομάζεται ροπή δύναμης .

Ονομάζουμε λοιπόν **ροπή δύναμης F ως προς σημείο A** και τη συμβολίζουμε με M, το

διάνυσμα που έχει: α) **διεύθυνση** (φορέα) την κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης F και το σημείο Α (σχ. 2.1β), β) **φορά,** αυτήν που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία* και γ) **μέτρο,** το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση του σημείου Α από το φορέα της . Είναι δηλαδή: **M** = **F·ℓ**



Σχήμα 2.1β *Ροπή δύναμης ως προς σημείο*

Από την προηγούμενη σχέση συμπεραίνεται ότι: η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο Α, σαν μέγεθος ισοδυναμεί προς το διπλάσιο εμβαδόν του τριγώνου ΑΒ F. Επανερχόμενοι στο αρχικό παράδειγμα (σχ. 2.1α), έχουμε:

$$\mathbf{MF_1 = F_1 \cdot \ell_1} \qquad \mathbf{MF_2 = F_2 \cdot \ell_2}$$

Αν $F_1 = F_2$ και επειδή $\ell_1 > \ell_2$, θα είναι: $M_{F1} > M_{F2}$, που σημαίνει ότι η πόρτα κλείνει με μεγαλύτερη ευκολία. Από τον ορισμό της ροπής μίας δύναμης ως προς σημείο, συνάγουμε:

● Η ροπή μιας δύναμης δεν μεταβάλλεται, όταν η δύναμη ολισθαίνει κατά μήκος του φορέα της.

● Η ροπή μιας δύναμης ως προς σημείο, είναι μηδενική όταν η δύναμη είναι μηδενική ή όταν ο φορέας της διέρχεται από το σημείο Α (αναφορά των ροπών).

* Δηλαδή έχει φορά που συμπίπτει με τη φορά που προχωρεί δεξιόστροφος κοχλίας, περιστρεφόμενος κατά τη φορά περιστροφής του επιπέδου (π), υπό την επίδραση της δύναμης F.

Το σημείο αναφοράς των ροπών, (ως προς το οποίο θα παίρνουμε τις ροπές των δυνάμεων), δύναται να είναι τυχαίο επί του επιπέδου των, για τη λύση των προβλημάτων όμως, επιλέγουμε σημείο στο οποίο να διέρχονται όσο το δυνατόν περισσότερες δυνάμεις ώστε οι αποστάσεις τους, να μπορούν να υπολογισθούν εύκολα.

● Υπό την προϋπόθεση, ότι ροπές ενεργούν επί του ίδιου σημείου ενός σώματος, είναι προφανές, ότι "ροπές της ίδιας φοράς προσθέτονται, ενώ ροπές αντίθετης φοράς αφαιρούνται".

Έτσι, η συνισταμένη ροπή, είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που επενεργούν στο αυτό (ίδιο) σημείο του σώματος.

Γενική παρατήρηση:

Για τη σωστή λύση των προβλημάτων, δεν έχει σημασία ποιά φορά θα επιλέξουμε ως θετική, αλλά αρκεί η επιλογή που θα κάνουμε, να παραμείνει η ίδια μέχρι τέλους.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν ορίσουμε συμβατικά, ως **θετική** τη ροπή που τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου και **αρνητική** στην αντίθετη περίπτωση, να υπολογίσετε τις ροπές των δυνάμεων, που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, με κλίμακες: μηκών 1 cm: 1 m
δυνάμεων 1 cm: 20 daN

Με τη γραφική μέθοδο





Για το σχήμα αριστερά:

$M = F \cdot \ell$

M = 2,9 · 20 daN · 2,6 · 1m

M = 150,8 daN·m

Για το σχήμα δεξιά :

M = - F · ℓ

M =-2,6 · 20 daN · 1,9 · 1m

M = - 98,8 daN · m

Με την αναλυτική μέθοδο

Για το σχήμα αριστερά :

Αν F = 58 daN

ℓ = 2,6 m

τότε: M = F· ℓ = 58 daN·2,6 m

M =150,8 daN

Για το σχήμα δεξιά:

Αν F = 52 daN

ℓ = 1,9 m

τότε: M = - F · ℓ

M = - 52 daN·1,9 m

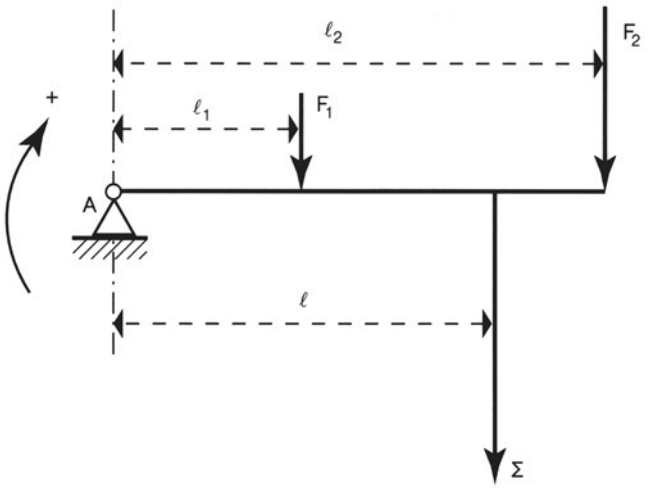
M = - 98,8 daN

2.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ Ή ΤΟΥ VARIGNON

Το θεώρημα αφορά τη **σύνθεση των ροπών** δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων, δηλαδή –κατ' αναλογία της σύνθεσης των δυνάμεων– τον εντοπισμό μιας συνισταμένης ροπής, ως προς το ίδιο σημείο ή ως προς τον ίδιο άξονα, η οποία να αντικαθιστά τις επιμέρους ροπές, υπό την προϋπόθεση, ότι θα επιφέρει στο σώμα το ίδιο αποτέλεσμα.

Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής: **Η ροπή της συνισταμένης ενός συστήματος ομοεπιπέδων δυνάμεων, ως προς ένα σημείο του επιπέδου ή ως προς ένα άξονα, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών, ως προς το ίδιο σημείο ή ως προς τον ίδιο άξονα.**

Σύμφωνα με το σχ. 2.2 α, προκύπτει ότι:



Σχήμα 2.2α *Το θεώρημα των ροπών*

Οι ροπές όλων των δυνάμεων, συνιστωσών και συνισταμένης, ως προς το σημείο Α, είναι οι:

$MF_1 = F_1 \cdot \ell_1$

$MF_2 = F_2 \cdot \ell_2$

$M_\Sigma = \Sigma \cdot \ell$

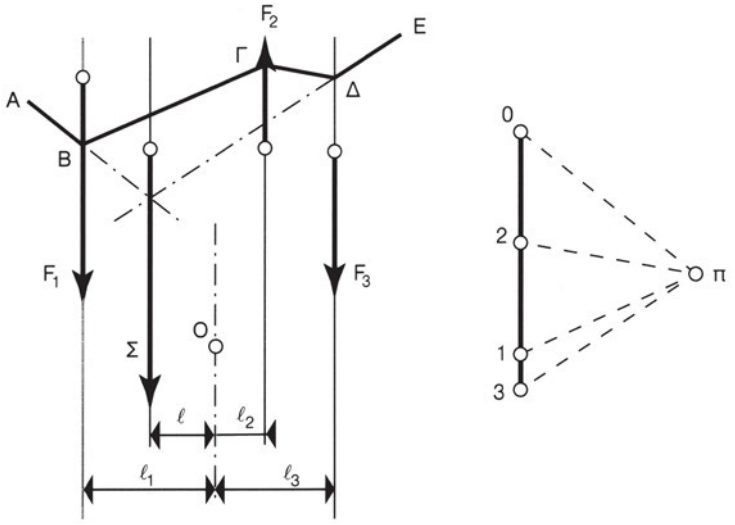
Επομένως, κατά το θεώρημα:

$\mathbf{M_\Sigma = M_{F1} + M_{F2}}$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Varignon, ως προς ένα σημείο Ο του επιπέδου, του συστήματος των παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2, F_3, που φαίνονται στο σχήμα, χρησιμοποιώντας τις κλίμακες: μηκών: 1cm: 1m

δυνάμεων: 1cm: 5 daN



Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο 0-1-2-3, αρχίζοντας από ένα τυχόν σημείο 0 και προσδιορίζουμε τη συνισταμένη Σ κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο.

Παίρνουμε ένα σημείο π, το οποίο ονομάζεται **πόλος** και φέρνουμε τις **πολικές ακτίνες** π-0, π-1, π-2, π-3.

Αρχίζοντας από το τυχόν σημείο Α φέρνουμε τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλες αντίστοιχα προς τις πολικές ακτίνες π-0, π-1, π-2, π-3 και σχηματίζουμε το **σχοινοπολύγωνο** Α-Β-Γ-Δ-Ε. Το σημείο τομής των προεκτάσεων των Α-Β και Δ-Ε προσδιορίζει **ένα σημείο της διεύθυνσης της συνισταμένης Σ.** Αν Ο είναι το σημείο αναφοράς και ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ είναι οι αποστάσεις, από αυτό, των συνιστωσών αντίστοιχα F_1, F_2, F_3 και της συνισταμένης Σ, προκύπτουν:

$M_{F1} = F_1 \cdot \ell_1 = -3 \cdot 5\ daN \cdot 1{,}9 \cdot 1\ m = -28{,}5\ daN \cdot m$

$M_{F2} = -F_2 \cdot \ell_2 = -1{,}5 \cdot 5\ daN \cdot 0{,}5 \cdot 1\ m = -3{,}75\ daN \cdot m$

$M_{F3} = F_3 \cdot \ell_3 = 2 \cdot 5\ daN \cdot 1{,}6 \cdot 1\ m = 16\ daN \cdot m$

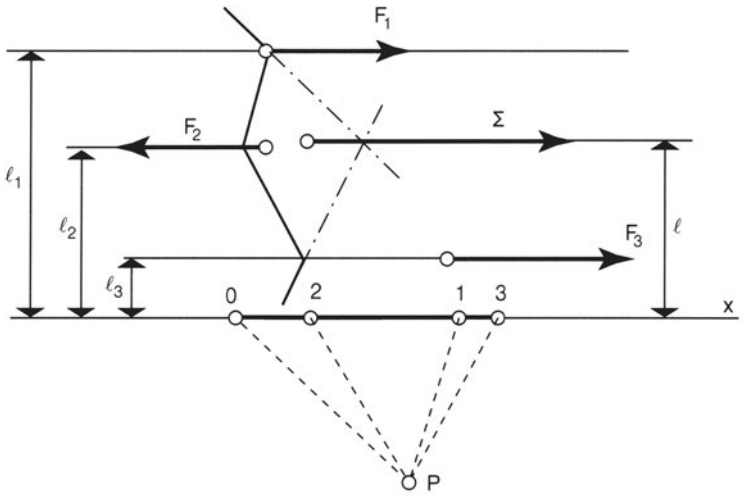
$M_{\Sigma} = M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} = -16{,}25\ daN \cdot m$

$M_\Sigma = -3,5 \cdot 5\ daN \cdot 0,93 \cdot 1\ m$

$M_\Sigma = -16,27\ daN \cdot m$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Varignon, ως προς τον άξονα x του συστήματος των παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2, F_3, που φαίνονται στο σχήμα, χρησιμοποιώντας τις κλίμακες: μηκών: 1 cm: 1 m
δυνάμεων: 1 cm : 15 daN



Μετά τον προσδιορισμό της συνισταμένης Σ με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και τους συμβολισμούς που φαίνονται στο σχήμα, προκύπτουν:

$M_{F1} = F_1 \cdot \ell_1 = 3 \cdot 15\ daN \cdot 3,5 \cdot 1\ m = 157,5\ daN \cdot m$

$M_{F2} = -F_2 \cdot \ell_2 = -2.15\ daN \cdot 2,4 \cdot 1\ m = -72\ daN \cdot m$

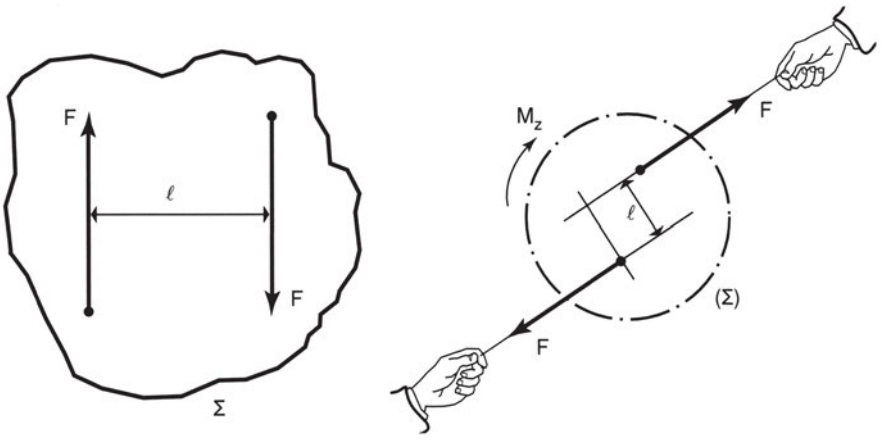
$M_{F3} = F_3 \cdot \ell_3 = 2,5 \cdot 15\ daN \cdot 0,7 \cdot 1\ m = 26,25\ daN \cdot m$

$M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} = 111,75\ daN \cdot m$

$M_\Sigma = \Sigma \cdot \ell = 3,5 \cdot 15\ daN \cdot 2,13 \cdot 1\ m =$ **$111,8\ daN \cdot m$**

2.3 ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ - ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ

Ζεύγος δυνάμεων, είναι ένα σύστημα δύο δυνάμεων που είναι παράλληλες και αντίφορες, με το ίδιο μέτρο και οι οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος (σχ. 2.3α).



Σχήμα 2.3α *Ζεύγος δυνάμεων – Ροπή ζεύγους*

Υπό την επίδραση ζεύγους δυνάμεων γίνεται η κίνηση του τιμονιού του αυτοκινήτου, η κίνηση της χειρολαβής της πόρτας, η κίνηση του εκπωματισμού κ.λπ.

Ροπή ζεύγους είναι το γινόμενο μίας εκ των δύο δυνάμεων επί την απόσταση μεταξύ τους:

$$M_z = F \cdot \ell$$

Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι για το οποιοδήποτε σημείο Α του επιπέδου των δυνάμεων του ζεύγους που θα επιλέξουμε, η ροπή M_Z του ζεύγους είναι διάνυσμα, που έχει σαν:

α) Διεύθυνση (φορέα), την κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων του ζεύγους.

β) Φορά, αυτήν που καθορίζεται απο τη φορά των δυνάμεων του ζεύγους με βάση τον κανόνα του δεξιοστρόφου κοχλία και

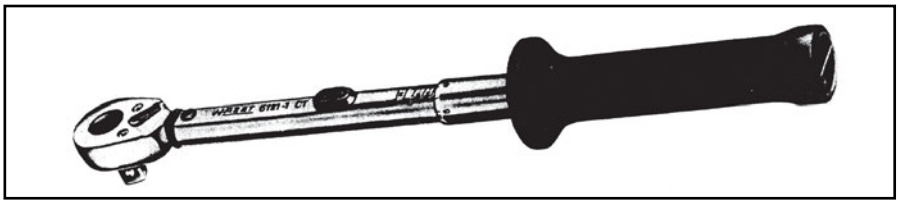
γ) Μέτρο, το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων και αντιρρόπων αυτών δυνάμεων.

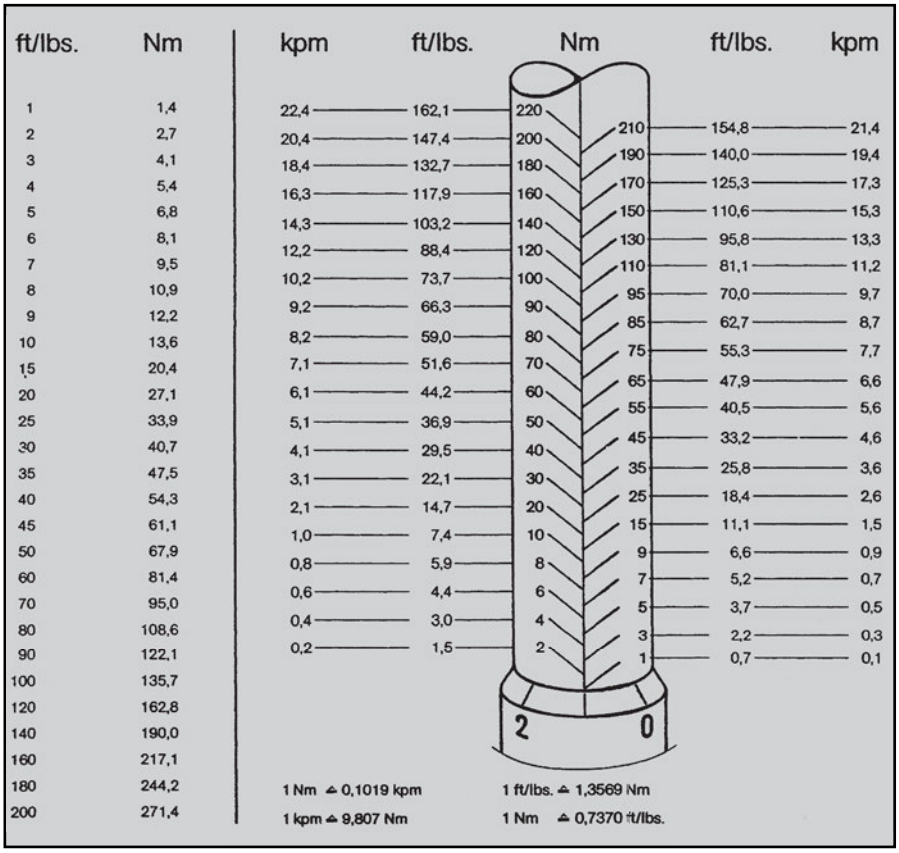
Αποδεικνύεται έτσι ότι:

α) Η Συνισταμένη ενός ζεύγους δυνάμεων έχει μηδενικό μέτρο.

β) Ο φορέας της βρίσκεται σε άπειρη απόσταση.

Πίνακας μετατροπής μονάδων ροπής





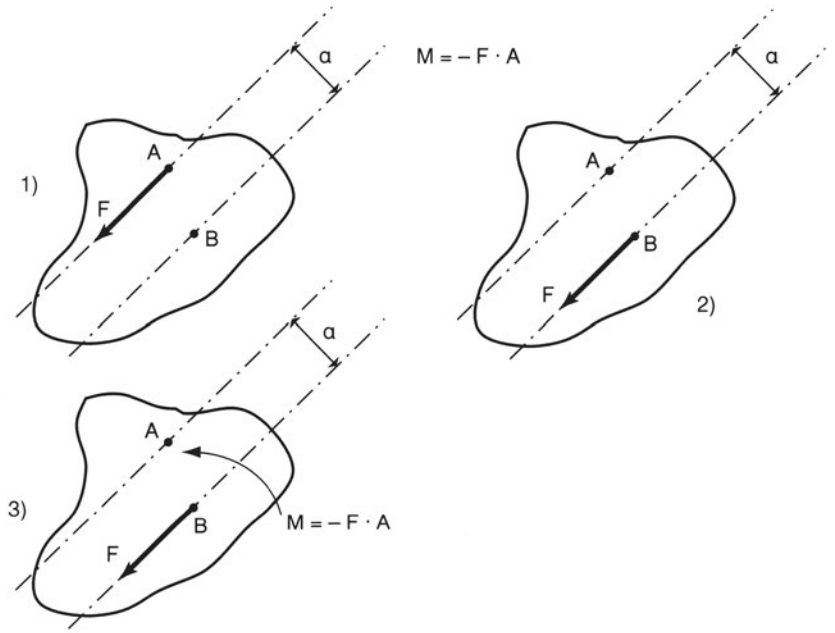
Σχήμα 2.3β *Πίνακας μετατροπής μονάδων ροπής*

2.4 ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΠΡΟΣ ΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ

Αν η δύναμη F, που ενεργεί στο σημείο Α του σώματος (σχ. 2.4α -1), μετατεθεί στο σημείο Β σε μία διεύθυνση παράλληλη προς την αρχική της (σχ. 2.4α -2) –που απέχει από αυτήν απόσταση (α)– διαπιστώνεται, ότι η δύναμη στη νέα της θέση, τείνει να περιστρέψει το σώμα ως προς το σημείο Α, δηλαδή εξασκεί στο σώμα μία θετική ροπή:

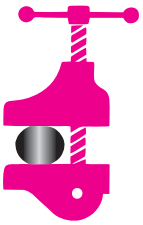
$$M = F \cdot a$$

Αυτό σημαίνει, ότι για να βρίσκεται το σώμα στην αρχική του κατάσταση, όταν σε αυτό ενεργούσε η δύναμη F στο σημείο Α, θα πρέπει να εξαλείψουμε την επίδραση της θετικής αυτής ροπής, εξασκώντας στο σώμα μία ίση και αρνητική ροπή (σχ. 2.4α -3):



Σχήμα 2.4α *Μετάθεση δύναμης*

Επομένως: **Είναι δυνατή η μεταφορά μιας δύναμης σε μία διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνσή της, εφόσον η μεταφορά της αυτή στη νέα θέση συνοδευτεί με την προσθήκη μιας ροπής, ίσης και αντίθετης προς την αρχική της ροπή που δημιούργησε η δύναμη αυτή.**



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Ονομάζουμε **ροπή δύναμης F ως προς σημείο Α** και τη συμβολίζουμε με Μ, το διάνυσμα που έχει **διεύθυνση** (φορέα) τη κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης F και το σημείο Α, **φορά** αυτή που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, και **μέτρο** το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση του σημείου Α από το φορέα της. Είναι δηλαδή: $\mathbf{M = F \cdot \ell}$

- Το θεώρημα των ροπών ή του Varignon διατυπώνεται ως εξής: Η ροπή της συνισταμένης ενός συστήματος ομοεπιπέδων δυνάμεων, ως προς ένα σημείο του επιπέδου ή ως προς ένα άξονα είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών, ως προς το ίδιο σημείο ή ως προς τον ίδιο άξονα.

- Ζεύγος δυνάμεων είναι ένα σύστημα δύο δυνάμεων που ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος, έχουν το ίδιο μέτρο και είναι παράλληλες και αντίφορες.

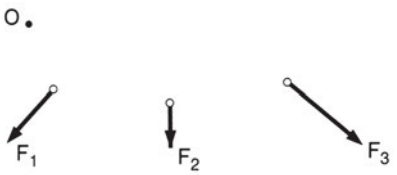
- Ροπή ζεύγους είναι το γινόμενο μίας εκ των δύο δυνάμεων επί την απόσταση μεταξύ τους.

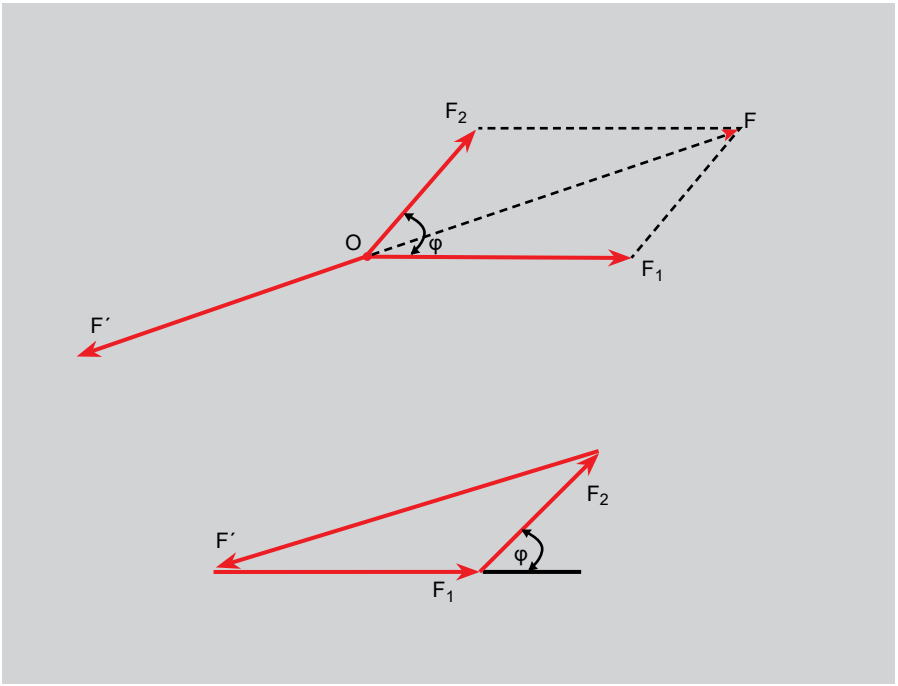
- Είναι δυνατή η μεταφορά μίας δύναμης σε μία διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνσή της, εφόσον η μεταφορά της συνοδευτεί με τη προσθήκη μίας ροπής, ίσης και αντίθετης της ροπής που δημιουργεί η δύναμη, όταν βρίσκεται στη νέα της θέση, ως προς την αρχική της.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του VARIGNON στο σύστημα των δυνάμεων του σχήματος, ως προς το σημείο, Ο (κλίμακες: μηκών 1 cm: 1 m δυνάμεων 1 cm: 15 N).





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΝΘΕΣΗ - ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

3.1 Απλές περιπτώσεις σύνθεσης δυνάμεων

3.2 Συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων με κοινό σημείο εφαρμογής

3.3 Σύνθεση δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων

3.4 Σύνθεση δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων.

3.5 Σύνθεση τυχουσών ομοεπιπέδων δυνάμεων

3.6 Απλές περιπτώσεις ανάλυσης δυνάμεων

3.7 Ανάλυση δύναμης σε δύο παράλληλες συνιστώσες (1η περίπτωση)

3.8 Ανάλυση δύναμης σε δύο παράλληλες συνιστώσες (2η περίπτωση)

3.9 Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να περιγράφετε τη σύνθεση, με γραφικό και αναλυτικό τρόπο, συγγραμμικών δυνάμεων, δυνάμεων υπό γωνία 90°, πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων με κοινό σημείο εφαρμογής, παραλλήλων ομορρόπων - αντιρρόπων δυνάμεων και πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων οπωσδήποτε τοποθετημένων.
- Να περιγράφετε τις απλές περιπτώσεις ανάλυσης δυνάμεων με γραφικό και αναλυτικό τρόπο, και την ανάλυση σε δύο παράλληλες συνιστώσες.
- Να περιγράφετε τις συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος.
- Να λύνετε προβλήματα, σχετικά με όσα αναφέρονται παραπάνω, να συγκρίνετε και να μελετάτε τα αποτελέσματα, ώστε να καταλήγετε στη διατύπωση χρήσιμων συμπερασμάτων.

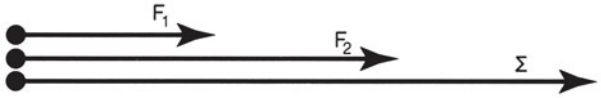
3.1 ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Η σύνθεση δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σώμα, αποσκοπεί στον προσδιορισμό μιας δύναμης, της συνισταμένης, η οποία όταν ενεργεί στο σώμα, επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό των αρχικών δυνάμεων.

α. Δυνάμεις συγγραμμικές και ομόφορες:

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma = F_1 + F_2$$



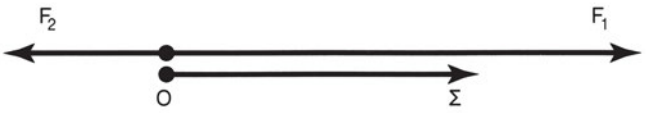
Σχήμα 3.1α *Δυνάμεις συγγραμμικές – ομόφορες*

Η διεύθυνση και η φορά, είναι αυτές των συνιστωσών.

β. Δυνάμεις συγγραμικές και αντίφορες:

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma = F_1 - F_2$$



Σχήμα 3.1β *Δυνάμεις συγγραμμικές και αντίρροπες*

Η διεύθυνση, είναι η διεύθυνση των συνιστωσών και η φορά είναι αυτή της μεγαλύτερης σε μέτρο συνιστώσας.

γ. Δυνάμεις υπό γωνία φ = 90°

Αφού (σχ. 3.1γ) φ = 90°, συνφ = 0, έπεται:

$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \text{συνφ}} \rightarrow$

$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}0^o} \rightarrow \text{συν}0 = 1$

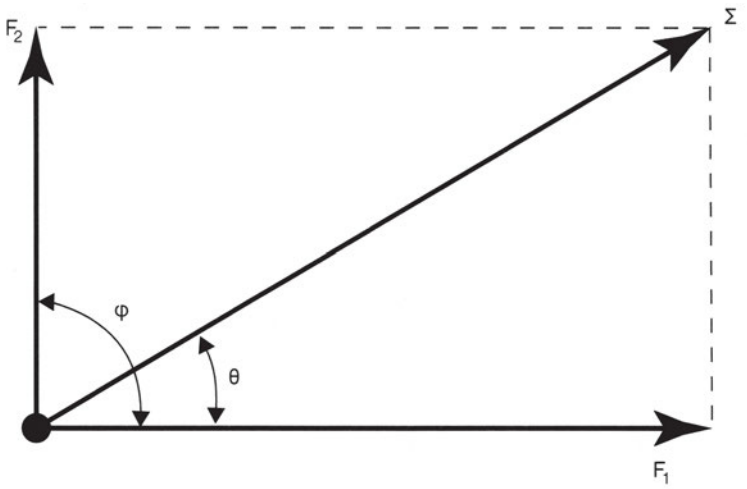
$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2} \rightarrow \sqrt{(F_1+F_2)^2} \rightarrow F = \mathbf{F_1 + F_2}$

$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \text{συνφ}} \rightarrow$

$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}180}, \ \text{συν}180^o = -1$

$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2} \rightarrow \Sigma = \sqrt{(F_1-F_2)^2}$

και $\mathbf{\Sigma = F_1 - F_2}$



Σχήμα 3.1γ *Συνισταμένη δύο δυνάμεων, υπό γωνία 90°.*

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \sigma\upsilon\nu\varphi} \rightarrow$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot 0} \rightarrow$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Η διεύθυνση της Σ δίνεται:

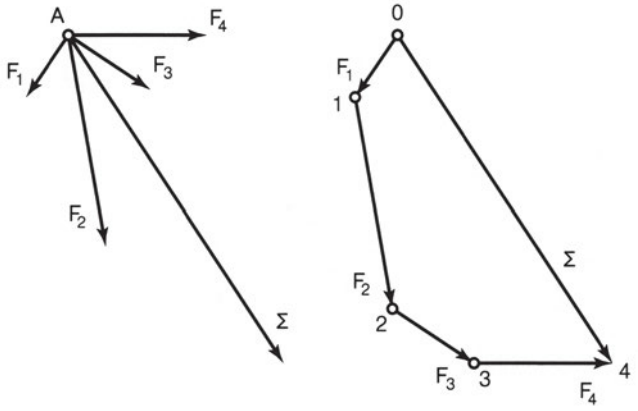
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_2}{F_1}$$

3.2 ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ ΠΟΛΛΩΝ ΟΜΟΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

α) Με τη γραφική μέθοδο

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.2α):

$F_1 = 20$ N $F_2 = 60$ N $F_3 = 30$ N $F_4 = 40$ N



Σχήμα 3.2α *Η συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων γραφικά.*

Ορίζουμε κλίμακα: 1cm: 20 N

Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο 0-1-2-3-4 και προσδιορίζουμε τη συνισταμένη Σ, με σημείο εφαρμογής το κοινό σημείο εφαρμογής των συνιστωσών.

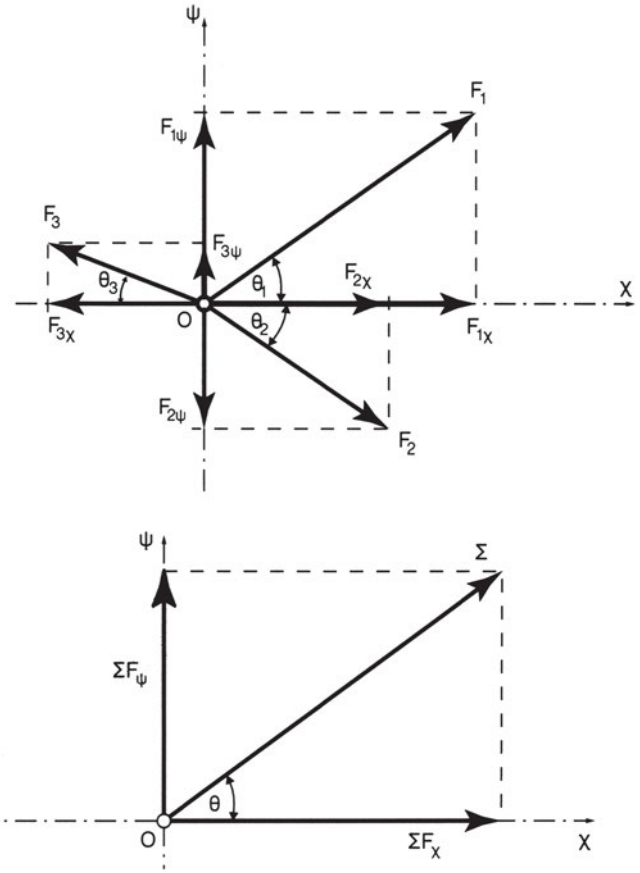
Επομένως:

$\Sigma = 0 - 4 = 5{,}8 \times 20$ N

$\Sigma = 116$ N

β) Με την αναλυτική μέθοδο

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της ανάλυσης σε άξονες. Έστω F_1, F_2 και F_3 οι δυνάμεις (σχ.3.2β) με κοινό σημείο εφαρμογής το Ο. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:



Σχήμα 3.2β *Συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων.*

Βήμα 1ο

Με αρχή το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων (Ο), παίρνουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων O_x και O_ψ.

Βήμα 2ο

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες στους άξονες O_x και O_ψ και υπολογίζουμε τα μέτρα των συνιστωσών με τους γνωστούς μας τύπους:

$F_1 = \Sigma \cdot \text{συν}\theta \rightarrow$ $\quad F_2 = \Sigma \cdot \text{ημ}\theta \rightarrow$

$F_x = \Sigma \cdot \text{συν}\theta$ $\quad F_\psi = \Sigma \cdot \text{ημ}\theta$

$F_{1x} = F_1 \cdot συνθ_1$	$F_{1ψ} = F_1 \cdot ημθ_1$
$F_{2x} = F_2 \cdot συνθ_2$	$F_{2ψ} = F_2 \cdot ημθ_2$
$F_{3x} = F_3 \cdot συνθ_3$	$F_{3ψ} = F_3 \cdot ημθ_3$

Βήμα 3ο

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης στους άξονες O_x και $O_ψ$:

$$ΣF_x = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x}$$

$$ΣF_ψ = F_{1ψ} - F_{2ψ} + F_{3x}$$

Βήμα 4ο

Υπολογίζουμε το μέτρο της συνισταμένης:

$$Σ^2 = (ΣF_x)^2 + (ΣF_ψ)^2$$

$$\boxed{Σ = \sqrt{(ΣF_x)^2 + (ΣF_ψ)^2}}$$

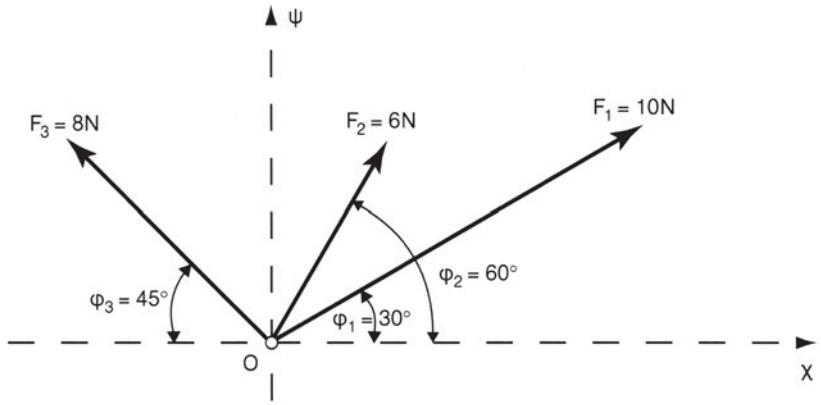
και τη γωνία θ που καθορίζει τη διεύθυνσή της:

$$εφθ = \frac{ΣF_ψ}{ΣF_x}$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης του συστήματος των δυνάμεων του σχήματος.

Δίνονται		**Ζητούνται**
$F_1 = 10$ N	$φ_1 = 30°$	α) Το μέτρο της συνισταμένης (Σ)
$F_2 = 6$ N	$φ_2 = 60°$	β) Η διεύθυνσή της
$F_3 = 8$ N	$φ_3 = 45°$	



Λύση

α) Το ορθογώνιο σύστημα αξόνων έχει δοθεί. Υπολογίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των προβολών των δυνάμεων στους άξονες χ, ψ.

Δυνάμεις	F_x	F_ψ
$F_1 = 10$ N	$F_{1x} = F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 30°$ $F_{1x} = 10\ N \cdot 0{,}866$ $\underline{F_{1x} = 8{,}66\ N}$	$F_{1\psi} = F_1 \cdot \eta\mu 30°$ $F_{1\psi} = 10N \cdot \frac{1}{2}$ $\underline{F_{1\psi} = 5N}$
$F_2 = 6$ N	$F_{2x} = F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu 60°$ $F_{2x} = 6N \cdot \frac{1}{2}$ $\underline{F_{2x} = 3N}$	$F_{2\psi} = F_2 \cdot \eta\mu 60°$ $F_{2\psi} = 6N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\underline{F_{2\psi} = 5{,}2\ N}$
$F_3 = 8$ N	$F_{3x} = -8N \cdot \sigma\upsilon\nu 45°$ $F_{3x} = -8N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\underline{F_{3x} = -5{,}66\ N}$	$F_{3\psi} = F_3 \cdot \eta\mu 45°$ $F_{3\psi} = 8\ N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\underline{F_{3\psi} = 5{,}66\ N}$
	$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$ $\Sigma F_x = 8{,}66\ N + 3\ N - 5{,}66\ N$ $\Sigma F_x = 6\ N$	$\Sigma F_\psi = F_{1\psi} + F_{2\psi} + F_{3\psi}$ $\Sigma F_\psi = 5N + 5{,}2N + 5{,}66N$ $\underline{\Sigma F_\psi = 15{,}86\ N}$

$$\Sigma = \sqrt{\left(\Sigma F_x\right)^2 + \left(\Sigma F_\psi\right)^2} = \sqrt{6^2 N^2 + 15,86^2 N^2}$$

$$\Sigma = 16,95 N$$

$$\beta)\ \varepsilon\varphi\theta = \frac{\Sigma F_\psi}{\Sigma F_x} = \frac{15,86N}{6N}$$

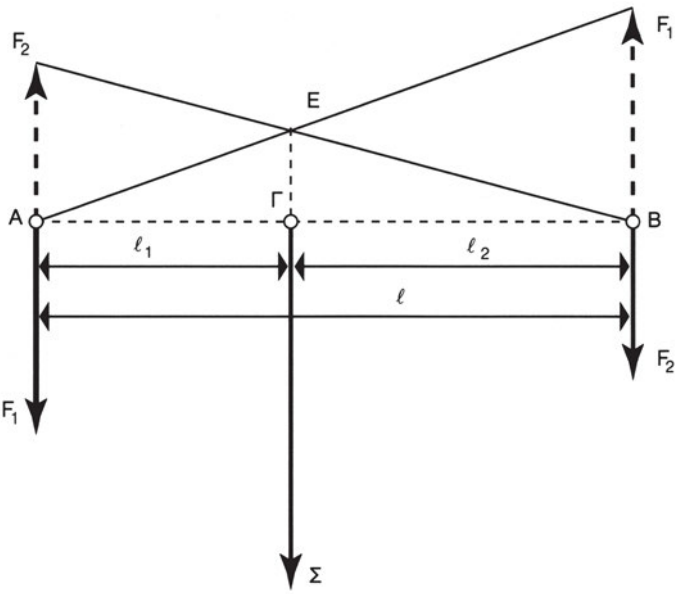
$$\varepsilon\varphi\theta = 2,64$$

$$\theta \cong 69°$$

3.3 ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΦΟΡΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

α) Με τη γραφική μέθοδο

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.3α):



Σχήμα 3.3α *Η συνισταμένη γραφικά δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων.*

$F_1 = 12$ daN $F_2 = 8$ daN $\ell = 2$m

Ορίζουμε τις κλίμακες: μηκών 1 cm : 25 cm
δυνάμεων 1 cm : 4 daN

Μεταφέρουμε τις δυνάμεις F_1, F_2 στα σημεία εφαρμογής Β,Α αντίστοιχα, επάνω στις διευθύνσεις των δυνάμεων F_2, F_1. Η διεύθυνση της συνισταμένης Σ θα είναι παράλληλη με τις συνιστώσες, θα διέρχεται από το σημείο τομής Ε και θα έχει σημείο εφαρμογής το σημείο Γ.

Επομένως :

$\Sigma = 5 \times 4$ daN $\quad \ell_1 = 3{,}3 \times 25$ cm $\quad \ell_2 = 4{,}7 \times 25$ cm

$\Sigma = 20$ daN $\quad \ell_1 = 82{,}5$ cm $\quad \ell_2 = 117{,}5$ cm

β) Με την αναλυτική μέθοδο (σχ. 3.3α):

Η συνισταμένη Σ έχει μέτρο:

$$\mathbf{\Sigma = F_1 + F_2}$$

και διεύθυνση και φορά, αυτή των συνιστωσών.

Για τον προσδιορισμό του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης, εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών, ως προς το σημείο Γ:

$M_\Sigma = M_{F1} + M_{F2}$

$0 = -F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 \qquad F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2 \qquad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$

Κατά συνέπεια, μπορούμε να καταλήξουμε στη διατύπωση:

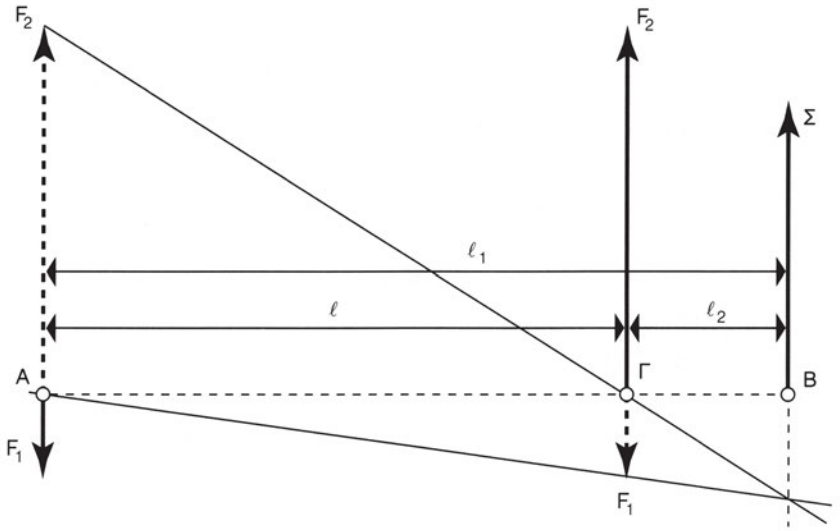
Η συνισταμένη έχει: α) μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών, β) την ίδια διεύθυνση και φορά με τις συνιστώσες, γ) το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται επί της ευθείας που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, πλησιέστερα προς τη μεγαλύτερη και δ) διαιρεί την ευθεία, που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, σε τμήματα αντιστρόφως ανάλογα προς τις συνιστώσες.

3.4 ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

α) Με τη γραφική μέθοδο

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.4α):

$F_1 = 4$ daN $\quad F_2 = 20$ daN $\quad \ell = 2$m



Σχήμα 3.4α *Η συνισταμένη γραφικά δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων.*

Ορίζουμε τις κλίμακες μηκών: 1cm: 20 cm
δυνάμεων: 1cm: 4 daN

Η διαδικασία είναι η ίδια με αυτή των δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων.

Προκύπτει επομένως:

$\Sigma = 4 \times 4$ daN $\quad \ell_1 = 10 \times 20$ cm $\quad \ell_2 = 2 \times 20$ cm

$\Sigma = 16$ daN $\quad \ell_1 = 200$ cm $\quad \ell_2 = 40$ cm

6) Με την αναλυτική μέθοδο (σχ. 3.4α):

Η συνισταμένη έχει μέτρο:

$$\Sigma = F_2 - F_1$$

Η διεύθυνσή της συμπίπτει με τη διεύθυνση των συνιστωσών και η φορά της με τη φορά της μεγαλύτερης συνιστώσας. Για τον προσδιορισμό του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης, εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών ως προς το σημείο Β:

$M_{\Sigma} = M_{F1} + M_{F2}$

$0 = F_1 \cdot \ell_1 - F_2 \cdot \ell_2 \qquad F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2 \qquad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$

Κατά συνέπεια, καταλήγουμε στη διατύπωση:

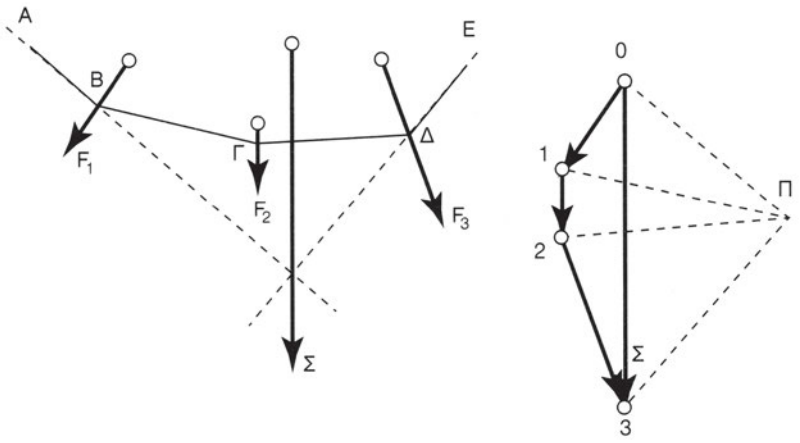
Η συνισταμένη έχει: α) μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων των συνιστωσών, β) την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες και φορά, αυτή της μεγαλύτερης, γ) το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται στην προέκταση της ευθείας, που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, προς το μέρος της μεγαλύτερης και δ) οι αποστάσεις της από τις συνιστώσες, είναι αντιστρόφως ανάλογες προς αυτές.

3.5 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΥΧΟΥΣΩΝ ΟΜΟΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Γραφική μέθοδος:

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.5 α):

$F_1 = 3$ daN $\qquad F_2 = 2$ daN $\qquad F_3 = 5$daN



Σχήμα 3.5α *Σύνθεση τυχουσών ομοεπίπεδων δυνάμεων*

Ορίζουμε κλίμακα: 1cm: 2daN

Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο 0-1-2-3, αρχίζοντας από ένα τυχόν σημείο Ο και προσδιορίζουμε τη συνισταμένη Σ κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο.

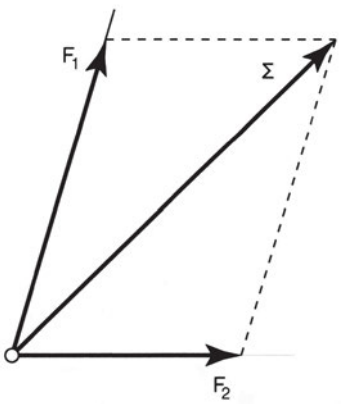
Παίρνουμε έναν πόλο και φέρνουμε τις πολικές ακτίνες π-0, π-1, π-2 και π-3.

Αρχίζοντας από το τυχόν σημείο Α, φέρνουμε τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλες αντίστοιχα προς τις πολικές ακτίνες π-0, π-1, π-2, π-3 και σχηματίζουμε το σχοινοπολύγωνο Α-Β-Γ-Δ-Ε. Το σημείο τομής των προεκτάσεων των Α-Β και Δ-Ε προσδιορίζει ένα σημείο της διεύθυνσης της συνισταμένης Σ.

3.6 ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Η ανάλυση μιας δύναμης που ενεργεί σε ένα σώμα, αποσκοπεί στον προσδιορισμό ενός συστήματος δυνάμεων, το οποίο, όταν ενεργεί στο σώμα, επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της αρχικής δύναμης. Οι δυνάμεις του συστήματος ονομάζονται **συνιστώσες** και η εργασία που περιγράψαμε, **ανάλυση δύναμης σε συνιστώσες.**

α) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες, των οποίων είναι γνωστές οι διευθύνσεις (σχ. 3.6 α).

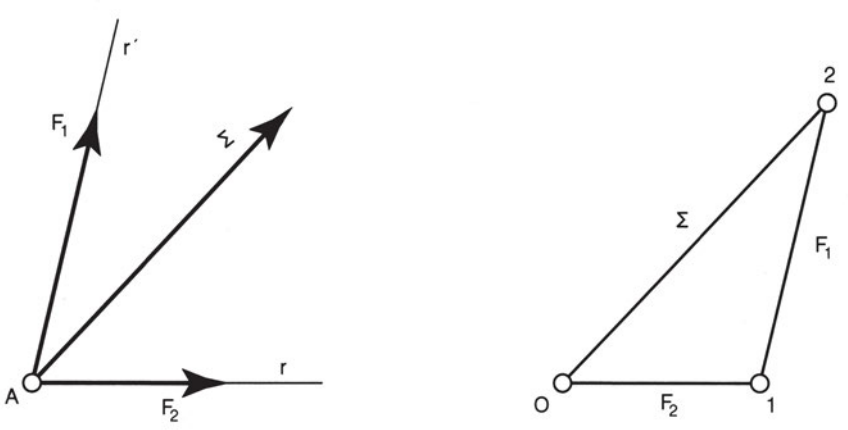


Σχήμα 3.6α *Ανάλυση δύναμης: α) περίπτωση*

Με γνωστές τις διευθύνσεις των συνιστωσών σχηματίζουμε, κατά τα γνωστά από τη σύνθεση των δυνάμεων, το παραλληλόγραμμο και προσδιορίζουμε τις συνιστώσες F_1 , F_2.

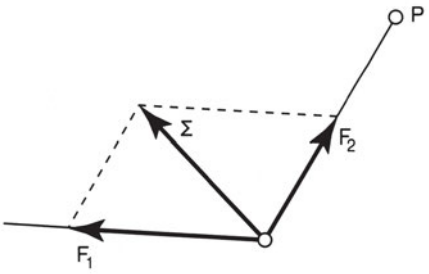
Μία δεύτερη ενδιαφέρουσα λύση του ίδιου προβλήματος, περιγράφουμε παρακάτω:

Από ένα τυχόν σημείο Ο φέρνουμε (σχ. 3.6 α΄) την 0-2 ίση και παράλληλη προς τη Σ. Από τα σημεία Ο και 2 φέρνουμε αντίστοιχα τις παράλληλες προς τις διευθύνσεις r, r΄. Το σημείο τομής 1 προσδιορίζει τις δύο συνιστώσες F_2, F_1 οι οποίες μεταφέρονται στις διευθύνσεις τους r, r΄.



Σχήμα 3.6α΄ *Ανάλυση δύναμης : α) περίπτωση – δεύτερη λύση*

β) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες με γνωστή τη διεύθυνση της πρώτης και ένα σημείο P της διεύθυνσης της δεύτερης.

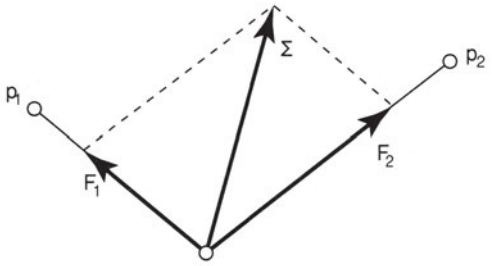


Σχήμα 3.6β *Ανάλυση δύναμης: β) περίπτωση*

Ενώνουμε το σημείο Ρ με το σημείο εφαρμογής της Σ και ανάγουμε το πρόβλημα στην περίπτωση α).

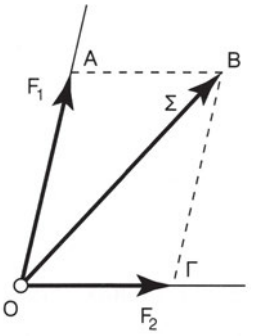
γ) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες με γνωστό από ένα σημείο των διευθύνσεων των συνιστωσών.

Ανάγεται με ευκολία στην περίπτωση α).



Σχήμα 3.6γ *Ανάλυση δύναμης: γ) περίπτωση*

δ) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες με γνωστά το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της μίας.

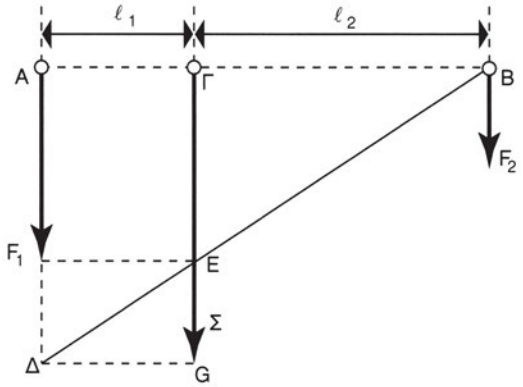


Σχήμα 3.6δ *Ανάλυση δύναμης: δ) περίπτωση*

Με γνωστές τις δυνάμεις Σ, F_1 σχηματίζουμε το τρίγωνο ΟΑΒ. Η ζητούμενη συνιστώσα F_2 θα είναι παράλληλη προς την ΑΒ και θα έχει σημείο εφαρμογής αυτό των Σ, F_1 , δηλαδή το Ο.

3.7 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ (ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Έστω (σχ. 3.7α): Σ = 20 daN ℓ_1 = 2 m ℓ_2 = 4 m



Σχήμα 3.7α *Ανάλυση δύναμης σε δύο παράλληλες δυνάμεις*

α) Πρώτη γραφική μέθοδος

Ορίζουμε τις κλίμακες: μηκών: 1 cm: 1 m
δυνάμεων: 1 cm: 5 daN

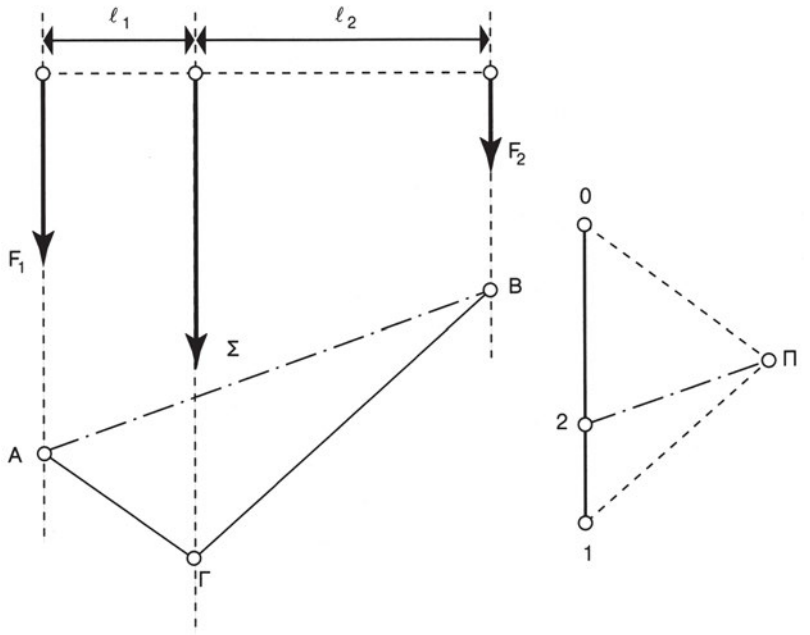
Σχεδιάζουμε τη δύναμη και τις αποστάσεις ℓ_1, ℓ_2 στις οποίες φέρουμε τις δύο διευθύνσεις των συνιστωσών. Στη διεύθυνση της συνιστώσας F_1 μεταφέρουμε τη δύναμη Σ (είναι η ΑΔ) και φέρνουμε την ευθεία ΔΒ. Επί της συνισταμένης Σ προσδιορίζονται έτσι δύο ευθύγραμμα τμήματα: το ΓΕ = F_1 που μεταφέρεται στο σημείο Α και το ΕG = F_2 που μεταφέρεται στο Β. Με αντίστοιχες μετρήσεις προκύπτουν:

F_1 = 2,6 × 5 daN F_2= 1,3 × 5 daN

F_1 = 13 daN **F_2 = 6,5 daN**

β) Δεύτερη γραφική μέθοδος

Σημειώνουμε τις κλίμακες, τη θέση της Σ και τις διευθύνσεις των συνιστωσών (σχ. 3.7β).



Σχήμα 3.7β *Δεύτερη γραφική μέθοδος*

Από τυχαίο σημείο Ο σχεδιάζουμε τη δύναμη Σ (είναι η Ο -1) και από τυχαίο πόλο π φέρνουμε τις πολικές ακτίνες π-0, π-1.

Από τυχαίο σημείο Γ που βρίσκεται στη διεύθυνση της Σ φέρνουμε τις ΓΑ και ΓΒ παράλληλες αντίστοιχα στις πολικές ακτίνες π-0 και π-1. Ενώνουμε τα σημεία Α και Β και φέρνουμε από τον πόλο π την πολική ακτίνα π-2 παράλληλη προς την ΑΒ. Η Ο-2 προσδιορίζει τη συνιστώσα F_1 και η 2-1 την F_2.

Με αντίστοιχες μετρήσεις προκύπτουν:

$F_1 = 2{,}6 \times 5$ daN $\qquad F_2 = 1{,}3 \times 5$ daN

$F_1 = 13$ daN $\qquad$ **$F_2 = 6{,}5$ daN**

γ) Αναλυτική μέθοδος

$\Sigma = F_1 + F_2 = 20$ daN $\qquad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\ell_2}{\ell_1} = \dfrac{4\text{ m}}{2\text{ m}}$

Από το σύστημα: $F_1 + F_2 = 20$ daN

$F_1 = 2F_2$

προκύπτει:

$2F_2 + F_2 = 20$ daN $\qquad 3\,F_2 = 20$daN

$$F_2 = \frac{20\,\text{daN}}{3}$$

F_2 = 6,66 daN

$F_1 + F_2 = 20$ daN

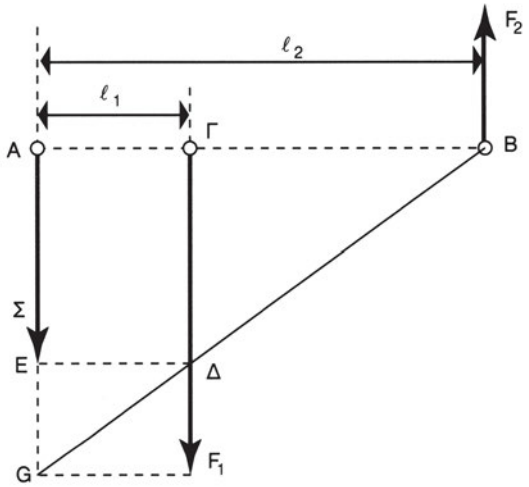
$F_1 = 20$ daN - 6,66 daN

F_1 = 13,34 daN

Συγκρίνετε τα αποτελέσματα γραφικής και αναλυτικής μεθόδου και αιτιολογήστε τις διαφορές.

3.8 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ (ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Έστω (σχ. 3.8α):



Σχήμα 3.8α *Η γραφική μέθοδος*

Σ = 12 daN $\qquad \ell_1 = 2$m $\qquad \ell_2 = 6$m

α) Με τη γραφική μέθοδο

Ορίζουμε τις κλίμακες: μηκών: 1 cm:1 m
δυνάμεων: 1 cm: 4 daN

Σχεδιάζουμε τη δύναμη Σ, σημειώνουμε τις αποστάσεις ℓ_1, ℓ_2 καθώς και τις διευθύνσεις των συνιστωσών.

Μεταφέρουμε τη Σ στη διεύθυνση της πρώτης συνιστώσας (είναι η ΓΔ), φέρνουμε τη ΒΔ και την προεκτείνουμε μέχρι να συναντήσει τη διεύθυνση της Σ στο σημείο G.

Η απόσταση AG εκπροσωπεί τη συνιστώσα F_1 στο σημείο Γ και η EG την F_2 στο σημείο Β.

Με αντίστοιχες μετρήσεις προκύπτουν :

$F_1 = 4{,}4 \times 4$ daN $\quad F_2 = 1{,}6 \times 4$ daN

$F_1 = 17{,}6$ daN $\quad F_2 = 6{,}4$ daN

β) Με την αναλυτική μέθοδο

$\Sigma = F_1 - F_2 = 12$ daN

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{6\text{m}}{2\text{m}}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 3$$

Επομένως:

$F_1 - F_2 = 12$daN

$F_1 = 3F_2$

$3F_2 - F_2 = 12$ daN

$2\,F_2 = 12$ daN

$$F_2 = \frac{12\text{ daN}}{2}$$

$$\underline{F_2 = 6\text{ daN}}$$

$F_1 - F_2 = 12$ daN

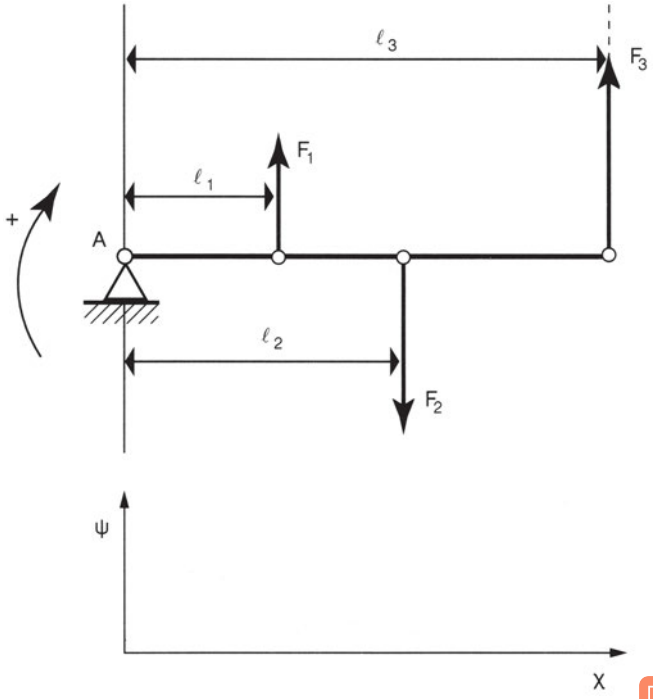
$F_1 = 12$ daN $+ F_2$

$F_1 = 12$ daN $+ 6$ daN

$F_1 = 18$ daN

3.9 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για να ισορροπήσει ένα στερεό σώμα (σχ.3.9α), στο οποίο ενεργούν πολλές δυνάμεις F_1, F_2 ..., θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων (ΣF) και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων (ΣM), να είναι ίσες με μηδέν.



Σχήμα 3.9α *Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος*

Δηλαδή:

$$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

Η πρώτη συνθήκη αποκλείει τη μεταφορική κίνηση και η δεύτερη την περιστροφική.

Όταν οι δυνάμεις είναι ομοεπίπεδες, οι παραπάνω συνθήκες ισορροπίας παίρνουν τις αναλυτικές εκφράσεις:

$\Sigma F = 0\}$		$\{\Sigma F_\chi = 0 \quad \{\Sigma F_\psi = 0$
	ομοεπίπεδες δυνάμεις →	
$\Sigma M = 0\}$		$\{\Sigma M = 0$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (σχ. 3.9α)

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_\psi = 0$

$\Sigma F_\psi = F_1 - F_2 + F_3 = 0$

$\Sigma M_A = 0$

$\Sigma M_A = - F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 - F_3 \cdot \ell_3$



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΡΙΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- **Η σύνθεση δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων** που ενεργούν σε ένα σώμα αποσκοπεί στον προσδιορισμό μιας δύναμης, της συνισταμένης, η οποία όταν ενεργεί στο σώμα επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό των αρχικών δυνάμεων.

α. Δυνάμεις συγγραμμικές και ομόφορες:

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση :

$$\Sigma = F_1 + F_2$$

Η διεύθυνση και η φορά είναι αυτές των συνιστωσών.

β. Δυνάμεις συγγραμμικές και αντίφορες :

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση :

$$\Sigma = F_1 - F_2$$

Η διεύθυνση είναι η διεύθυνση των συνιστωσών και η φορά αυτή της μεγαλύτερης σε μέτρο συνιστώσας.

γ. Δυνάμεις υπό γωνία φ = 90°

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_2}{F_1}$$

- Η συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων με κοινό σημείο εφαρμογής προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

$$\Sigma = \sqrt{\left(\Sigma F_x\right)^2 + \left(\Sigma F_\psi\right)^2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Sigma F_\psi}{\Sigma F_x}$$

- Η συνισταμένη δύο παραλλήλων και ομοφόρων δυνάμεων έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών, έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τις συνιστώσες, το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται επί της ευθείας που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, πλησιέστερα προς τη μεγαλύτερη και διαιρεί την ευθεία που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών σε τμήματα αντιστρόφως ανάλογα προς τις συνιστώσες.
- Η συνισταμένη δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων έχει μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων των συνιστωσών, έχει την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες και φορά αυτή της μεγαλύτερης, το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται στη προέκταση της ευθείας που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών προς το μέρος της μεγαλύτερης και οι αποστάσεις της από τις συνιστώσες είναι αντιστρόφως ανάλογες προς αυτές.

- Η ανάλυση μίας δύναμης σε δύο παράλληλες συνιστώσες συνοψίζεται στις σχέσεις:

$\Sigma = F_1 + F_2$ $\qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$ (συνιστώσες ομόρροπες)

$\Sigma = F_1 - F_2$ $\qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$ (συνιστώσες αντίρροπες)

- Για να ισορροπήσει ένα στερεό σώμα, στο οποίο ενεργούν πολλές δυνάμεις F_1, F_2 .... θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων (ΣF), και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων (ΣΜ) να είναι ίσες με μηδέν. Δηλαδή:

$$\Sigma F = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma M = 0$$

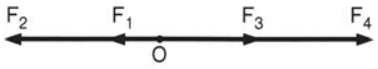
Η πρώτη συνθήκη αποκλείει τη μεταφορική κίνηση και η δεύτερη την περιστροφική.



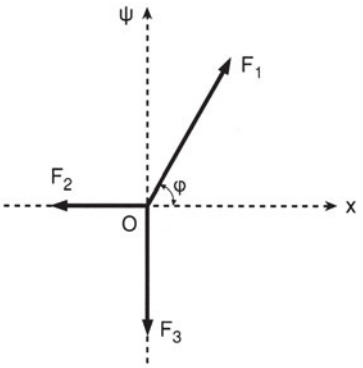
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη με την αναλυτική και τη γραφική μέθοδο των ομοευθειακών δυνάμεων, οι οποίες ενεργούν στο σώμα Ο.

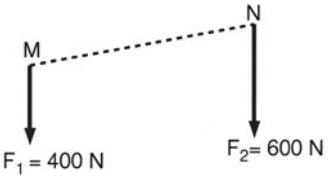
$F_1 = 2$ daN
$F_2 = 7$ daN
$F_3 = 4$ daN
$F_4 = 9$ daN



2. Να βρεθεί το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων F_1, F_2, F_3 που ενεργούν στο ίδιο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν $F_1 = 50$ N, $F_2 = 10$ N, $F_3 = 20\sqrt{3}$ N και $\varphi = 60°$.

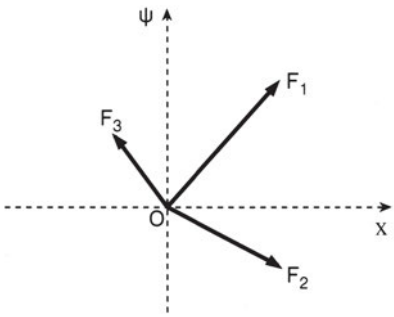


3. Να προσδιορίσετε, με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο, το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2 που φαίνονται στο σχήμα, όταν η απόσταση ΜΝ είναι ίση με 0,70 m.

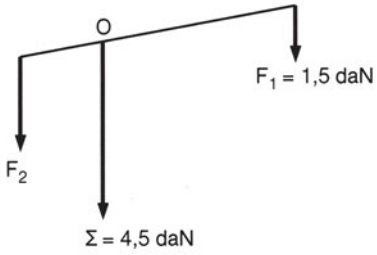


4. Να υπολογιστεί η συνισταμένη των δυνάμεων του σχήματος F_1, F_2, F_3, όταν:

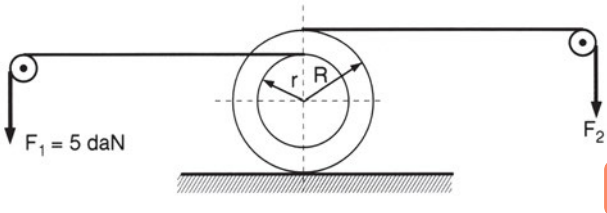
$F_{1x} = 3,5N$ $F_{1\psi} = 1,5N$
$F_{2x} = 2N$ $F_{2\psi} = -1N$
$F_{3x} = -1,5N$ $F_{3\psi} = 3,5\ N$

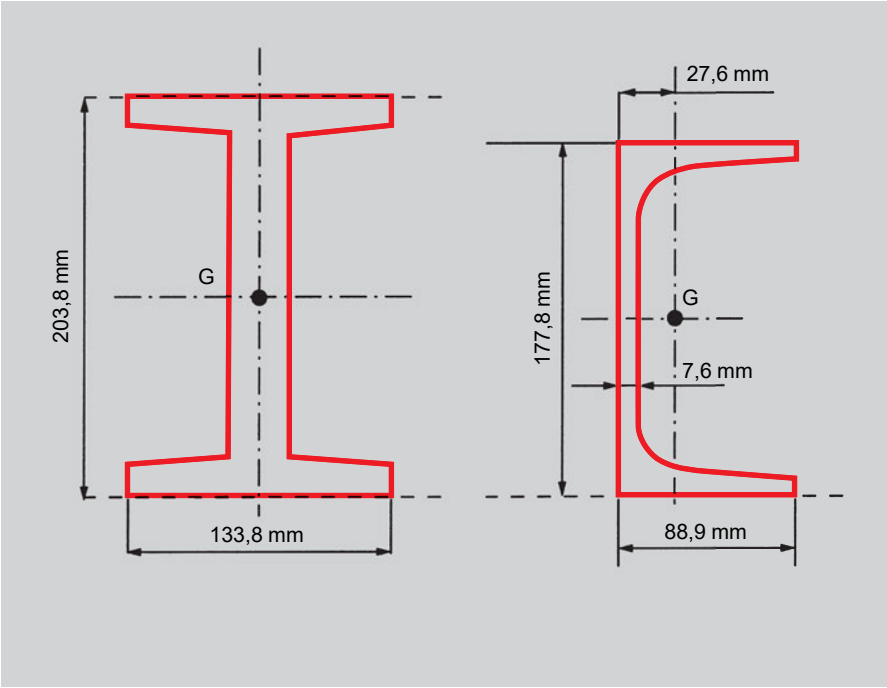


5. Να αναλύσετε τη δύναμη Σ στις συνιστώσες $F_1 = 1,5$ daN και F_2, αν η απόσταση της F_1 από το σημείο Ο είναι ίση με 100 cm.



6. Να προσδιορίσετε τη δύναμη F_2, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισορροπία του συστήματος του σχήματος, αν r = 25 cm και R = 40 cm.





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

4.1 Κέντρο βάρους

4.2 Κεντροειδές γραμμών και επιφανειών

4.3 Κεντροειδή μερικών γεωμετρικών σχημάτων

4.4 Προσδιορισμός του κεντροειδούς - αναλυτική μέθοδος

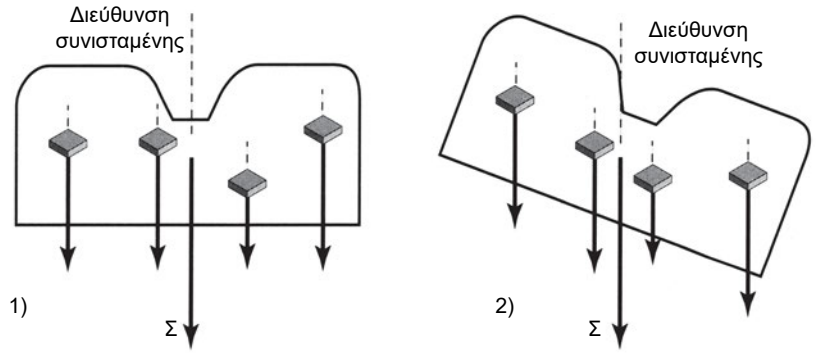
4.5 Ισορροπία και είδη ισορροπίας

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να ορίζετε το κέντρο βάρους και το κεντροειδές και να γνωρίζετε τη σημασία τους στις κατασκευές.
- Να γνωρίζετε την αναλυτική και τη γραφική μέθοδο προσδιορισμού του κέντρου βάρους και του κεντροειδούς.
- Να μπορείτε να προσδιορίζετε το κέντρο βάρους και το κεντροειδές απλών γεωμετρικών σχημάτων.
- Να μπορείτε να επιλύετε πρακτικά προβλήματα προσδιορισμού του κέντρου βάρους και του κεντροειδούς, με την αναλυτική και τη γραφική μέθοδο, να συγκρίνετε και να μελετάτε τα αποτελέσματα και να καταλήγετε στη διατύπωση χρήσιμων συμπερασμάτων.
- Να ορίζετε την ευσταθή, ασταθή και αδιάφορη ισορροπία και να μπορείτε να κρίνετε περί της ευστάθειας ή μη των κατασκευών.

4.1 ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ

Η συνηθέστερη δύναμη είναι το βάρος· με τον όρο βάρος **σώματος,** εννοούμε, τη δύναμη με την οποία το σώμα έλκεται από τη γη.



Σχήμα 4.1α *Η διεύθυνση της συνισταμένης παραμένει η ίδια, όταν το σώμα αλλάζει θέση.*

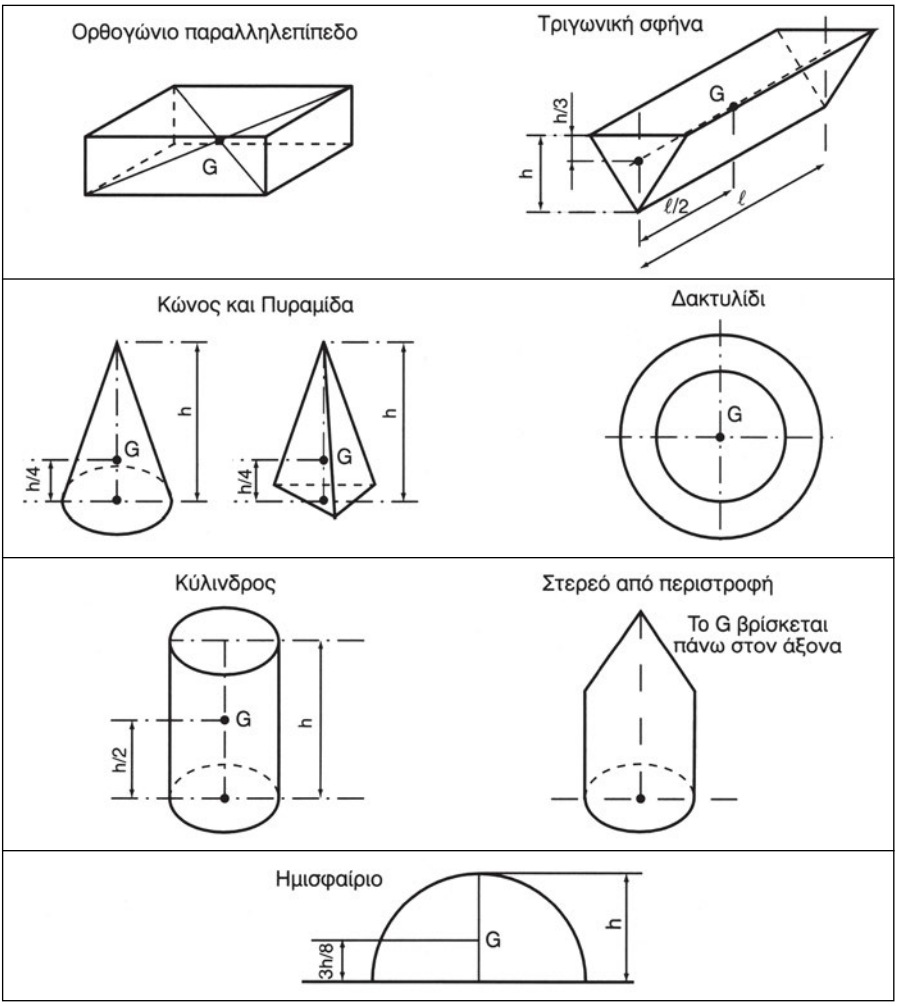
Οι δυνάμεις της βαρύτητας ασκούνται από τη γη (σχ. 4.1α-1) σε όλα τα μικρά τεμάχια, από τα οποία αποτελείται το σώμα και αποτελούν ένα σύστημα παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων. Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δυνάμεων, δηλαδή της δύναμης που εκπροσωπεί το βάρος

του σώματος, ονομάζεται **κέντρο βάρους** του σώματος για οποιαδήποτε θέση του. Δηλαδή, αν το σώμα αλλάξει θέση (σχ. 4.1α-2) , η συνισταμένη του συστήματος των δυνάμεων, που αναφέραμε παραπάνω, θα έχει το ίδιο μέτρο και η διεύθυνσή της θα διέρχεται από το κέντρο βάρους του σώματος.

Όλες οι ευθείες, οι οποίες διέρχονται από το κέντρο βάρους, ονομάζονται **κεντροβαρικοί άξονες.**

Αν το σώμα είναι ομογενές και έχει κέντρο, άξονα ή επίπεδο συμμετρίας, τότε το κέντρο βάρους (G) του σώματος θα βρίσκεται αντίστοιχα στο κέντρο, στον άξονα ή στο επίπεδο συμμετρίας.

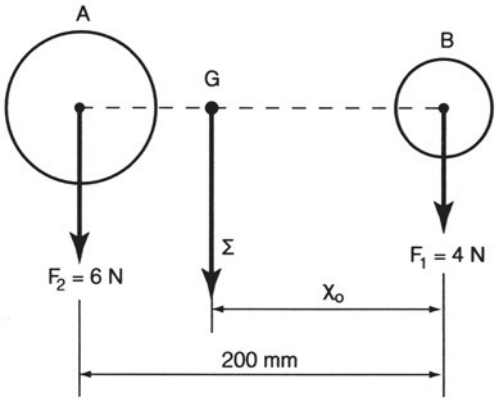
Τα Κ.Β. για μερικά ομογενή κανονικά γεωμετρικά στερεά, δίνονται στον παρακάτω πίνακα (4.1 β).



Σχήμα 4.1β *Κέντρα βάρους κανονικών γεωμετρικών σχημάτων*

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το Κ.Β. των σωμάτων Α και Β με βάρη αντίστοιχα 4Ν και 6Ν, είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης (Σ) των δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων.



$F_1 = 4$ N και $F_2 = 6$ N:

$\Sigma = F_1 + F_2 = 4N + 6N$

$\Sigma = 10N$

Αν X_o είναι η απόσταση της συνισταμένης από τη δύναμη F_1, θα έχουμε:

$MF_1 + MF_2 = M_\Sigma$

Ροπές ως προς το σημείο Β:

$4N \cdot 0 - 6N \cdot 200mm = -10N \cdot X_o$

$10N \cdot X_o = 1200\ N{\cdot}mm$

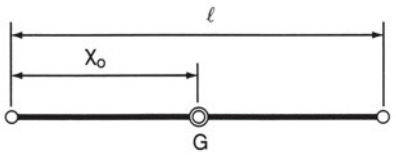
$X_o = 120$ mm

4.2 ΚΕΝΤΡΟΕΙΔΕΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Στην περίπτωση κατά την οποία, μία ή δύο διαστάσεις του σώματος είναι πολύ μικρές, σε σχέση με τις υπόλοιπες, θα πρέπει να μιλάμε περί κέντρου βάρους επιφανειών ή γραμμών αντίστοιχα. Επειδή όμως, τόσο οι επιφάνειες, όσο και οι γραμμές δεν έχουν βάρος, θα μιλάμε για **κεντροειδές** γραμμών και επιφανειών.

Ο προσδιορισμός του κεντροειδούς των επιφανειών γίνεται με τρόπο αντίστοιχο, με αυτόν του προσδιορισμού του κέντρου βάρους, με τη διαφορά, ότι –κατ' αναλογία με τη θεώρηση ότι το σώμα αποτελείται από στοιχειώδη σωματίδια– και η επιφάνεια αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες.

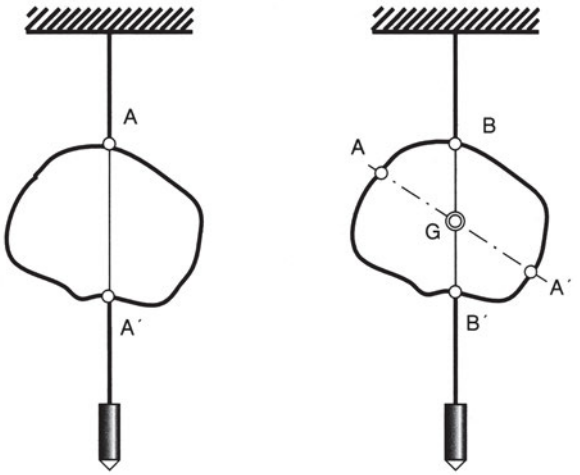
Στην περίπτωση του κεντροειδούς των απλών γραμμών, όπως π.χ. μίας σιδερένιας ράβδου, της οποίας οι δύο διαστάσεις, σε σχέση με την τρίτη (το μήκος), είναι πολύ μικρές, το κεντροειδές (σχ.4.2α) βρίσκεται στη μέση του μήκους της.



Σχήμα 4.2α *Κεντροειδές γραμμής*

Ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού του κεντροειδούς μίας επιφάνειας είναι αυτός της **διπλής ανάρτησης.**

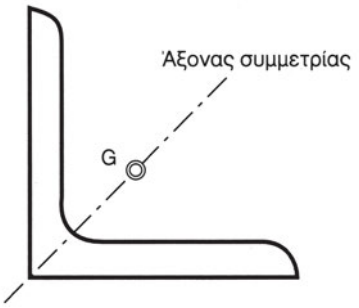
Η μέθοδος αυτή συνίσταται, στη διαδοχική ανάρτηση π.χ. ενός ελάσματος (σχ. 4.2β) από δύο διαφορετικά σημεία, π.χ. τα Α και Β.



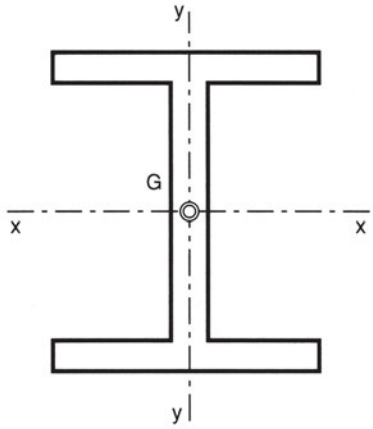
Σχήμα 4.2β *Προσδιορισμός του κεντροειδούς με διπλή ανάρτηση*

Επειδή οι δύο διευθύνσεις του σύρματος, είναι διευθύνσεις –και στις δύο περιπτώσεις– της δύναμης, που εκπροσωπεί το βάρος του ελάσματος, συμπεραίνεται, ότι οι διευθύνσεις αυτές είναι κεντροβαρικοί άξονες. Επομένως, το Κ.Β. του ελάσματος, θα βρίσκεται στο σημείο τομής των δύο αξόνων.

Το κεντροειδές των συμμετρικών σχημάτων βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας, αν το σχήμα έχει έναν άξονα συμμετρίας (σχ.4.2γ), ή στο σημείο τομής των δύο αξόνων συμμετρίας, αν το σώμα έχει δύο τέτοιους άξονες (σχ.4.2δ).



Σχήμα 4.2γ *Κεντροειδές σχήματος με ένα άξονα συμμετρίας*

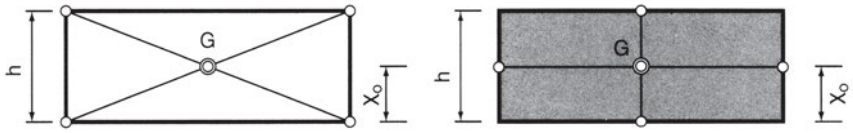


Σχήμα 4.2δ *Κεντροειδές σχήματος με δύο άξονες συμμετρίας*

Παραθέτουμε στη συνέχεια, τους τρόπους εύρεσης του κεντροειδούς μερικών γεωμετρικών σχημάτων.

4.3 ΚΕΝΤΡΟΕΙΔΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

α) Κεντροειδές ορθογωνίου

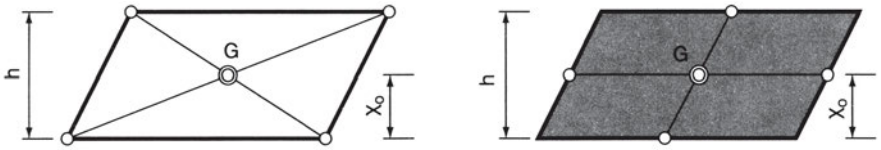


$$x_0 = \frac{h}{2} = 0,5h$$

Σχήμα 4.3α *Το κεντροειδές ορθογωνίου*

Το κεντροειδές του ορθογωνίου, που αφορά τόσο την περίμετρο, όσο και την επιφάνειά του, (σχ. 4.3α) βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων του, ή στο σημείο τομής των δύο ευθειών που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του.

β) Κεντροειδές παραλληλογράμμου

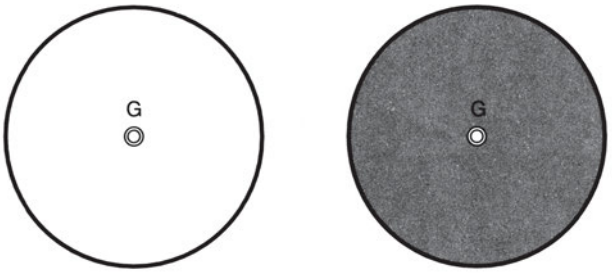


$$x_0 = \frac{h}{2} = 0{,}5\,h$$

Σχήμα 4.3β *Το κεντροειδές παραλληλογράμμου*

Προσδιορίζεται (σχ. 4.3β) κατά τον ίδιο τρόπο με αυτόν του ορθογωνίου και αφορά τόσο την περίμετρο, όσο και την επιφάνειά του.

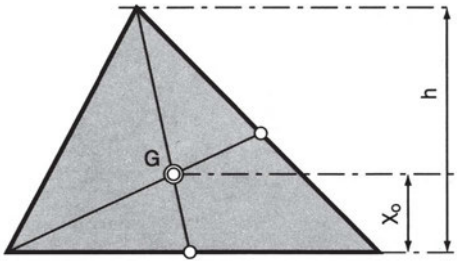
γ) Κεντροειδές περιφέρειας και κύκλου



Σχήμα 4.3γ *Κεντροειδές περιφέρειας και κύκλου*

Συμπίπτει αντίστοιχα (σχ. 4.3γ) με το κέντρο της περιφέρειας, ή του κύκλου.

δ) Κεντροειδές της επιφάνειας τριγώνου

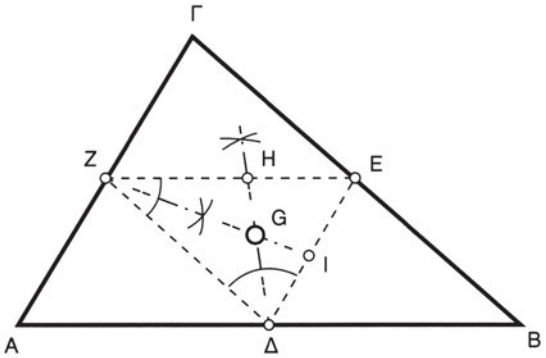


$$x_0 = \frac{h}{3}$$

Σχήμα 4.3δ *Κεντροειδές επιφάνειας τριγώνου*

Προσδιορίζεται (σχ. 4.3δ) από το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου.

ε) Κεντροειδές της περιμέτρου τριγώνου

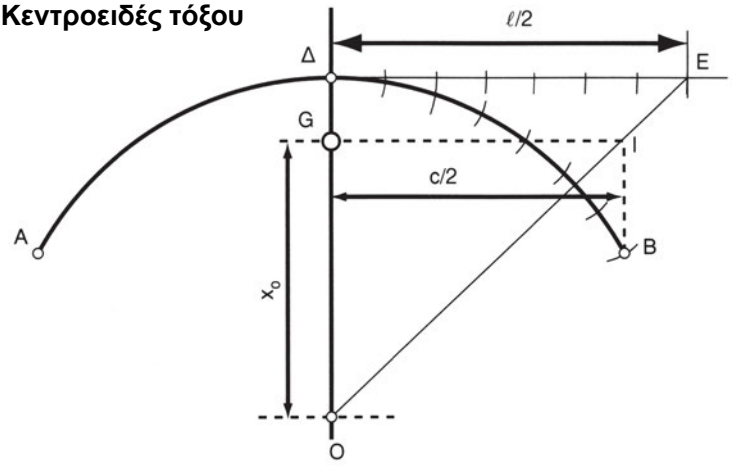


Σχήμα 4.3ε *Το κεντροειδές της περιμέτρου τριγώνου*

Το κεντροειδές της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ, συμπίπτει (σχ. 4.3ε) με το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών ενός άλλου τριγώνου ΔΕΖ, που ορίζεται από τις ευθείες που ενώνουν τα κεντροειδή των πλευρών του αρχικού τριγώνου.

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο είναι δυνατό να προσδιορίσουμε το κεντροειδές της περιμέτρου ενός τριγώνου και μπορεί να αποτελέσει γενικό κανόνα για τον προσδιορισμό του κεντροειδούς οιουδήποτε πολυγώνου, είναι ο εξής: Στα κεντροειδή των πλευρών του τριγώνου εφαρμόζουμε αντίστοιχα παράλληλες δυνάμεις, ίσες, ή ανάλογες με τις πλευρές. Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δυνάμεων, συμπίπτει με το ζητούμενο κεντροειδές.

στ) Κεντροειδές τόξου

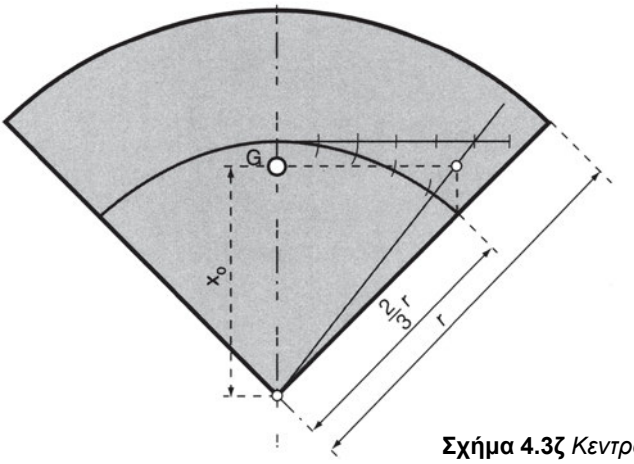


Σχήμα 4.3στ *Το κεντροειδές τόξου*

Αν ΑΒ είναι το τόξο (σχ.4.3στ) του οποίου ζητείται το κεντροειδές, για τον προσδιορισμό του εργαζόμαστε ως εξής: Αν ΟΔ ο άξονας συμμετρίας του τόξου και ΔΕ το μήκος, σε ευθεία γραμμή, του τμήματος ΔΒ του δοθέντος τόξου στην εφαπτομένη στο σημείο Δ του τόξου ΑΒ, φέρνουμε την ΟΕ και από το σημείο Β την παράλληλο στον άξονα συμμετρίας ΟΔ. Προσδιορίζουμε, επομένως ,το σημείο (Ι) από το οποίο φέρνουμε παράλληλο προς την ΔΕ, η οποία τέμνει τον άξονα συμμετρίας ΟΔ στο σημείο (G), που είναι το ζητούμενο κεντροειδές. Με τους συμβολισμούς του σχήματος, το κεντροειδές θα προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\chi_0 = \frac{r \cdot c}{\ell}}$$ όπου r, η ακτίνα του τόξου

ζ) Κεντροειδές κυκλικού τομέα



Σχήμα 4.3ζ *Κεντροειδές κυκλικού τομέα*

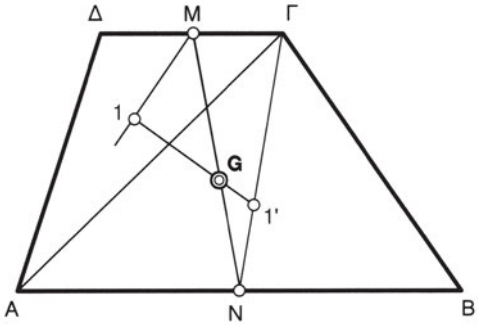
Αν (r) η ακτίνα του κυκλικού τομέα (σχ. 4.3ζ), φέρνουμε το τόξο με ακτίνα 2/3 r και ακολουθώντας την ίδια μέθοδο που περιγράψαμε στην προηγούμενη περίπτωση, προσδιορίζουμε το κεντροειδές του τόξου αυτού, που είναι και το ζητούμενο κεντροειδές του κυκλικού τομέα. Το κεντροειδές, με τους συμβολισμούς του σχήματος και της προηγούμενης παραγράφου, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{X_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot c}{\ell}}$$

η) Κεντροειδές τραπεζίου

1ος τρόπος

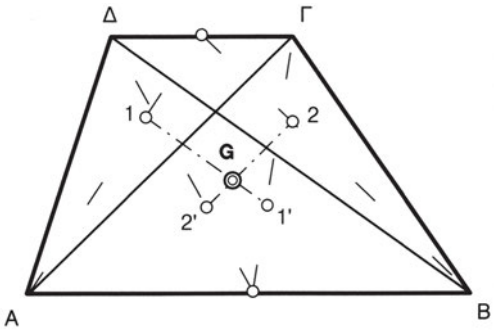
Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ και χωρίζουμε το τραπέζιο σε δύο τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ. Προσδιορίζουμε τα κεντροειδή των τριγώνων 1 και 1΄. Το σημείο τομής της ευθείας 11΄ και της ευθείας ΜΝ που ενώνει τα μέσα της μικρής και της μεγάλης βάσης του τραπεζίου, είναι το ζητούμενο κεντροειδές.



Σχήμα 4.3η *Το κεντροειδές τραπεζίου (1ος τρόπος)*

2ος τρόπος

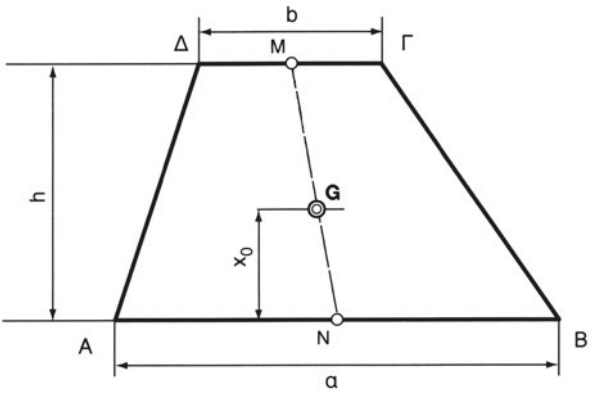
Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ και χωρίζουμε το τραπέζιο σε δύο τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ, των οποίων τα κεντροειδή είναι αντίστοιχα τα 1 και 1΄. Με τη διαγώνιο ΒΔ χωρίζουμε το τραπέζιο σε δύο άλλα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΔ των οποίων τα κεντροειδή είναι τα 2 και 2΄. Το σημείο τομής των ευθειών 11΄ και 22΄, είναι το ζητούμενο κεντροειδές του τραπεζίου.



Σχήμα 4.3θ *Το κεντροειδές τραπεζίου (2ος τρόπος)*

Αναλυτικά (σχ. 4.3ι), το κεντροειδές του τραπεζίου, δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{X_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{\alpha + 2b}{\alpha + b}}$$

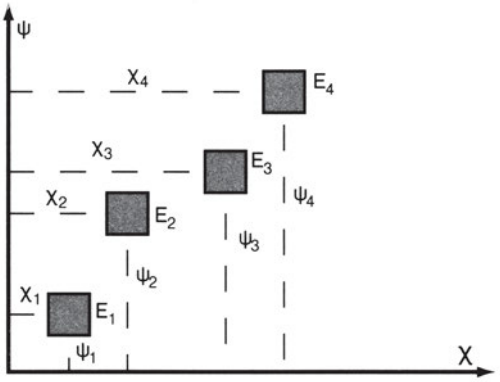


Σχήμα 4.3ι *Το κεντροειδές του τραπεζίου (αναλυτικά)*

Τα σημεία M,N είναι αντίστοιχα τα μέσα της μικρής και της μεγάλης βάσης του τραπεζίου.

4.4 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΡΟΕΙΔΟΥΣ- ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Να προσδιοριστεί το κεντροειδές των τεσσάρων σωμάτων με εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 και συντεταγμένες, όπως φαίνονται στο (σχ. 4.4 α).



Σχήμα 4.4α *Προσδιορισμός του κεντροειδούς με την αναλυτική μέθοδο.*

Βήμα 1ο

Συνολικό εμβαδόν (Ε): $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$

Βήμα 2ο

Υποθετικός προσδιορισμός συντεταγμένων του κεντροειδούς:
Έστω G (χ_0 , ψ_0)

Βήμα 3ο

Εξίσωση ροπών όλων των εμβαδών, ως προς τον άξονα Ψ (προσδιορισμός χ_0):

$$E \cdot \chi_0 = E_1 \cdot X_1 + E_2 \cdot X_2 + E_3 \cdot X_3 + E_4 \cdot X_4$$

$$\chi_0 = \frac{E_1 \cdot \chi_1 + E_2 \cdot \chi_2 + E_3 \cdot \chi_3 + E_4 \cdot \chi_4}{E}$$

Βήμα 4ο

Εξίσωση ροπών όλων των εμβαδών ως προς τον άξονα χ (προσδιορισμός ψ_0):

$$E \cdot \psi_0 = E_1 \cdot \psi_1 + E_2 \cdot \psi_2 + E_3 \cdot \psi_3 + E_4 \cdot \psi_4$$

$$\Psi_0 = \frac{E_1 \cdot \psi_1 + E_2 \cdot \psi_2 + E_3 \cdot \psi_3 + E_4 \cdot \psi_4}{E}$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να προσδιοριστεί με την αναλυτική μέθοδο, το κεντροειδές του παρακάτω σχήματος (διαστάσεις σε cm).

Λύση

Χωρίζουμε το σύνθετο σχήμα σε απλά σχήματα, τα 1 και 2 (σχ.4.α).

Επιφάνεια του πρώτου σχήματος (E_1):

$E_1 = 2\ cm \cdot 5\ cm$

$E_1 = 10\ cm^2$

Επιφάνεια του δεύτερου σχήματος (E2):

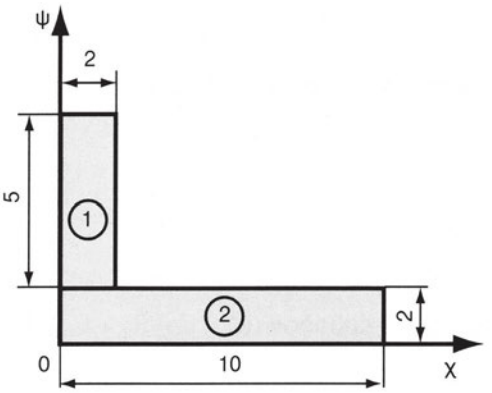
$E_2 = 10\ cm \cdot 2\ cm$

$E_2 = 20\ cm^2$

Ολική Επιφάνεια (E):

$E = 10\ cm^2 + 20\ cm^2$

$E = 30\ cm^2$



Σχήμα 4.α *Σύνθετη επιφάνεια*

Έστω χ_0, ψ_0 οι συντεταγμένες (σχ. 4.β) του κεντροειδούς (G).

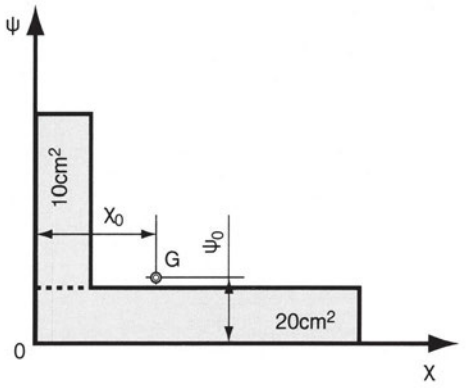
Εξίσωση ροπών όλων των εμβαδών ως προς τον άξονα ψ:

$E \cdot \chi_0 = E_1 \cdot 1\ cm + E_2 \cdot 5\ cm$

$30\ cm^2 \cdot X_0 = 10\ cm^2 \cdot 1cm + 20\ cm^2 \cdot 5\ cm$

$$\chi_0 = \frac{110 cm^3}{30 cm^2}$$

$\underline{\chi_0 = 3{,}66\ cm}$



Σχήμα 4.β *Η θέση του κέντρου επιφάνειας*

Εξίσωση ροπών όλων των εμβαδών ως προς τον άξονα χ:

$E \cdot \psi_0 = E_1 \cdot 4{,}5\ cm + E_2 \cdot 1cm$

$30\ cm^2 \cdot \psi_0 = 10\ cm^2 \cdot 4{,}5\ cm + 20\ cm^2 \cdot 1\ cm$

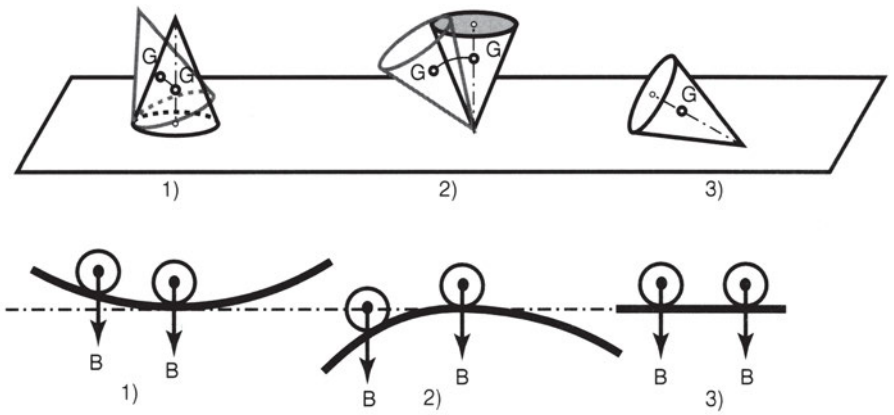
$$\psi_0 = \frac{65\,cm^3}{30\,cm^2}$$

$$\underline{\psi_0 = 2{,}16\ cm}$$

4.5 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Από τη θέση του κέντρου βάρους ενός σώματος, ως προς το σημείο ή την επιφάνεια στήριξής του, οδηγούμεθα στα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Αν το σώμα που βρίσκεται σε ηρεμία (σχ. 4.5α -1), μετακινηθεί από την αρχική του θέση, κάτω από τη στιγμιαία επίδραση μιας δύναμης, θα επανέλθει σε αυτή, όταν παύσει να ενεργεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνησή του. Το είδος αυτό της ισορροπίας του σώματος, χαρακτηρίζεται ως **ευσταθής** και συνοδεύεται από τη διαπίστωση, ότι κατά τη μετακίνηση του σώματος, το κέντρο βάρους του ανυψώνεται, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ροπής επαναφοράς στην αρχική του θέση.



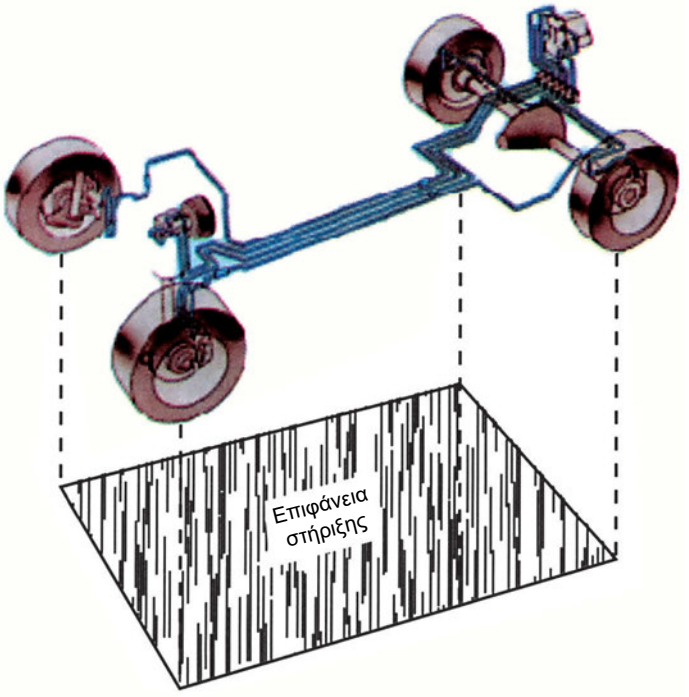
Σχήμα 4.5α *Ευσταθής ισορροπία, ασταθής και αδιάφορη*

2. Αν το σώμα (σχ. 4.5 α-2) μετακινηθεί από την αρχική του θέση, κάτω από τη στιγμιαία επίδραση μιας δύναμης, το σώμα θα εξακολουθήσει να απομακρύνεται από την αρχική του θέση ισορροπίας, ακόμη και όταν παύσει να ενεργεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνησή του. Στην περίπτωση αυτή, μιλάμε για **ασταθή ισορροπία** και διαπιστώνουμε ότι το κέντρο βάρους του σώματος μετακινείται χαμηλότερα σε σχέση με την αρχική του θέση.

3. Στην περίπτωση που το σώμα (σχ. 4.5α-3) μετακινείται και ισορροπεί σε οποιαδήποτε θέση, μιλάμε για **αδιάφορη** ισορροπία και συνοδεύεται από τη διαπίστωση ότι το κέντρο βάρους του σώματος παραμένει στο ίδιο ύψος (δεν μετακινείται υψηλότερα ή χαμηλότερα).

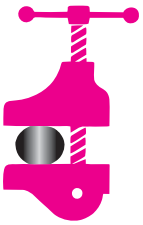
Σημείωση: Επιδίωξή μας, κατά τον υπολογισμό των κατασκευών, είναι σε όλες τις περιπτώσεις, η **ευσταθής** ισορροπία.

4. Ορίζοντας ως **επιφάνεια στήριξης** μιας κατασκευής, την επιφάνεια που οριοθετείται (σχ. 4.5.β) από τις ευθείες που ενώνουν τα σημεία στήριξής της, θα κρίνουμε για την ευστάθειά της ή μη, εξετάζοντας τη θέση της διεύθυνσης της συνισταμένης όλων των δυνάμεων που ενεργούν στην κατασκευή, σε σχέση με την επιφάνεια στήριξής της. Με τον τρόπο αυτό η κατασκευή θα χαρακτηρίζεται **ευσταθής** όταν η διεύθυνση της συνισταμένης που αναφέραμε, τέμνει την επιφάνεια στήριξης, (όχι στις γραμμές που αποτελούν το εξωτερικό περίγραμμά της).



Σχήμα 4.5β *Η ευστάθεια*

5. Η κατασκευή θα χαρακτηρίζεται **ασταθής**, όταν η διεύθυνση της συνισταμένης τέμνει το εξωτερικό περίγραμμα της επιφάνειας στήριξης και θα καταλήγει σε **ανατροπή**, όταν η διεύθυνση της συνισταμένης εξέλθει από το περίγραμμα της επιφάνειας στήριξης.



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

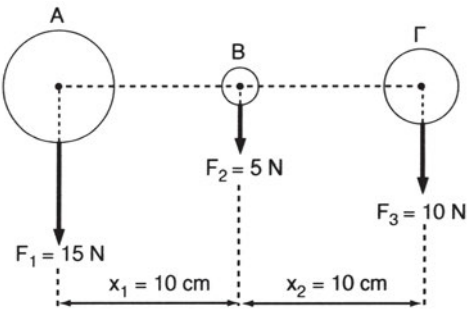
- Το σημείο εφαρμογής της δύναμης του βάρους του σώματος ονομάζεται **κέντρο βάρους.** Οι ευθείες που διέρχονται από το κέντρο βάρους ονομάζονται κεντροβαρικοί άξονες.
- Στην περίπτωση, κατά την οποία, δύο ή μία διάσταση του σώματος είναι πολύ μικρές, σε σχέση με τις υπόλοιπες θα πρέπει να μιλάμε περί κέντρου βάρους αντίστοιχα γραμμών ή επιφανειών. Επειδή όμως, τόσο οι γραμμές, όσο και οι επιφάνειες δεν έχουν βάρος θα μιλάμε για **κεντροειδές** γραμμών και επιφανειών.

- Η ισορροπία ενός σώματος χαρακτηρίζεται **ευσταθής,** όταν μετακινηθεί από την αρχική του θέση, υπό την επίδραση μίας δύναμης και επανέλθει σε αυτή, όταν παύσει να ενεργεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνησή του. Αν το σώμα εξακολουθήσει να απομακρύνεται από την αρχική του θέση ισορροπίας και όταν παύσει να ενεργεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνησή του η ισορροπία του χαρακτηρίζεται **ασταθής.** Αν το σώμα μετακινείται και ισορροπεί σε οποιαδήποτε θέση η ισορροπία του ονομάζεται **αδιάφορη.**

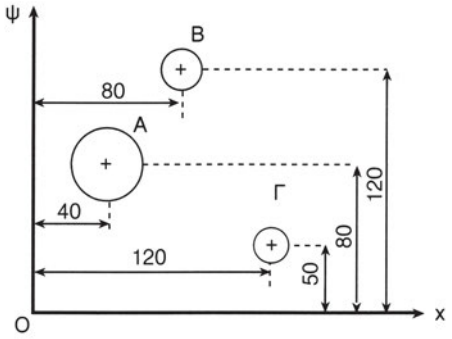


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

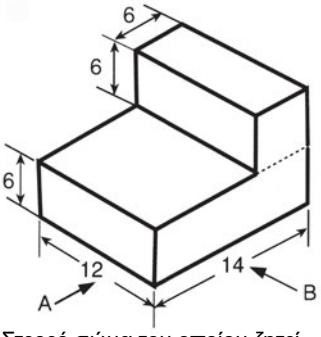
1. Να προσδιοριστεί το Κ.Β. των σωμάτων Α (F_1 = 15 N), Β (F_2 = 5 N), Γ (F_3 = 10 N), που βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



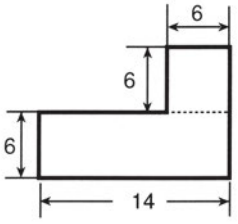
2. Να προσδιοριστεί το Κ.Β. των σωμάτων Α (F_1 = 10 N), Β (F_2 = 4 N), Γ (F_3 = 2 N), που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (διαστάσεις σε cm).



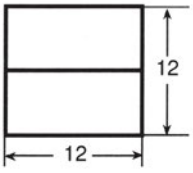
3. Να προσδιοριστεί το Κ.Β. του ομογενούς στερεού σώματος, που φαίνεται στο σχήμα (διαστάσεις σε cm).



Στερεό σώμα του οποίου ζητείται η θέση του κέντρου βάρους



Όψη από την πλευρά Β



Όψη από την πλευρά Α

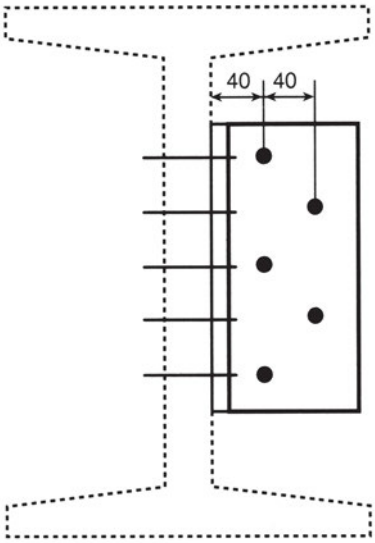
4. Να προσδιορίσετε το κεντροειδές μιας ημιπεριφέρειας ακτίνας 1,20m με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

5. Να προσδιορίσετε το κεντροειδές ενός τεταρτημορίου περιφέρειας ακτίνας 1,50 m με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

6. Να προσδιορίσετε το κεντροειδές ημικυκλίου ακτίνας 60 cm με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

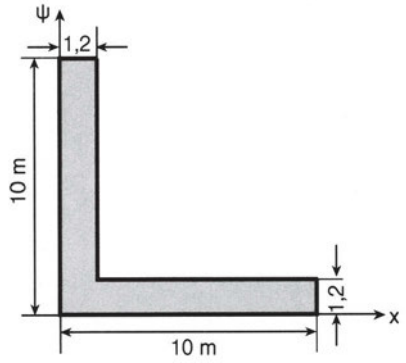
7. Να προσδιορίσετε το κεντροειδές ενός τεταρτημορίου κύκλου ακτίνας 90 cm, με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

8. Στην ήλωση του σχήματος υπάρχει η ομάδα των τριών ήλων. Να προσδιοριστεί το κεντροειδές της ομάδας (διαστάσεις σε mm).



Καρφωτή σύνδεση

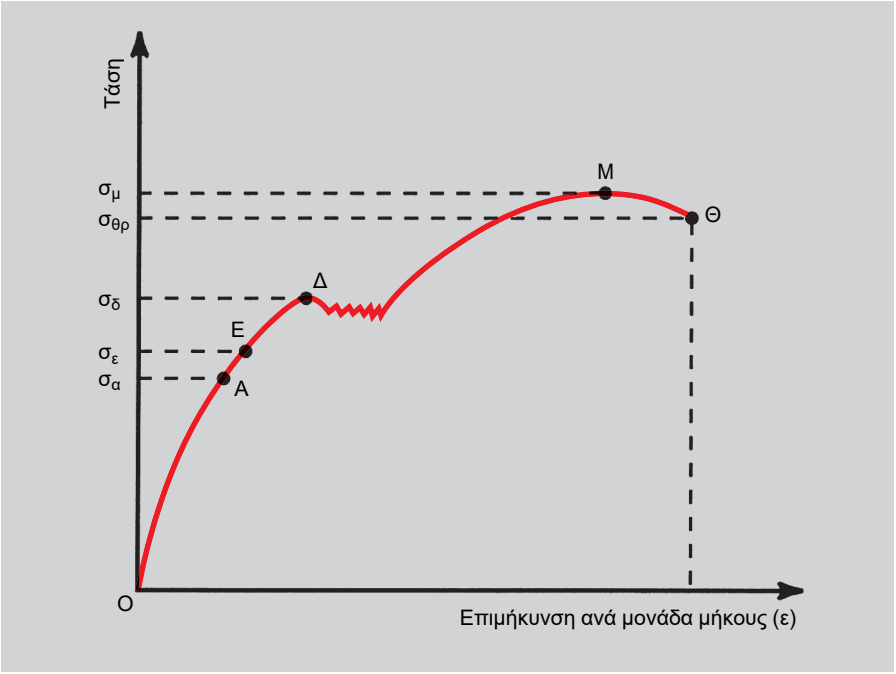
9. Να προσδιοριστεί το κεντροειδές του ελάσματος με το παρακάτω σχήμα με την αναλυτική μέθοδο.



10. Να προσδιορίσετε το κεντροειδές της ισοσκελούς διατομής του σχήματος με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο, αν α = 150 mm και e = 24 mm.

Μέρος Β

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ **5**

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

5.1 Η αντοχή των υλικών

5.2 Βασικές εισαγωγικές έννοιες

5.3 Τα είδη των φορτίων

5.4 Οι σπουδαιότερες καταπονήσεις

5.5 Η έννοια της τάσης

5.6 Νόμος του Hooke

5.7 Επιμήκυνση - Επιβράχυνση

5.8 Η δοκιμή σε εφελκυσμό ή θλίψη

5.9 Επιτρεπόμενη τάση - συντελεστής ασφάλειας

5.10 Επιτρεπόμενη τάση στην περίπτωση μεταβλητών φορτίων – τύπος SEEFEHLNER



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να αντιληφθείτε το ρόλο της αντοχής των υλικών στην ασφάλεια των κατασκευών και τη σπουδαιότητά της, ως βασικού τεχνολογικού μαθήματος, για όλες τις ειδικότητες.
- Να γνωρίσετε βασικούς τεχνικούς όρους του μαθήματος, για να αρχίσετε να εξοικειώνεστε με τη "γλώσσα των τεχνικών".
- Να είστε σε θέση να αναφέρετε τα είδη των φορτίων, εξειδικεύοντας το καθένα από αυτά, με αντίστοιχα παραδείγματα.
- Να γνωρίσετε την έκταση και το περιεχόμενο του μαθήματος.
- Να είστε σε θέση να αναφέρετε τις βασικές "καταπονήσεις", να ορίζετε την καθεμιά από αυτές και να τις εντοπίζετε στην πράξη.
- Να κατανοήσετε την έννοια της τάσης, το αίτιο που την προκαλεί και την αλληλουχία: σώμα-φορτίο-παραμόρφωση-αναπτυσσόμενες τάσεις.
- Να ορίζετε την τάση, να αναφέρετε τον αντίστοιχο τύπο και να λύνετε προβλήματα προσδιορισμού της τάσης, του φορτίου, της διατομής.
- Να διατυπώνετε το Νόμο του Hooke.
- Να γνωρίζετε τα είδη των καταπονήσεων, στα οποία αναφέρονται η επιμήκυνση και η επιβράχυνση.
- Να ορίζετε την επιμήκυνση, την ειδική επιμήκυνση και αντίστοιχα για την επιβράχυνση.
- Να ορίζετε το μέτρο ελαστικότητας και να εξηγείτε γιατί αυτό χαρακτηρίζει τα υλικά.
- Να περιγράφετε τη δοκιμή σε εφελκυσμό.

- ☑ Να ερμηνεύετε και να είστε σε θέση να αντλείτε στοιχεία από τα αντίστοιχα διαγράμματα.
- ☑ Να ορίζετε τις τάσεις στο όριο αναλογίας, ελαστικότητας, διαρροής, θραύσης.
- ☑ Να γνωρίζετε τη σημασία της επιτρεπόμενης τάσης και του συντελεστή ασφάλειας για την αντοχή - ασφάλεια των κατασκευών.
- ☑ Να ορίζετε τα μεταβλητά φορτία και να αναφέρετε παραδείγματα.
- ☑ Να λύνετε προβλήματα σχετικά με όσα αναφέρονται παραπάνω, να συγκρίνετε και να μελετάτε τα αποτελέσματα, ώστε να καταλήγετε στη διατύπωση χρήσιμων συμπερασμάτων.

5.1 Η ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην αρχή του πρώτου μέρους, η αντοχή των υλικών είναι το τμήμα της Μηχανικής, το οποίο εξετάζει τα παραμορφώσιμα σώματα, όταν πάνω σε αυτά ενεργούν δυνάμεις.

Προκειμένου να ορίσουμε το αντικείμενο της αντοχής των υλικών πιο αναλυτικά, προσθέτουμε τα εξής:

- Η μελέτη της αντοχής μίας κατασκευής, θέτει τον μελετητή απέναντι σε δύο αντιφατικές επιδιώξεις, που συνοψίζονται σε δύο λέξεις: **ασφάλεια και οικονομία.**
- Οι δύο αυτές ανταγωνιστικές επιδιώξεις, λειτουργούν η μία σε βάρος της άλλης. Έτσι η μεγαλύτερη ασφάλεια της κατασκευής, προϋποθέτει μεγαλύτερη ποσότητα κατασκευαστικών υλικών ή καλύτερης ποιότητας, που μεταφράζονται σε υψηλότερο κατασκευαστικό κόστος, ενώ αντίθετα η ελάττωση του κόστους με σκοπό την οικονομία, μπορεί να θέσει σε κίνδυνο την ασφάλεια.

Οι επιδιώξεις που περιγράψαμε, παρά τις ανταγωνιστικές τους τάσεις, δεν αποτελούν δίλημμα για το μελετητή. Είναι αυτονόητο, ότι η κυρίαρχη θέση, πρέπει να είναι η επίτευξη της μέγιστης δυνατής ασφάλειας.

Η αντοχή των υλικών, είναι η επιστήμη, που μελετά τα στοιχεία των κατασκευών και τις αντίστοιχες παραμορφώσεις τους, όταν πάνω σε αυτά ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, με κύριο στόχο τον καθορισμό των συνθηκών που εξασφαλίζουν την αντοχή τους.

5.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Οι δυνάμεις ή οι ροπές οι οποίες ενεργούν στο εξωτερικό των σωμάτων και οι αντίστοιχες αντιδράσεις που αυτές προκαλούν, ονομάζονται **φορτία**.

Όταν ένα σώμα, βρίσκεται υπό την επίδραση φορτίων, λέμε ότι **φορτίζεται** ή **καταπονείται** ή βρίσκεται σε **εντατική κατάσταση**. Όταν τα φορτία παύσουν να ενεργούν στο σώμα, λέμε ότι το σώμα **αποφορτίζεται**.

Αποτέλεσμα της φόρτισης των σωμάτων, είναι η αλλαγή του σχήματός τους, δηλαδή η **παραμόρφωση**, που έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη στο εσωτερικό τους δυνάμεων που ονομάζονται **εσωτερικές δυνάμεις**.

Οι παραμορφώσεις, που υφίστανται τα σώματα που φορτίζονται διακρίνονται σε:

α) **παροδικές ή ελαστικές**, οι οποίες εξαφανίζονται και τα σώματα επανέρχονται πλήρως στην αρχική τους κατάσταση, μετά την αποφόρτισή τους, (η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **ελαστικότητα**), και

β) **μόνιμες ή πλαστικές**, οι οποίες εξακολουθούν να παραμένουν στα σώματα και μετά την αποφόρτισή τους. Αν τα σώματα αυτά, τα οποία έχουν υποστεί τέτοιου είδους παραμορφώσεις, φορτιστούν σταδιακά με μεγαλύτερα φορτία, αναπόφευκτα θα επέλθει η **θραύση** τους.

Όπως είναι φυσικό, όλα τα υλικά, από τα οποία αποτελούνται τα διάφορα σώματα, δεν επιδεικνύουν την ίδια συμπεριφορά όταν φορτίζονται. Ορισμένα από αυτά εμφανίζουν σημαντικές παραμορφώσεις, πριν επέλθει η θραύση τους και ονομάζονται **όλκιμα υλικά**, ενώ άλλα εμφανίζουν παραμορφώσεις πολύ περιορισμένης έκτασης και ονομάζονται **ψαθυρά**.

Όλκιμα υλικά: χαλκός, αλουμίνιο, χάλυβας κ.λπ.

Ψαθυρά υλικά: χυτοσίδηρος, σκυρόδεμα, γυαλί, πέτρες, κεραμικά, υλικά κ.λ.π.

5.3 ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Τα φορτία, όπως ήδη έχει αναφερθεί, είναι οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στα διάφορα σώματα και διακρίνονται σε:

α) Μόνιμα φορτία· είναι εκείνα που δεν μεταβάλλονται, κατά θέση και μέγεθος. Π.χ. το ίδιο βάρος των σωμάτων.

β) Μεταβλητά φορτία· είναι τα μεταβαλλόμενα, κατά θέση και μέγεθος. Π.χ. το αυτοκίνητο που διέρχεται μία γέφυρα, είναι σε σχέση με τη γέφυρα, μεταβλητό φορτίο.

γ) Συγκεντρωμένα και **επιφανειακά φορτία**, είναι αντίστοιχα τα φορτία που ενεργούν σε μία πολύ μικρή περιοχή του σώματος και τα φορτία που ενεργούν σε μία εκτεταμένη περιοχή του σώματος. Τα υποστυλώματα (κολόνες) μιας κατοικίας και η πίεση του νερού στα τοιχώματα μιας πισίνας, είναι αντίστοιχα παραδείγματα συγκεντρωμένων και επιφανειακών φορτίων.

δ) Άμεσα και **έμμεσα φορτία**, είναι αντίστοιχα τα φορτία, που δρούν απευθείας πάνω στα σώματα και τα φορτία που δρούν με τη μεσολάβηση διάταξης (άλλου σώματος). Π.χ. το βάρος ενός τραπεζιού και το βάρος των αντικειμένων που έχουν τοποθετηθεί επάνω στο τραπέζι, αντίστοιχα, ως προς το δάπεδο.

5.4 ΟΙ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΕΣ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΕΙΣ

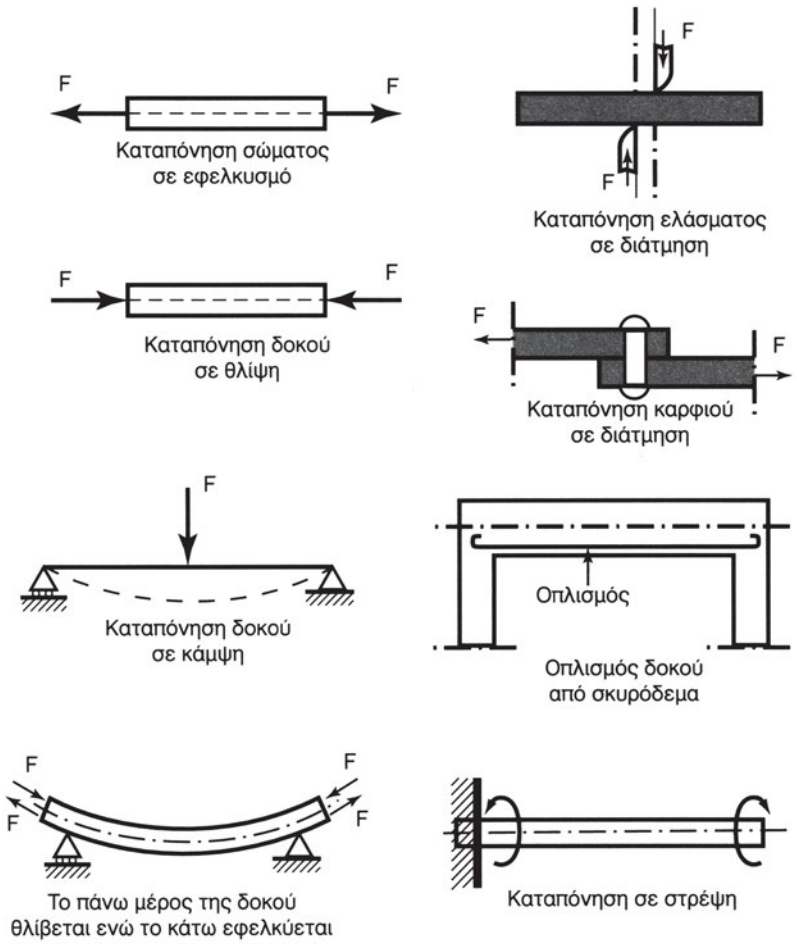
Στην παράγραφο αυτή, θα αναφερθούμε στις σπουδαιότερες απλές καταπονήσεις, επιχειρώντας μια πρώτη προσέγγισή τους (σχ. 5.4 α):

α) Εφελκυσμός και θλίψη: Οι καταπονήσεις αυτές, για να εκδηλωθούν σε ένα σώμα, θα πρέπει να ενεργούν στα άκρα του φορτία αντίθετα, των οποίων η συνισταμένη συμπίπτει με το γεωμετρικό άξονα του σώματος. Ανάλογα, αν το σώμα τείνει να επιμηκυνθεί ή να επιβραχυνθεί, καταπονείται αντίστοιχα σε εφελκυσμό ή θλίψη.

β) Διάτμηση εμφανίζεται σε ένα σώμα, όταν ενεργούν σε αυτό δύο φορτία κάθετα στον άξονά του και οι διευθύνσεις τους βρίσκονται πολύ πλησίον η μία στην άλλη.

γ) Κάμψη εμφανίζεται σε ένα σώμα, όταν ενεργούν σε αυτό φορτία κάθετα στον άξονά του, που έχουν ως συνέπεια τη δημιουργία ροπών, που βρίσκονται σε ένα επίπεδο κάθετο στη διατομή του και που διέρχεται από το γεωμετρικό άξονα του σώματος.

(Διευκρινίζεται ότι, ως διατομή ορίζεται η επιφάνεια που προκύπτει όταν πραγματοποιήσουμε μία τομή του σώματος με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονά του).



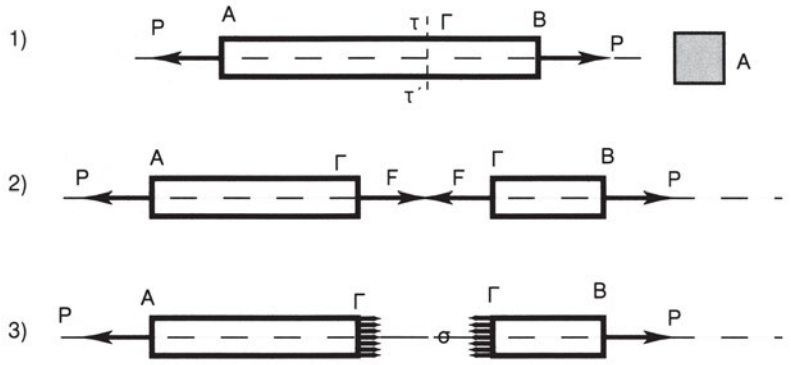
Σχήμα 5.4α *Οι σπουδαιότερες καταπονήσεις*

δ) Στρέψη εμφανίζεται σε ένα σώμα, όταν τα φορτία που ενεργούν σε αυτό, αποτελούν ζεύγος που βρίσκεται σε μία διατομή κάθετη στον άξονα του σώματος.

ε) Λυγισμός είναι η ταυτόσημη καταπόνηση με τη θλίψη, από πλευράς δράσης των φορτίων, υπό την προϋπόθεση όμως ότι το μήκος του σώματος είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις του.

5.5 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ

Έστω η ράβδος ΑΒ (σχ. 5.5 α - 1) που καταπονείται σε εφελκυσμό από τα φορτία Ρ. Με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονά της, πραγματοποιούμε στο σημείο Γ, την τομή τ - τ΄, με την οποία διαχωρίζουμε τη ράβδο στα τμήματα ΑΓ και ΒΓ (σχ 5.5 α - 2). Εξετάζοντας τις συνθήκες ισορροπίας του αριστερού τμήματος ΑΓ, διαπιστώνουμε ότι για να βρίσκεται σε ισορροπία, θα πρέπει το δεξιό τμήμα ΒΓ να ασκεί σε αυτό μία δύναμη F, ίση και αντίθετη της Ρ. Κατ' αναλογία, για να βρίσκεται σε ισορροπία το τμήμα ΒΓ, θα πρέπει να ασκείται σε αυτό, από το αριστερό τμήμα ΑΓ μία δύναμη F, ίση και αντίθετη της Ρ.



Σχήμα 5.5α *Οι ορθές εφελκυστικές τάσεις*

Οι δυνάμεις F, είναι εσωτερικές δυνάμεις, ομοιόμορφα κατανεμημένες στις διατομές στο σημείο Γ της ράβδου, που προήλθαν από την τομή τ – τ΄ (σχ. 5.5 α - 3).

Αν υποθέσουμε, ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα της διατομής δέχεται τη στοιχειώδη δύναμη (σ), τότε, αφού η διατομή της ράβδου είναι ίση με Α, προκύπτει:

$$\mathbf{F = \sigma \cdot A = P} \quad \text{και}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}}$$

Το πηλίκο αυτό (σ), ονομάζεται **τάση** και ακόμη **ορθή τάση**, από το γεγονός ότι είναι κάθετη στη διατομή, και **ορθή εφελκυστική τάση**, γιατί προέκυψε από καταπόνηση της ράβδου σε εφελκυσμό.

Οι τάσεις δεν δημιουργούνται σαν αποτέλεσμα της δράσης των φορτίων πάνω στα σώματα, αλλά σαν αποτέλεσμα των παραμορφώσεων που υφίστανται τα σώματα από την επίδραση των φορτίων.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μία ράβδος τετραγωνικής διατομής με πλευρά 5 cm, εφελκύεται από φορτίο άγνωστης έντασης. Αν η αναπτυσσόμενη τάση είναι ίση με 1500 N/cm^2, να προσδιοριστεί το φορτίο σε daN/ cm^2.

Δίνονται:	**Ζητούνται:**
α = 5 cm	F σε daN
σ = 1500 N / cm^2	

Λύση

σ = 1500 N/cm^2 = 150 daN

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

F = A · σ

A = α^2 = 5^2 cm^2 = 25 cm^2

F = A · σ = 25 cm^2 · 150 daN/cm^2

F = 3750 daN

Συνέχεια της υποσημείωσης

Πράγματι, κατά τη διάρκεια της δράσης κάποιων φορτίων σε ένα σώμα, αυτό αρχίζει να παραμορφώνεται, δηλαδή τα μέρη του σώματος ή καλύτερα τα μόρια του σώματος μετακινούνται, με αποτέλεσμα, στη φάση αυτή, το σώμα να μη βρίσκεται σε ισορροπία. Όσο τα φορτία μεγαλώνουν, μεγαλώνουν, όπως είναι φυσικό, και οι παραμορφώσεις του σώματος και επομένως μεγαλώνουν και οι τάσεις που αναπτύσσονται, τάσεις που αντιπροσωπεύουν τις αντιδράσεις των μορίων του σώματος στις παραμορφώσεις του. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, οι παραμορφώσεις του σώματος μεγαλώνουν, μέχρις ότου οι αντίστοιχες τάσεις που αναπτύσσονται, να ισορροπήσουν τις εξωτερικές δυνάμεις και το σώμα να βρεθεί και πάλι σε κατάσταση ισορροπίας. Πρέπει ακόμη να τονιστεί ότι για να διευκολυνθεί η μελέτη της αντοχής των υλικών και να απλοποιηθεί η επίλυση των προβλημάτων που προκύπτουν, γίνονται δεκτές οι παρακάτω θέσεις:

1. Τα σώματα θεωρούνται ομογενή, δηλαδή υλικά που έχουν τις ίδιες φυσικές ιδιότητες σε όλο τους τον όγκο, δηλαδή σε κάθε σημείο τους.
2. Τα σώματα θεωρούνται ελαστικώς ισότροπα, δηλαδή υλικά που έχουν τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις.

   Το καουτσούκ π.χ. έχει προς όλες τις διευθύνσεις τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες, γι' αυτό και λέγεται υλικό ελαστικώς ισότροπο, ενώ το ξύλο παρουσιάζει κατά τη διεύθυνση των ινών του μεγαλύτερη ελαστικότητα και κατά την κάθετη διεύθυνση προς τις ίνες του μικρότερη, γι' αυτό και λέγεται υλικό ελαστικώς ανισότροπο.

5.6 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ HOOKE

Από πειραματικές δοκιμές των υλικών, έχει αποδειχθεί ότι οι παραμορφώσεις που υφίστανται τα φορτισμένα σώματα, είναι ανάλογες με τα φορτία στην αρχή των παραμορφώσεων, αλλά στη συνέχεια οι παραμορφώσεις αυξάνονται, (με ταχύτερο ρυθμό), σε μεγαλύτερο ποσοστό από το αντίστοιχο ποσοστό αύξησης των φορτίων.

Ο νόμος του Hooke λέει ότι: **Αν δεν ξεπεραστεί ένα συγκεκριμένο όριο, που ονομάζεται όριο αναλογίας, οι παραμορφώσεις που υφίστανται τα φορτισμένα σώματα, είναι ανάλογες με τα αντίστοιχα φορτία που τις προκάλεσαν.**

Ο νόμος διατυπώθηκε το 1678 με τη φράση «ut tensio sic vis» και αποτελεί τη βασικότερη αρχή, στην οποία θεμελιώθηκε η επιστήμη της αντοχής των υλικών.

Συνέχεια της υποσημείωσης

3. Τα σώματα έχουν σταθερή διατομή (Α= σταθερή) σε όλο τους το μήκος.

4. Η συνισταμένη των φορτίων που ενεργούν στα σώματα, ενεργεί κατά το γεωμετρικό τους άξονα.

5 Όλες οι κάθετες διατομές προς το γεωμετρικό άξονα του σώματος πριν από τη καταπόνηση, εξακολουθούν να είναι κάθετες και κατά τη διάρκεια της καταπόνησης και επομένως και κατά την παραμόρφωση, γεγονός που σημαίνει ότι:

α. όλες οι ίνες κατά μήκος του σώματος παραμορφώνονται και καταπονούνται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ή

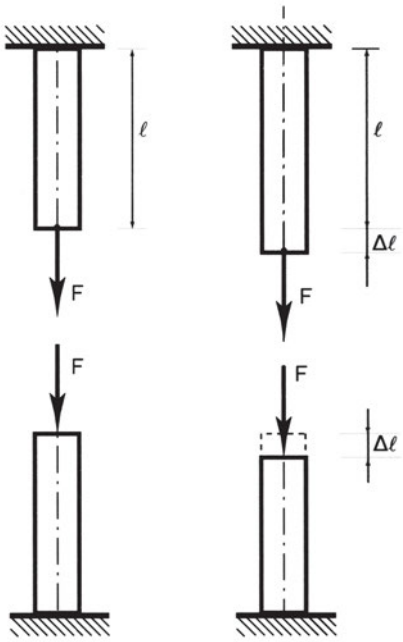
β. όλο το σώμα καταπονείται ομοιόμορφα, ή

γ. όλα τα φορτία που ενεργούν στο σώμα είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα σε όλη τη διατομή, που είναι κάθετη προς το γεωμετρικό άξονα και τη συνισταμένη των φορτίων, δηλαδή:

δ. **οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε όλη τη διατομή που είναι κάθετη προς τον γεωμετρικό άξονα και τη συνισταμένη των φορτίων.**

5.7 ΕΠΙΜΗΚΥΝΣΗ – ΕΠΙΒΡΑΧΥΝΣΗ

Έστω η πρισματική ράβδος (σχ. 5.7 α), η οποία καταπονείται σε εφελκυσμό ή θλίψη από το φορτίο (F), με αποτέλεσμα τη μεταβολή του μήκους της ράβδου κατά $\Delta\ell$. Η μεταβολή αυτή, αντιπροσωπεύει τη μεταβολή του ολικού μήκους της ράβδου και ονομάζεται **επιμήκυνση** στην περίπτωση του εφελκυσμού και **επιβράχυνση** σε εκείνη της θλίψης.



Σχήμα 5.7α *Επιμήκυνση και επιβράχυνση ράβδου*

Είναι εύκολα κατανοητό, ότι μια ταυτόσημη μεταβολή του μήκους ($\Delta\ell$), έχει μεγάλη σημασία για ένα σώμα μικρού μήκους, σε σχέση με ένα σώμα μεγάλου μήκους. Αυτό σημαίνει ότι, αν έχουμε δυο ράβδους, που έχουν μήκη αντίστοιχα 2 m και 0,5 m, οι οποίες καταπονούμενες σε εφελκυσμό παρουσιάζουν ταυτόσημη ολική επιμήκυνση ίση με 5 mm, η σημασία και τα συμπεράσματα που εξάγονται για τις δύο περιπτώσεις, είναι παντελώς διαφορετικά. Σε ασφαλή συμπεράσματα επομένως, θα μας οδηγεί η γνώση της μεταβολής του μήκους, ανά μονάδα μήκους του σώματος, δηλαδή η **ειδική μεταβολή του μήκους** (ε), που εκφράζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} \qquad (1)$$

Στην περίπτωση του εφελκυσμού, η (ε) θα ονομάζεται **ειδική επιμήκυνση** και στην περίπτωση της θλίψης, **ειδική επιβράχυνση**.

Ο νόμος του Hooke υπαγορεύει ότι, υπό ορισμένες συνθήκες, η ειδική μεταβολή του μήκους (ε), είναι ανάλογη της τάσης (σ) που αναπτύσσεται στα φορτισμένα σώματα, που καταπονούνται από φορτία· δηλαδή:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{και} \quad \sigma = \varepsilon \cdot E \tag{2}$$

όπου το Ε εκφράζει το **μέτρο ελαστικότητας** που εξαρτάται και χαρακτηρίζει το υλικό του σώματος και το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \tag{3}$$

δηλ. ως σταθερό πηλίκο (στην ελαστική περιοχή) της τάσης και της ειδικής μεταβολής του μήκους.

Από τη σχέση (2) σε συνδυασμό με τις σχέσεις:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{και} \quad \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

προκύπτει:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{F}{A \cdot E} \quad \text{και επομένως} \quad \mathbf{\Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{A \cdot E}}$$

Η παραπάνω σχέση διατυπώνεται ως εξής: **Η μεταβολή του μήκους ενός σώματος –στην περιοχή αναλογίας– είναι ανάλογη του φορτίου και του αρχικού του μήκους, και αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του και του μέτρου ελαστικότητας.**

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ράβδος κυκλικής διατομής διαμέτρου 8 mm και μήκους 1,50 m, εφελκύεται από φορτίο 5000 daN. Αν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου είναι ίσο με 2.100.000 daN / cm^2, να προσδιοριστεί η επιμήκυνση της ράβδου.

Δίνονται:	**Ζητούνται:**
d = 8 mm = 0,8 cm	Η επιμήκυνση ($\Delta\ell$)
ℓ = 1,50 m = 150 cm	
F = 5000 daN	
E = 2.100.000 daN /cm^2	

Λύση

$$\Delta\ell = \frac{F \cdot \ell}{A \cdot E}$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}8^2 cm^2}{4}$$

$$A = 0{,}50\ cm^2$$

Κατά συνέπεια:

$$\Delta\ell = \frac{5000\,daN \cdot 150\,cm}{0{,}50\,cm^2 \cdot 2100000\ daN/cm^2}$$

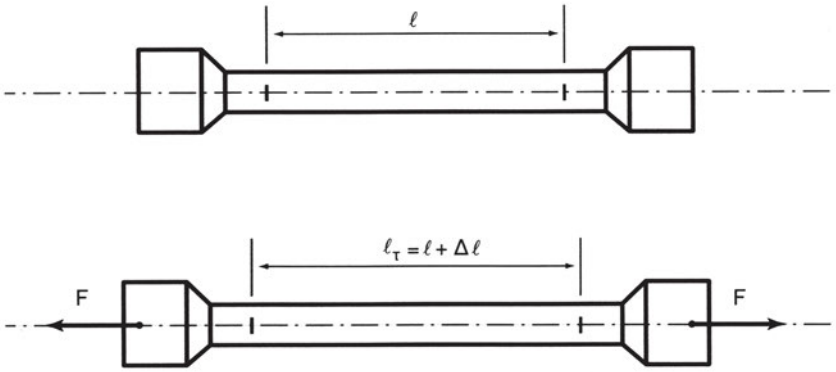
$$\Delta\ell = \frac{750000}{1050000} cm$$

$\Delta\ell$ = 0,71 cm = 7,1 mm

5.8 Η ΔΟΚΙΜΗ ΣΕ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟ Η ΘΛΙΨΗ

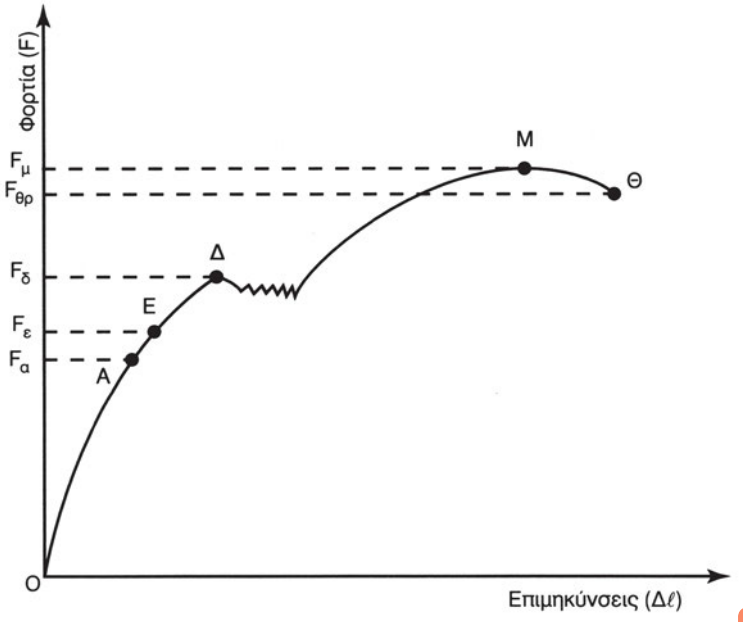
Πρόκειται για τη δοκιμή που πραγματοποιείται στα εργαστήρια της αντοχής των υλικών από ειδικά για το σκοπό αυτό μηχανήματα, προκειμένου να προσδιορίσουμε και να καταγράψουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των υλικών, τις σχετικές με την αντοχή τους.

Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούνται αντιπροσωπευτικά δείγματα των υλικών με προκαθορισμένες διαστάσεις, που ονομάζονται **δοκίμια** (σχ. 5.8 α).



Σχήμα 5.8α *Επιμήκυνση (Δℓ): Το σώμα έχει αρχικό μήκος ℓ. Το σώμα επιμηκύνεται και το μήκος του γίνεται $\ell_τ$.*

Στη μηχανή των δοκιμών καταγράφονται τα εφαρμοζόμενα φορτία καταπόνησης του υλικού σε εφελκυσμό ή θλίψη (F) και οι αντίστοιχες επιμηκύνσεις του υλικού (Δℓ). Το διάγραμμα που προκύπτει από τη χρήση των στοιχείων αυτών για την περίπτωση του εφελκυσμού, έχει τη μορφή του σχ. 5.8 β.



Σχήμα 5.8β *Διάγραμμα επιμηκύνσεων - Φορτίων*

Στο διάγραμμα διακρίνουμε πέντε “περιοχές”:

α) Την **αναλογική περιοχή** (ΟΑ), στην οποία τα εφαρμοζόμενα φορτία

είναι ανάλογα των αντίστοιχων παραμορφώσεων, όπως επίσης το **όριο (φορτίο) αναλογίας** ($F_α$). Από το φορτίο αυτό και με γνωστές τις διαστάσεις του δοκιμίου και επομένως με γνωστή τη διατομή του (Α)*, προσδιορίζουμε την αντίστοιχη **τάση αναλογίας** ($σ_α$):

$$σ_α = \frac{F_α}{A}$$

β) Την **περιοχή** (ΑΕ), στην οποία οι παραμορφώσεις είναι **ελαστικές**, αλλά τα φορτία δεν είναι ανάλογα των επιμηκύνσεων.

γ) Την **ελαστική περιοχή** (ΟΕ), που περιλαμβάνει τις δύο παραπάνω περιοχές (ΟΕ = ΟΑ + ΑΕ) και το όριο (φορτίο) ελαστικότητας ($F_ε$). Η αντίστοιχη τάση (όριο) ελαστικότητας ($σ_ε$), θα προκύπτει από τη σχέση:

$$σ_ε = \frac{F_ε}{A}$$

δ) Την **περιοχή των πλαστικών ή μόνιμων παραμορφώσεων** (ΕΔ) με οριακό σημείο το Δ, που εκπροσωπεί το **όριο διαρροής**. Η αντίστοιχη τάση (όριο) διαρροής ($σ_δ$), θα προκύπτει από τη σχέση:

$$σ_δ = \frac{F_δ}{A}$$

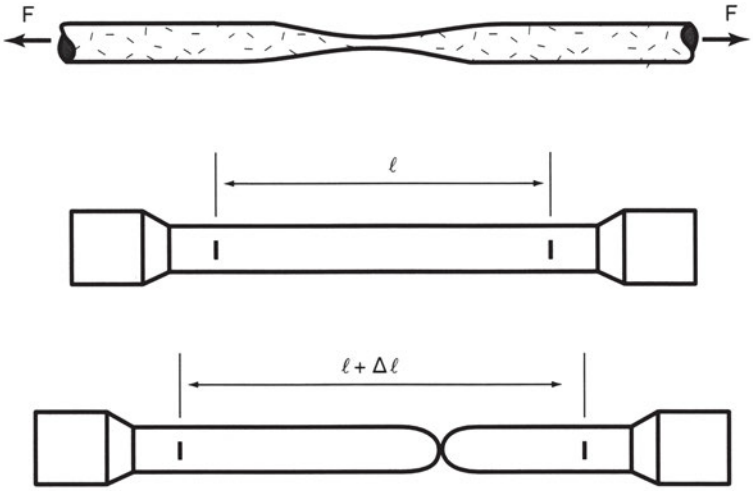
ε) Την **περιοχή θραύσης** (ΔΘ), στην οποία συναντάμε μεγάλες παραμορφώσεις, με μικρές αντίστοιχες αυξήσεις των φορτίων. Σημαντικό σημείο της περιοχής είναι το (Μ), δηλαδή το σημείο, στο οποίο αντιστοιχεί το μέγιστο φορτίο καταπόνησης του δοκιμίου ($F_μ$), το οποίο θεωρείται για το υλικό ως **φορτίο θραύσης** ($F_θ$).

Η αντίστοιχη τάση (όριο) θραύσης, θα προκύπτει από τη σχέση:

$$σ_θ = \frac{F_θ}{A}$$

Κατά τη διάρκεια της δοκιμής, στο σημείο (Μ) του διαγράμματος σημειώνεται σημαντική μείωση της διατομής του δοκιμίου (σχ. 5.8 γ), η οποία ονομάζεται **εγκάρσια συστολή**. Μετά το σημείο (Μ), ακολουθεί στο διάγραμμα το σημείο (Θ). Στην περιοχή (ΜΘ), παρά το γεγονός ότι τα αντίστοιχα φορτία ελαττώνονται, το δοκίμιο θραύεται (στο σημείο Θ).

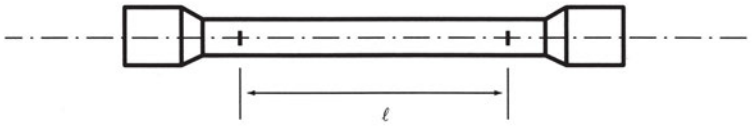
* Κατά τη διάρκεια της δοκιμής η διατομή (Α) θεωρείται αμετάβλητη (Α = σταθερή).



Σχήμα 5.8γ *Η εγκάρσια συστολή*

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα δοκίμιο διαμέτρου 12 mm και μήκους 60 cm, υπεβλήθη σε δοκιμή σε εφελκυσμό και έδωσε τα αποτελέσματα:



Φορτίο αναλογίας: 1695 daN

Επιμήκυνση: 0,045 cm

Αν το φορτίο θραύσης του δοκιμίου είναι ίσο με 4238 daN, να προσδιοριστούν :

α. Η τάση στο όριο αναλογίας,

β. Η τάση στο όριο θραύσης,

γ. Η ειδική επιμήκυνση,

δ. Η ειδική επιμήκυνση επί τοις εκατό,

ε. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

Δίνονται:	**Ζητούνται:**
d = 12 mm	α. Η τάση στο όριο αναλογίας (σ_α)
ℓ = 60 cm	β. Η τάση στο όριο θραύσης ($\sigma_{\theta\rho}$).
F_α = 1695 daN	γ. Η ειδική επιμήκυνση (ε)
$F_{\theta\rho}$ = 4238 daN	δ. Η ειδική επιμήκυνση επί τοις εκατό (ε%)
$\Delta\ell$ = 0,045 cm	ε. Το μέτρο ελαστικότητας (Ε)

Λύση

α) $\sigma_\alpha = \dfrac{F_\alpha}{A}$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,2^2\,cm^2}{4}$$

$$A = 1,13\ cm^2$$

$$\sigma_\alpha = \frac{F_\alpha}{A} = \frac{1695\ daN}{1,13 cm^2}$$

$$\underline{\sigma_\alpha = 1500\ daN/cm^2}$$

β) $\sigma_{\theta\rho} = \dfrac{F_{\theta\rho}}{A} = \dfrac{4238 daN}{1,13 cm^2}$

$$\underline{\sigma_{\theta\rho} = 3750\ daN/cm^2}$$

γ) $\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \dfrac{0,045 cm}{60 cm}$

$$\underline{\varepsilon = 0,00075}$$

δ) $\varepsilon\% = \dfrac{\Delta\ell}{\ell} \cdot 100 = \dfrac{0,045 cm}{60 cm} \cdot 100$

$$\underline{\varepsilon\% = 0,075}$$

ε) $\Delta\ell = \dfrac{F_\alpha \cdot \ell}{A \cdot E}$

$$E = \frac{F_\alpha \cdot \ell}{A \cdot \Delta\ell} = \frac{1695\,daN \cdot 60\,cm}{1{,}13\,cm^2 \cdot 0{,}045\,cm}$$

$$E = \frac{101700\ daN}{0{,}05085\ cm^2}$$

$$E = 2000000\ \frac{daN}{cm^2}$$

5.9 ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΗ ΤΑΣΗ - ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ

Για να είναι εξασφαλισμένη η αντοχή των κατασκευών, είναι αυτονόητο, ότι δεν πρέπει κατά τη φόρτισή τους να εξαντλούνται τα όρια της αντοχής τους, γιατί αν αυτό συμβεί και το υλικό παρουσιάσει π.χ. ένα μη εμφανές ελάττωμα, τότε όλη η κατασκευή θα καταρρεύσει. Θα πρέπει επομένως, η κατασκευή να φορτιστεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχουν επαρκείς εγγυήσεις ασφάλειας, έναντι πιθανών κινδύνων, που δεν είναι γνωστοί, όταν πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς αντοχής. Οι κίνδυνοι, εκτός από τα πιθανά εσωτερικά ελαττώματα των υλικών, μπορούν να συνοψιστούν σε: μικρορωγμές, στην ύπαρξη ξένων προσμίξεων στα υλικά με επακόλουθη την αλλοίωση των ιδιοτήτων τους, στην αβεβαιότητα των μεγεθών, (και του τρόπου με τον οποίο ενεργούν), των μέγιστων φορτίων με επακόλουθη την αδυναμία προσδιορισμού των αντίστοιχων τάσεων. Η αδυναμία αυτή, γίνεται εντονότερη, λόγω των αναγκαστικών απλοποιήσεων που πραγματοποιούνται στους υπολογισμούς της αντοχής, προκειμένου να αντιμετωπιστούν πολύπλοκα προβλήματα.

Επιτρεπόμενη τάση ($\sigma_{επ}$), ονομάζεται η τάση με την οποία επιτρέπεται να καταπονηθεί ένα υλικό, για να είναι εξασφαλισμένη η αντοχή του, (και φυσικά κάτω από συγκεκριμένα περιθώρια ασφάλειας). Η τάση αυτή ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\sigma_{επ} = \frac{\sigma_{θρ}}{v}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\sigma_{επ} = \frac{\sigma_{δ}}{v}}$$

όπου **v ο συντελεστής ασφάλειας, ο οποίος δείχνει πόσες φορές η επιτρεπόμενη τάση είναι μικρότερη της τάσης θραύσης του υλικού, ή της τάσης διαρροής ($v \cdot \sigma_{επ} = \sigma_{θρ}$ και $v \cdot \sigma_{επ} = \sigma_{δ}$).**

Παρά το γεγονός, ότι ο συντελεστής ασφάλειας προσδιορίζεται από

τεχνικούς κανονισμούς, δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις, που πρέπει να καθοριστεί από το μελετητή, όχι πάντοτε χωρίς σοβαρές δυσκολίες.

Π.χ.

χάλυβας ν = 1,5 ÷ 1,7 (έναντι διαρροής)
ν = 2 ÷ 3 (έναντι θραύσης)

Ξύλο ν = 3 ÷ 4,5

χυτοσίδηρος ν = 6 ÷ 8

5.10 Η ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΗ ΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ - ΤΥΠΟΣ SEEFEHLNER

Για τις περιπτώσεις, που τα διάφορα υλικά, καταπονούνται από μη στατικά φορτία, δηλαδή από φορτία μεταβαλλόμενα μεταξύ δύο τιμών, μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης, ισχύει ο τύπος του SEEFEHLNER, που έχει τη μορφή:

$$\sigma_{\varepsilon\pi(\mu\varepsilon\tau)} = \frac{2}{3}\sigma_{\varepsilon\pi}\left(1+\frac{F_{\varepsilon\lambda}}{2F}\right)$$

όπου, $\sigma_{\varepsilon\pi(\mu\varepsilon\tau)}$: επιτρεπόμενη τάση από μεταβλητά φορτία,

$F_{\varepsilon\lambda}$: ελάχιστο μεταβλητό φορτίο

F: μέγιστο μεταβλητό φορτίο.

Αν το φορτίο μεταβάλλεται μεταξύ (-F ÷ F), όπου - F = $F_{\varepsilon\lambda}$, τότε ο τύπος του Seefehlner παίρνει τη μορφή:

$$\sigma_{\varepsilon\pi(\mu\varepsilon\tau)} = \frac{2}{3}\sigma_{\varepsilon\pi}\left(1+\frac{-F}{2F}\right) \quad \text{και} \quad \sigma_{\varepsilon\pi(\mu\varepsilon\tau)} = \frac{1}{3}\sigma_{\varepsilon\pi}$$

Αν το φορτίο μεταβάλλεται μεταξύ των ακραίων τιμών (Ο ÷ F), τότε $F_{\varepsilon\lambda}$ = 0, οπότε προκύπτει:

$$\sigma_{\varepsilon\pi(\mu\varepsilon\tau)} = \frac{2}{3}\sigma_{\varepsilon\pi}\left(1+\frac{0}{2F}\right) \quad \text{και} \quad \sigma_{\varepsilon\pi(\mu\varepsilon\tau)} = \frac{2}{3}\sigma_{\varepsilon\pi}$$

Οι παραπάνω σχέσεις έχουν προσδιοριστεί πειραματικά από τον Wöhler.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το εφελκυστικό φορτίο θραύσης μίας ράβδου, είναι ίσο με 9000 daN και η επιτρεπόμενη τάση ίση με 10 daN/mm^2. Αν ο συντελεστής ασφάλειας ληφθεί ίσος με 3, να προσδιοριστεί η διάμετρος της ράβδου.

Δίνονται:	**Ζητούνται:**
$F_{\theta\rho}$ = 9000 daN	Η διάμετρος της ράβδου (d)
$\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 10 daN/mm^2	
v = 3	

Λύση

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \qquad (1)$$

$$\sigma_{\theta\rho} = \frac{F_{\theta\rho}}{A} \qquad A = \frac{F_{\theta\rho}}{\sigma_{\theta\rho}} \qquad (2)$$

$$v = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \qquad \sigma_{\theta\rho} = v \cdot \sigma_{\varepsilon\pi} \qquad (3)$$

Από την (3) έχουμε:

$\sigma_{\theta\rho} = v \cdot \sigma_{\varepsilon\pi} = 3 \cdot 10$ daN/mm^2

$\sigma_{\theta\rho} = 30$ daN/mm^2

Από τη (2) προκύπτει:

$$A = \frac{F_{\theta\rho}}{\sigma_{\theta\rho}} = \frac{9000\,\text{daN}}{30\,\text{daN/mm}^2}$$

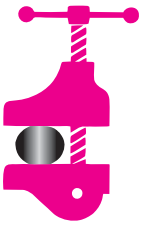
A = 300 mm^2

Αντίστοιχα, από την (1) έχουμε:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 300\text{mm}^2}{3,14}} = \sqrt{382\text{mm}^2}$$

Και επομένως:

d = 19,55 mm



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΠΕΜΠΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- **Η αντοχή των υλικών είναι η επιστήμη, που μελετάει τα στοιχεία των κατασκευών και τις αντίστοιχες παραμορφώσεις τους, όταν πάνω σε αυτά ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, με κύριο στόχο τον καθορισμό των συνθηκών που εξασφαλίζουν την αντοχή τους.**

- Οι δυνάμεις ή οι ροπές οι οποίες ενεργούν στο εξωτερικό των σωμάτων και οι αντίστοιχες αντιδράσεις που αυτές προκαλούν, ονομάζονται **φορτία**. Όταν ένα σώμα, βρίσκεται υπό την επίδραση φορτίων, λέμε ότι **φορτίζεται** ή καταπονείται ή βρίσκεται σε **εντατική κατάσταση**. Όταν τα φορτία παύσουν να ενεργούν στο σώμα λέμε ότι το σώμα **αποφορτίζεται**.

- Οι παραμορφώσεις διακρίνονται σε **ελαστικές** και **πλαστικές**.

- Τα υλικά διακρίνονται σε **όλκιμα** και **ψαθυρά**.

- Τα φορτία διακρίνονται σε **μόνιμα**, **μεταβλητά**, **συγκεντρωμένα**, **επιφανειακά**, **άμεσα** και **έμμεσα**.

- Η τάση (σ) δίνεται ως πηλίκο του φορτίου (F) και της διατομής (A)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- Ο νόμος του Hooke λέγει ότι: **Αν δεν ξεπεραστεί ένα συγκεκριμένο όριο, που ονομάζεται όριο αναλογίας, οι παραμορφώσεις που υφίστανται τα φορτισμένα σώματα είναι ανάλογες με τα αντίστοιχα φορτία που τις προκάλεσαν.**

- Με τον όρο **επιμήκυνση** χαρακτηρίζουμε την αύξηση του μήκους του σώματος στη περίπτωση του εφελκυσμού και με τον όρο **επιβράχυνση** την ελάτωση του μήκους του σώματος στην περίπτωση της θλίψης.

- **Η ειδική επιμήκυνση και η ειδική επιβράχυνση δίνονται αντίστοιχα από το πηλίκο της επιμήκυνσης ($\Delta\ell$) ή της επιβράχυνσης ($\Delta\ell$) και του αρχικού μήκους (ℓ) του σώματος.**

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

- **Το μέτρο ελαστικότητας (Ε) χαρακτηρίζει το υλικό του σώματος και ορίζεται από τη σχέση:**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

- Από τη δοκιμή σε εφελκυσμό προκύπτουν:

  – Η τάση αναλογίας: $\sigma_{\alpha} = \frac{F_{\alpha}}{A}$

  – Η τάση ελαστικότητας: $\sigma_{\varepsilon} = \frac{F_{\varepsilon}}{A}$

  – Η τάση διαρροής: $\sigma_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{A}$

  – Η τάση θραύσης: $\sigma_{\theta} = \frac{F_{\theta}}{A}$

- Επιτρεπόμενη τάση ($\sigma_{επ}$) ονομάζεται η τάση που επιτρέπεται να καταπονηθεί ένα υλικό, για να είναι εξασφαλισμένη η αντοχή του, (να υπάρχουν συγκεκριμένα περιθώρια ασφάλειας). Η τάση αυτή ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\sigma_{επ} = \frac{\sigma_{θρ}}{v}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\sigma_{επ} = \frac{\sigma_{δ}}{v}}$$

όπου v ο συντελεστής ασφάλειας, ο οποίος δείχνει πόσες φορές η **επιτρεπόμενη τάση είναι μικρότερη της τάσης θραύσης του υλικού ή της τάσης διαρροής ($v \cdot \sigma_{επ} = \sigma_{θρ}$ και $v \cdot \sigma_{επ} = \sigma_{δ}$).**



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μία ράβδος με ορθογωνική διατομή 4 cm × 6 cm εφελκύεται από φορτίο 2400 daN. Να προσδιοριστεί η αναπτυσσόμενη τάση σε daN/cm^2 και daN/mm^2.

2. Σε μια μεταλλική δοκό τετραγωνικής διατομής τοποθετείται βάρος 80 kN. Αν η αναπτυσσόμενη θλιπτική τάση είναι ίση με 0,8 kN/mm^2 να υπολογιστεί η πλευρά της διατομής της.

3. Από ένα συρματόσχοινο κρέμεται βάρος ίσο με 22,6 kN. Αν η αναπτυσσόμενη τάση είναι ίση με 0,20 kN/mm^2, να υπολογιστεί η διάμετρός του.

4. Μία λάμα διατομής 40 × 6 mm και μήκους 30 cm καταπονείται σε εφελκυσμό από φορτίο 2400 daN. Αν η λάμα επιμηκύνεται κατά 0,12 mm και θραύεται υπό φορτίο 4000 daN, να υπολογιστούν:

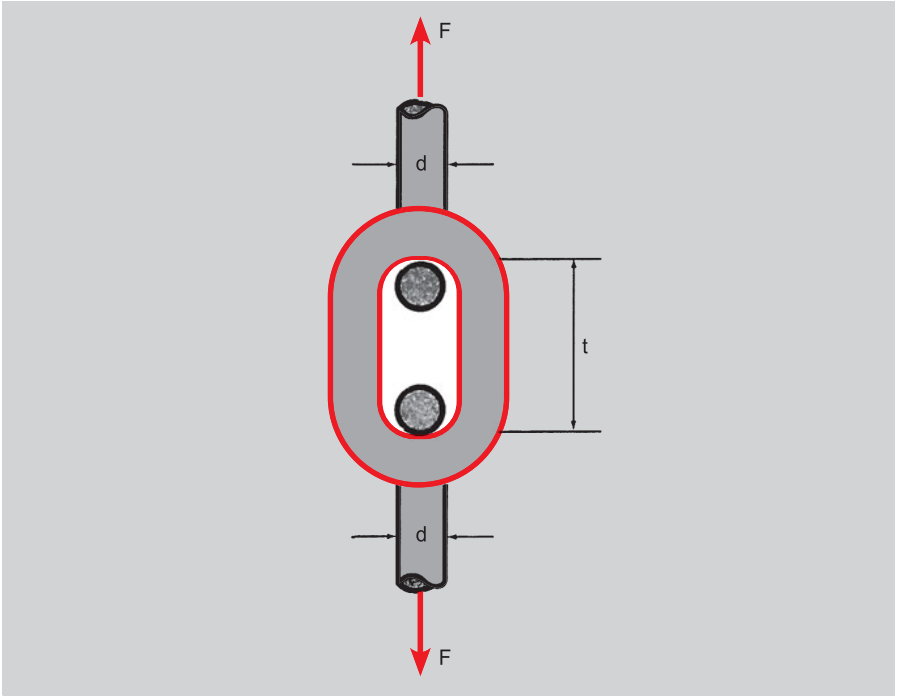
α. Η αναπτυσσόμενη τάση

β. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού

γ. Η τάση θραύσης της λάμας.

5. Το φορτίο θραύσης του υλικού μίας εφελκυόμενης ράβδου είναι ίσο με 1000 daN. Αν η ράβδος έχει διατομή ίση με 4 cm^2 και ο συντελεστής ασφάλειας είναι ίσος με 5, να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση.

6. Εφελκυόμενη ράβδος μήκους 40 cm, παρουσίασε επιμήκυνση 0,04 cm. Να προσδιοριστεί η ειδική επιμήκυνση και η ίδια σε ποσοστό επί τοις εκατό.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΞΟΝΙΚΟΣ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΛΙΨΗ

6.1 Αξονικός εφελκυσμός και θλίψη

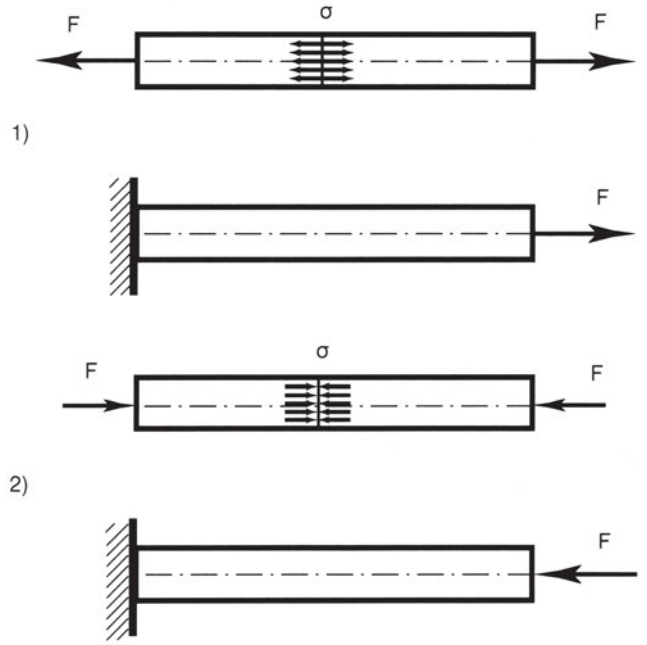
6.2 Επιφανειακή πίεση

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να ορίζετε, πότε ένα σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό ή θλίψη και να αναφέρετε αντίστοιχα παραδείγματα από την πράξη.
- Να λύνετε προβλήματα σχετικά με τη διαστασιολόγηση, τον έλεγχο τάσεων, την ικανότητα φόρτισης, να συγκρίνετε τα αποτελέσματα, ώστε να καταλήγετε σε χρήσιμα συμπεράσματα.

6.1 ΑΞΟΝΙΚΟΣ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΛΙΨΗ

Η απλούστερη περίπτωση σώματος που καταπονείται σε εφελκυσμό ή θλίψη, είναι αυτή της πρισματικής ράβδου (σχ. 6.1α), στις ακραίες διατομές της οποίας ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, ίσες και αντίθετες, κάθετες στις διατομές της ράβδου και των οποίων η συνισταμένη διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής (ή συμπίπτει με το γεωμετρικό άξονα της ράβδου).



Σχήμα 6.1α *Εφελκυσμός και θλίψη ράβδου*

Η ράβδος, υπό την επίδραση των δυνάμεων (φορτίων) που περιγράψαμε, τείνει να **επιμηκυνθεί** (σχ. 6.1 α-1) ή να **επιβραχυνθεί** (σχ. 6.1 α-2). Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για **αξονικό εφελκυσμό** και στη δεύτερη για **αξονική θλίψη**.

Σε κάθε διατομή της ράβδου (Α), αναπτύσσονται τάσεις (σ), κάθετες στη διατομή, των οποίων η συνισταμένη –για να παραμένει η ράβδος σε ισορροπία– θα πρέπει να συμπίπτει με τον άξονα της ράβδου και να είναι ίση και αντίθετη με το εξωτερικό φορτίο (F).

$$\text{Επομένως: } \sigma = \frac{F}{A}$$

Οι υπολογισμοί που μπορούν να πραγματοποιηθούν, με την παραπάνω σχέση, είναι οι εξής:

α) διαστασιολόγηση: Πρόκειται για τον υπολογισμό των διαστάσεων φορτισμένων σωμάτων, ώστε να αντέχουν με ασφάλεια τις αναπτυσσόμενες τάσεις.

Αν συμβολίσουμε με:

$A_{απ}$ την απαιτούμενη διατομή,

$F_{υπ}$ το συνολικό υπαρκτό φορτίο,

τότε, η διαστασιολόγηση θα πραγματοποιείται με την βοήθεια της σχέσης:

$$A_{απ} = \frac{F_{υπ}}{\sigma_{επ}}$$

β) Έλεγχος των τάσεων: Πρόκειται για τον έλεγχο των τάσεων που αναπτύσσονται σε φορτισμένα σώματα, με δεδομένη διατομή και δεδομένα υπαρκτά εξωτερικά φορτία, προκειμένου να διαπιστώσουμε αν τα σώματα αντέχουν με ασφάλεια, ή ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μικρότερες ή ίσες με τις επιτρεπόμενες.

Αν συμβολίσουμε με:

$A_{υπ}$ την υπάρχουσα (δεδομένη) διατομή,

$F_{υπ}$ το ύπαρχον (δεδομένο) φορτίο,

$σ_{υπ}$ την υπάρχουσα αναπτυσσόμενη τάση,

τότε, ο έλεγχος των τάσεων θα πραγματοποιείται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$σ_{υπ} = \frac{F_{υπ}}{A_{υπ}} \leq σ_{επ}$$

γ) Προσδιορισμός της ικανότητας φόρτισης:

Πρόκειται για τον υπολογισμό του μεγαλύτερου φορτίου, που μπορούν να αντέξουν με ασφάλεια, φορτισμένα σώματα δεδομένων διατομών.

Αν συμβολίσουμε με:

$A_{υπ}$ την υπαρκτή δεδομένη διατομή,

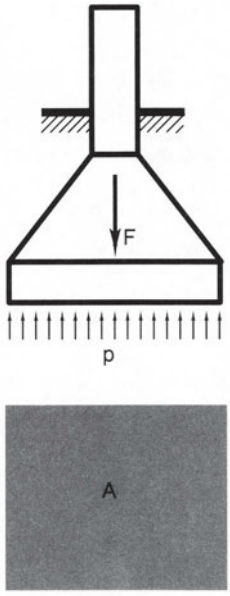
$F_{μ}$ το μέγιστο φορτίο,

τότε ο προσδιορισμός της ικανότητας φόρτισης θα πραγματοποιείται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$F_{μ} = A_{υπ} \cdot σ_{επ}$$

6.2 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΠΙΕΣΗ

Η επιφανειακή πίεση εμφανίζεται στις κατασκευές, στις περιπτώσεις, που εξωτερικά φορτία μεταβιβάζονται από στοιχείο σε στοιχείο και κατανέμονται σε εκτεταμένες επιφάνειες. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, αποτελούν τα φορτία των υποστυλωμάτων και η μεταβίβασή τους στο έδαφος, μέσω της επιφάνειας επαφής Α (σχ 6.2 α).



Σχήμα 6.2α *Η επιφανειακή πίεση στα πέδιλα των υποστηλωμάτων*

Κατ' αναλογία, με όσα γνωρίζουμε για την τάση, προκύπτει:

$$p = \frac{F}{A}$$

όπου p: η **επιφανειακή πίεση.**

Μονάδες p: οι μονάδες τάσης.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να ελέγξετε, αν μια χαλύβδινη ράβδος ($\sigma_{\theta\rho}$ = 490 N/mm^2) τετραγωνικής διατομής με πλευρά ίση με 40 mm, αντέχει με ασφάλεια, όταν εφελκύεται από ένα φορτίο ίσο με 6500 daN, με συντελεστή ασφάλειας ίσο με 5.

Δίνονται:	**Ζητούνται:**
$\sigma_{\theta\rho}$ = 490 N/mm^2 = 49 daN/mm^2	Αν αντέχει ή όχι
F = 6500 daN	
α = 40 mm	
ν = 5	

Λύση

Η μέγιστη τάση που μπορεί να αναπτυχθεί στη ράβδο, είναι η επιτρεπόμενη τάση ($\sigma_{επ}$).

$$v = \frac{\sigma_{θρ}}{\sigma_{επ}} \quad \text{και}$$

$$\sigma_{επ} = \frac{\sigma_{θρ}}{v} = \frac{49\,daN/mm^2}{5}$$

$$\sigma_{επ} = 9{,}8\,\frac{daN}{mm^2}$$

Η τάση που αναπτύσσεται στη ράβδο ($\sigma_{υπ}$), δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{υπ} = \frac{F_{υπ}}{A_{υπ}}$$

$A_{υπ} = \alpha^2$ και

$A_{υπ} = 40^2\,mm^2$

$A_{υπ} = 1600\,mm^2$

$$\sigma_{υπ} = \frac{F_{υπ}}{A_{υπ}} = \frac{6500\ daN}{1600\,mm^2}$$

$$\sigma_{υπ} = 4\,\frac{daN}{mm^2}$$

Από τη σύγκριση των $\sigma_{υπ}$ και $\sigma_{επ}$, προκύπτει ότι:

$$\sigma_{υπ} < \sigma_{επ} \rightarrow 4\,\frac{daN}{mm^2} < 9{,}8\,\frac{daN}{mm^2}$$

Επομένως: **η ράβδος αντέχει.**



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΚΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Μία ράβδος καταπονείται σε εφελκυσμό όταν ενεργούν σε αυτό εξωτερικές δυνάμεις ίσες και αντίθετες, κάθετες στις διατομές της, των οποίων η συνισταμένη συμπίπτει με το γεωμετρικό της άξονα.

- Οι αναπτυσσόμενες τάσεις δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- Οι υπολογισμοί που πραγματοποιούνται με την παραπάνω σχέση συνοψίζονται ως εξής:

– Διαστασιολόγηση $A_{απ} = \frac{F_{υπ}}{\sigma_{επ}}$

– Έλεγχος τάσεων $\sigma_{υπ} = \frac{F_{υπ}}{A_{υπ}} \leq \sigma_{επ}$

– Ικανότητα φόρτισης $F_{μ} = A_{υπ} \cdot \sigma_{επ}$



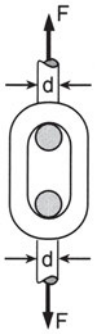
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη βοήθεια μίας ράβδου μήκους 10 m ρυμουλκούμε αξονικό φορτίο 10.000 daN. Αν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου είναι ίσο με 2.100.000 daN/cm^2 και η επιτρεπόμενη τάση ίση με 1200 daN/cm^2, να υπολογιστούν:

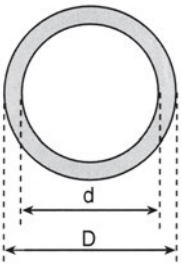
α. Η διάμετρος της ράβδου

β. Η επιμήκυνση.

2. Η αλυσίδα που φαίνεται στο σχήμα καταπονείται σε εφελκυσμό από φορτίο ίσο με 4000 daN. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 4800 daN/cm^2 και ο συντελεστής ασφάλειας ληφθεί ίσος με 6, να υπολογιστεί η διάμετρος του κρίκου της αλυσίδας.



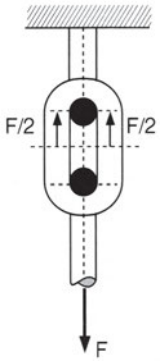
3. Σωλήνας με εξωτερική διάμετρο 30 mm και εσωτερική 25 mm καταπονείται σε θλίψη από φορτίο 10 kN. Να υπολογιστεί η θλιπτική τάση που θα αναπτυχθεί.



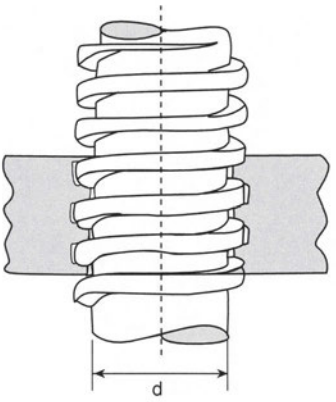
4. Συρματόχοινο αποτελείται από 6 δέσμες, η καθεμία από τις οποίες έχει 37 συρματίδια διαμέτρου (το καθένα) 0,5 mm. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 150 daN/mm^2 και ο συντελεστής ασφάλειας ίσος με 6, να προσδιοριστεί η εφελκυστική ικανότητα φόρτισης, δηλαδή το μέγιστο φορτίο που μπορεί να ανυψωθεί με ασφάλεια.

5. Με σχοινί του οποίου το υλικό κατασκευής έχει τάση θραύσης ίση με 1200 daN/cm^2 ανυψώνουμε βάρος ίσο με 4200 daN. Αν ληφθεί συντελεστής ασφάλειας ίσος με 4, να προσδιοριστεί η διάμετρος του σχοινιού (διαστασιολόγηση).

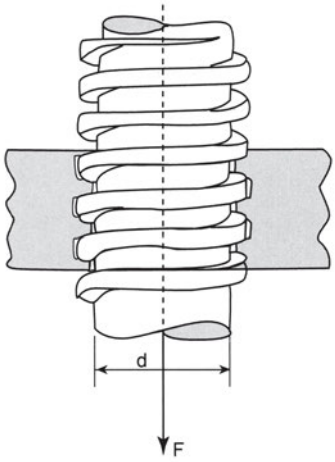
6. Η αλυσίδα του σχήματος καταπονείται από εφελκυστικό φορτίο 1800daN. Αν η επιτρεπόμενη τάση είναι ίση με 820 daN/cm^2 και η διάμετρος του κλάδου του κρίκου ίση με 16 mm, να γίνει ο έλεγχος των τάσεων, δηλαδή να αποφανθείτε αν η αλυσίδα αντέχει τη φόρτιση με ασφάλεια.



7. Δίνεται κοχλίας με διάμετρο πυρήνα ίση με 10 mm και επιτρεπόμενη τάση ίση με 8 daN/mm^2. Να προσδιοριστεί το μέγιστο εφελκυστικό φορτίο, (ικανότητα φόρτισης). Σημειώνουμε ότι, για τον υπολογισμό της αντοχής των κοχλιών χρησιμοποιείται η διάμετρος του πυρήνα και όχι η εξωτερική τους διάμετρος.

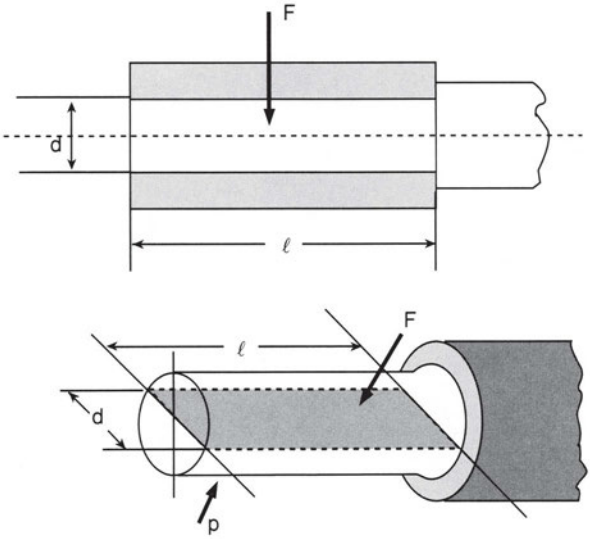


8. Από κοχλία πρόκειται να κρεμαστεί βάρος ίσο με 1000 daN. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 48 daN/mm^2 και ληφθεί συντελεστής ασφάλειας ίσος με 6, να υπολογιστεί η διάμετρος του πυρήνα του κοχλία (διαστασιολόγηση).



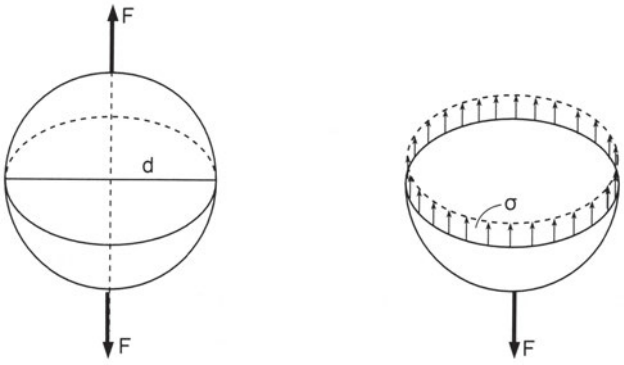
9. Μία χαλύβδινη ράβδος καταπονείται επαναληπτικά σε εφελκυσμό και θλίψη από φορτίο 3700 daN. Αν η τάση θραύσης του υλικού της ράβδου είναι ίση με 420 N/mm^2 και ο συντελεστής ασφαλείας ίσος με 4, να υπολογίσετε τη διατομή της ράβδου.

10. Ο εγκάρσιος στροφέας της ατράκτου που φαίνεται στο σχήμα πιέζει τον τριβέα του εδράνου με φορτίο ίσο με 1000 daN. Εάν η επιφανειακή πίεση είναι ίση με 40 daN/cm^2 και το μήκος του στροφέα (ℓ) είναι διπλάσιο της διαμέτρου του (d), να προσδιοριστούν τα στοιχεία αυτά του στροφέα (ℓ και d).

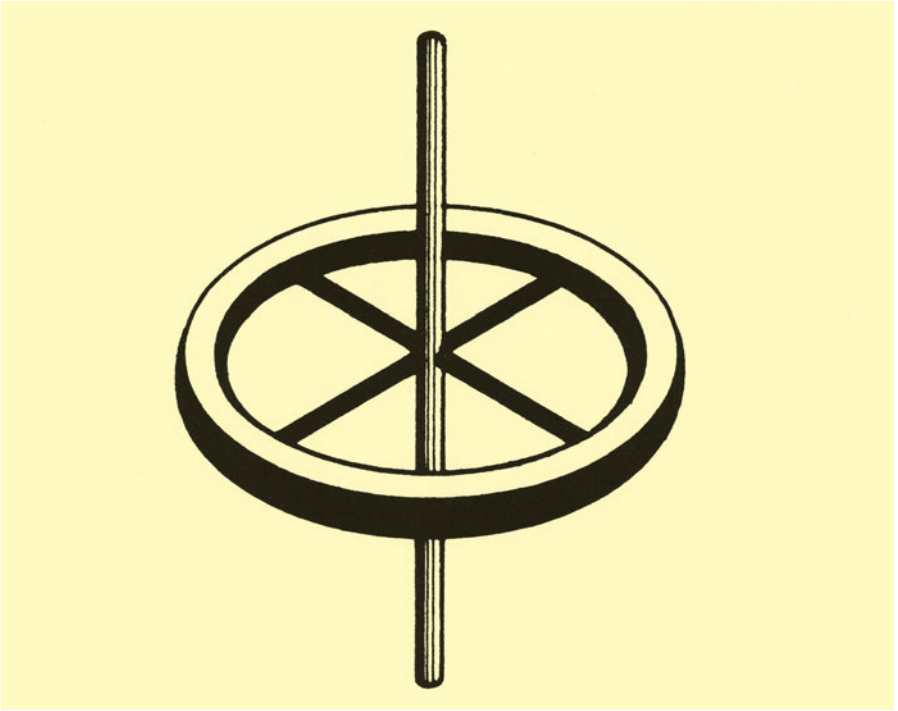


Σαν επιφάνεια επαφής στροφέα και τριβέα δε θεωρούμε την ημικυλινδρική επιφάνεια, αλλά την ορθή προβολή της.

11. Σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής διαμέτρου (d) και πάχους (t) βρίσκεται υπό εσωτερική πίεση (p). Να αποδειχθεί ότι η τάση εφελκυσμού, που αναπτύσσεται στην τομή του κελύφους, που προκαλείται από διαμετρικό επίπεδο που τέμνει το κέλυφος κατά περιφέρεια μέγιστου κύκλου, είναι ίση με $\pi \cdot d / 4 \cdot t$.



12. Μελετούμε ένα σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής διαμέτρου 20 cm και πάχους 4 cm που βρίσκεται υπό πίεση. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 52 daN/mm^2 και ο συντελεστής ασφάλειας ίσος με 10, να υπολογιστεί η μέγιστη εσωτερική πίεση που είναι δυνατόν να αναπτυχθεί με ασφάλεια στο κέλυφος.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

7.1 Γενικά

7.2 Ροπή αδράνειας ορθογωνικής διατομής

7.3 Στατική ροπή

7.4 Ροπή αντίστασης. Πολική ροπή αδράνειας-αντίστασης

7.5 Ακτίνα αδράνειας

7.6 Θεώρημα Steiner

7.7 Εφαρμογές



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Οι μαθητές να κατανοήσουν την αδράνεια της ύλης, τη ροπή αδράνειας του σώματος σαν χαρακτηριστικό μέγεθος της δυσκαμψίας μιας καμπτόμενης κατασκευής.

- Να υπολογίζουν τις ροές αδράνειας-αντίστασης-την πολική ροπή αδράνειας και αντίστασης-τις ακτίνες αδράνειας μιας διατομής ως προς τον άξονα.
- Να διατυπώνουν το Θεώρημα Steiner και να το εφαρμόζουν σε πρακτικές εφαρμογές.

Θεωρήσαμε σκόπιμο να παραθέσουμε παραδείγματα λυμένα που αναφέρονται στο απλό ταυ –στο διπλό ταυ– στην κοίλη διατομή. Με βάση αυτά, φρονούμε ότι οι μαθητές θα είναι σε θέση να επιλύουν με ευχέρεια διάφορα πρακτικά προβλήματα.

7.1 ΓΕΝΙΚΑ

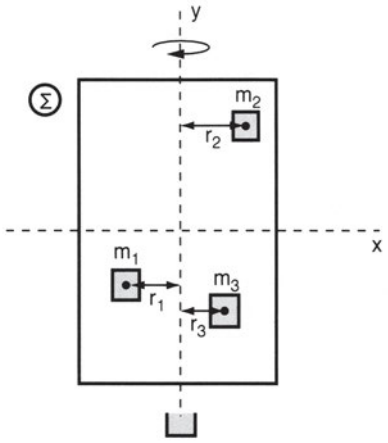
Γνωρίζουμε από τη φυσική, ότι η ύλη παρουσιάζει αντίσταση σε κάθε μεταβολή της κινητικής της κατάστασης. Την αντίσταση αυτής της μεταβολής από την ύλη, την ονομάζουμε **αδράνεια της ύλης**. Όσο πιο μεγάλη μάζα έχουν τα σώματα, είναι φανερό, τόσο πιο μεγάλη αδράνεια εμφανίζουν.

Επίσης γνωρίζουμε ότι για ένα σώμα που περιστρέφεται (σχ. 7.1.α) γύρω από ένα μόνιμο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, η κινητική του ενέργεια είναι ίση με:

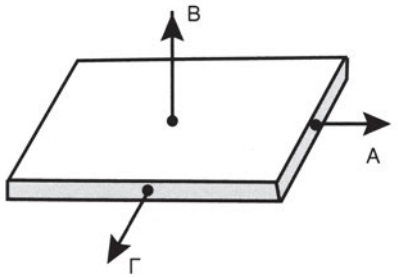
$$E = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m_i r_i^2 \qquad (7.1.1)$$

Στον τύπο 7.1.1 είναι: ω = σταθερή γωνιακή ταχύτητα του σώματος που περιστρέφεται γύρω από το μόνιμο άξονα y – y΄, m_i = οι πολύ μικρές (στοιχειώδεις) μάζες από τις οποίες αποτελείται το σώμα Σ και y_i = οι αποστάσεις από τον άξονα y – y΄ των μαζών του σώματος.

Στην ελεύθερη περιστροφική κίνηση του σώματος οι ελεύθεροι άξονες δεν παραμένουν μόνιμοι· έχουμε τρεις άξονες περιστροφής που τους ονομάζουμε **κύριους άξονες αδρανείας**. Αυτοί είναι οι Α, Β, Γ σχ. 7.1.β.



Σχήμα 7.1α *Περιστροφή σώματος*



Σχήμα 7.1β *Οι τρεις κύριοι άξονες Α-Β-Γ αδράνειας*

7.2 ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Ονομάζουμε ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα περιστροφής y - y΄, το άθροισμα των γινομένων όλων των μικρών μαζών m_i επί το τετράγωνο των αποστάσεων του κέντρου βάρους τους από τον άξονα.

Για μια επιφάνεια F, και τις επιφάνειες F_i αυτής, η ροπή αδράνειας της επιφάνειας αυτής ως προς τον άξονα y - y΄ συμβολίζεται με J_y και μετράται σε cm^4.

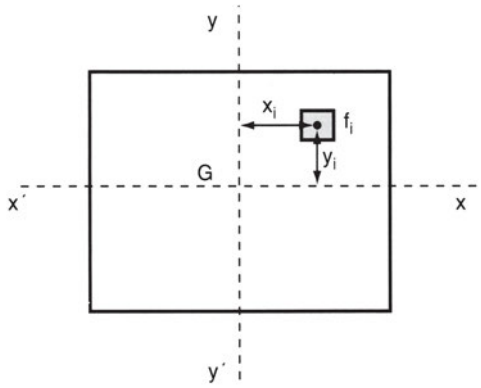
Όμοια, για την ίδια επιφάνεια F και τις επιφάνειες f_i αυτής, η ροπή αδράνειας της επιφάνειας αυτής ως προς άξονα x-x΄ συμβολίζεται με J_x και μετράται σε cm^4.

Είναι φανερό, ότι το γινόμενο $\Sigma m_i r_i^2$ εκφράζει το μέτρο της αδράνειας του σώματος, δηλαδή την αντίσταση που προβάλλεται από το σύστημα, όταν από την κατάσταση ηρεμίας, το θέτουμε σε κίνηση.

Το μέγεθος της ροπής αδράνειας μιας διατομής, μπορούμε με απλά μαθηματικά, κατά προσέγγιση, να υπολογίζουμε εργαζόμενοι ως εξής:

1. Χωρίζουμε, σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό επιφανειών f_i (στοιχειώδη εμβαδά), την διατομή.

2. Κάθε επιφάνεια f_i την πολλαπλασιάζουμε επί το τετράγωνο της απόστασης της x_i, y_i από τους άξονες y - y΄ και x - x΄ (οι άξονες x - x΄ και y - y΄ περνούν από το κέντρο βάρους G της διατομής



Σχήμα 7.2α *Εύρεση ροπής αδράνειας διατομής*

δηλαδή θα έχουμε:

$$J_x = \Sigma f_i y_i^2 \qquad \text{και} \qquad J_y = \Sigma f_i x_i^2 \tag{7.2.1}$$

δηλαδή τις σχέσεις:

$$J_x = f_1 y_1 + f_2 y_2 + \ldots + f_i y_i^2 \quad \text{και} \quad J_y = f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + \ldots + f_i x_i^2$$

Για τις καταπονήσεις που θα μελετήσουμε πιο κάτω (κάμψη, διάτμηση, στρέψη), είναι φανερό ότι προσδιοριστικό μέγεθος των διαφόρων διατομών (ορθογωνικών, κυκλικών, συνθέτων) είναι αυτό το άθροισμα των αποστάσεών τους από τους άξονες x-x΄ και y - y΄.

Η διατομή ενός σώματος έχει –προφανώς– διαφορετικές ροπές αδράνειας ως προς διαφορετικούς άξονες.

Αυτό συνεπάγεται ότι, όσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδράνειας της διατομής ως προς άξονα, τόσο πιο μεγάλη είναι και η **αντίσταση** της διατομής στην περιστροφή ως προς αυτόν τον άξονα· είναι δηλαδή η ροπή αδρανείας χαρακτηριστικό μέγεθος της δυσκαμψίας μιας καμπτόμενης κατασκευής.

Είναι προφανές ότι αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας μιας ορθογωνικής διατομής διαστάσεων h, b δεν έχουμε παρά να θεωρήσουμε το ορθογώνιο χωρισμένο σε i το πλήθος επιφάνειες (λωρίδες) f_i, ίσες και παράλληλες προς τον άξονα π.χ. x-x΄ πλάτους:

$$y_i = \frac{\frac{h}{2}}{i} = \frac{h}{2i}\text{, μήκους b και εμβαδού } f_i = \frac{b \cdot h}{2i}$$

Για κάθε τέτοια λωρίδα θα έχουμε ανάλογα y_i, και f_i, δηλαδή ένα άθροισμα $y_i^2 \cdot f_i$ που το άθροισμά τους θα δώσει για $i \to \infty$.

$$I_{x\text{-}x'} = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad \text{ροπή αδράνειας ορθ. διατομής ως προς } x - x' \tag{7.2.2}$$

Ανάλογα προκύπτει και ο χρήσιμος τύπος:

$$I_{y\text{-}y'} = \frac{b^3 \cdot h}{12} \qquad \text{ροπή αδράνειας ορθ. διατομής ως προς } y - y' \tag{7.2.3}$$

Εάν για παράδειγμα λάβουμε μια διατομή ορθογωνική διαστάσεων 12 cm και 4 cm, δηλαδή h = 12 cm και b = 4 cm, τότε γι' αυτήν θα έχουμε:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{4 \cdot 12^3\ \text{cm}^4}{12} = 576\ \text{cm}^4$$

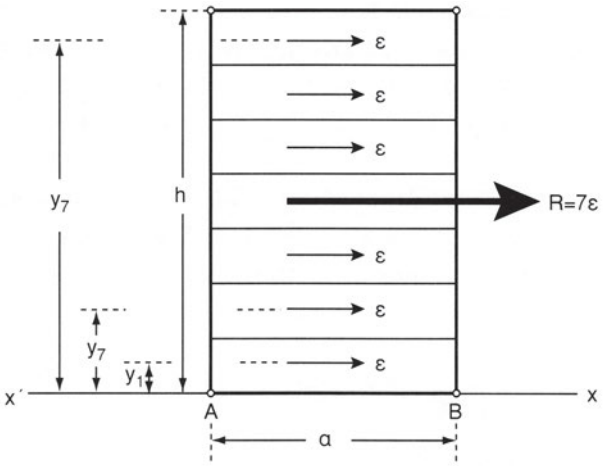
$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{12 \cdot 4^3}{12} = 64\ \text{cm}^4$$

Από τη σύγκριση αυτών των αποτελεσμάτων, προκύπτει ότι: $I_x = 9I_y$.

7.3 ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Για να βρούμε τη στατική ροπή ενός ορθογωνίου, πλευρών α και h ως προς άξονα που συμπίπτει με την πλευρά του –έστω την ΑΒ– χωρίζουμε την επιφάνεια σε ν το πλήθος στοιχειώδεις επιφάνειες (σχ. 7.3α) παράλληλες προς την πλευρά ΑΒ, ίσως επιφάνειας ε. Τότε θα έχουμε

$$\nu \cdot \varepsilon = \alpha \cdot h \tag{1}$$



Σχήμα 7.3α *Εύρεση στατικής ροπής επίπεδου σχήματος*

Βρίσκουμε τις στατικές ροπές για κάθε επιφάνεια χωριστά, ως προς την πλευρά ΑΒ.

Θα έχουμε:

$$M_\Sigma = \varepsilon y_1 + \varepsilon y_2 + \ldots + \varepsilon y_v \qquad (2)$$

όπου: $y_1, y_2, ..., y_v$ είναι οι αποστάσεις των κεντροειδών κάθε επιφάνειας από την πλευρά ΑΒ.

Είναι δε:

$$y_1 = \frac{h}{14} \quad , \quad y_5 = \frac{h}{14} + \frac{4h}{7}$$

$$y_2 = \frac{h}{14} + \frac{h}{7} \quad , \quad y_6 = \frac{h}{14} + \frac{5h}{7}$$

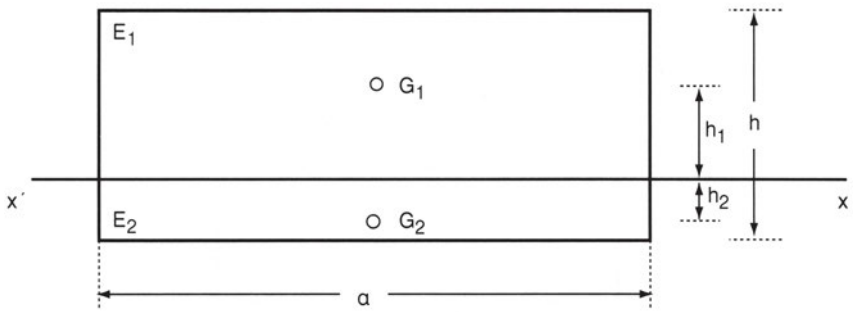
$$y_3 = \frac{h}{14} + \frac{2h}{7} \quad , \quad y_7 = \frac{h}{14} + \frac{6h}{7} \qquad (3)$$

$$y_4 = \frac{h}{14} + \frac{3h}{7}$$

Η σχέση (2), τότε θα γίνει:

$$M_\Sigma = \varepsilon \cdot 3,5 \cdot h = \frac{\alpha \cdot h}{7} \cdot 3,5h = \alpha \cdot h \cdot \frac{h}{2}$$

$$\underline{M_\Sigma = \frac{\alpha h^2}{2}}$$



Σχήμα 7.3β *Στατική ροπή ορθογωνικής διατομής*

Παρατηρούμε ότι στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να φθάσουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Varignon.

Θα έχουμε:

$$M_\Sigma = R \cdot \frac{h}{2} = 7 \cdot \varepsilon \cdot \frac{h}{2} = 7 \cdot \alpha \cdot \frac{h}{7} \cdot \frac{h}{2}$$

$$M_{\Sigma} = \frac{\alpha h^2}{2} = E \cdot \frac{h}{2}$$

όπου Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου (Ε = α · h)

Για την επιφάνεια του σχήματος μας η στατική ροπή του ως προς τον άξονα x-x΄ θα είναι:

$$M_{\Sigma} = E_1 h_1 - E_2 \cdot h_2$$

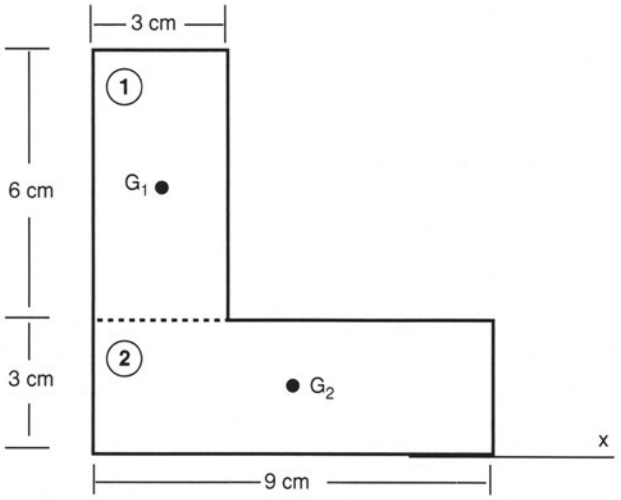
$$M_{\Sigma} = \alpha \cdot 2h_1 \cdot h_1 - \alpha \cdot 2h_2 \cdot h_2 = 2\alpha \cdot \frac{h}{2}\left(h_1 - h_2\right)$$

Άρα: $M_{\Sigma} = \alpha \cdot h \cdot (h_1 - h_2)$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να βρεθεί η στατική ροπή της διατομής, ως προς τον άξονα x-x΄

Λύση



Η στατική ροπή M_1 της διατομής 1 ως προς τον άξονα x - x΄ είναι:

$$M_1 = 18\ cm^2 \cdot 6\ cm = 108\ cm^3$$

Η στατική ροπή M_2 της διατομής 2 ως προς άξονα x - x΄ είναι:

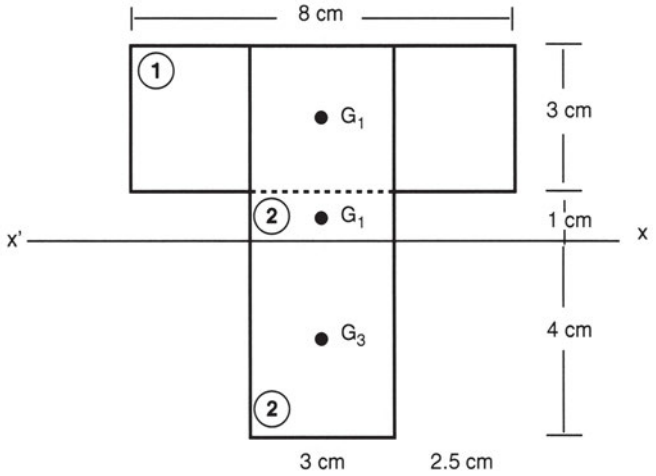
$$M_2 = 27\ cm^2 \cdot 1{,}5\ cm = 40{,}5\ cm^3$$

Επομένως η στατική ροπή ως προς άξονα x - x΄ της διατομής είναι:

$$M = M_1 + M_2 = 148{,}5 \text{ cm}^3$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να βρεθεί η στατική ροπή μιας διατομής απλού ταυ ως προς τον άξονα x - x΄



Λύση

Η στατική ροπή M_1 της διατομής 1 ως προς άξονα x - x΄ είναι:

$$M_1 = 24 \text{ cm}^2 \cdot 2{,}5 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$$

Η στατική ροπή M_2 της διατομής 2 ως προς άξονα x - x΄ είναι:

$$M_2 = 3 \text{ cm}^2 \cdot 0{,}5 \text{ cm} \simeq 1{,}5 \text{ cm}^3$$

Η στατική ροπή M_3 της διατομής 3 προς άξονα x - x΄ είναι:

$$M_3 = 12 \text{ cm}^2 \cdot 2 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^3$$

Επομένως η στατική ροπή ως προς άξονα x - x΄ του απλού ταυ είναι

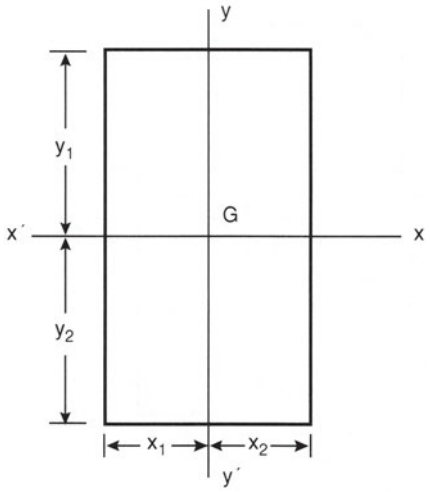
$$M = M_1 + M_2 - M_3 = 37{,}5 \text{ cm}^3$$

7.4 ΡΟΠΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ – ΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ - ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ

7.4.1 Ροπή αντίστασης

Θεωρούμε μια ορθογωνική διατομή διαστάσεων h, b. (σχ. 7.4.1α)

Ονομάζουμε **ροπή αντίστασης** W_x της διατομής ΑΒΓΔ το πηλίκο της διαίρεσης της ροπής αδρανείας I_x της διατομής ως προς τον κεντροβαρικό άξονα x, δια της αποστάσεως του πιο απομακρυσμένου σημείου της διατομής από τον άξονα x. Έχουμε δηλαδή:



Σχήμα 7.4.1α *Ροπή αντίστασης*

$$\boxed{W_x = \frac{I_x}{\psi}} \qquad (7.4.1.1)$$

Παρατήρηση

Αν ο κύριος άξονας αδρανείας x - x΄ είναι και άξονας συμμετρίας της διατομής τότε θα έχουμε:

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}} \quad \text{όπου} \quad \alpha = \frac{h}{2}$$

και θα έχουμε:

$$W_x = \frac{\frac{b\,h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b\,h^3}{6\,h} = \frac{b\,h^2}{6} \quad \text{δηλαδή} \quad \boxed{W_x = \frac{b\,h^2}{6}} \qquad (7.4.1.2)$$

Ανάλογα προκύπτει:

$$W_y = \frac{\frac{h\,b^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{h\,b^3}{6b} = \frac{h\,b^2}{6} \quad \text{δηλαδή} \quad \boxed{W_y = \frac{h\,b^2}{6}} \qquad (7.4.1.3)$$

Είναι εύκολο να συνάγουμε, ότι διατηρώντας το h = σταθερό και διπλασιάζοντας το b, θα έχουμε:

$$W_x = \frac{2 \cdot bh^2}{6} = \frac{bh^2}{3}$$

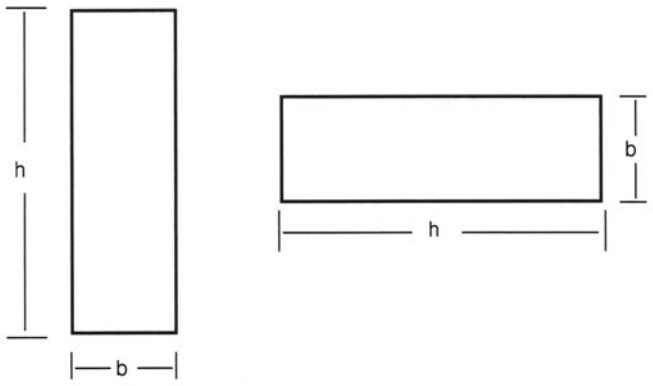
δηλαδή τώρα η ροπή αντίστασης W_x διπλασιάζεται.

Τι συμπέρασμα βγάζετε αν διατηρήσουμε το b = σταθερό και διπλασιάσουμε το h;

Περισσότερα θα πούμε για διατομές με διαφορετικά σχήματα όσον αφορά την ροπή αντίστασης ως προς ένα από τους δύο άξονες συμμετρίας, παρακάτω.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αμφιέρειστη δοκός, μήκους l φέρει κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον της δοκού. Οι διαστάσεις της ορθογωνικής της διατομής είναι bxh όπου h = 3b και τοποθετείται όπως στα σχήματα:



Ποια από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις τοποθέτησης της διατομής, κρίνετε ότι είναι η δυσμενέστερη και γιατί;

Λύση

Για την περίπτωση (α) θα έχουμε:

$$W_\alpha = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot 9b^2}{6} = \frac{9b^3}{6}$$

Για την περίπτωση (β) θα έχουμε:

$$W_b = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{3 \cdot b \cdot b^2}{6} = \frac{3b^3}{6}$$

Από τη σύγκριση των δύο αυτών ροπών αντίστασης προκύπτει:

$$W_\alpha = 3 \cdot W_b$$

δηλαδή δυσμενέστερη είναι η δεύτερη τοποθέτηση γιατί έχει μικρότερη αντοχή.

7.4.2 Πολική ροπή αδράνειας

Ας θεωρήσουμε μια ορθογωνική διατομή ΑΒΓΔ με τους κύριους άξονες αδρανείας της x-x΄ και y-y΄.

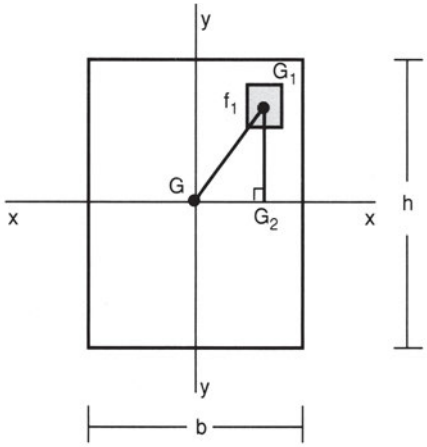
Για το στοιχειώδες εμβαδόν f_i και από τη γεωμετρία του σχήματος, έχουμε :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{δηλαδή} \quad f_i \rho^2 = f_i x^2 + f_i y^2$$

και συνολικά θα προκύψει:

$$\Sigma f_i \rho^2 = I_x + I_y \quad \text{δηλαδή}$$

$$\boxed{I_p = I_x + I_y} \qquad (7.4.2.1)$$



Σχήμα 7.4.2α *Πολική ροπή αδράνειας διατομής*

Ονομάζουμε **πολική ροπή αδράνειας I_p** της διατομής ως προς την αρχή G των κυρίων κεντροβαρικών αξόνων αδρανείας x - x΄ και y – y΄ το άθροισμα των δύο ροπών αδρανείας της διατομής και εκφράζεται σε cm^4.

Έτσι για την ορθογωνική διατομή του σχήματος θα έχουμε:

$$I_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{hb}{12}\left(h^2 + b^2\right)$$

Άρα

$$I_p = \frac{hb}{12}\left(h^2 + b^2\right)$$

Για ορθογωνική διατομή με b = 4 cm και h = 6 cm θα έχουμε:

$$I_p = \frac{6 \cdot 4}{12}\left(6^2 + 4^2\right)cm^4 = 104\ cm^4$$

7.4.3 Πολική ροπή αντίστασης

Προηγούμενα αναφερθήκαμε στη ροπή αδρανείας μιας διατομής ως προς τους κύριους άξονες x-x΄ και y-y΄, στη ροπή αντίστασης και στην πολική ροπή αδρανείας της.

Συναφής είναι και η έννοια της **πολικής ροπής αντίστασης W_p** μιας διατομής και χαρακτηρίζεται ως ο λόγος της πολικής ροπής αδρανείας της διατομής αυτής προς την απόσταση του πιο ακραίου σημείου της (αυτού δηλαδή που βρίσκεται πιο μακριά από το κέντρο βάρους G της διατομής.

Είναι δηλαδή:

$$W_p = \frac{I_p}{\alpha} = \frac{I_x + I_y}{\alpha} \qquad (7.4.3.1)$$

και εκφράζεται σε cm^3.

Από πίνακες παρέχονται οι ροπές αδρανείας I διαφόρων διατομών, οι ροπές αντίστασης W_α, οι πολικές ροπές αδρανείας I_ρ, ως και οι πολικές ροπές αντίστασης W_p.

Έτσι για την ορθογωνική διατομή διαστάσεων h και b θα έχουμε:

$$W_p = \frac{\frac{bh}{12}\cdot\left(h^2+b^2\right)}{\frac{h}{2}} = \frac{b\left(h^2+b^2\right)}{6}$$

Άρα:

$$W_p = \frac{b\left(h^2+b^2\right)}{b}$$

Για ορθογωνική διατομή με b = 6 cm και h = 4 cm, θα έχουμε:

$$W_p = \frac{6}{6}\left(6^2+4^2\right)\text{ cm}^3 = 52\text{ cm}^3$$

7.5 ΑΚΤΙΝΑ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Η **ακτίνα αδρανείας** i_x μιας διατομής ως προς άξονα, είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα της ροπής αδρανείας της διατομής δια της επιφανείας F της διατομής αυτής. Είναι δηλαδή:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} \text{ και } i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} \qquad (7.5.1)$$

Η ακτίνα αδράνειας παριστάνει την απόσταση από τους άξονες αναφοράς όπου ολόκληρη η επιφάνεια της διατομής μπορούσε να τοποθετηθεί “συμπυκνωμένη” σε σημείο, διατηρώντας την ίδια ροπή αδρανείας με την αρχική διατομή.

Άρα μια επιφάνεια έχει δύο ακτίνες αδρανείας όπως ορίζονται από τον τύπο 7.5.1.

Για ορθογωνική διατομή διαστάσεων b = 4 cm και h = 6 cm θα έχουμε:

$$i_x = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = 0,289h \text{ δηλαδή } i_x = 1,734\text{ cm}$$

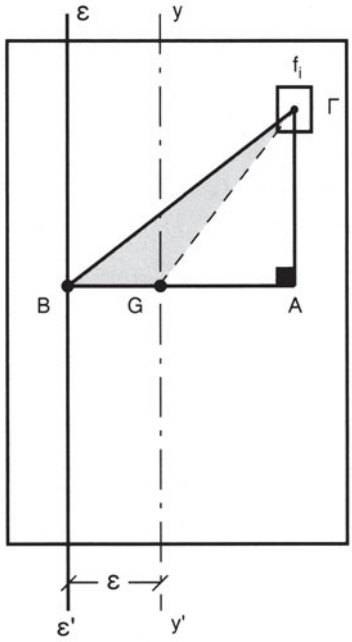
$$i_y = \sqrt{\frac{\frac{hb^3}{12}}{bh}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = 0,289b \text{ δηλαδή } i_y = 1,156 \text{ cm}$$

Για τετραγωνική διατομή με b = h = 8 cm, είναι προφανές ότι:

$$i_x = i_y = 0,289b = 2,312 \text{ cm}$$

7.6 ΘΕΩΡΗΜΑ STEINER

Εδώ θα βρούμε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της ροπής αδρανείας της διατομής ως προς τον άξονα π.χ. y-y΄ (που διέρχεται από το κέντρο βάρους G της διατομής) και της ροπής αδρανείας της διατομής ως προς άξονα ε-ε΄ που είναι παράλληλος προς τον άξονα y-y΄.



Σχήμα 7.6α *Θεώρημα Steiner*

Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε:

$$(B\Gamma)^2 = (G\Gamma)^2 + (BG)^2 - 2(BG)(G\Gamma)\,\text{συν}\,B\widehat{G}\Gamma \qquad (1)$$

επίσης έχουμε:

$$I_\alpha = \Sigma f_i\,(B\Gamma)^2 \qquad (2)$$

$$I_G = \Sigma f_i\,(G\Gamma)^2 \qquad (3)$$

Εάν τη σχέση (1) την πολλαπλασιάσουμε επί Σf_i, θα έχουμε όπου,

$$\varphi = B\widehat{G}\Gamma \quad \text{και} \quad (GA) = (G\Gamma)\,\text{συν}\,(180° - \varphi) = -(G\Gamma)\,\text{συν}\varphi$$

$$\Sigma f_i(B\Gamma)^2 = \Sigma f_i(G\Gamma)^2 + \Sigma f_i(BG)^2 - 2\Sigma f_i(-G\Gamma\text{συν}\varphi)\cdot(G\Gamma)\,\text{συν}\varphi$$

$$I_\alpha = I_G + F\cdot\varepsilon^2 \;\text{ γιατί }\; \Sigma f_i GA = 0$$

Άρα έχουμε: $\boxed{I_\varepsilon = I_G + F\cdot\varepsilon^2}$ (7.6.1)

δηλαδή **η ροπή αδρανείας μιας διατομής ως προς άξονα α-α΄ παραλλήλου του κύριου άξονα y-y΄ ισούται με την κύρια ροπή αδρανείας και το γινόμενο της επιφανείας της διατομής επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο προαναφερομένων αξόνων.**

Από τον τύπο 7.6.1 είναι προφανές ότι $I_\varepsilon > I_G$.

1. Για ορθογωνική διατομή με: h = 10 cm, b = 3 cm και ε = 2 cm κατά το Θεώρημα αυτό του Steiner (τύπος 7.6.1), θα έχουμε

$$I_\varepsilon = \frac{hb^3}{12} + h\cdot b\cdot\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{hb^3}{12} + 3\cdot\frac{h\cdot b^3}{12} = \frac{4b^3h}{12} = \frac{b^3h}{3}$$

Άρα

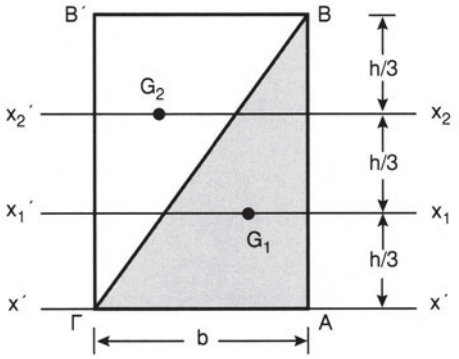
$$I_\varepsilon = \frac{3^3\cdot 10}{3}\ \text{cm}^4 = 90\text{cm}^4$$

2. Για τριγωνική διατομή ΑΒΓ αν θέλουμε να βρούμε τη ροπή αδρανείας της διατομής αυτής ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο βάρους αυτής θα έχουμε

$$I_{x_2} = I_{G_2} + \left(\frac{2}{3}h\right)^2\cdot\frac{bh}{2} \qquad (1)$$

$$I_{x_1} = I_{G_1} + \left(\frac{h}{3}\right)^2\cdot\frac{bh}{2} \qquad (2)$$

$$I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} \qquad (3)$$



Σχήμα 7.6β *Ροπή αδράνειας τριγωνικής διατομής*

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$I_G = \frac{bh^3}{36} \qquad (7.6.2)$$

7.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Της παρακάτω τετραγωνικής διατομής, πλευράς 4 cm, να βρεθούν:

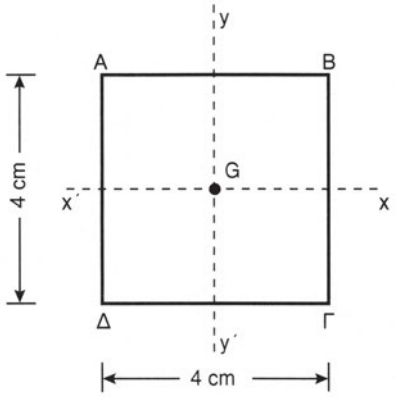
α) Οι ροπές αδρανείας της I_x και I_y, ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας της

β) Η ροπή αντίστασης W_x ως προς τον άξονα ΑΒ

γ) Η πολική ροπή αδρανείας $I_ρ$ ως προς το G

δ) Η πολική ροπή αντίστασης W_p της διατομής αυτής

ε) Η ακτίνα αδρανείας της $i_{ΔΓ}$ ως προς τη βάση ΔΓ της διατομής



Λύση

α) Η ροπή αδρανείας της τετραγωνικής διατομής ως προς άξονα x – x΄ είναι:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad \text{όπου } b = h$$

$$I_x = \frac{4^4}{12}\,cm^4 = 21,333\,cm^4. \text{ Άρα } \underline{I_x = 21,333\ cm^4}$$

Είναι προφανές ότι (;) και

$$\underline{I_y = 21,333\ cm^4}$$

β) Η ροπή αντίστασης W_x της διατομής είναι:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}$$

και επειδή b = h έχουμε

$$W_x = \frac{4^3}{6}\,cm^3 = 10,666\ cm^3$$

και προφανώς

$$\underline{W_y = W_x = 10,666\ cm^3}$$

γ) Η πολική ροπή αδρανείς I_p ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας της διατομής είναι:

$$I_p = I_x + I_y$$

$$I_p = 2 \cdot 21,333\ cm^4 = 42,666\ cm^4$$

Άρα: $I_p = 42{,}666\ cm^4$

δ) Η πολική ροπή αντίστασης W_p της διατομής αυτής είναι:

$$W_p = \frac{I_p}{\alpha},\ W_p = \frac{42{,}666}{2} cm^3 = 21{,}333 cm^3.$$

Άρα $\underline{W_p = 21{,}333\ cm^3}$

ε) Εάν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Steiner θα έχουμε:

$$I_{\Delta\Gamma} = I_x + F\cdot\varepsilon^2$$

$$I_{\Delta\Gamma} = 21{,}333\ cm^4 + 16 \cdot 2^2\ cm^4 = 21{,}333\ cm^4 + 64\ cm^4 = 85{,}333\ cm^4$$

Άρα: $\underline{I_{\Delta\Gamma} = 85{,}333\ cm^4}$

Άρα η ακτίνα αδρανείας της διατομής ως προς τη βάση του ΔΓ θα είναι:

$$i_{\Delta\Gamma} = \sqrt{\frac{I_{\Delta\Gamma}}{F}} = \sqrt{\frac{85{,}333}{16} \cdot \frac{cm^2}{cm}} = 2{,}31 cm$$

Άρα: $\underline{i_{\Delta\Gamma} = 2{,}31\ cm}$

2. ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Της παρακάτω ορθογωνικής διατομής διαστάσεων 4 cm και 10 cm να βρεθούν:

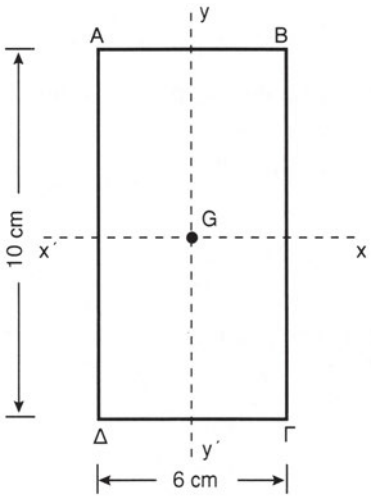
α) Οι ροπές αδρανείας I_x και I_y της διατομής αυτής ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας της.

β) Η ροπή αντίστασης W_x της διατομής ως προς άξονα ΑΒ

γ) Η πολική ροπή αδρανείας I_p ως προς το G

δ) Η πολική ροπή αντίστασης W_p της διατομής

ε) Η ακτίνα αδρανείας της ως προς τη βάση της ΔΓ,



Λύση

α) Η ροπή αδρανείας της ορθογωνικής διατομής ως προς άξονα x-x΄, είναι:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

όπου b = 6 cm, h = 10 cm

$$I_x = \frac{6 \cdot 10^3}{12}\,cm^4 = \frac{10^3}{2}\,cm^4 = 500\ cm^4$$

Άρα: $\underline{I_x = 500\ cm^4}$

$$I_y = \frac{10 \cdot 6^3}{12}\,cm^4 = 180\ cm^4.$$

Άρα: $I_y = 180\ cm^4$

β) Η ροπή αντίστασης W_x της διατομής είναι:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \qquad \text{όπου b = 6 cm, h = 10 cm}$$

Άρα:

$$\underline{W_x = \frac{6 \cdot 10^2}{6}\,cm^3}$$

δηλαδή $W_x = 100\ cm^3$

Ανάλογα έχουμε: $W_y = \dfrac{hb^2}{6} = 60\,cm^3$

γ) Η πολική ροπή αδρανείας I_p ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας της διατομής είναι:

$$I_p = I_x + I_y \text{ και άρα } I_p = (500 + 180)\ cm^4 = 680\ cm^4.$$

δ) Η πολική ροπή αντίστασης W_p της διατομής αυτής είναι:

$$W_p = \frac{I_p}{\alpha},\ W_p = \frac{680}{5}\ cm^3 = 136\ cm^3$$

Άρα:

$$W_p = 136\ cm^3$$

ε) Εάν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Steiner θα έχουμε:

$$I_{\Delta\Gamma} = I_x + F\cdot\varepsilon^2$$

Είναι: $I_{\Delta\Gamma} = 500\ cm^4 + 60 \cdot 5^2\ cm^4 = 500\ cm^4 + 1500\ cm^4 = 2000\ cm^4$

$$I_{\Delta\Gamma} = 2000\ cm^4$$

Άρα, η ακτίνα αδρανείας της διατομής ως προς τη βάση του ΔΓ θα είναι

$$i_{\Delta\Gamma} = \sqrt{\frac{I_{\Delta\Gamma}}{F}} = \sqrt{\frac{2000}{60}}\ cm = 5,77\,cm$$

Άρα: $i_{\Delta\Gamma} = 5,77\ cm$

3. ΚΥΚΛΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Της παρακάτω κυκλικής διατομής καμπύλες R = 3 cm να βρεθούν:

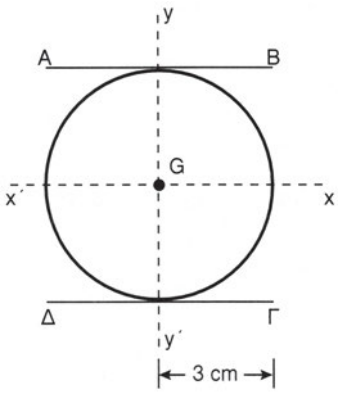
α) Οι ροπές αδρανείας I_x και I_y ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας της

β) Η ροπή αντίστασης W_x ως προς τον άξονα ΑΒ

γ) Η πολική ροή αδρανείας I_p ως προς G

δ) Η πολική ροπή αντίστασης W_p της διατομής αυτής

ε) Η ακτίνα αδρανείας της $i_{ΔΓ}$ ως προς τον άξονα ΔΓ



Λύση

α) Η ροπή αδρανείας της κυκλικής διατομής ως προς τον άξονα x - x´ είναι*

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \qquad \text{όπου } D = 6 \text{ cm}$$

$$I_x = I_y = \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} \text{cm}^4 = 63,585 \text{ cm}^4$$

Άρα:

$$\underline{I_x = 63,585 \text{ cm}^4}$$

* Στο τέλος της άσκησης θα δοθεί συνοπτική απόδειξη του τύπου

β) Η ροπή αντίστασης W_x της διατομής είναι:

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{32} cm^3 = 21,195\ cm^3$$

Άρα: $\underline{W_x = 21,195\ cm^3}$

γ) Η πολική ροπή αδρανείας I_p ως προς κύριους άξονες αδρανείας της διατομής είναι:

$$I_p = I_x + I_y \text{ και άρα } I_p = 2 \cdot 63,585\ cm^4 = 127,17\ cm^4$$

δ) Η πολική ροπή αντίστασης W_p της διατομής αυτής είναι:

$$W_p = \frac{I_p}{\alpha} \quad \text{όπου } \alpha = R = \frac{D}{2}$$

$$W_p = \frac{127,17}{3} cm^3 = 42,39\ cm^3$$

Άρα: $\underline{W_p = 42,39\ cm^3}$

ε) Εάν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Steiner θα έχουμε:

$$I_{\Delta\Gamma} = I_x + F \cdot \varepsilon^3$$

Είναι: $I_{\Delta\Gamma} = 63,585\ cm^4 + 28,26 \cdot 3^2\ cm^4$

όπου $\pi R^2 = 3,14 \cdot 3^2\ cm^2 = 28,26\ cm^2$

$$I_{\Delta\Gamma} = 63,585\ cm^4 + 254,34\ cm^4$$

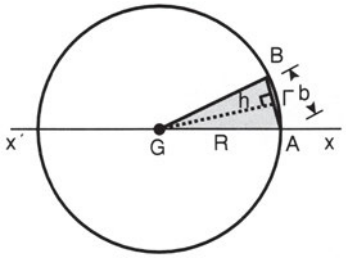
Άρα: $\underline{I_{\Delta\Gamma} = 317,925\ cm^4}$

Άρα, η ακτίνα αδρανείας της διατομής ως προς τον άξονα ΔΓ θα είναι:

$$i_{\Delta\Gamma} = \sqrt{\frac{I_{\Delta\Gamma}}{F}} = \sqrt{\frac{317,925}{28,26}} cm$$

Άρα $\underline{i_{\Delta\Gamma} = 3,354\ cm}$

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα της διατομής, το AGB, από το πλήθος i τέτοιων τριγώνων που απαρτίζουν τη διατομή.



Η ροπή αδρανείας ως προς άξονα x-x΄, όλων αυτών των τριγώνων που διέρχονται από το G, θα είναι η πολική ροπή αδρανείας, και ίση με:

$$I_p = v \cdot \frac{1}{4} \cdot b\, h^3 = \frac{1}{4}(vb)h^3 = \frac{1}{4}\pi D \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^4}{32}$$

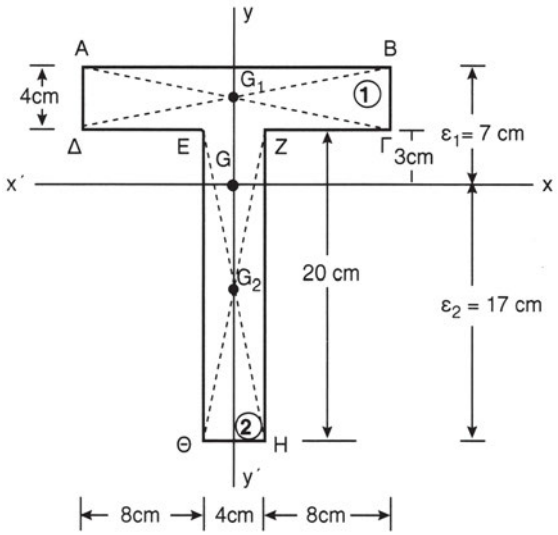
επειδή $I_x = I_y$ έχουμε: $\underline{I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}}$ *

4. ΑΠΛΟ ΤΑΥ

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Του παρακάτω απλού ταυ, να βρεθεί η ροπή αδρανείας του I ως προς τον κύριο άξονα αδρανείας x-x΄

*Σημειώνεται ότι ο τύπος $I = \frac{1}{4} bh^3$ δίδει τη ροπή αδρανείας τριγωνικής διατομής βάσεως b και ύψους h ως προς άξονα που περνά από την κορυφή, την απέναντι από την b και είναι παράλληλος προς την b. Παρατηρείστε ότι για άπειρο πλήθος τέτοιων τριγώνων θα είναι: $vb = \pi D$ οπότε και $h = \frac{D}{2}$.



Λύση

Εδώ παρατηρούμε, ότι η διατομή μας δεν είναι απλή –δεν έχει δηλαδή απλό γεωμετρικό σχήμα όπως προηγούμενα εξετάσαμε το τετράγωνο, το ορθογώνιο, τον κύκλο– αλλά αποτελείται από τμήματα απλών επιφανειών ορθογωνίων, όπως είναι τα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΕ. Η συνολική ροπή αδρανείας της διατομής αυτής του απλού ταυ ως προς άξονα αδρανείας, θα είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδρανείας των δύο αυτών τμημάτων (1) και (2) της διατομής, ως προς τον άξονα. Η συντεταγμένη y_G του κέντρου βάρους της διατομής θα είναι:

$$y_G = \frac{\left(20\cdot 4\cdot 2 + 20\cdot 4\cdot 12\right)\text{cm}^3}{\left(20\cdot 4 + 20\cdot 4\right)\text{cm}^2} = 7\,\text{cm}$$

Άρα, $\underline{y_G = 7\ \text{cm}}$

Από το σχήμα προκύπτουν: $GG_1 = 5$ cm και $GG_2 = 7$ cm. Έχουμε λοιπόν (κάνουμε χρήση του Θ. Steiner):

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + E_1\varepsilon_1^2$$

$$I_1 = \frac{20\cdot 4^3}{12}\,cm^3 + 4\cdot 20\cdot 7\,cm^3 =$$

$$= (106{,}666 + 560)\,cm^3 = 666{,}666\,cm^3$$

$$I_2 = \frac{bh^3}{12} + E_2\varepsilon_2^2$$

$$I_2 = \frac{4\cdot 20^3}{12}\,cm^3 + 4\cdot 20\cdot 17\,cm^3$$

$$I_2 = (2666{,}666 + 1360)\,cm^3 =$$

$$= 4026{,}666\,cm^3$$

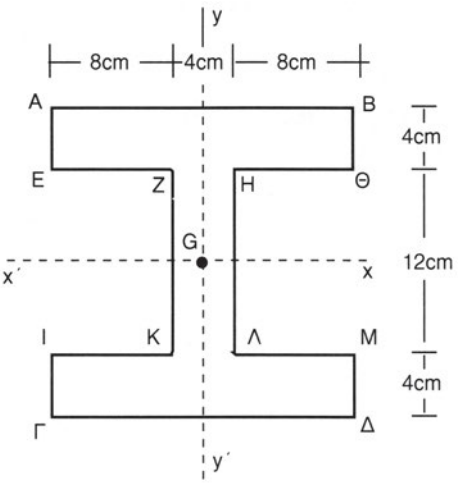
Άρα, η ροπή αδρανείας της σύνθετης αυτής διατομής ως προς τον κύριο άξονα αδρανείας, θα είναι:

$I = I_1 + I_2$ Άρα $\underline{I = 4693{,}332\ cm^3}$

5. ΔΙΠΛΟ ΤΑΥ

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Του παρακάτω διπλού ταυ να βρεθεί η ροπή αδρανείας του I ως προς τον κύριο άξονα αδρανείας x - x΄, καθώς και η ροπή αντίστασης W_y αυτής.



Λύση

Θα παρατηρήσουμε, ότι το διπλό αυτό ταυ, δεν είναι άλλο από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, εάν από αυτό αφαιρέσουμε τα εμβαδά των ορθογωνίων

ΕΖΚΙ και ΗΘΜΛ, οπότε η ροπή αδρανείας του διπλού αυτού ταυ θα ισούται με την ροπή αδρανείας του τετραγώνου ΑΒΓΔ, αφαιρουμένων των ροπών αδρανειών των ορθογωνίων ΕΖΚΙ και ΗΘΜΛ.

Άρα: $$I_I = I_{ABΓΔ} - I_{EZKI} - I_{HΘMΛ} \quad (1)$$

Είναι:

$$I_{ABΓΔ} = \frac{20 \cdot 20^3}{12} = 13333{,}33\,cm^4$$

$$I_{EZKI} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152\,cm^4$$

$$I_{HΘMΛ} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152\,cm^4$$

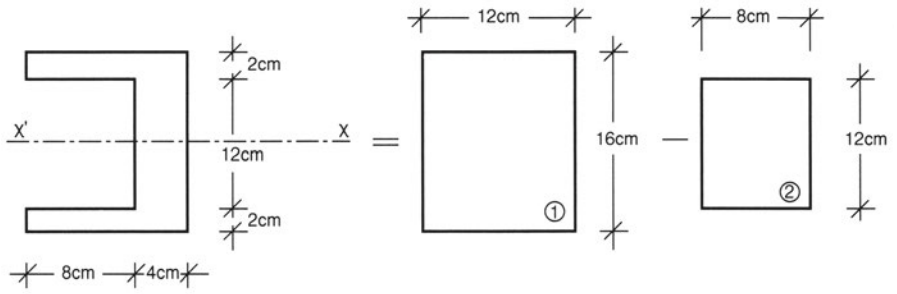
΄Αρα η (1) δίδει: $\underline{I_I = 11029{,}33\ cm^4}$

Η ροπή αντίστασης W_y της διατομής θα είναι:

$$W_y = \frac{I_y}{y} = \frac{11029{,}33\,cm^3}{10} = 1102{,}933\,cm^3$$

Άρα: $\underline{W_y = 1102{,}933\ cm^3}$

Ανάλογα βρείτε τη ροπή αδρανείας της διατομής του παρακάτω σχήματος ως προς άξονα x - x΄



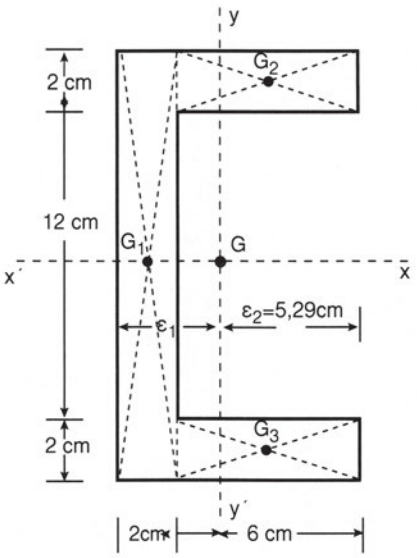
Θεωρώντας τη διατομή αυτή ως διαφορά της (2) από την (1) βρείτε ότι:

$\underline{I_1 = 4096\ cm^4}$ και $\underline{I_2 = 1152\ cm^4}$

6. ΔΙΑΤΟΜΗ

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Της παρακάτω διατομής, να βρεθεί η ροπή αδρανείας της ως προς τους άξονες x-x΄ και y-y΄, καθώς και οι ροπές αντίστασης αυτής.



Λύση

Θα υπολογίσουμε την απόσταση ε_1. Έχουμε:

$$\varepsilon_1 = \frac{32\cdot 1 + 12\cdot 5 + 12\cdot 5}{32 + 12 + 12}\ \text{cm}$$

$$\underline{\varepsilon_1 = 2{,}71\ \text{cm}}$$

Άρα $$I_x = \left(\frac{8\cdot 16^3}{12} - \frac{6\cdot 12^3}{12} \right) \text{cm}^4$$

$$\underline{I_x = 1866{,}7\ \text{cm}^4}$$

και $$I_y = \left(\frac{16\cdot 8^3}{12} - \frac{12\cdot 6^3}{12} \right) \text{cm}^4$$

$$I_y = 466,7\ cm^4$$

Για τις ροπές αντίστασης W_x , W_{y1}, W_{y2}, έχουμε:

$$W_x = \left(\frac{8 \cdot 16^2}{6} - \frac{6 \cdot 12^2}{6} \right) cm^3 = 197,4\, cm^3 \qquad W_x = 197,4\ cm^3$$

$$W_{y_1} = \frac{466,7}{2,71} cm^3 = 172,2\, cm^3 \quad \text{και} \quad W_{y_2} = \frac{466,7}{5,29} cm^3 = 88,22\ cm^3$$

Άρα: $W_{y_1} = 172,2\ cm^3$ και $W_{y_2} = 88,22\ cm^3$

7. ΚΟΙΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

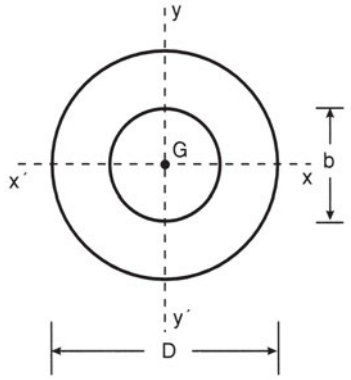
❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Της κοίλης κυκλικής διατομής με D = 8 cm και d = 4 cm, να βρεθούν:

α) Οι ροπές αδρανείας I_x και I_y ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας της.

β) Οι ροπές αντίστασης W_x και W_y αυτής

γ) Οι ακτίνες αδρανείας i_x και i_y αυτής



Λύση

α) Στο παράδειγμα που αναφερόμασταν για κυκλική διατομή αποδείξαμε ότι:

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

Εδώ, για την κοίλη κυκλική διατομή είναι προφανές ότι θα έχουμε:

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$

και για D = 8 cm και d = 4 cm, θα έχουμε:

$$I_x = I_y = \frac{3,14}{64}\left(8^4 - 4^4\right)cm^4 = 188,4\ cm^4$$

Άρα: $\underline{I_x = I_y = 188,4\ cm^4}$

β) Ανάλογα θα έχουμε:

$$W_x = W_y = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = 376,8\,cm^3$$

Άρα: $\underline{W_x = W_y = 376,8\ cm^3}$

γ) Για τις ακτίνες αδρανείας i_x και i_y θα έχουμε:

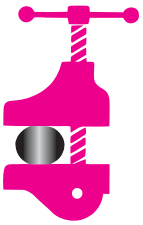
$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)}{\frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(D^2 + d^2\right)\left(D^2 - d^2\right)}{D^2 - d^2}}$$

$$\left(\text{αφού } F = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\right)$$

Είναι $$i_x = i_y = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2}$$

$$i_x = i_y = \frac{1}{4}\sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{5}\ cm$$

Άρα $\underline{i_x = i_y = 2,24\ cm}$



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΒΔΟΜΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Η ροπή αδρανείας, είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος της **δυσκαμψίας** μιας καμπτόμενης κατασκευής.
  Όσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδρανείας της διατομής ως προς τον άξονα, τόσο πιο μεγάλη είναι και η αντίσταση της διατομής.
  Ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες των διαφόρων διατομών από τους **πίνακες** μπορούμε να βρούμε τις ροπές αδρανείας.

- Για σύνθετες διατομές, χρήσιμο είναι το **Θ. Steiner**, που μας παρέχει τη ροπή αδρανείας της διατομής ως προς τον άξονα που απέχει από τον κεντροβαρικό άξονα, απόσταση ε. Ο τύπος του θεωρήματος είναι:

$$I_\varepsilon = I_G + F \cdot \varepsilon^2$$

  όπου F η επιφάνεια της διατομής.

- Το πηλίκο της ροπής αδρανείας I_α της διατομής ως προς άξονα δια της αποστάσεως α του άξονα αυτού από το πλέον απομακρυσμένο σημείο του τμήματος της διατομής ονομάζουμε **ροπή αντίστασης W_α** και είναι:

$$W_\alpha = \frac{I_\alpha}{\alpha}$$

- Το άθροισμα των ροπών αδρανείας της διατομής I_p ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας της διατομής ονομάζουμε **πολική ροπή αδρανείας I_ρ** της διατομής και είναι $I_p = I_x + I_y$.

- Το πηλίκο της πολικής ροής αδρανείας I_p της διατομής δια της αποστάσεως α των πλέον απομακρυσμένων σημείων της από το κέντρο βάρους αυτής, ονομάζουμε **πολική ροπή αντίστασης W_p** και είναι:

$$W_p = \frac{I_p}{\alpha}$$

- Την τετραγωνική ρίζα της ροπής αδράνειας I_x της διατομής δια της επιφανείας F της διατομής αυτής, ονομάζουμε **ακτίνα αδρανείας i** της διατομής.

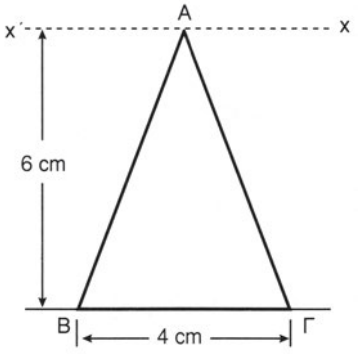
Χρήσιμες είναι οι εφαρμογές αυτών των εννοιών σε απλές και σύνθετες διατομές στα κεφάλαια της κάμψης και της στρέψης που θα γνωρίσουμε αργότερα. Σε διατομές με διαφορετικά σχήματα το μέγεθος των ροπών αδρανείας και αντίστασης ως προς ένα από τους δύο άξονες συμμετρίας είναι μεγαλύτερο. Γι' αυτό, κατά την τοποθέτηση των δοκών –όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο– πρέπει να εξασφαλίζουμε από το σχήμα της διατομής, τα μεγαλύτερα δυνατά πλεονεκτήματα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τριγωνικής ισοσκελούς διατομής, με πλευρά b και ύψος h να βρείτε τη ροπή αδρανείας της ως προς άξονα που περνάει από την κορυφή Α. Εφαρμογή: b = 4 cm και h = 6 cm (σχ. 1).

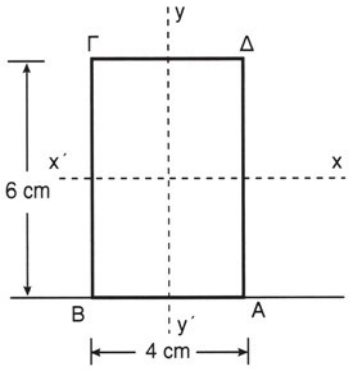
(Λάβετε υπ' όψη ότι $I_G=\frac{bh^3}{36}$ και το Θ. Steiner)



Απάντηση: $I_{x\text{-}x'}=\frac{bh^3}{4}$ (216 cm^4)

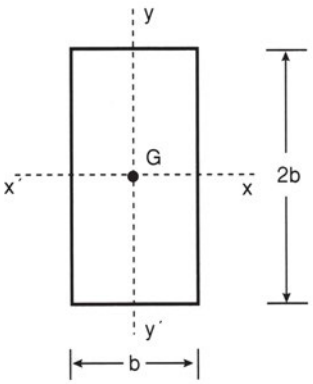
2. Δίδεται ορθογωνική διατομή διαστάσεων b = 4 cm, h = 6 cm. Να βρείτε την ακτίνα αδρανείας της διατομής αυτής ως προς τη βάση της.

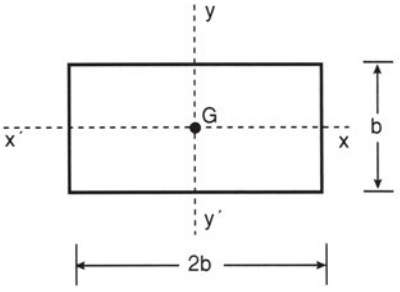
(Λάβετε υπ' όψη ότι: $I_x=\frac{bh^3}{12}$ και το Θ. Steiner)



Απάντηση: $i_{AB} = \sqrt{\frac{288}{24}}$ cm = 3,46 cm

3. Δίδονται δύο ορθογωνικές διατομές σταθερού εμβαδού $2b^2$. Βρείτε ποια από τις δύο διατομές είναι η πιο σταθερή ως προς άξονα x-x΄ και ποια είναι η πιο σταθερή ως προς άξονα y-y΄.



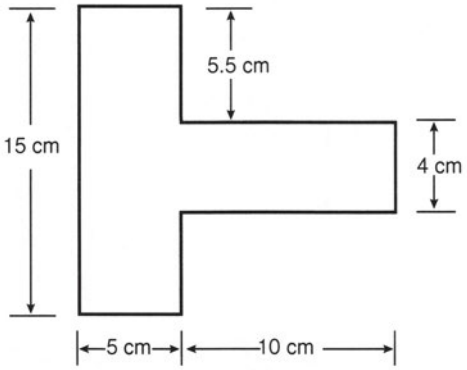


Απάντηση: Η πρώτη διατομή είναι η πιο σταθερή (;) ως προς x-x΄ και η δεύτερη είναι η πιο σταθερή ως προς άξονα y-y΄.

4. Ορθογωνικής διατομής διαστάσεων b = 4 cm και h = 6 cm, βρείτε την πολική ροπή αδρανείας της.

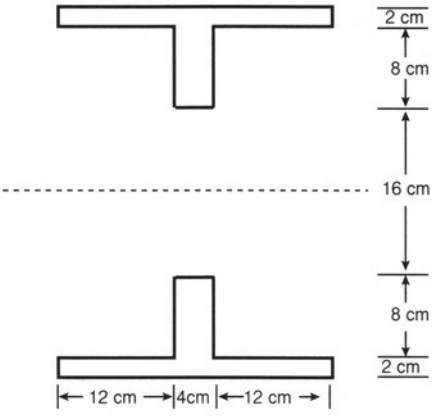
Απάντηση: 104 cm^4

5. Βρείτε τις ροπές αδρανείας I_x, I_y της διατομής:



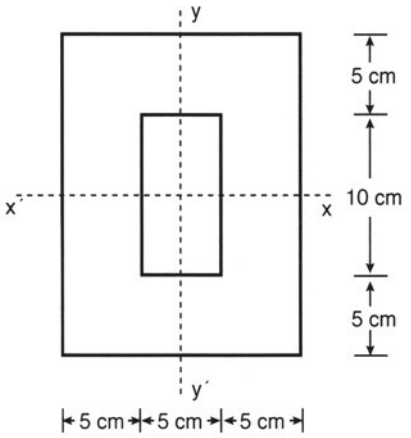
Απάντηση: $I_x = 1459{,}58\ cm^4$, $I_y = 4958{,}33\ cm^4$

6. Δίδεται διατομή διπλού ταυ με εγκοπή. Βρείτε τη ροπή αδρανείας και τη ροπή αντίστασης της διατομής αυτής.



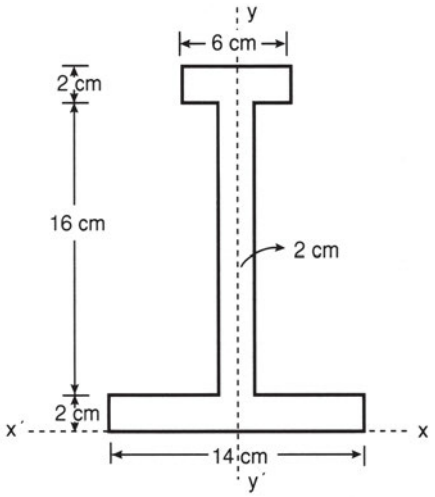
Απάντηση: $I_x = 41962{,}7\ cm^4$, $W_x = 2331{,}26\ cm^3$

7. Βρείτε τη ροπή αδρανείας της κοίλης διατομής ως προς τους άξονες x-x΄ και y-y΄.



Απάντηση: $I_x = 9583{,}34\ cm^4$, $I_y = 5520{,}83\ cm^4$

8. Δίδεται αμφιαρθρωτός στύλος, σύνθετης διατομής.



Να βρεθεί:

α) η θέση του ΚΒ της διατομής

β) η ροπή αδρανείας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα y-y΄

γ) η ακτίνα αδρανείας $i_{y\text{-}y'}$.

Απάντηση: ($y_G = 8$ cm, $I_{y\text{-}y'}=504\ cm^4$, $i_{y\text{-}y'}= 2{,}6$ cm)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ **8**

ΦΟΡΕΙΣ - ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ - ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ

8.1 Φορείς. Στοιχεία μιας κατασκευής

8.2 Είδη στηρίξεων δοκών

8.3 Υπολογισμός αντιδράσεων δοκών (αναλυτικός)

8.4 Ασκήσεις

8.5 Αρχή της ισοδυναμίας μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων

8.6 Επίλυση δοκών. Διαγράμματα [M], [Q], [N]



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού, είναι οι μαθητές:

- Να διακρίνουν τους διαφόρους (ισοστατικούς) φορείς, τις φορτίσεις, τις στηρίξεις και τη σχηματική τους σχεδίαση με απλά κατανοητά παραδείγματα.
- Να υπολογίζουν –κάνοντας χρήση των τριών συνθηκών ισορροπίας– τις αντιδράσεις στήριξης σε μια αμφιέρειστη δοκό, σε μονοπροέχουσα δοκό, σε αμφιπροέχουσα δοκό κ.λπ.
- Να κατανοήσουν την αρχή της ισοδυναμίας μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων σε δοκό που φορτίζεται και να μπορούν να υπολογίζουν σε μια τυχούσα θέση της δοκού τα εντατικά μεγέθη [M], [Q], [N].

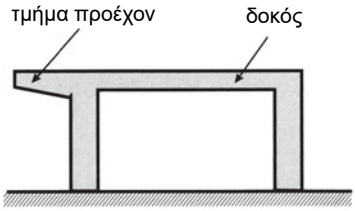
Επίσης η κατανόηση των διαγραμμάτων αυτών θα δώσει τη δυνατότητα στους μαθητές να εφαρμόζουν τα πιο πάνω στο σπουδαίο κεφάλαιο της κάμψης.

8. ΦΟΡΕΙΣ - ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ - ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ - ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ

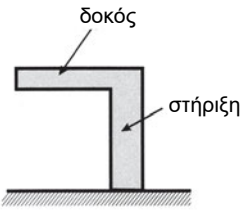
8.1 Φορείς. Στοιχεία μιας κατασκευής

Μιας κατασκευής (από οπλισμένο σκυρόδεμα –από σίδερο– από ξύλο κ.λπ.), τα στοιχεία της, όπως: α) η **ράβδος**, β) η **δοκός**, γ) ο **δίσκος**, δ) η **πλάκα**, ε) το **κέλυφος**, δέχονται τις εξωτερικές δυνάμεις, τα φορτία. Αυτά μεταβιβάζονται στην κατασκευή και ακολούθως μεταβιβάζονται στο έδαφος δηλαδή στις **στηρίξεις**, που οφείλουν να κρατούν αμετακίνητη την κατασκευή.

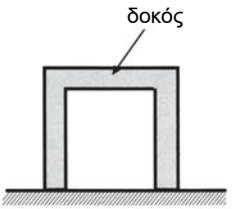
Ένα τέτοιο δομικό στοιχείο της κατασκευής που αναλαμβάνει κυρίως κάθετες δυνάμεις πάνω στον άξονά της και της οποίας το μήκος είναι πολύ μεγάλο σε σύγκριση με τις άλλες της διαστάσεις, είναι η **δοκός**, η οποία και αυτή στη συνέχεια καταπονείται σύνθετα. Π.χ. η γέφυρα, ο άξονας ενός αυτοκινήτου είναι δοκός.



Σχήμα 8.1α *Δοκός*



Σχήμα 8.1β *Δοκός*



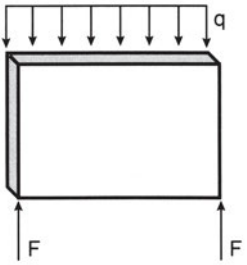
Σχήμα 8.1γ *Δοκός*

Η **ράβδος** αναλαμβάνει δυνάμεις εφελκυσμού ή θλίψης, μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονά της.



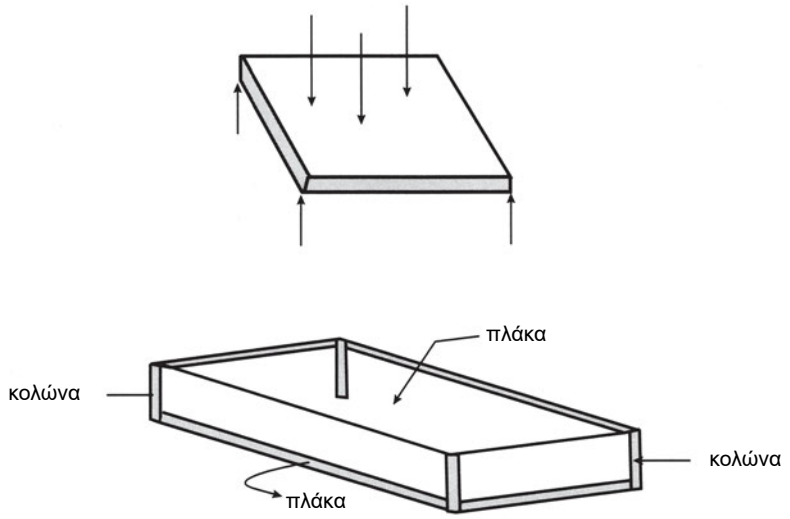
Σχήμα 8.1δ *Ράβδος*

Ο **δίσκος**, και τέτοιος είναι ο τοίχος μιας οικοδομής, αναλαμβάνει δυνάμεις που βρίσκονται στο μέσο επίπεδό τους με πάχος πολύ μικρό, σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις τους.



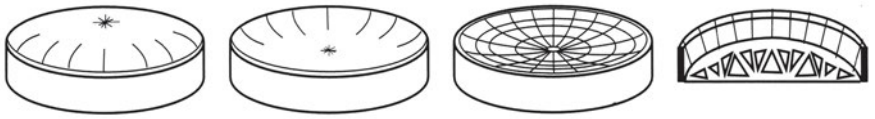
Σχήμα 8.1ε *Δίσκος*

Η **πλάκα** και τέτοια είναι το δάπεδο μιας οικοδομής, αναλαμβάνει δυνάμεις κάθετα προς το επίπεδό της. Και εδώ το πάχος, σε σχέση με τις άλλες της διαστάσεις, είναι μικρό.



Σχήμα 8.1στ *Πλάκα*

Το **κέλυφος** και τέτοιο είναι ένας τρούλος μιας εκκλησίας, ένα βιομηχανικό ή αεροπορικό υπόστεγο, δηλαδή ένας μικρού πάχους καμπύλος φορέας αναλαμβάνει δυνάμεις και τις μεταβιβάζει στις στηρίξεις.

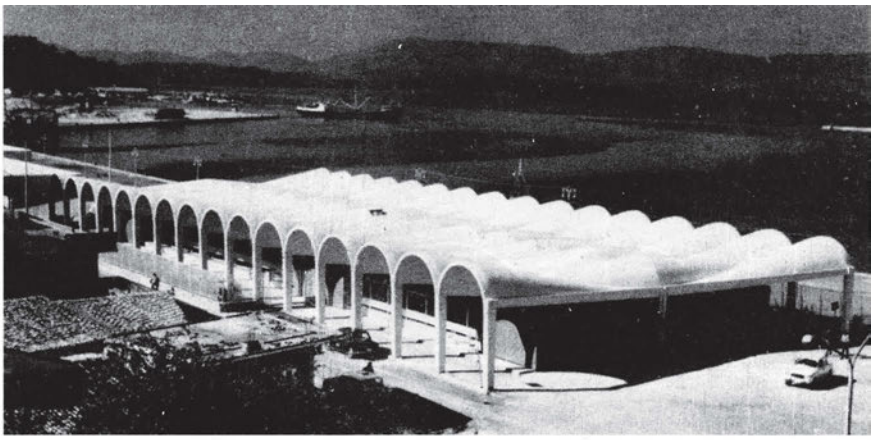


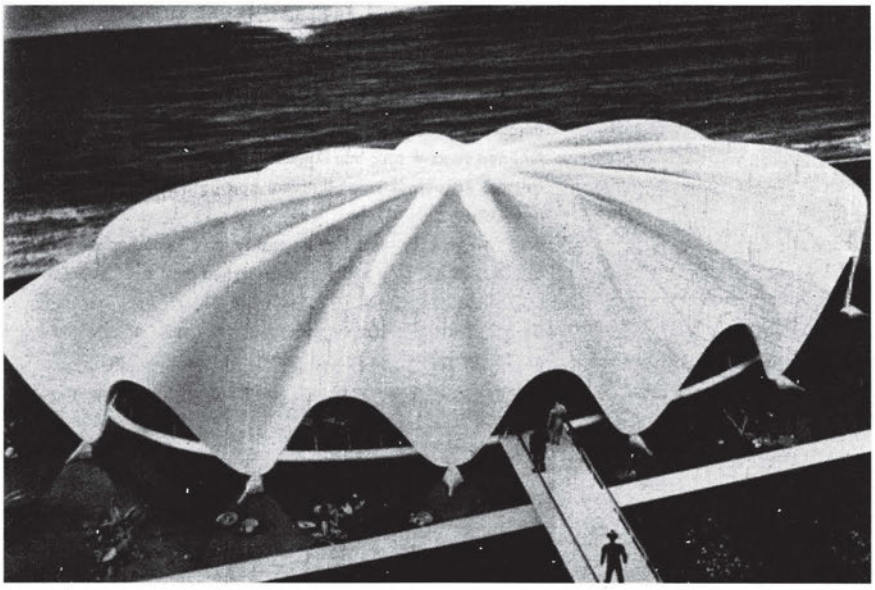
Σχήμα 8.1ζ *Κελύφη*

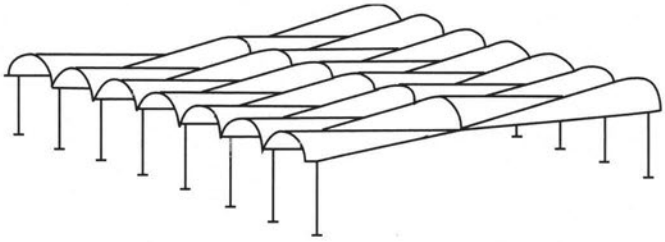
Ας επανέλθουμε όμως στη δοκό, που δεν επιτρέπεται να μετακινείται (στο επίπεδό της). Άρα θα πρέπει η έδρασή της να γίνεται σε σημεία σταθερά που να την διατηρούν αμετάθετη (αμετακίνητη).

Δηλαδή σε ποιες **στηρίξεις** θα αναφερθούμε, έτσι ώστε να δεσμεύσουμε τους φορείς, που αναφέρουμε πιο πάνω, να μετακινηθούν οριζόντια, κατακόρυφα και να στραφούν. Υπό την επίδραση των φορτίων, η δοκός μεταβιβάζει αυτά τα φορτία στις στηρίξεις, με αποτέλεσμα στις θέσεις των στηρίξεων αυτών να εκδηλώνονται (να αναπτύσσονται) αντιδράσεις οι καλούμενες «αντιδράσεις στηρίξεως»*.

* Οι φορτίσεις, το πώς μεταβιβάζονται μέσα από τη δοκό προς τις στηρίξεις σε κάθε θέση της δοκού, τι δυνάμεις αναπτύσσονται, όλα αυτά θα τα εξετάσουμε αναλυτικά παρακάτω.







Σχήμα 8.1η *Κελυφωτά στέγαστρα*

Μιλήσαμε στα πρώτα μαθήματα για τις τρεις συνθήκες ισορροπίας ενός σώματος. Αυτών των εξισώσεων θα κάνουμε χρήση για να δεσμεύσουμε τους τρεις βαθμούς ελευθερίας της δοκού και να μην μετακινηθεί. Πάντα θέλουμε οι φορείς να παραμένουν **αμετάθετοι**.

8.2 ΕΙΔΗ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ ΤΩΝ ΔΟΚΩΝ

Τα είδη στηρίξεως των δοκών είναι τρία:

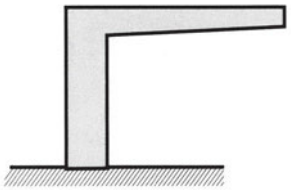
α) η **πάκτωση**, β) η **άρθρωση**, γ) η **κύλιση**

● Στην **πάκτωση** εμφανίζονται **τρεις** αντιδράσεις:

1. Η **οριζόντια αντίδραση Ax**, 2. Η **κατακόρυφη αντίδραση Ay** και 3. Η **ροπή πάκτωσης $M_π$**. Αυτό το είδος της στήριξης δεν επιτρέπει στη δοκό να μετακινηθεί, ούτε να αποχωρισθεί ούτε και την στροφή στο σημείο στηρίξεως.



Σχήμα 8.2α *Πάκτωση*

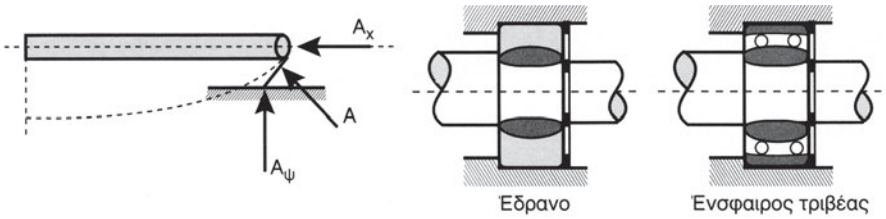


Σχήμα 8.2β *Πάκτωση*

● Στην **άρθρωση** εμφανίζονται δύο αντιδράσεις στήριξης:

1. Η **οριζόντια αντίδραση Ax** και 2. Η **κατακόρυφη αντίδραση Ay**.

Αυτό το είδος της στήριξης, δεν επιτρέπει στη δοκό μας να μετακινηθεί και ούτε να αποχωριστεί˙ επιτρέπει όμως στροφή γύρω από το σημείο στήριξής της.

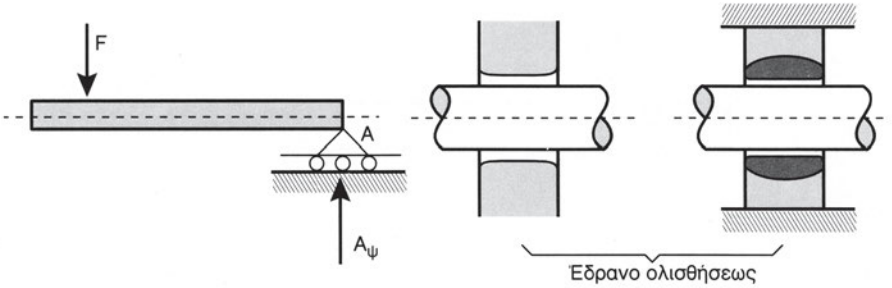


Σχήμα 8.2γ *Άρθρωση*

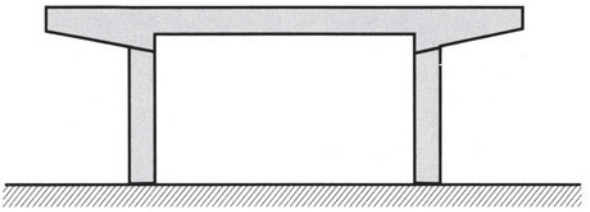
Ανάλογα με τη θέση της δοκού, έχουμε μια δέσμη αντιδράσεων A_i.

● Στην **κύλιση** εμφανίζεται μια αντίδραση στήριξης, **κάθετη στο επίπεδο στήριξής της, η Αy.**

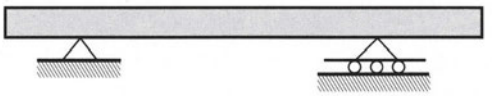
Αυτό το είδος της στήριξης επιτρέπει στη δοκό μας να αποχωρισθεί κάθετα προς τη διεύθυνση της κύλισης.



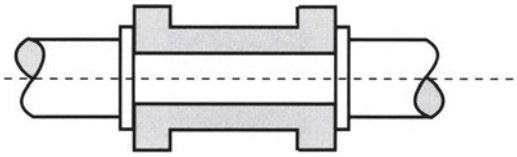
Σχήμα 8.2δ *Κύλιση*



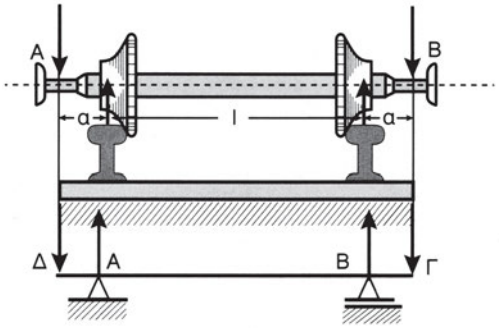
Σχήμα 8.2ε *Άρθρωση – κύλιση*



Σχήμα 8.2στ *Άρθρωση - κύλιση*



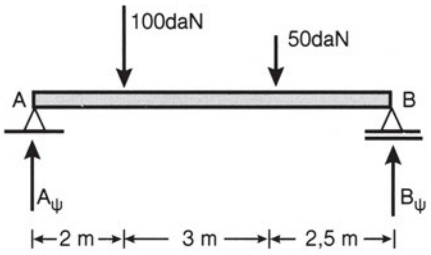
Σχήμα 8.2ζ *Πάκτωση – Στήριξη άξονος μηχανής*



Σχήμα 8.2η *Άρθρωση - Κύλιση*

8.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΔΟΚΩΝ (ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ)

1. ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ



Σχήμα 8.3α *Αμφιέρειστη δοκός*

Λύση

Από τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F_ψ = 0$ έχουμε:

$$A_ψ + B_ψ = (100 + 50)\ daN = 150\ daN$$

Από την τρίτη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma M_F^A = 0$ έχουμε:

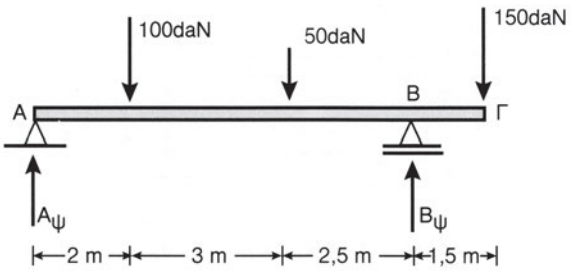
$$(100\cdot 2 + 50\cdot 5 - B_\psi \cdot 7{,}5)\ \text{daNm} = 0$$

Άρα: $$B_\psi = \frac{200+250}{7{,}5}\cdot\frac{\text{daN}\cdot\text{m}}{\text{m}} = 60\,\text{daN}$$

Ώστε: $\underline{A_\psi = 90\ \text{daN},}$ $\underline{B_\psi = 60\ \text{daN}}$

Να βρείτε τη ροπή κάμψεως M_μ στο μέσον της δοκού.

2. ΜΟΝΟΠΡΟΕΧΟΥΣΑΣ ΔΟΚΟΥ



Σχήμα 8.3β *Μονοπροέχουσα δοκός*

Λύση

Από τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F_\psi = 0$, έχουμε:

$$A_\psi + B_\psi = 300\ \text{daN}$$

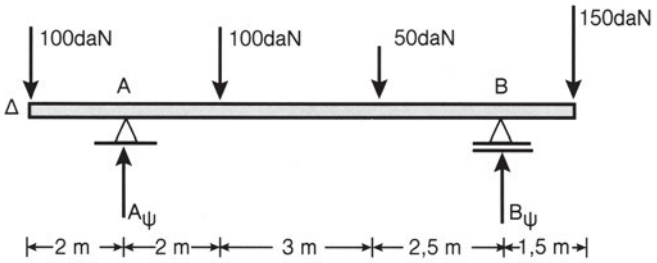
Από την τρίτη συνθήκη ισορροπίας $\underline{\Sigma M^{A}_{F} = 0}$, έχουμε:

$$(100\cdot 2 + 50\cdot 5 - 7{,}5\,B_\psi + 150\cdot 9)\ \text{daNm} = 0$$

Άρα $$B_\psi = \frac{200+250+1350}{7{,}5}\cdot\frac{\text{daN}\cdot\text{m}}{\text{m}} = 240\,\text{daN}$$

Ώστε: $\underline{A_\psi = 60\ \text{daN},}$ $\underline{B_\psi = 240\ \text{daN}}$

3. ΑΜΦΙΠΡΟΕΧΟΥΣΑΣ ΔΟΚΟΥ



Σχήμα 8.3γ *Αμφιπροέχουσα δοκός*

Λύση

Εργαζόμενοι όπως προηγούμενα έχουμε:

$$\Sigma F_\psi = 0 \Rightarrow A_\psi + B_\psi = 400 \text{ daN}$$

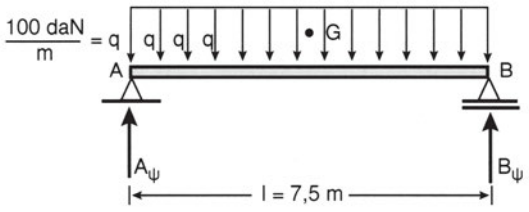
$$\Sigma M_F^A = 0 \Rightarrow (-100 \cdot 2 + 100 \cdot 2 + 50 \cdot 5 - B_\psi \cdot 7{,}5 + 150 \cdot 9)\ \text{daN} \cdot \text{m} = 0$$

Άρα $$B_\psi = \frac{250 + 1350}{7{,}5} \cdot \frac{\text{daN} \cdot \text{m}}{\text{m}} = 213{,}3\,\text{daN}$$

Ώστε $$A_\psi = 186{,}7 \text{ daN}, \qquad B_\psi = 213{,}3 \text{ daN}$$

4. ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΣΥΝΕΧΗ ΦΟΡΤΙΣΗ (ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ)

Ας αναφέρουμε μερικά δεδομένα, για το τι σημαίνει ομοιόμορφο φορτίο q = 100 daN/m. Το φορτίο αυτό είναι **συνεχές, κατανεμημένο ομοιόμορφα** και ενεργεί σε κάθε μέτρο της δοκού.



Σχήμα 8.3δ *Αμφιέρειστη δοκός*

Το παριστάνουμε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, με ένα ορθογώνιο που έχει σαν βάση το μήκος l = 7,5 m της δοκού και ύψος την τιμή του φορτίου

q ανά μονάδα μήκους (ανά μέτρο), με βάση μια κλίμακα δυνάμεων. Έτσι, το **ολικό φορτίο** θα είναι

$$q \cdot l = 100 \frac{daN}{m} \cdot 7{,}5\ m = 750\ daN,$$

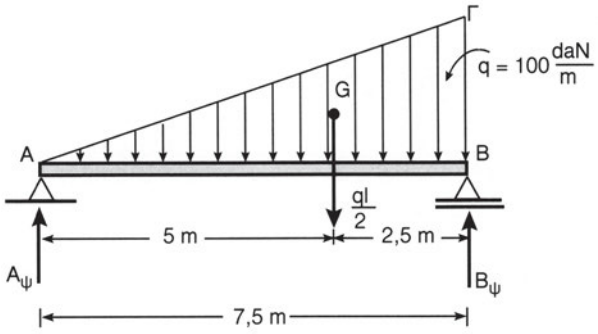
και άρα από την $\Sigma F_\psi = 0$ έχουμε:

$$A_\psi = B_\psi = \frac{750}{2} daN = 375 daN$$

Άρα $\underline{A_\psi = B_\psi = 375\ daN}$

Να βρείτε τη ροπή κάμψεως M_μ στο μέσον της δοκού.

5. ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ



Σχήμα 8.3ε *Αμφιέρειστη δοκός*

Αν η ακραία τιμή του φορτίου στη στήριξη (κύλιση), είναι $q = 100 \frac{daN}{m}$ τότε η συνισταμένη του φορτίου αυτού θα είναι ίση με το εμβαδόν της τριγωνικής επιφανείας φόρτισης, θα είναι δηλαδή ίση με:

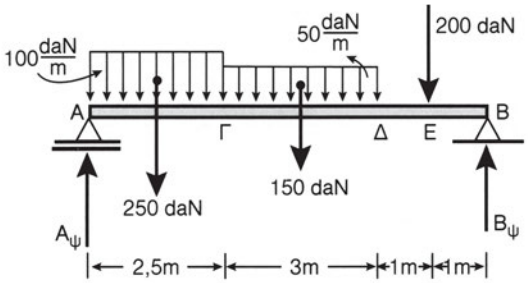
$$\frac{ql}{2} = \frac{100 \cdot 7{,}5}{2} daN = 375 daN$$

και άρα: $A_\psi + B_\psi = 375\ daN \qquad 375 \cdot 5 - B_\psi \cdot 7{,}5 = 0$

Άρα: $\underline{B_\psi = 250\ daN}$ και $\underline{A_\psi = 125\ daN}$

Να βρείτε τη ροπή κάμψεως M_μ στο μέσον της δοκού.

6. ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΑ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΦΟΡΤΙΑ



Σχήμα 8.3στ *Αμφιέρειστη δοκός*

Έχουμε: $A_\psi + B_\psi = (250 + 150 + 200)\ daN$

$$A_\psi + B_\psi = 600\ daN$$

$$\Sigma M_F^A = 0 \Rightarrow (250 \cdot 1{,}25 + 150 \cdot 4 + 200 \cdot 6{,}5 - B_\psi \cdot 7{,}5)\ daN = 0$$

Ώστε: $(312{,}5 + 600 + 1300)\ daN = 7{,}5B_\psi$

Άρα: $B_\psi = 295\ daN$ και $A_\psi = 305\ daN$

Να βρείτε τη ροπή κάμψεως M_μ στο μέσον της δοκού.

8.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

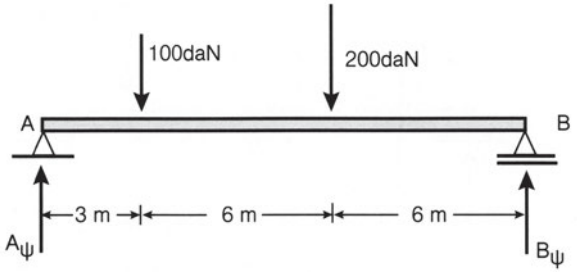
1. Σε μια τομή τ – τ μιας δοκού έχουμε:

1. N = Q = 0, M≠0
2. N = M = 0, Q≠0
3. Q = M = 0, N≠0

Να εξάγετε τα ανάλογα συμπεράσματα για κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις.

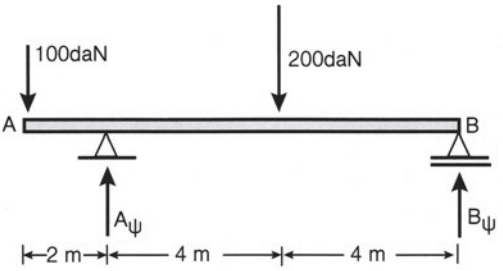
2. Να βρεθούν οι αντιδράσεις στηρίξεων των παρακάτω φορέων.

α)



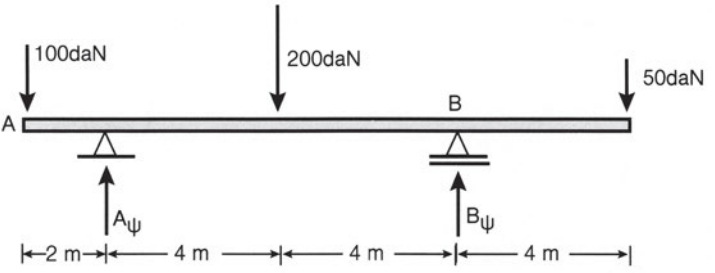
(*Απάντηση:* $A_x = 160$ daN, $B_y = 140$ daN)

β)



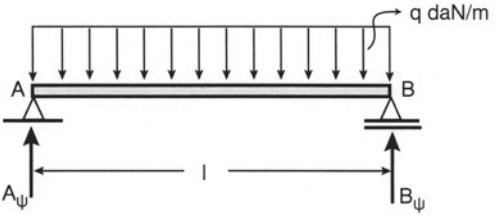
(*Απάντηση:* $A_x = 225$ daN, $B_\psi = 75$ daN)

γ)



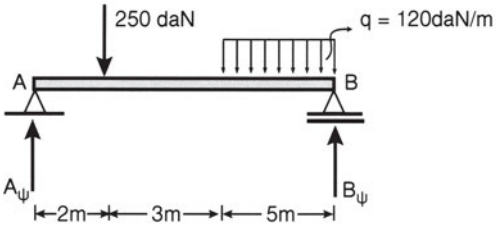
(*Απάντηση:* $A_x = 200$ daN, $B_\psi = 150$ daN)

δ)



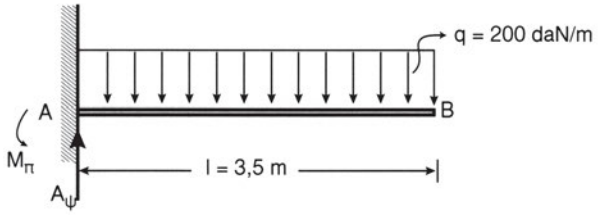
(Απάντηση: $B_\psi = A_y = \frac{ql}{2}$, $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$)

ε)



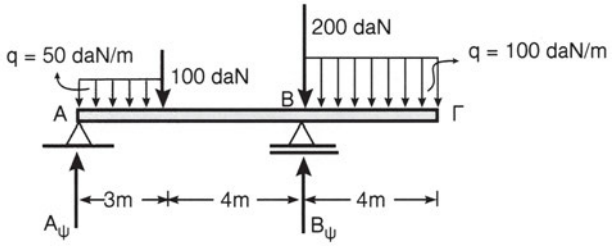
(*Απάντηση:* $A_ψ$ = 350 daN, $B_ψ$ = 500 daN)

στ)



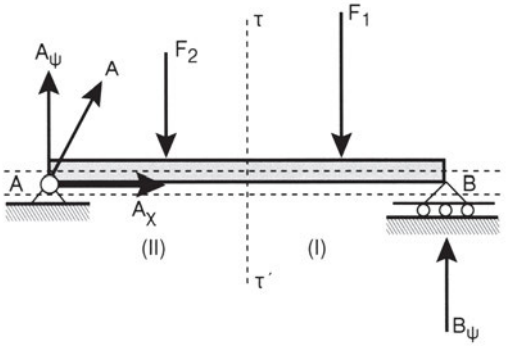
(*Απάντηση:* $A_ψ$ = 700 daN, $M_π$ = 1225 daN · m)

ζ)



(*Απάντηση:* A_y = 60,71 daN, $B_ψ$ = 789,29 daN)

8.5 ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ



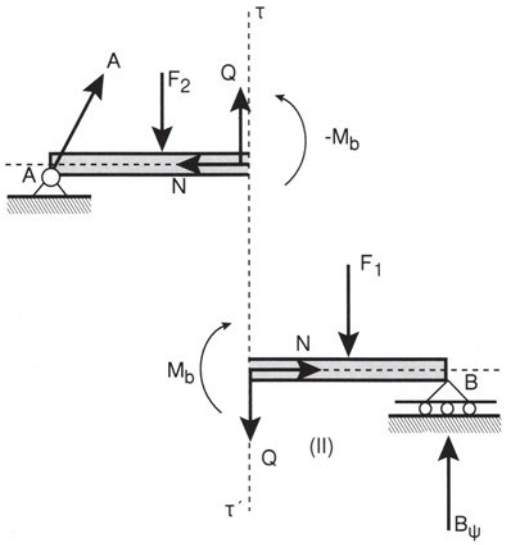
Σχήμα 8.5α *Δοκός σταθερής διατομής*

Έστω η δοκός ΑΒ σταθερής διατομής (σχ. 8.5α), ευθύγραμμη και τ-τ μια τομή της –όπως φαίνεται στο σχήμα– δεχόμενη την επίδραση των δυνάμεων F_1 και F_2.

Για να ισορροπεί η ράβδος, θα πρέπει να έχουμε:

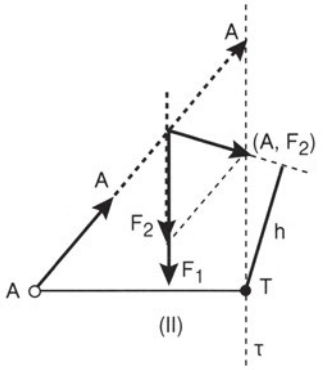
$$(A_x, A_\psi, F_2) + (B_\psi, F_1) = 0$$

Πάνω στο τμήμα (ΙΙ) της δοκού ενεργούν εκτός από τις: Α, F_2 και άλλες δυνάμεις που προέρχονται από το τμήμα (Ι) της δοκού και εμφανίζονται εφαρμοσμένες στα σημεία της τομής τ – τ΄ (σχ. 8.5.β).



Σχήμα 8.5β *Τομή τ - τ της δοκού*

Στο σχ. 8.5γ επειδή το τμήμα ΙΙ βρίσκεται σε ισορροπία, πριν να γίνει η τομή τ - τ, το τμήμα Ι ασκούσε πάνω στο ΙΙ δυνάμεις αντίθετες.



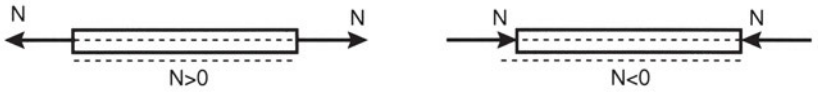
Σχήμα 8.5γ *Τομή τ-τ της δοκού*

Οι δυνάμεις που ενεργούν στο τμήμα (ΙΙ) της τομής συντίθεται στην (A , F_2) μετατοπίζοντάς την παράλληλα προς τον φορέα της (σχ. 8.5γ) ώστε να περάσει από το Τ και προσθέτουμε τη ροπή $M_b = (A, F_2)\cdot h$ καλείται καμπτική ροπή. Η (A , F_2) είναι προφανές ότι αναλύεται στην Ν (**αξονική δύναμη**) και στην Q (**διατμητική δύναμη**). Η ροπή $M_b = (A, F_2)\cdot h$ καλείται **καμπτική ροπή**.

Εφαρμόζοντας τις τρεις γνωστές μας ήδη συνθήκες ισορροπίας σε κάθε τμήμα της δοκού ΑΒ, το σύστημα όλων των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων βρίσκεται σε ισορροπία και άρα μας δίνουν την M_b και τις Ν και Q.

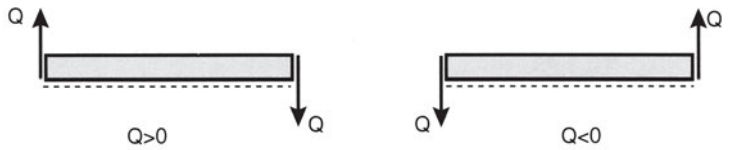
Ας δούμε όμως μία προς μία τις παραπάνω εσωτερικές δυνάμεις.

i) Η Ν είναι θετική, **N>0**, όταν η **αξονική δύναμη εφελκύει τη διατομή**, ενώ η Ν είναι αρνητική, **N<0**, όταν η **αξονική δύναμη θλίβει τη διατομή**.



Σχήμα 8.5δ *Σήμανση της Ν*

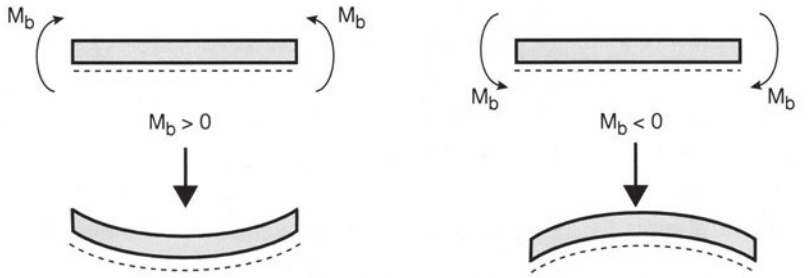
ii) Η Q είναι θετική, **Q>0,** για **δεξιόστροφη ροπή** και **Q<0**, για **αριστερόστροφη ροπή**



Σχήμα 8.5ε *Σήμανση της Q*

iii) Η M_b είναι θετική, $\mathbf{M_b>0}$, όταν η **καμπτική ροπή αναγκάζει το θετικό σύνορο της δοκού να το εφελκύσει** και

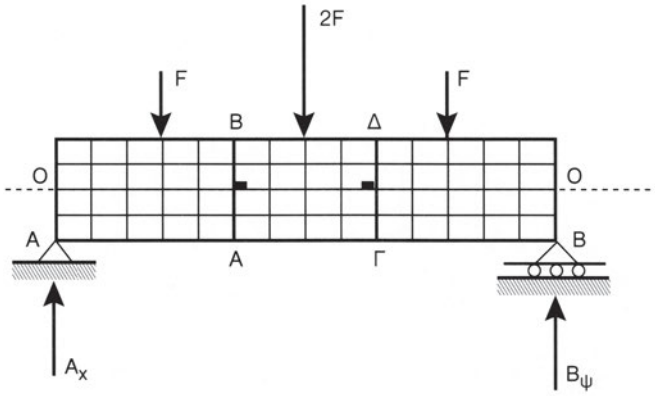
$\mathbf{M_b<0}$, όταν η καμπτική ροπή αναγκάζει το θετικό σύνορο της δοκού να το θλίψει.



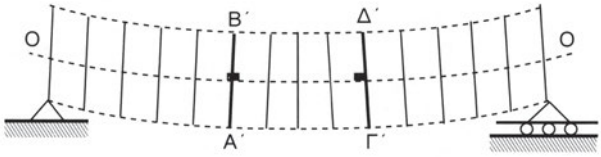
Σχήμα 8.5στ *Σήμανση της M*

Για μια ορθογωνική διατομή μιας δοκού που δέχεται φορτία, επακόλουθο είναι η δοκός να καμφθεί. Έτσι λοιπόν, η κάτω ακμή εφελκύεται, ενώ η άνω ακμή θλίβεται· δηλαδή οι δυο περιοχές (I) και (II) της δοκού εμφανίζουν εφελκυστικές και θληπτικές τάσεις.

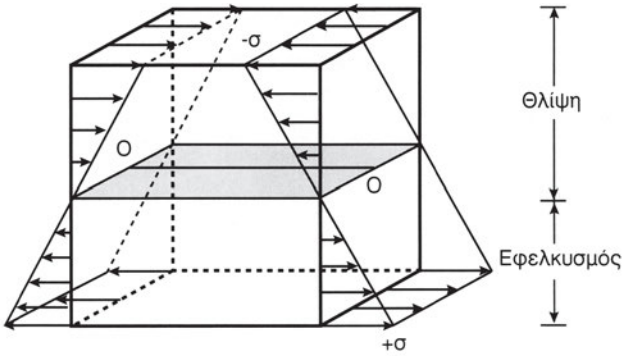
Ο άξονας 0-0 παρουσιάζει μια ιδιαίτερη σημασία. Κατά μήκος αυτού του άξονα οι ίνες της διατομής, κατά τη φόρτιση, δεν δέχονται καμιά παραμόρφωση (**ουδέτερος άξονας της διατομής**).



Σχήμα 8.5ζ *Κάμψη της δοκού. Ουδέτερος άξονας O - O*



Σχήμα 8.5η *Κάμψη της δοκού*



Σχήμα 8.5θ *Κάμψη της διατομής της δοκού*

8.6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ [M], [Q], [N]

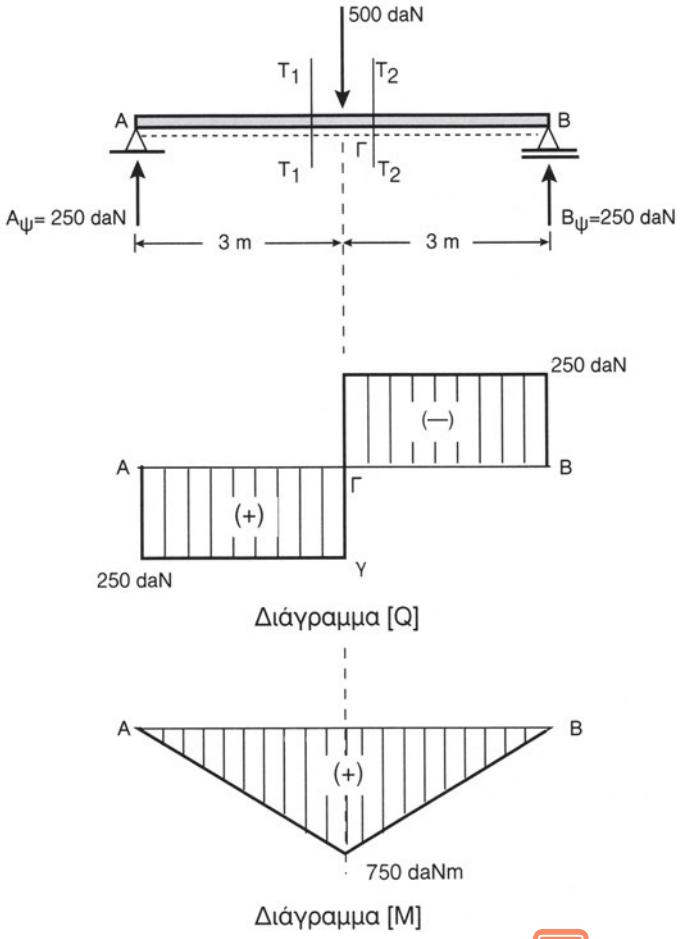
ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

Διάγραμμα [N]

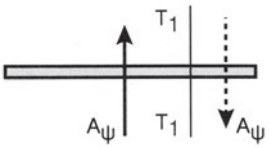
Επειδή $A_x = 0$, συνάγουμε, ότι καθ' όλο το μήκος της δοκού έχουμε: $N = 0$.

Διάγραμμα [Q] - τεμνουσών δυνάμεων

Θεωρούμε για το τμήμα ΑΓ της δοκού ΑΒ, τομή $τ_1$ - $τ_1$ και πέρνουμε τις δυνάμεις που βρίσκονται αριστερά της τομής $τ_1$ - $τ_1$ (τις λιγότερες δυνάμεις τις κάθετες στη δοκό αφού αυτές δίδουν τέμνουσα). Αυτή είναι η $A_ψ = 250$ daN. Για το πρόσημο της τέμνουσας, γράφουμε την $A_ψ$ δεξιά της τομής με αντίθετη φορά, οπότε δίδουν δεξιόστροφη ροπή άρα η τέμνουσα στο Α και μέχρι το Γ είναι θετική και ίση με 250 daN.



Σχήμα 8.6α *Αμφιέρειστη δοκός*



Σχήμα 8.6β *Τομή τ-τ*

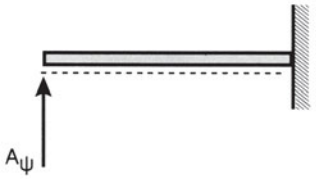
Για το τμήμα ΒΓ της δοκού, όμοια, θεωρούμε τομή $τ_2$-$τ_2$ και παίρνουμε τις δυνάμεις που βρίσκονται δεξιά της τομής $τ_2$ - $τ_2$. Αυτή είναι η $B_ψ$ = 250 daN. Για το πρόσημο της τέμνουσας γράφουμε των $B_ψ$ αριστερά της τομής με αντίθετη φορά, οπότε δίδουν αριστερόστροφη ροπή και άρα η τέμνουσα είναι αρνητική από το Β έως το Γ και ίση με 250 daN.

Διάγραμμα [M] - καμπτική ροπών

Τμήμα ΑΓ Η ροπή στο Α είναι μηδέν: $M_A = 0$. Η ροπή στο Γ για τις δυνάμεις που βρίσκονται αριστερά του Γ είναι ίση με:

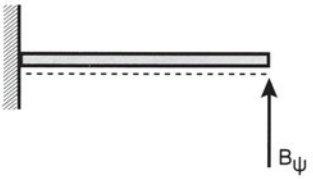
$$A_\psi \cdot 3m = 250\ daN \cdot 3m = 750\ daN \cdot m.$$

Έχει σημείο θετικό γιατί το θετικό σύνορο εφελκύεται.



Σχήμα 8.6γ *Σήμανση της M*

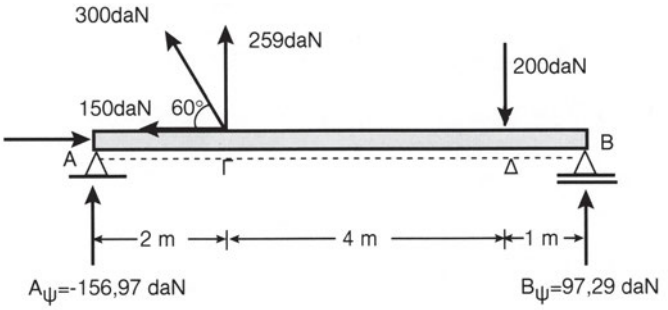
Τμήμα ΓΒ Η ροπή στο Β είναι μηδέν **$M_B = 0$**. Η ροπή στο Γ για τις δυνάμεις που βρίσκονται αριστερά του Β, είναι ίση με: $B_\psi \cdot 3m = 250\ daN \cdot 3m = 750\ daN \cdot m$. Έχει σημείο θετικό, γιατί το θετικό σύνορο εφελκύεται.



Σχήμα 8.6δ *Σήμανση της M*

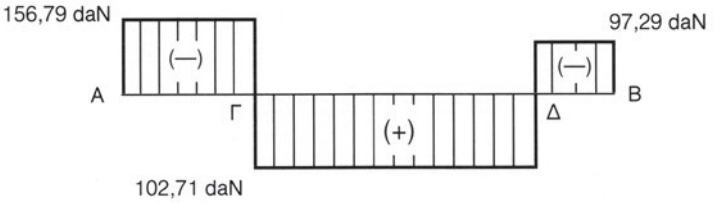
Μετά από αυτά, κατασκευάζουμε τα διαγράμματα [Q] και [M] της αμφιέρειστης δοκού ΑΒ, που δέχεται στη μέση το φορτίο των 500 daN.

2. Να βρεθούν τα διαγράμματα [Μ], [Q], [Ν] στην παρακάτω αμφιέρειστη δοκό.

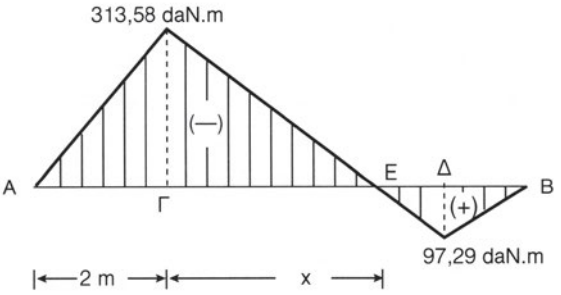




Διάγραμμα [Ν]



Διάγραμμα [Q]



Διάγραμμα [Μ]

Σχήμα 8.6ε *Αμφιέρειστη δοκός*

Υπολογισμός αντιδράσεων

1. $\Sigma F_x = 0$ άρα: $A_x = 300$ daN συν60

δηλ.: $A_x = 150$ daN

2. $\Sigma F_\psi = 0$ άρα: $A_\psi + 300$ daN ημ60° - 200 daN + $B_\psi = 0$

δηλ.: $A_\psi + B_\psi = -59,5$ daN

3. $\Sigma M_F^A = 0$ άρα: - 259,5 daN · 2m + 200 daN · 6m - 7m · $B_\psi = 0$

δηλ.: $B_\psi = 97,29$ daN και $A_y = - 156,79$ daN,

δηλαδή σημαίνει ότι η A_ψ έχει φορά αντίθετη από αυτή που έχει στο σχήμα.

Διάγραμμα [N] - αξονικών δυνάμεων

Στο τμήμα ΑΓ της δοκού, έχουμε από τις Α και 150 daN δυνάμεις, θλίψη του τμήματος αυτού, άρα N < 0 και N = - 150 daN.

Διάγραμμα [Q] - τεμνουσών δυνάμεων

Για μία τομή τ - τ αριστερά του Γ για το τμήμα ΑΓ της δοκού, έχουμε: $Q_{A\Gamma} < 0$ (αριστερόστροφη ροπή) και άρα

$$Q_{A\Gamma} = - 156,79 \text{ daN}$$

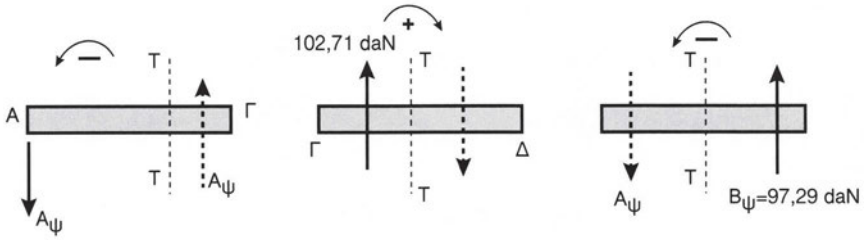
Για το τμήμα ΓΔ της δοκού και για τομή τ - τ δεξιά του Γ, έχουμε:

$Q_{\Gamma\Delta} = 259,5$ daN - 156,79 daN = 102,71 daN

και $Q_{\Gamma\Delta} > 0$ (δεξιόστροφη ροπή).

Για το τμήμα ΔΒ της δοκού και για τομή τ - τ δεξιά του Δ, έχουμε:

$Q_{\Delta B} = 97,29$ daN και $Q_{\Delta B} < 0$ (αριστερόστροφη ροπή).



Σχήμα 8.6στ *Σήμανση της Q*

Διάγραμμα [M] - καμπτικών ροπών

Τμήμα ΑΓ $M_A = 0$. Η ροπή στο Γ για τις δυνάμεις που βρίσκονται αριστερά του Γ, ροπή δίνει η A_ψ και είναι:

$M_\Gamma^{\alpha\rho} = 156{,}79 \text{ daN} \cdot 2\text{m} = 313{,}58 \text{ daN} \cdot \text{m}$

και επειδή η A_ψ θλίβει το θετικό σύνορο του τμήματος ΑΓ της δοκού, είναι: $M_\Gamma^{\alpha\rho} < 0$.

Τμήμα ΓΔ Για μια τομή τ - τ στο Δ και αριστερά, θα έχουμε:

$M_\Delta^{\alpha\rho} = -156{,}79 \text{ daN} \cdot 6\text{m} + 259{,}5 \text{ daN} \cdot 4\text{m} = 97{,}29 \text{ daN} \cdot \text{m}$

Τμήμα ΔΒ $M_\Delta^{\delta\varepsilon\xi} = 97{,}29 \text{ daN} \cdot 6\text{m}$ και $M_B = 0$

<u>Παρατήρηση:</u> Για το σημείο Ε του διαγράμματος [M], παρατηρούμε ότι:

$M_E = 0 = -156{,}79\,(2 + x) + 259{,}5\,x.$

Άρα, λύοντας ως προς x έχουμε: $x = 3{,}053$ m

3. Να βρεθούν τα διαγράμματα [Q], [M] στον παρακάτω πρόβολο με συγκεντρωμένο φορτίο (άξονας μηχανής)

α) Η αντίδραση $A_\psi = 250$ daN

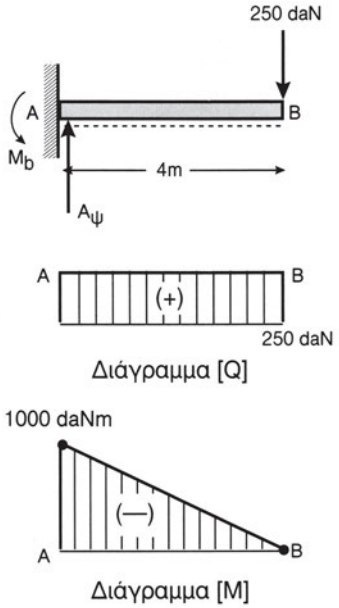
$Q_A = A_\psi = 250$ daN

$Q_B = B = 250$ daN

σταθερή δηλ. καθ' όλο το μήκος του προβόλου

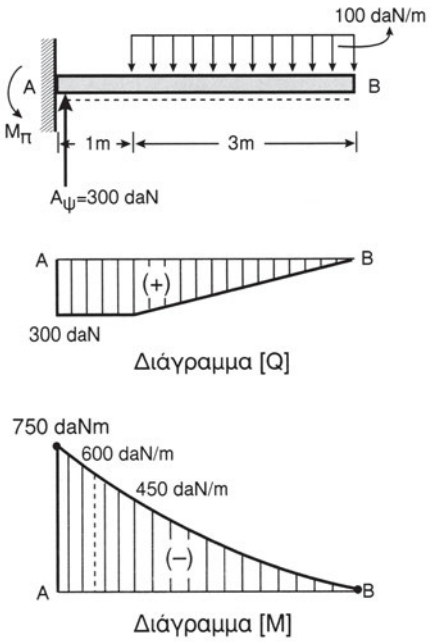
β) $M_A = M_b$ (ροπή πάκτωσης) $= -250 \text{ daN} \cdot 4\text{m} = -1000\text{daN}\cdot\text{m}$

$M_B = 0$



Σχήμα 8.6ζ *Πρόβολος*

4. Να ελέγξετε, σύμφωνα με τα παραπάνω, τα διαγράμματα [Q], [M] του παρακάτω φορέα:

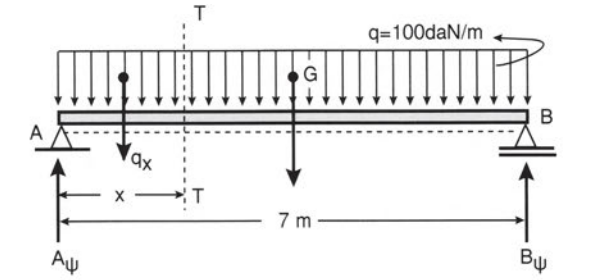


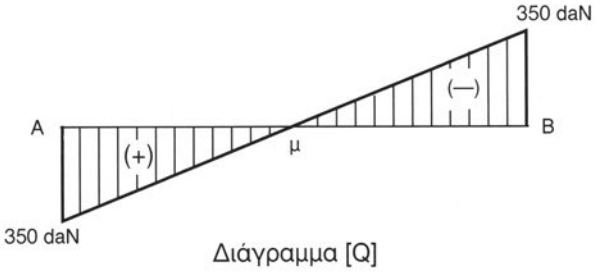
Σχήμα 8.6η *Πρόβολος*

5. Να βρεθούν τα διαγράμματα [M], [Q] στην παρακάτω αμφιέρειστη δοκό που δέχεται συνεχή ομοιόμορφη φόρτιση (γερανογέφυρα).

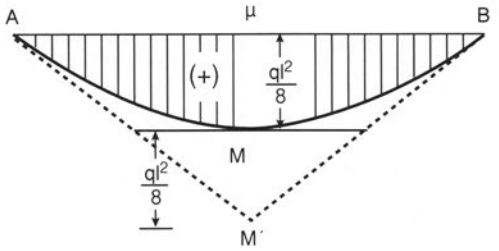
Ας υποθέσουμε ότι το μήκος της δοκού είναι l και το φορτίο q $\frac{daN}{m}$.

Είναι προφανές ότι $A_\psi = B_\psi = \frac{ql}{2}$.

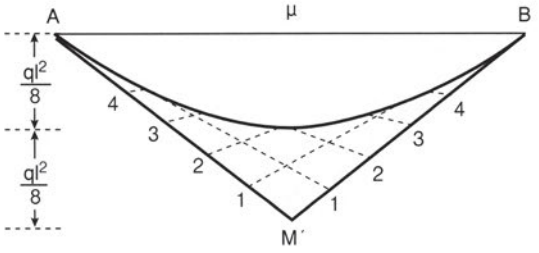




Διάγραμμα [Q]



Διάγραμμα [M]



Κατασκευή παραβολής

Σχήμα 8.6θ *Αμφιέρειστη δοκός*

α) Για την τομή μας τ - τ σε απόσταση x από την άρθρωση Α για το διάγραμμα [Q] –τεμνουσών δυνάμεων– θα έχουμε:

$$Q_x = \frac{ql}{2} - qx = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

Για $x = 0$, $Q_A = \frac{ql}{2}$

Για $x = \frac{l}{2}$, $Q_{μέσον} = 0$

Για $x = l$, $Q_B = -\frac{ql}{2}$

β) Για το διάγραμμα [M]- καμπικών ροπών θα έχουμε:

$$Mx = \frac{qx}{2} (l - x),$$

που είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x, δηλαδή είναι παραβολή.

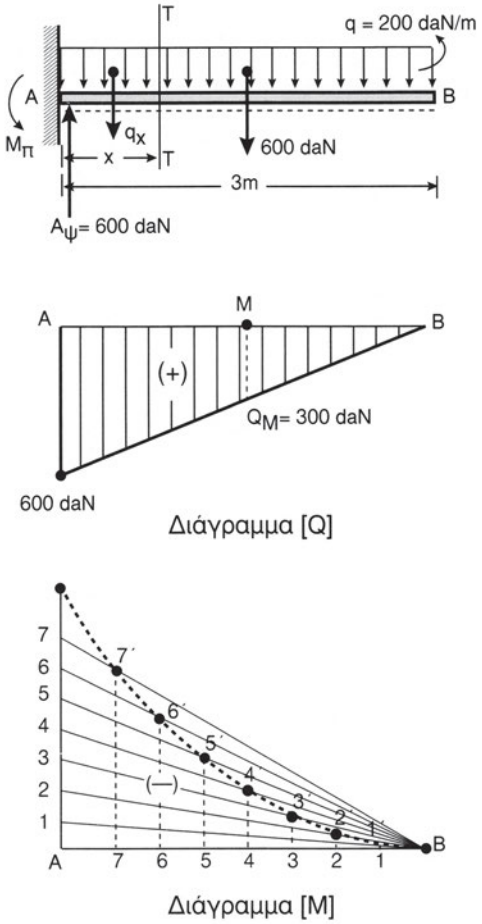
Για $x = 0$, $M_A = 0$

Για $x = \frac{l}{2}$, $M_{μέσον} = \frac{ql^2}{8}$

Αυτή είναι η μέγιστη τιμή της καμπτικής ροπής στο μέσον της δοκού.

Για $x = l$, $M_B = 0$

6. Να βρεθούν τα διαγράμματα [Q], [M] στον παρακάτω πρόβολο που δέχεται συνεχή ομοιόμορφη φόρτιση.



Σχήμα 8.6η *Πρόβολος*

Η αντίδραση στην πάκτωση Α είναι: Α = 600 daN

Διάγραμμα [Q] Για την τομή τ - τ σε απόσταση x από το Α, έχουμε:

$Q_x = A - q_x$

Ώστε για x = 0, έχουμε: Q_A = 600 daN

ενώ για $x = \frac{3}{2}$ m = 1,5 m θα έχουμε:

$Q_M = 600\ daN - 200 \cdot \frac{3}{2} daN\cdot$ άρα:

Q_M = 300 daN

Για x = 3m, θα βρούμε την Q_B, δηλ. Q_B = 600 daN - 600 daN = 0

Διάγραμμα [M]

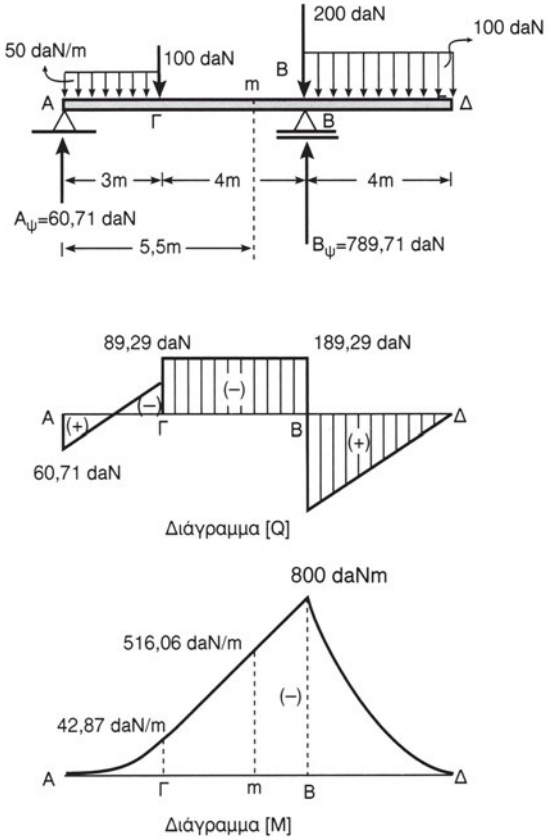
Η ροπή πακτώσεως είναι

M_π = - 600 daN · 1,5 m = - 900 daN · m

M_B = 0

Για την κατασκευή της παραβολής, διαιρούμε την ΑΒ και την ΑΑ΄ σε 8 ίσα τμήματα και χαράζουμε τις 1Β, 2Β, 3Β, ..., 7Β. Από τα σημεία 1, 2, 3, ..., 7 του τμήματος ΑΒ, χαράζουμε τις καθέτους 11΄, 22΄, ..., 77΄. Τα σημεία Α΄,7΄,6΄,5΄, 4΄, 3΄, 2΄,1΄, Β είναι τα σημεία της παραβολής.

7. Να βρεθούν τα διαγράμματα [M], [Q] στον παρακάτω φορέα. Να βρείτε την M_m.



Σχήμα 8.6θ *Μονοπροέχουσα δοκός*

Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε (;): A_y = 60,71 daN, B_ψ = 789,29 daN.

Διάγραμμα [Q]

$Q_{A=}$ 60,71 daN

$Q_{\Gamma}^{\alpha\rho}$ = - 89,29 daN

$Q_{\Gamma}^{\delta\varepsilon\xi}$ = - 189,29 daN

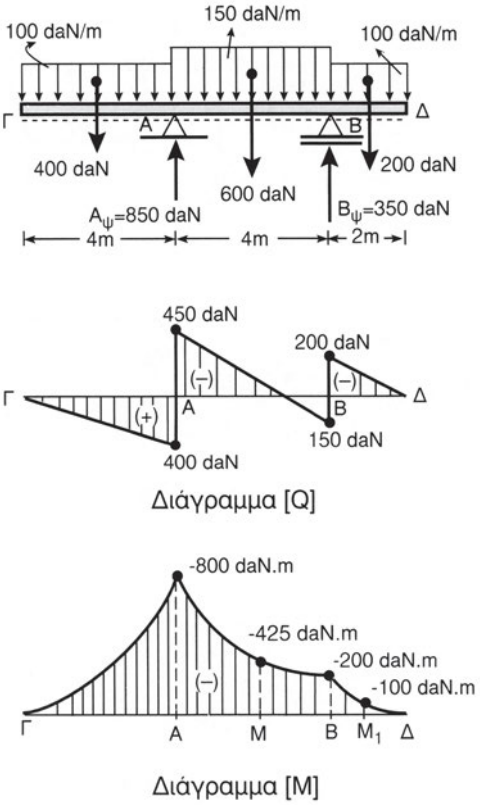
$Q_{B}^{\alpha\rho}$ = - 189,29 daN

$Q_{B}^{\delta\varepsilon\xi}$ = + 400 daN

Διάγραμμα [M]

M_m = - 400 daN · 3,5 m + 789,29 daN · 1,5 m - 200 daN · 1,5 m = - 516,06 daN·m

8. Να βρεθούν τα διαγράμματα [Q], [M] του παρακάτω φορέα.



Σχήμα 8.6i *Αμφιπροέχουσα δοκός*

Είναι $A_ψ + B_ψ = 1200$ daN

$\Sigma F_F^A = 0 \Rightarrow$ - 400 daN · 2 m + 600 daN · 2 m - $B_ψ$ · 4m + 200 daN·5 m = 0

Άρα $4B_ψ$=1400 daN

$B_ψ = 350$ daN

$A_ψ = 850$ daN

Διάγραμμα [Q]

Έχουμε: $Q_Γ = 0$

$Q_A^{αρ}$ = - 400 daN

$Q_A^{δεξ}$ = +450 daN

$Q_B^{αρ}$ = - 150 daN

$Q_B^{δεξ}$ = + 200 daN

$Q_Δ = 0$

Διάγραμμα [M]

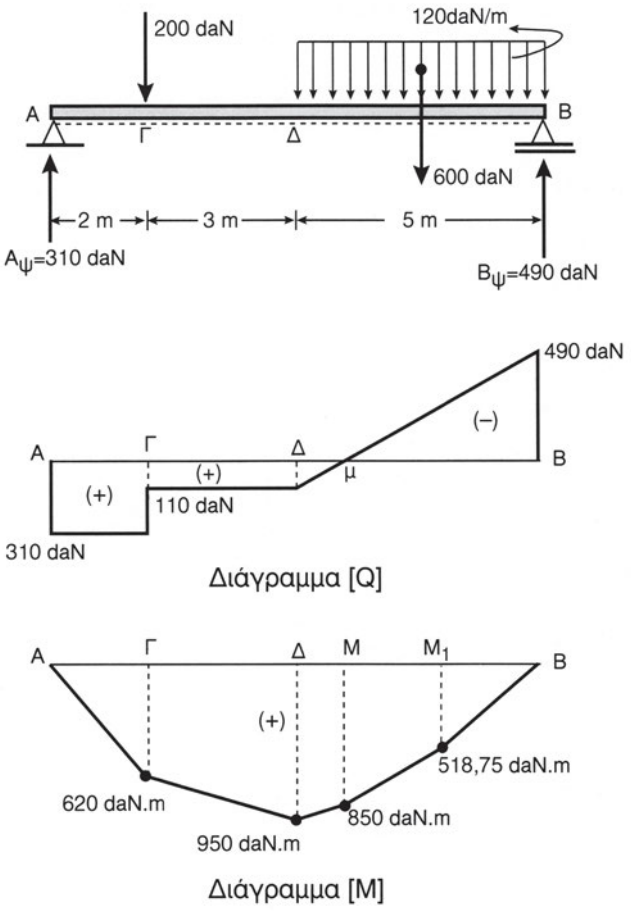
Έχουμε: $M_Γ = 0$

M_A = - 400 daN · 2 m = - 800 daN · m

M_M = - 400 daN · 4 m + 850 daN · 2m- 300 daN · 1 m = - 200 daN · m

M_B = - 400 daN · 6 m + 850 daN · 4m- 600 daN · 2 m = - 200 daN · m

9. Να βρεθούν τα διαγράμματα [M], [Q] στον παρακάτω φορέα



Σχήμα 8.6κ *Αμφιέρειστη δοκός*

Έχουμε:

$A_\psi + B_\psi = 800$ daN

$\Sigma M_A = 0$

200 daN·2 m + 600 daN·7,5 m - B_ψ·10 m = 0

Άρα $B_\psi = 490$daN

$A_\psi = 310$ daN

Διάγραμμα [Q]

$Q_A = 310$ daN $= Q_{\Gamma}^{\alpha\rho}$

$Q_{\Gamma}^{\delta\varepsilon\xi} = 110$ daN $= Q_{\Delta}^{\alpha\rho}$

$Q_M = -190$ daN

$Q_B = -490$ daN

Διάγραμμα [M]

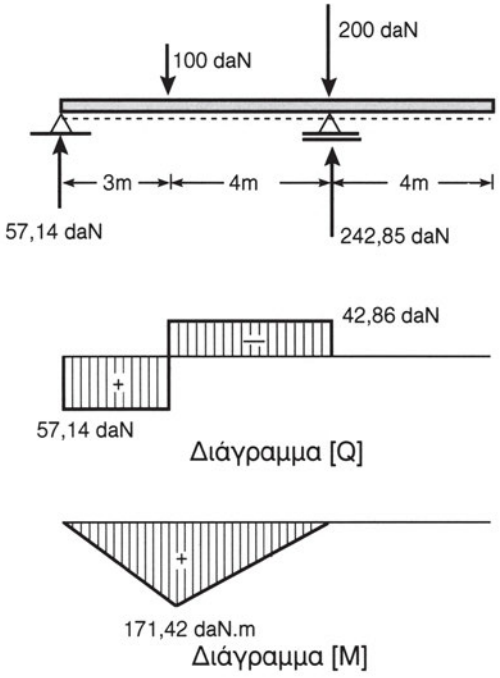
$M_A = 0$, $M_{\Gamma} = 620$ daN · m

$M_{\Delta} = 310$ daN · 5 m - 200 daN · 3m = 950 daN · m

$M_M = 490$ daN · 2,5 m - 300 daN · 1,25 m = 850 daN · m

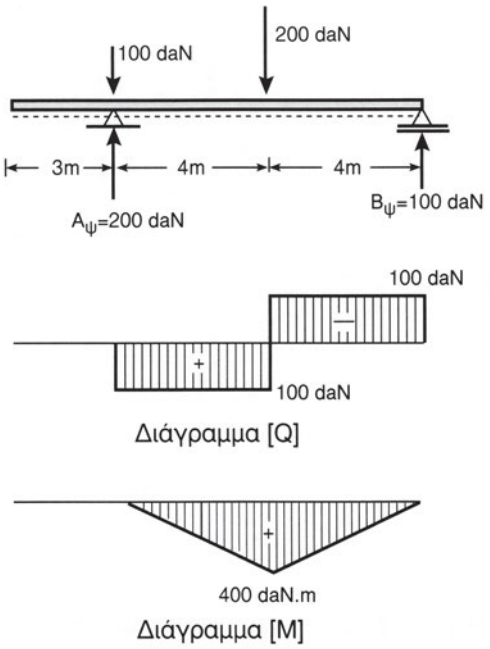
Διαπιστώστε την αλήθεια των παρακάτω διαγραμμάτων:

1.



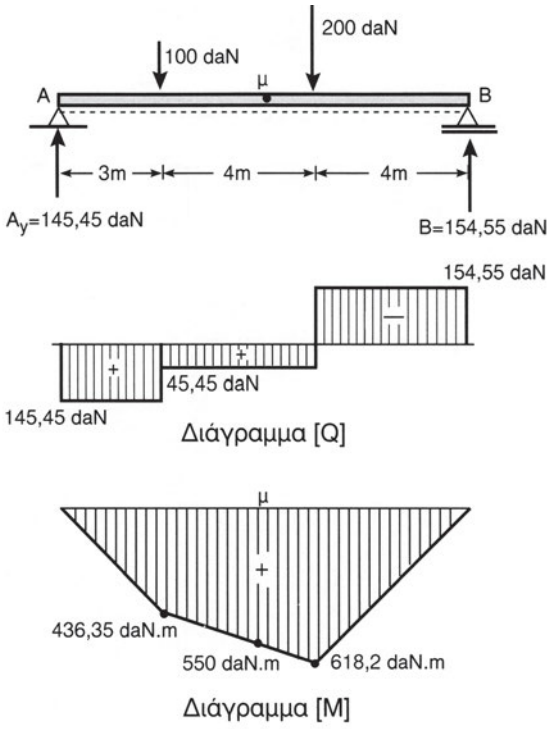
Σχήμα 8.6λ

2.



Σχήμα 8.6μ

3.



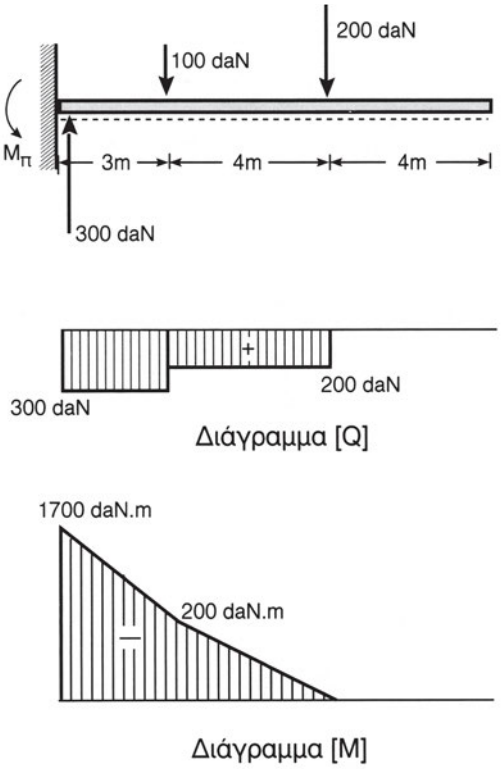
Σχήμα 8.6ν

Είναι:

$M_μ$ = 5,5m·154,55 daN - 200 ·1,5 m = 850,02 daN·m - 300 daN·m = 550,02 daN·m

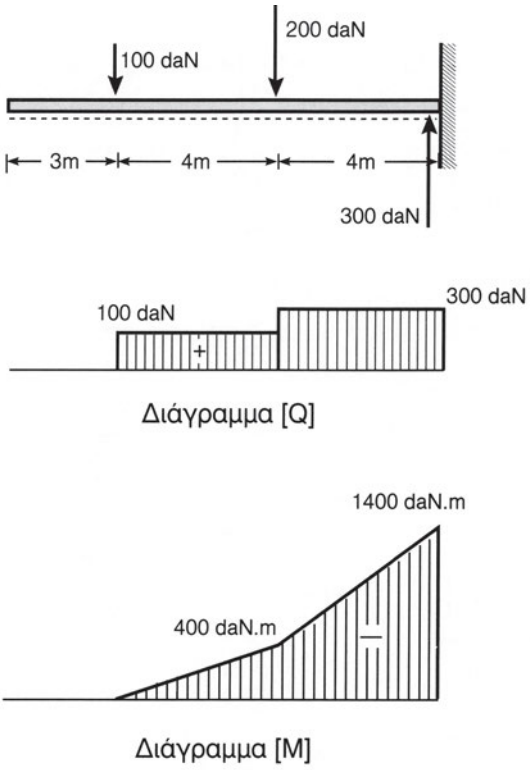
Άρα: $M_μ$ = 550,02 daN·m

4.



Σχήμα 8.6ξ

5.



Σχήμα 8.6ο

Παρατηρείστε ότι:

$M_{\pi} = -100\ daN \cdot 8m - 200\ daN \cdot 4m = -1600\ daN \cdot m$



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΟΓΔΟΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Οι **αντιδράσεις στηρίξεων** είναι εξωτερικές δυνάμεις που προέρχονται από την έδραση του στερεού πάνω στα στηρίγματά του και αναπτύσσονται στα σημεία αυτά.

Πάκτωση
Αντιδράσεις τρεις: A_x, A_y, M_π

Άρθρωση
Αντιδράσεις δύο: A_x, A_y (συνιστώσες της Α)

Κύλιση
Αντίδραση μία: A_y

- Τα κατασκευαστικά στοιχεία κάθε φορέα που δέχεται εξωτερικά φορτία είναι: 1. η **ράβδος**, 2. η **δοκός** 3. ο **δίσκος**, 4. η **πλάκα**, 5. το **κέλυφος**.

- Τα είδη των δοκών ανάλογα με τον τρόπο της στήριξής τους είναι: 1. **πρόβολος**, 2. **μονοπροέχουσα**, 3. **αμφιπροέχουσα**, 4. **αμφιέρειστη**. Την περίπτωση της αμφίπακτης δοκού δεν θα την εξετάσουμε εδώ.

- Οι φορείς που εξετάζουμε τώρα είναι οι στατικώς ορισμένοι φορείς δηλαδή εκείνοι των οποίων με την βοήθεια των τριών συνθηκών ισορροπίας ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_F^T = 0$) μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις στηρίξεώς τους (δηλ. ο πρόβολος, η αμφιέρειστη δοκός και τα προέχοντα δοκάρια).

- Για τις εσωτερικές δυνάμεις **N, Q, M** δηλαδή την **αξονική ορθή δύναμη N**, την **τέμνουσα δύναμη Q** και την **καμπτική ροπή M_T** μιας διατομής τ-τ της δοκού, ως προς τη σήμανσή τους έχουμε να πούμε τα εξής:

  α) η **N>0** όταν η N **εφελκύει τη διατομή** και

  N<0 όταν **θλίβει τη διατομή.**

  β) η **Q>0** για **δεξιόστροφη ροπή** των αριστερά ή δεξιά της τομής τ - τ δυνάμεων

και **Q<0** για αριστερόστροφη ροπή των αριστερά ή δεξιά της τομής τ - τ δυνάμεων.

γ) η $\mathbf{M_τ>0}$ όταν η **ροπή κάμψης** αναγκάζει το θετικό σύνορο της διατομής να το εφελκύσει

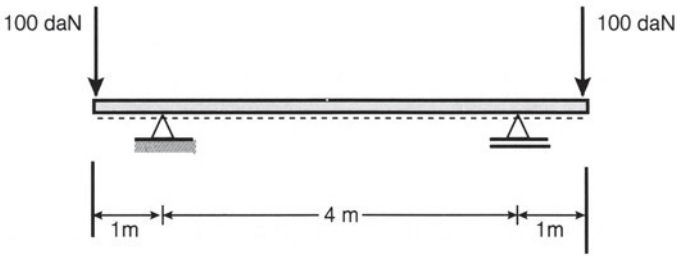
και $\mathbf{M_τ<0}$ όταν η **ροπή κάμψης** αναγκάζει το θετικό σύνορο της διατομής να το θλίψει.



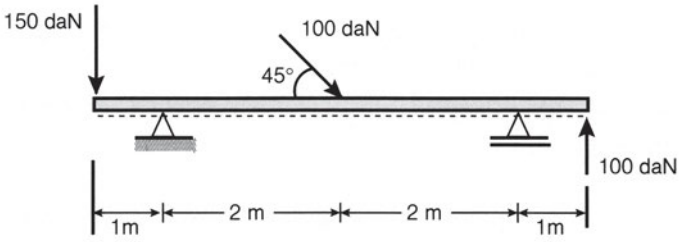
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

➽ Να βρεθούν τα διαγράμματα [M], [Q] των παρακάτω φορέων

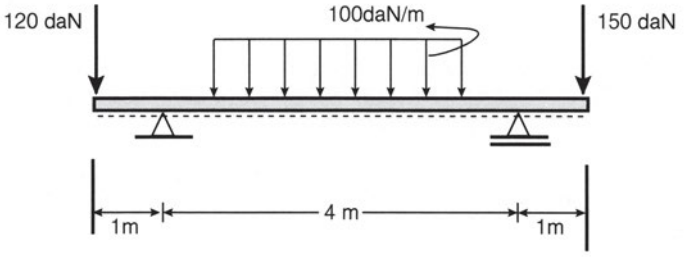
1.



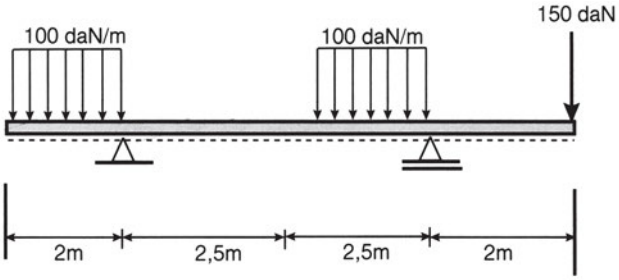
2.



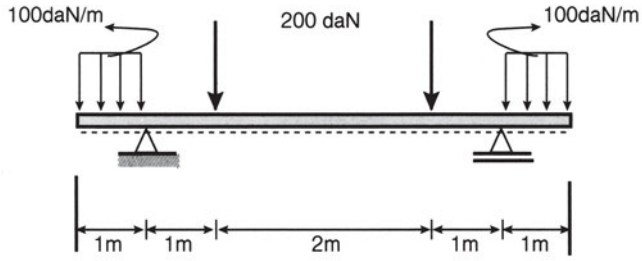
3.

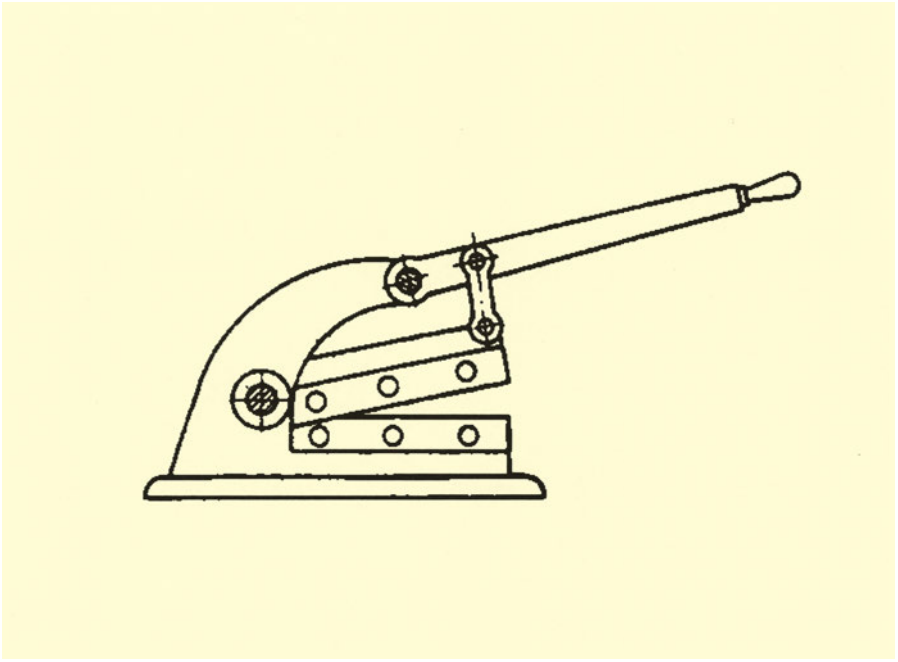


4.


100 daN/m
100 daN/m
150 daN
2m
2,5m
2,5m
2m

5.


100daN/m
200 daN
100daN/m
1m
1m
2m
1m
1m



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΔΙΑΤΜΗΣΗ

9.1 Γενικά

9.2 Η παραμόρφωση και η τάση

9.3 Τα ποσοτικά μεγέθη της διάτμησης

9.4 Τα όρια φόρτισης

9.5 Τμήση - ψαλιδισμός

9.6 Η επίδραση της τέμνουσας δύναμης

9.7 Εφαρμογές

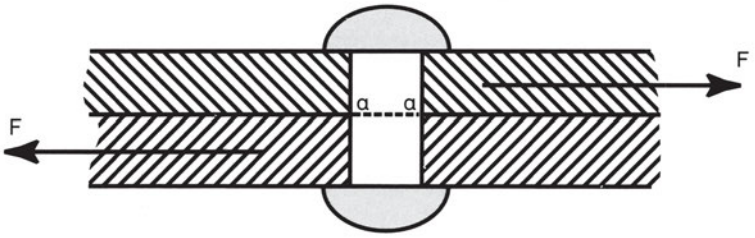
Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Οι μαθητές:

- Να αναγνωρίζουν και να αναφέρουν την εμφάνιση διατμητικών δυνάμεων.
- Να αναφέρουν τους νόμους που έχουν εφαρμογή στη διάτμηση και να γνωρίζουν τους σχετικούς τύπους.
- Να μπορούν να κάνουν στοιχειώδεις υπολογισμούς.

9.1 ΓΕΝΙΚΑ

Όταν συμβεί σε ένα σώμα, πάνω στο οποίο ενεργούν δυνάμεις, να εμφανίζεται παραμόρφωση κατά την οποία έχουμε ολίσθηση διατομών, τότε λέμε ότι το σώμα καταπονείται σε **διάτμηση**. Χαρακτηριστικό παράδειγμα καταπόνησης σε διάτμηση έχουμε στον κορμό καρφίου (ήλου) ή κοχλία που συνδέει ελάσματα, όπως στο σχήμα 9.1.α

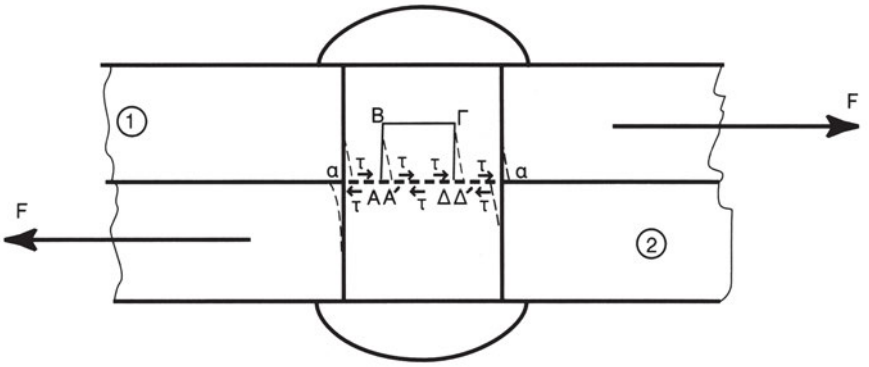


Σχήμα 9.1.α *Παράδειγμα καταπόνησης σε διάτμηση*

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στη διατομή α-α έχουμε καταπόνηση σε διάτμηση. Οι αντίρροπες δυνάμεις F, δια των ελασμάτων, ενεργούν εγκάρσια στη διατομή α-α του ήλου και τείνουν να προκαλέσουν διολίσθηση των διατομών (ολίσθηση των μορίων), κατά τη διεύθυνση ενέργειάς τους και αν οι δυνάμεις αυτές είναι αρκετά μεγάλες θα έχουμε τομή (κόψιμο) του κορμού του ήλου, κατά τη διατομή α-α.

9.2 Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΤΑΣΕΙΣ

Ας δούμε τώρα τη συμπεριφορά του υλικού. Σ' αυτές τις συνθήκες φόρτισης, σχ. 9.2.α, το έλασμα (1) , υπό την επίδραση της δύναμης F, πιέζει τον κορμό του ήλου προς τα δεξιά, ενώ το έλασμα (2), αντίστοιχα, προς τα αριστερά. Δηλαδή, εξαιτίας της δράσης των δυνάμεων F, εμφανίζονται τάσεις τ, εγκάρσια, (παράλληλα) προς τη διατομή α-α, οι οποίες τείνουν να προκαλέσουν την ολίσθηση των μορίων, κατά τη διεύθυνση της διατομής αυτής. Αν παρατηρήσουμε ένα στοιχειώδες τμήμα του κορμού του ήλου, αυτό θα έχει τη μορφή ΑΒΓΔ, πριν φυσικά από την επενέργεια των δυνάμεων F.



Σχήμα 9.2.α *Η συμπεριφορά του υλικού στην καταπόνηση της διάτμησης*

Μετά την επιβολή των δυνάμεων F και την παραμόρφωση του κορμού του ήλου, αυτό το στοιχειώδες τμήμα θα λάβει τη θέση Α΄ΒΓΔ΄. Εμφανίζεται, δηλαδή, μία γωνία μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης της ακμής ΑΒ του στοιχειώδους τμήματος.

Αυτή η γωνία, που τη συμβολίζουμε με το γράμμα γ, ονομάζεται **γωνία ολίσθησης** ή **γωνία παραμόρφωσης**. Η γωνία ολίσθησης εξαρτάται:

α) από τη δύναμη που ασκείται πάνω στο αντικείμενο,

β) από το υλικό κατασκευής του αντικειμένου

γ) από το σχήμα του αντικειμένου.

Οι δυνάμεις που επιβαρύνουν, όπως περιγράφεται παραπάνω, διάφορους φορείς, ονομάζονται **διατμητικές δυνάμεις**, ενώ οι αναπτυσσόμενες τάσεις, **διατμητικές τάσεις**.

9.3 ΤΑ ΠΟΣΟΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

Στην προσπάθειά μας να εκφράσουμε τις ποσοτικές σχέσεις, μεταξύ των μεγεθών που αναφέρονται στο φαινόμενο που εξετάζουμε, θα κάνουμε τις εξής παραδοχές, οι οποίες ευρίσκονται πολύ κοντά στην πραγματικότητα:

α) ο νόμος της αναλογίας του Hooke ισχύει και στην περίπτωση της καταπόνησης σε διάτμηση,

β) οι παραμορφώσεις των διαφόρων μερών των κατασκευών είναι πολύ μικρές, εφόσον βέβαια κινούμεθα μέσα στα επιτρεπτά όρια του νόμου της αναλογίας.

Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να δεχθούμε ότι:

1) Η κατανομή των διατμητικών τάσεων, στην καταπονούμενη διατομή, είναι ομοιόμορφη και

2) Η καταπονούμενη διατομή παραμένει επίπεδος, κατά τη δράση των διατμητικών δυνάμεων.

Επομένως, αν:

F η ενεργούσα διατμητική δύναμη και

S το εμβαδόν της καταπονούμενης διατομής, τότε η διατμητική τάση (τ) είναι

$$\tau = \frac{F}{S} \qquad (9.3.\alpha)$$

Για τη γωνία παραμόρφωσης γ, που, όπως είπαμε, θα είναι πολύ μικρή, έχουμε (σχ. 9.2.α)

$$\gamma = \varepsilon\varphi\gamma = \frac{AA'}{BA} \text{ σε rad}^*$$

Σύμφωνα με το νόμο της αναλογίας, που ισχύει και εδώ, ο λόγος της διατμητικής τάσης προς τη γωνία παραμόρφωσης, στην ελαστική περιοχή, είναι σταθερός. Ο λόγος αυτός ονομάζεται **μέτρο διάτμησης,** ή **μέτρο ολίσθησης,** ή **δεύτερο μέτρο ελαστικότητας.** Το σταθερό αυτό μέγεθος, το συμβολίζουμε με το γράμμα G. Άρα, είναι:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \text{ σε } N/m^2 \qquad (9.3.\beta)$$

* Επομένως, το μέγεθος γ είναι αδιάστατο

Το μέτρο διάτμησης έχει διαστάσεις τάσης, αφού το γ, η γωνία δηλ. ολίσθησης, είναι μέγεθος αδιάστατο.

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο διάτμησης έχει μία απλή σχέση (γραμμική) με το μέτρο ελαστικότητας του υλικού**.

Η τιμή του G για τα συνήθη υλικά των κατασκευών, είναι, περίπου

$$G = 0.385 \cdot E \qquad (9.3.\gamma)$$

Για τους χάλυβες, που είναι βασικό υλικό για τις μηχανολογικές κατασκευές, οι τιμές, κατά προσέγγιση, είναι:

$$G = 7{,}95 \times 10^2 \frac{N}{m^2} \text{ ή } 7{,}95 \times 10^5 \frac{daN}{cm^2} \text{ ή } 7{,}95 \times 10^3 \frac{daN}{mm^2}$$

9.4 ΤΑ ΟΡΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Για τα συνήθη υλικά κατασκευών η επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση, θεωρείται ίση με 0,85 της αντίστοιχης επιτρεπόμενης τάσης σε εφελκυσμό. Επομένως είναι:

$$\tau_{επ} = 0{,}85\sigma_{επ} \qquad (9.4.\alpha)$$

Για τον χυτοσίδηρο όμως είναι:

$$\tau_{επ} = 1{,}1\sigma_{επ} \qquad (9.4.\beta)$$

Επειδή είναι δύσκολος ο ακριβής προσδιορισμός του τρόπου με τον οποίο αντιδρούν τα υλικά κάτω από τις διάφορες συνθήκες φόρτισης και μορφές που λαμβάνουν μέσα στις κατασκευές, καταφεύγουμε σε πειραματικούς προσδιορισμούς των επιτρεπομένων ορίων φόρτισης. Έτσι, ανάλογα με το σχήμα της καταπονούμενης διατομής, σε διάτμηση, πρέπει να μειώνεται ο συντελεστής ασφάλειας, ως εξής :

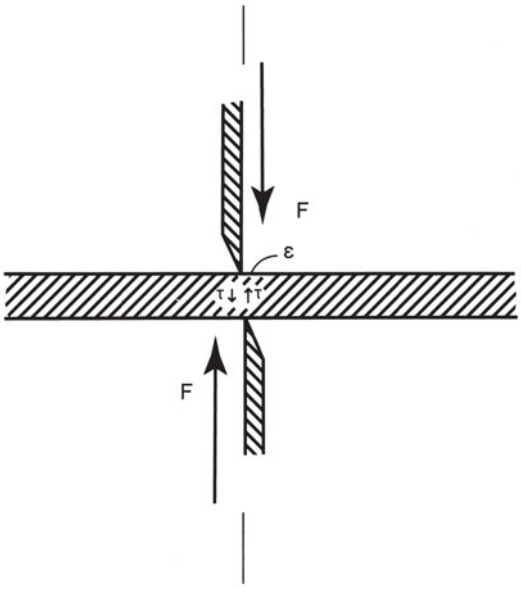
i. για κυκλική διατομή, συντελεστής μείωσης C = 0.75

ii. για ορθογωνική διατομή, συντελεστή μείωση C = 0.66

iii. για δακτυλιοειδή διατομή, συντελεστή μείωσης C = 0.50

** $G = \frac{m}{2(m+1)} E$ όπου m η σταθερά του Poisson

9.5 ΤΜΗΣΗ – ΨΑΛΙΔΙΣΜΟΣ



Σχήμα 9.5.α *Διάτμηση ή ψαλιδισμός*

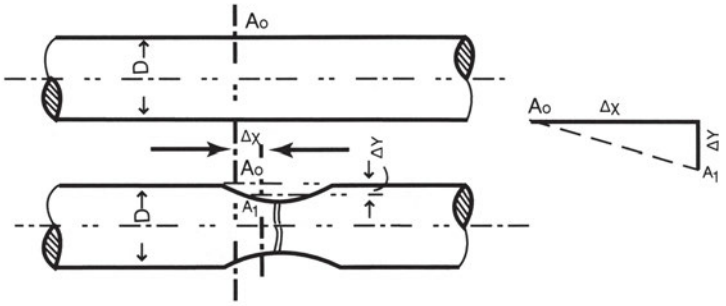
Στην περίπτωση του σχ.9.5 α, εφαρμόζουμε στη διατομή ε του ελάσματος, δύο ίσες και αντίφορες δυνάμεις. Ο σκοπός μας είναι να κόψουμε το έλασμα, δηλαδή να επιτύχουμε, με τη μόνιμη παραμόρφωση, το επιθυμητό σχήμα. Όταν εφαρμόζονται στην ίδια διατομή ίσες και αντίφορες δυνάμεις, ομιλούμε για τμήση ή ψαλιδισμό. Το φαινόμενο, όμως, είναι αυτό της διάτμησης, μόνο που εδώ εργαζόμαστε πέραν των ορίων της αναλογίας. Στην περίπτωση μάλιστα της στράντζας, εργαζόμαστε στην πλαστική περιοχή και στο ψαλίδι είμαστε στο όριο θραύσης.

9.6 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Η καταπόνηση σε διάτμηση, εκτός από τις περιπτώσεις όπου είναι η βασική καταπόνηση του στοιχείου, όπως σ' αυτές των σχ. 9.1α και 9.5α εμφανίζεται και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις καταπονήσεων και παραμορφώσεων των υλικών. Αυτό συμβαίνει, γιατί σε όλες τις παραμορφώσεις έχουμε και ολίσθηση των διατομών που είναι, λιγότερο ή περισσότερο εμφανής κατά περίπτωση.

Στο πείραμα του εφελκυσμού, για παράδειγμα, που είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο εκτός από την επιμήκυνση του δοκιμίου, έχουμε και

στένωση της διατομής, εκεί ακριβώς, που τελικά θα σπάσει το δοκίμιο.



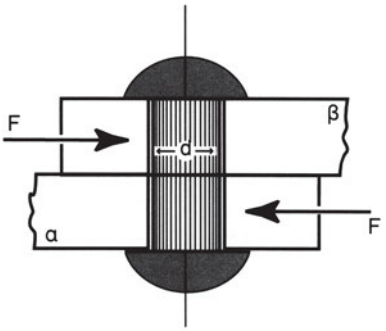
Σχήμα 9.6.α *Η ολίσθηση που εμφανίζεται κατά τη διαδικασία του εφελκυσμού*

Έτσι, στο σχήμα 9.6.α., βλέπουμε ότι το σημείο A_o, πλησίον της θέσης θραύσης, στην περιοχή στένωσης της διατομής, μετακινήθηκε, λόγω της επιβολής των εφελκυστικών δυνάμεων F, από την αρχική θέση A_o, σε μία άλλη, την A_1. Έχουμε λοιπόν, μία μετακίνηση την Δχ, που μπορούμε να την αναλύσουμε ως μία παράλληλη προς την διεύθυνση των εφελκυστικών δυνάμεων, και μία άλλη μετακίνηση, κάθετη στην προηγούμενη, την Δy. Η τελική μετατόπιση $A_o – A_1$ δηλώνει παράλληλη ολίσθηση των διατομών, άρα έχουμε την παρουσία διατμητικών τάσεων. Ανάλογα φαινόμενα με αυτό που περιγράψαμε, εμφανίζονται σε όλες τις μορφές καταπόνησης των υλικών. Οι απαιτήσεις για ασφαλείς και συνάμα οικονομικές κατασκευές, μας καθορίζουν τα πλαίσια μέσα στα οποία πρέπει να κατασκευάζουμε τα έργα μας. Τα όρια αυτά, δηλαδή οι επιτρεπόμενες τάσεις για τον υπολογισμό της αντοχής, είναι ποσοστό του ορίου αναλογίας ή θραύσης για την κατά περίπτωση καταπόνηση, που υφίσταται η κατασκευή. Με προϋποθέσεις, ότι δεν ξεπερνάμε τα όρια και ότι ο φορέας του έργου αντέχει την κύρια καταπόνηση που υφίσταται, μπορούμε να μη λάβουμε υπόψη μας τις διατμητικές τάσεις που προκύπτουν δευτερογενώς. Αν, όμως, προκύψουν υπερβάσεις των ορίων, όπως π.χ. συμβαίνει σε περιπτώσεις σεισμών, η δράση των διατμητικών δυνάμεων, γίνεται αισθητή. Οι μεγάλες ρωγμές στην τοιχοποιία, που παρατηρούνται σε σεισμόπληκτες περιοχές - και μάλιστα υπό γωνία 45°- οφείλονται στις διατμητικές δυνάμεις.

9.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Δύο μεταλλικά ελάσματα (α και β) ενώνονται με ένα ήλο διαμέτρου d = 30 mm (σχ. 9.7.α). Ο κορμός του ήλου καταπονείται σε διάτμηση από μία δύναμη F = 30KN.Αν το υλικό του ήλου είναι από st40 και ο συντελεστής ασφαλείας 5, να ελεγχθεί η αντοχή του ήλου.



Σχήμα 9.7.α

Απάντηση

1) Το υλικό του ήλου έχει όριο θραύσεως $\sigma_{\theta\rho} = 40 \frac{daN}{mm^2}$.

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει για το συντελεστή ασφάλειας και για τα όρια φόρτισης στην παράγραφο 9.4. (σχέση 9.4.α), θα είναι για την επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση:

$$\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{0{,}85\ \sigma_\theta}{v} = \frac{0{,}85 \times 40}{5}$$

$$\tau_{\varepsilon\pi} = 6{,}8 \frac{daN}{mm^2}$$

2) Η επιφάνεια διατομής του ήλου είναι:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 30^2}{4}$$

$$A = 706{,}85\ mm^2$$

3) Η αναπτυσσόμενη τάση είναι $\tau = \frac{F}{A \cdot C}$, όπου C=0,75 συντελεστής σχήματος (παρ. 9.6)

α) $F = 30KN = 30\times10^3N = 30\times10^3\times10^{-1}\ daN$

ή $F = 30KN = 30\times10^3\times10^{-1}\ daN$

$F = 3\times10^3\ daN$

β)
$$\tau = \frac{F}{AC} = \frac{3 \times 10^3}{706{,}85 \times 0.75}$$

$$\tau = 5{,}66 \frac{daN}{mm^2}$$

άρα
$$\tau = 5{,}66 \frac{daN}{mm^2} < \tau_{επ} = 6{,}8 \frac{daN}{mm^2}$$

Επομένως ο ήλος με d = 30 mm είναι επαρκής.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

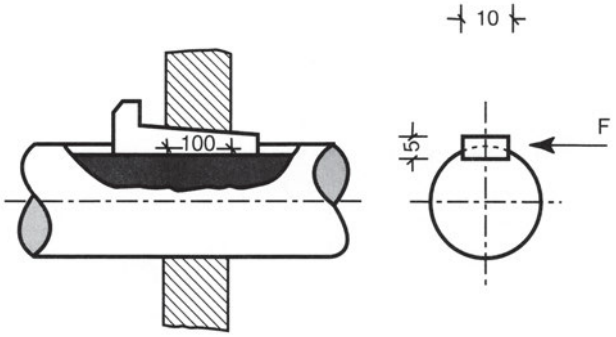
Σφήνα με εργαζόμενες διαστάσεις (σχ. 9.7.β), πλάτους: 10mm, μήκους: 100 mm, ύψους: 5 mm, καταπονείται σε διάτμηση από δύναμη F. Ζητούμε να υπολογισθεί η μέγιστη δύναμη που μπορούμε να εφαρμόσουμε, χωρίς να καταστραφεί η σφήνα. Ζητάμε ακόμη την παραμόρφωση της σφήνας, στην περίπτωση εφαρμογής της μέγιστης δύναμης. Για το υλικό της σφήνας, δίνεται:

Μέτρο διάτμησης: $G = 7{,}95 \times 10^5 \frac{daN}{cm^2}$

Όριο θραύσης: $\sigma_{θρ} = 4000 \frac{daN}{cm^2}$

Συντελεστής ασφάλειας ν = 5

Απάντηση



Σχήμα 9.7.β

1. Η επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση είναι

$$\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{0,85 \cdot \sigma_{\theta\rho}}{v} = \frac{0,85 \times 4000}{5}$$

$$\tau_{\varepsilon\pi} = 680 \frac{daN}{cm^2}$$

2. Η επιφάνεια της διατομής της σφήνας, που καταπονείται είναι

$$A = 0,5 \times 1 + 10 \times 1 + 0,5 \times 1 = 11 \text{ cm}^2$$

3. Η μέγιστη δύναμη στην οποία μπορεί να αντέξει η σφήνα, είναι εκείνη η δύναμη, η οποία θα αναπτύξει στη διατομή, την επιτρεπόμενη τάση άρα $F_{max}=T_{\varepsilon\pi}\cdot A\cdot C$ (όπου C = 0,66 συντελεστής σχήματος παράγραφος 9.4)

Επομένως, έχουμε:

$$F_{max}= 680 \times 11 \times 0,66$$

ή

$$F_{max} = 4.936,8 \text{ daN}$$

4. Με την εφαρμογή της F_{max}, η παραμόρφωση θα είναι σύμφωνα με τη σχέση 9.3β.

$$\gamma = \frac{\tau_{\varepsilon\pi}}{G}$$

$$\gamma = \frac{680}{7,95 \times 10^5} = 0,00085 \text{ rad}$$

$$\gamma = 0,00085 \times \frac{180}{\pi} = 2´56´´,4$$

Επομένως, η μέγιστη δύναμη είναι: F_{max} = 4.936,8 daN και η παραμόρφωση γ= 2´56´´,4

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Από χαλύβδινη λαμαρίνα υλικού st37, πάχους t = 1mm, θα κάνουμε παραγωγή ροδελών, με διαστάσεις, εξωτερικής διαμέτρου D =18mm και εσωτερικής d = 9 mm. Ζητάμε να προσδιοριστεί η δύναμη κοπής $F_{\theta\rho}$.

Απάντηση

Η κοπή σε πρέσσα αναπτύσσει καθαρή διάτμηση. Η επιφάνεια που υφίσταται τις διατμητικές δυνάμεις είναι η επιφάνεια κοπής.

1. Η τάση θραύσης σε διάτμηση, είναι

$$\tau_{\theta\rho} = 0.80\sigma_{\theta\rho} \text{ ή } \tau_{\theta\rho} = 0{,}80 \times 37 = 29{,}6 \frac{daN}{mm^2}$$

2. Η επιφάνεια κοπής, είναι: $A = t\,(\pi \cdot D + \pi \cdot d)$

$$A = 1 \times (\pi \cdot 18 + \pi \cdot 9) = 84{,}8\ mm^2$$

3. Η δύναμη κοπής θα είναι: $F_{\theta\rho} = A \cdot \tau_{\theta\rho}$,

$$F_{\theta\rho} = 29{,}6 \times 84{,}8 = 2510{,}08\ daN$$

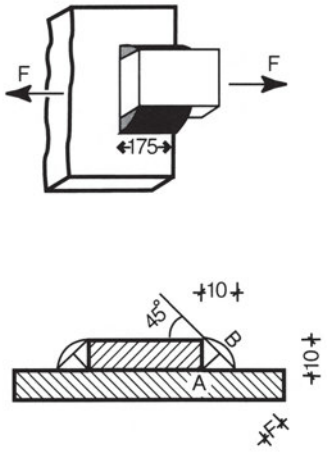
Άρα, η πρέσσα θα πρέπει να αναπτύξει δύναμη, τουλάχιστον ίση με

$$F_{\theta\rho} = 2510{,}08\ daN = 25{,}1\ KN,$$

για να κόψει αυτές τις ροδέλες.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Να υπολογισθεί η μέγιστη δύναμη στην οποία αντέχει η ηλεκτροσυγκόλληση, με τα γεωμετρικά στοιχεία του σχήματος 9.7γ. Η επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση είναι $\tau_{\varepsilon\pi} = 8\ daN/mm^2$.



Σχήμα 9.7.γ

Απάντηση

Συνήθης τρόπος συγκόλλησης είναι αυτός που δείχνει το σχήμα 9.7γ. Η συγκόλληση καταπονείται, σε μία τέτοια περίπτωση, σε διάτμηση. Η

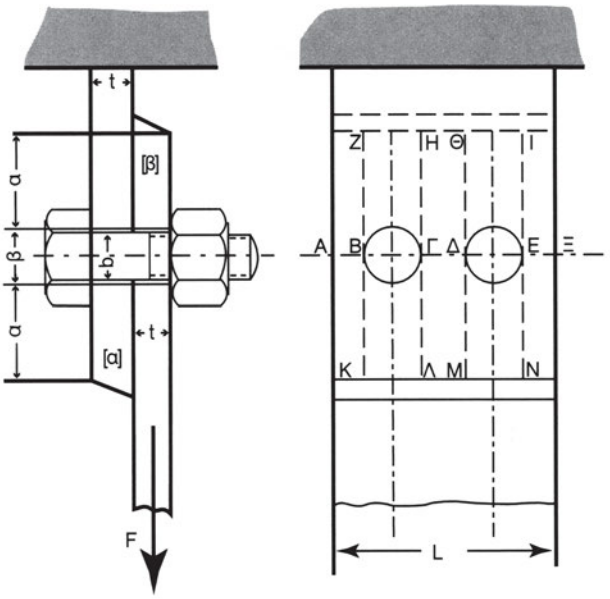
επιφάνεια που υφίσταται την καταπόνηση, είναι αυτή που αντιστοιχεί στο βέλος ΑΒ. Η ζητούμενη δύναμη είναι $F= \tau_{επ} \cdot A$

Έτσι:

1. Το εμβαδόν της επικίνδυνης διατομής είναι: $A_1 = \ell \times (AB)$, (AB) = 10ημ 45° = 7,07 mm και άρα $A_1 = 175 \times 7,07 = 1237 mm^2$, η δε επιφάνεια που αναλαμβάνει το φορτίο, είναι: $A = 2 \cdot A_1$
2. Για τη ζητούμενη δύναμη θα έχουμε F= 8×1237×2 = 19792 daN ή F = 179,9 KN

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ο

Να υπολογίσετε τις διαστάσεις που θα πρέπει να έχουν οι βίδες και τα λαμάκια του σχήματος 9.7.δ, όταν γνωρίζουμε ότι το σύστημα υπόκειται σε φορτίο εφελκυσμού F = 60 KN και ότι: τα λαμάκια έχουν, σε εφελκυσμό, $\sigma_{επ}$= 80000 KN/m^2 και οι βίδες, σε διάτμηση, $\tau_{επ}$= 60000 KN/m^2.



Σχήμα 9.7δ

Απάντηση

Οι βίδες καταπονούνται σε διάτμηση. Από τη σχέση 9.3.α έχουμε $\tau = \frac{F}{s}$ και επομένως, αν s η αναγκαία διατομή θα είναι:

$$60.000 = \frac{60}{s}$$

ή $$s = \frac{60}{60000} = \frac{1}{1000}\,m^2$$

άρα $$s = 10\ cm^2$$

Για κάθε βίδα, επομένως, η αναγκαία διατομή είναι 5 cm^2, οπότε η διάμετρος είναι:

$$60.000 = \frac{60}{s}$$

$$5 = \pi\frac{d^2}{4},$$

δηλαδή εδώ $$d = \sqrt{\frac{4\times 5}{3,14}} = \sqrt{6,38} = 2,53\,cm = 25,3\,mm$$

Από τις τυποποιημένες τώρα διατομές, έχουμε για τις βίδες, ως πλησιέστερη τιμή, την Μ27. Άρα, είναι $d_1 = 27mm$. Στα λαμάκια, αφήνοντας και τη σχετική χάρη, θα έχουμε διάμετρο της τρύπας β = 28mm. Για τις διαστάσεις που θα έχουν τα λαμάκια, παρατηρούμε τα εξής:

α. Η πείρα έχει δείξει ,ότι το καλύτερο πάχος, σε τέτοιες περιπτώσεις είναι:

$$t = \frac{d_1}{2} = \frac{27}{2} = 13,5\ mm$$

και άρα το πάχος στα λαμάκια, από τις τυποποιημένες διαστάσεις, θα είναι: t =14mm.

β. Για να βρούμε το πλάτος ℓ πρέπει να καθορίσουμε τις επικίνδυνες διατομές. Οι διατομές ΑΒ, ΓΔ, ΕΞ υπόκεινται σε εφελκυσμό, ενώ οι διατομές ΒΖ, ΒΚ, ΓΗ, ΓΛ, ΔΘ, ΔΜ, ΕΙ, ΕΝ σε διάτμηση, για κάθε λαμάκι. Εξετάζουμε το λαμάκι (β) έστω ότι: ΑΒ = ΓΔ = ΕΖ, τότε το εμβαδόν θα είναι $\varepsilon = 3\,(AB)\cdot t = 3\cdot(AB)\cdot 0,014$

Άρα, για τον εφελκυσμό θα έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{60}{80000}$$

ή $$3\times 0,014\times(AB) = \frac{60}{80000}$$

$$(AB) = \frac{60}{80000\times 3\times 0,014} = 0,01785\ m = 1,78\ cm = 17,8\ mm$$

Άρα, το πλάτος ℓ θα είναι:

$$\ell = 3 \times 17,8 + 2 \times 28 = 109,4 \text{ mm}$$

θα πάρουμε

$$\ell = 110 \text{ mm}$$

Επομένως, οι διαστάσεις της λάμας είναι: 14 × 110 mm

Θα υπολογίσουμε ,τώρα, τις επικίνδυνες διατομές σε διάτμηση. Για κάθε λάμα αυτές είναι τέσσερις (σχ. 9.7 δ) Για τη λάμα (β), έχουμε:

$$\alpha = (ZB) = (H\Gamma) = (\Delta\Theta) = (EI)$$

είναι λοιπόν $4 \times 0,014 \times \alpha = 60/60000$

ή $$\alpha = \frac{60}{60000 \times 4 \times 0,014} = 0,0178 \text{ m} = 1,78 \text{ cm} = 17,8 \text{ mm}$$

και ας το θεωρήσουμε για μεγαλύτερη ασφάλεια, ως α = 20 mm.

Για την πληρότητα του θέματος, στην περίπτωση σύνδεσης ελασμάτων, με περτσίνια ή βίδες, θα πρέπει να γίνεται και έλεγχος για τη σύνθλιψη στην άντυγα. Για τον έλεγχο της τάσης σύνθλιψης της άντυγας στα ελάσματα, κάνουμε χρήση της σχέσης:

$$\sigma_\alpha = \frac{F}{d \cdot t}$$

όπου σ_α: η τάση σύνθλιψης της άντυγας

F : το φορτίο

d : η διάμετρος της τρύπας του ελάσματος

t : το πάχος του ελάσματος

Ενώ θα πρέπει η τάση σύνθλιψης της άντυγας να ικανοποιεί τη σχέση :

$$\sigma_\alpha < 2\sigma_{\varepsilon\pi}$$

Στις συνθήκες της άσκησής μας είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = 80000 \frac{KN}{m^2}$$

$$F = \frac{60}{2} = 30KN$$

d = 28 mm

t = 14 mm

άρα $$\sigma_{\alpha} = \frac{30}{0,028 \times 0,014} = 76.530,6 \frac{KN}{m^2}$$

επομένως $$\sigma_{\alpha} = 76.530,6 \frac{KN}{m^2} < 2 \times 80000 \frac{KN}{m^2}$$



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΝΑΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

α. Σε διάτμηση καταπονείται ένα σώμα όταν δυνάμεις ενεργούν εγκάρσια σε διατομές του.

β. Το αποτέλεσμα της δράσης αυτών των δυνάμεων (των διατμητικών), είναι η ολίσθηση των διατομών .

γ. Το μέτρο της παραμόρφωσης είναι η γωνία γ, (γωνία ολίσθησης ή παραμόρφωσης).

δ. Το μέτρο συμπεριφοράς του υλικού, στην καταπόνηση της διάτμησης, είναι το μέτρο G: μέτρο διάτμησης ολίσθησης, ή δεύτερο μέτρο ελαστικότητας.

ε. οι ποσοτικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών :

F: διατμητική δρώσα δύναμη

s: διατομή καταπονούμενων υλικών

τ: διατμητική αναπτυσσόμενη τάση

γ: γωνία ολίσθησης ή παραμόρφωση

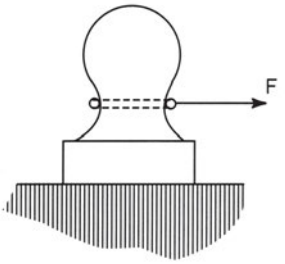
G: μέτρο διάτμησης ή ολίσθησης ή δεύτερο μέτρο ελαστικότητας είναι:

$$\tau = \frac{F}{s} \qquad G = \frac{\tau}{\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

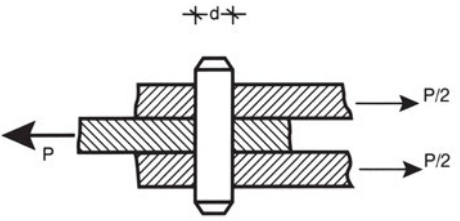
1. Να υπολογισθεί η τάση διάτμησης που αναπτύσσεται στο λαιμό χυτοσιδηράς δέστρας, που η διατομή της είναι κυκλικός δακτύλιος, με εξωτερική διάμετρο D = 40 cm και πάχος 3,5 cm, όταν σύρεται από εγκάρσια δύναμη F = 500 KN.

Απάντηση: T = 12,5 N/mm^2



Σχήμα 9.9.α

2. Τρία ελάσματα ενώνονται με ένα πείρο, που έχει διάμετρο=18 mm. Αν η επιτρεπόμενη τάση του υλικού, από το οποίο είναι φτιαγμένος ο πείρος, είναι $\tau_{ΕΠ}$ = 800 daN/cm^2, να υπολογισθεί το μέγιστο φορτίο, με το οποίο μπορούμε να καταπονήσουμε τον πείρο.

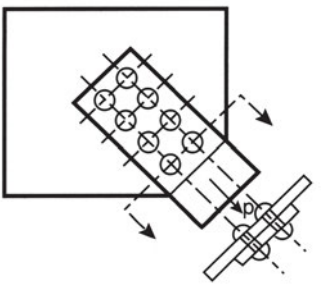


Σχήμα 9.9.β

Απάντηση: P_{max}=30,48 KN

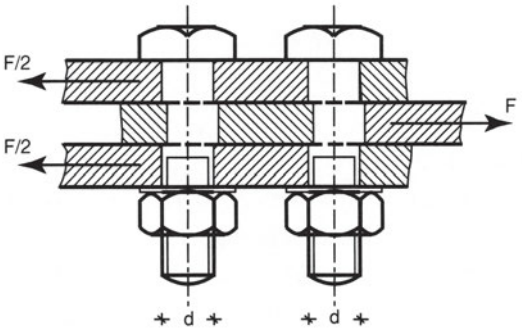
3. Ήλωση σε διπλή σειρά με 8 περτσίνια, καταπονείται από δύναμη F = 280 KN, σε διάτμηση. Αν το υλικό των περτσινίων είναι χάλυβας υλικού st42 και ο συντελεστής ασφάλειας 4, να υπολογισθεί η διάμετρος των περτσινίων.

Απάντηση: d = 26 mm



Σχήμα 9.9.γ

4. Με δύο βίδες διαμέτρου d, ενώνουμε τρία ελάσματα. Η σύνδεση καταπονείται από δύναμη F = 10000N. Το υλικό, από το οποίο είναι κατασκευασμένες οι βίδες, έχει όριο θραύσης, $\sigma_{\theta\rho}$ = 400N/mm^2. Να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος του κορμού, που πρέπει να έχουν οι βίδες. Συντελεστής ασφάλειας, έστω 4.



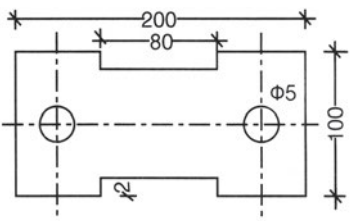
Σχήμα 9.9.δ

Απάντηση: d = 8mm

5. Θέλουμε να κόψουμε λάμα 10x60 mm σε μηχανικό ψαλίδι. Να υπολογισθεί η αναγκαία δύναμη κοπής, αν το υλικό της λάμας είναι st37.

Απάντηση: F =188,7 KN

6. Σε πρέσσα θα κόψουμε κομμάτια, όπως δείχνει το παραπλεύρως σχήμα, από λαμαρίνα πάχους t = 2 mm και υλικό με όριο θραύσης $\sigma_{\theta\rho}$ = 300 N/mm^2. Να υπολογίσετε την αναγκαία δύναμη κοπής, που πρέπει να αναπτύξει η πρέσσα.



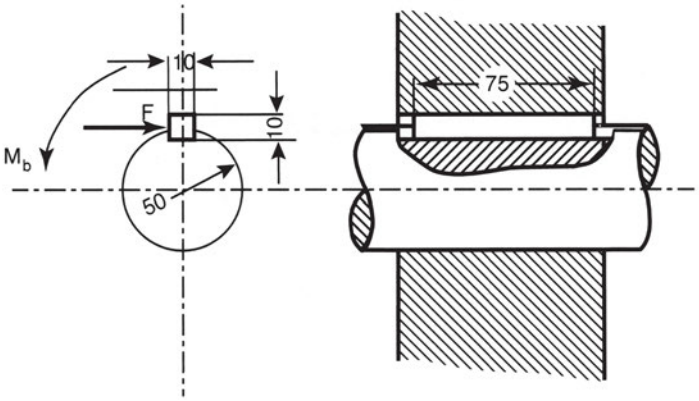
Σχήμα 9.9.ε

Απάντηση: $F_{\theta\rho}$ = 310,1 KN

7. Κόβουμε έναν άξονα με d = 6mm. Αν η τάση θραύσης είναι $\sigma_{\theta\rho}$= 370 N/mm^2, ποια είναι η δύναμη κοπής ;

Απάντηση: P_{κ} = 6,7 KN

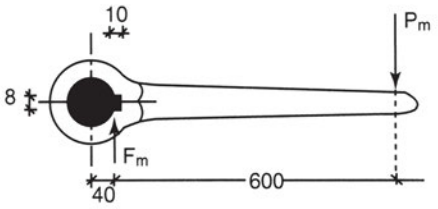
8. Μία σφήνα, ύψους 10 mm, πλάτους 10 mm και μήκους 75 mm, συνδέει έναν άξονα, διαμέτρου d = 50 mm, με μία τροχαλία που κινείται από μία ροπή M_t = 1 KNm. Να υπολογισθεί η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση στη σφήνα.



Σχήμα 9.9.ζ

Απάντηση: τ = 53,3 M_α

9. Με ένα μοχλό, μήκους 640 mm, στρέφουμε έναν άξονα, διαμέτρου 80 mm, με τον οποίο συνδέεται με μία σφήνα, πλάτους 8 mm και μήκους 30 mm. Αν το υλικό της σφήνας έχει επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση, 45 N/mm^2, να υπολογισθούν:



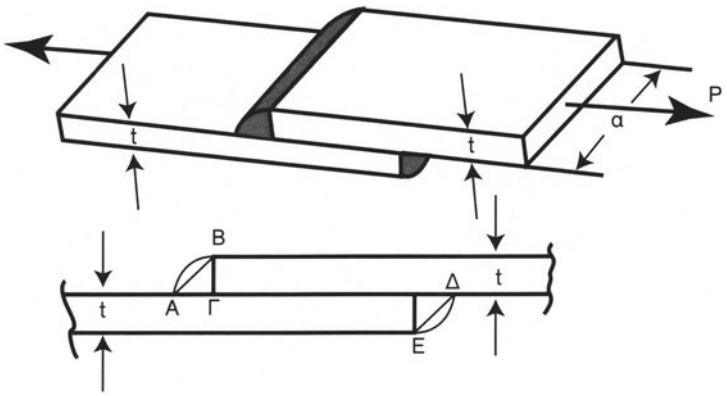
Σχήμα 9.9.η

α. Η μέγιστη δύναμη F_m, που αντέχει η σφήνα και

β. Η αντίστοιχη μέγιστη δύναμη P_m, που πρέπει να εφαρμόσουμε στο άκρο του μοχλού.

Απάντηση: F_m =10,8 KN και P_m = 675 N

10. Δύο πλάκες με το ίδιο πάχος t και πλάτος α, είναι κολλημένες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να ορίσετε τη μέγιστη διατμητική τάση στην κόλληση, που αντιστοιχεί σε φορτίο P.



Σχήμα 9.9.θ

Απάντηση: $\tau = \dfrac{0,707 \cdot P}{\tau \cdot \alpha}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΚΑΜΨΗ

10.1 Γενικά - Είδη κάμψεων

10.2 Τάσεις που αναπτύσσονται σε καμπτόμενη δοκό

10.3 Δοκός ίσης αντοχής σε κάμψη



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι, οι μαθητές:

- Να εξηγούν τις έννοιες και τα είδη των κάμψεων, καθώς επίσης και τη ροπή κάμψης. Λαμβάνοντας υπ' όψη τις προϋποθέσεις - παραδοχές που κάνουμε για να απλοποιήσουμε τα πολύπλοκα προβλήματα της αντοχής των υλικών.

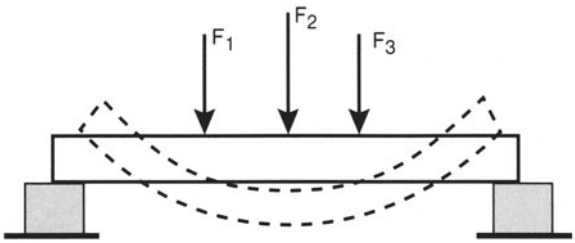
- Να κατανοήσουν τις τάσεις που αναπτύσσονται σε καμπτόμενη δοκό, την ελαστική γραμμή, το βέλος κάμψεως, τον τύπο της κάμψης εξάγοντας από τον θεμελιώδη αυτόν τύπο, χρήσιμα συμπεράσματα.

- Να υπολογίζουν τις τιμές των ακραίων τάσεων και να συμπεράνουν με απλά παραδείγματα ότι η κάμψη, σαν καταπόνηση, επιτρέπει στο υλικό ανάληψη δυνάμεων, πολύ μικρότερη από όση η θλίψη και ο εφελκυσμός.

- Να επιλέγουν τις διαστάσεις μιας δοκού εις τρόπον ώστε, η υπάρχουσα ροπή αντίστασης να είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη ροπή αντίστασης. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν, νομίζουμε, ότι εξυπηρετούν τους στόχους αυτούς και θα είναι σε θέση οι μαθητές να επιλύουν με ευχέρεια διάφορα τέτοια προβλήματα.

10.1 ΓΕΝΙΚΑ

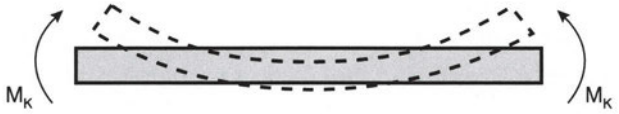
Εάν έχουμε μία ράβδο, που με την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων παραμορφώνεται, υπάρχει μια αλλαγή στη καμπυλότητα του άξονα της ράβδου αυτής και όπως λέμε αυτή οφείλεται σε καταπόνηση της ράβδου σε κάμψη.



Σχήμα 10.1α *Κάμψη ράβδου από σίδερο*

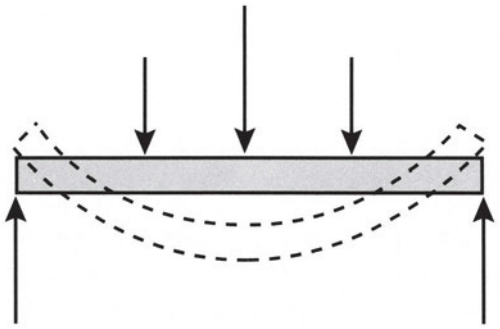
ΕΙΔΗ ΚΑΜΨΕΩΝ

1. **Καθαρή κάμψη** Σ' αυτήν, αναπτύσσεται μόνο ροπή κάμψης $M_κ$ με αποτέλεσμα η ράβδος να καμπυλώνεται.



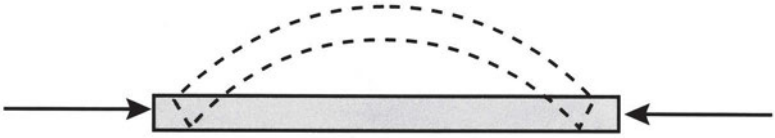
Σχήμα 10.1β *Καθαρή κάμψη*

2. **Εγκάρσια κάμψη** Σ' αυτήν, τα φορτία επενεργούν κάθετα στο γεωμετρικό άξονα της ράβδου, με αποτέλεσμα η ράβδος να καμπυλώνεται.



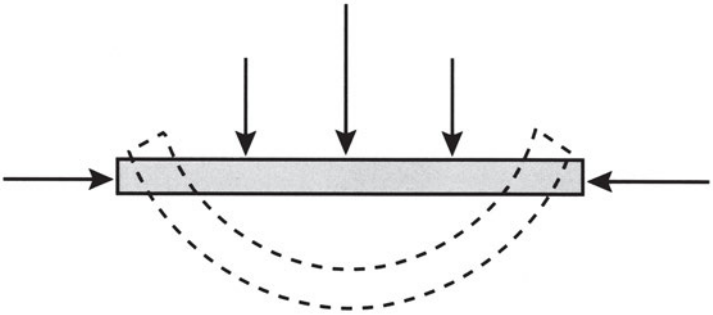
Σχήμα 10.1γ *Εγκάρσια κάμψη*

3. **Επιμήκης κάμψη** Σ' αυτήν, τα φορτία επενεργούν κατά μήκος του γεωμετρικού άξονα της ράβδου, με αποτέλεσμα η ράβδος να καμπυλώνεται.



Σχήμα 10.1δ *Επιμήκης κάμψη*

4. **Μεικτή κάμψη** Σ' αυτήν, τα φορτία επενεργούν έκκεντρα οριζόντια και κάθετα στον γεωμετρικό άξονα της ράβδου, με αποτέλεσμα η ράβδος να καμπυλώνεται.



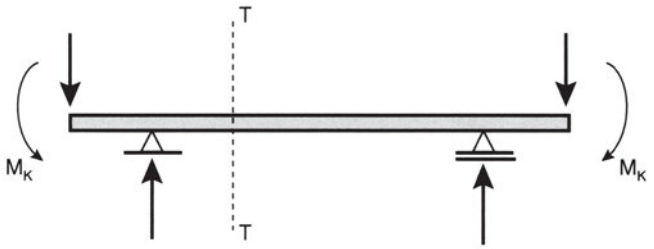
Σχήμα 10.1ε *Μεικτή κάμψη*

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε την απλή περίπτωση που αναπτύσσεται στη δοκό **μόνο ροπή κάμψεως $M_κ$**. Την τέμνουσα δύναμη την παραλείπουμε στους υπολογισμούς μας, γιατί είναι συνήθως μικρή.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις **τάσεις** που προκαλούνται, λαμβάνοντας υπ' όψη ορισμένες παραδοχές.

Λέμε, ότι μια δοκός καταπονείται σε απλή κάμψη, όταν φορτίζεται με ζεύγη ροπών ίσης και αντίθετης φοράς εφαρμοσμένων σε ένα επίπεδο, που περιέχει το γεωμετρικό άξονα της δοκού.

Στο σχήμα 9.1στ παρατηρούμε ότι η συνισταμένη των αριστερά ή δεξιά μιας τομής τ-τ δυνάμεων μετατρέπεται σε ζεύγος δυνάμεων –καμπτική ροπή $M_κ$– που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο προς τη διατομή (επίπεδο φόρτισης).



Σχήμα 10.1στ *Κάμψη δοκού*

Οι παραδοχές - προϋποθέσεις που λαμβάνουμε υπ' όψη μας για να απλοποιήσουμε τα πολύπλοκα προβλήματα της αντοχής των υλικών και για να ισχύουν οι τύποι που θα αναφέρουμε πιο κάτω, είναι:

α) Οι διαστάσεις της δοκού (h) σε σχέση με το μήκος της (l), είναι μικρές **(l ≥ 2h).**

β) Ο **άξονας** της δοκού είναι **ευθύγραμμος** πριν την παραμόρφωση· μετά, γίνεται καμπύλος **(ελαστική γραμμή)**.

γ) Η διατομή της δοκού έχει άξονα συμμετρίας και σ'όλο το μήκος της παραμένει αμετάβλητη.

δ) Τα φορτία που επενεργούν στη δοκό είναι κάθετα πάνω στον άξονα της δοκού και βρίσκονται μέσα στο επίπεδο συμμετρίας, προς το οποίο το άνυσμα της $M_κ$ (καμπτικής ροπής) είναι κάθετο.

ε) Λαμβάνεται υπ' όψη, ότι οι επιμηκύνσεις είναι ανάλογες των τάσεων –δηλ. ισχύει ο Νόμος του **Hooke**: σε κάθε ίνα της δοκού και το μέτρο ελαστικότητος στον εφελκυσμό, είναι το ίδιο με το μέτρο ελαστικότητος της θλίψης.

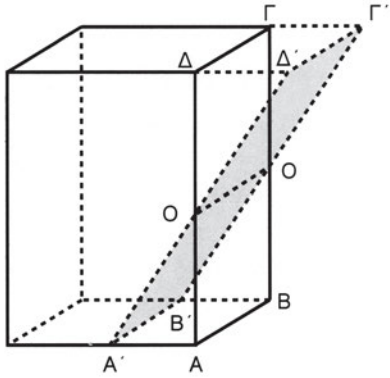
στ) Λαμβάνεται υπ' όψη, ότι οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση (Υπόθεση **Bernoulli**).

ε) Το υλικό της δοκού είναι ομογενές και ισότροπο.

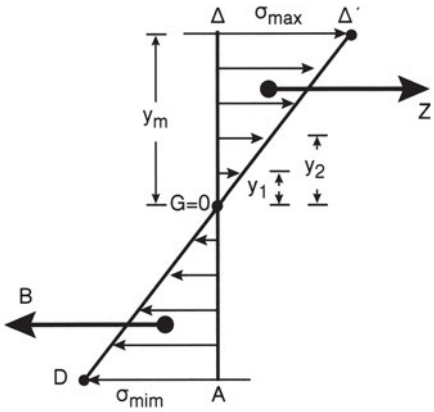
Στην κάμψη της δοκού υπό την επενέργεια των φορτίων που δέχεται, παρατηρήσαμε ότι **οι κάτω ίνες της επιμηκύνονται, ενώ οι επάνω ίνες της επιβραχύνονται** και κατά μήκος του άξονα της δοκού οι ίνες της δεν παθαίνουν καμιά παραμόρφωση (**ουδέτερος άξονας**).

Στις άπειρες εγκάρσιες διατομές της δοκού, αντιστοιχούν και άπειροι ουδέτεροι άξονες που αποτελούν ένα στρώμα, το λεγόμενο **"στρώμα των ουδετέρων ινών"** και βρίσκονται φυσικά στο όριο των επιμηκυνομένων και επιβραχυνομένων ινών, που αναφέραμε πιο πάνω.

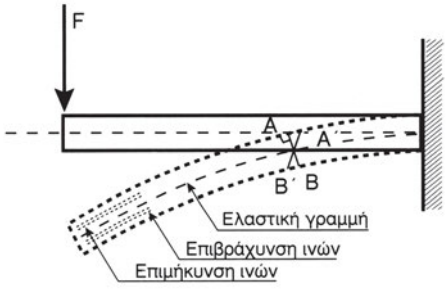
Όσον αφορά τον ουδέτερο άξονα μιας δεδομένης διατομής, πρέπει να αναφέρουμε ότι αυτός περνά από το κέντρο βάρους G της διατομής (παραλείπουμε την απόδειξη). Όσον αφορά το στρώμα των ουδετέρων ινών στην περίπτωση π.χ. ομογενούς ορθογωνικής διατομής, που δέχεται δυνάμεις εφαρμοζόμενες σ' ένα επίμηκες επίπεδο συμμετρίας, συμπίπτει με το άλλο επίπεδο συμμετρίας.



Σχήμα 10.1ζ *Ο-Ο Ουδέτερος άξονας. Διατομή Α΄Β΄Γ΄Δ΄ μιας καμπτόμενης δοκού*



Σχήμα 10.1η *Τάσεις μιας διατομής. Μεγίστη και ελαχίστη τάση.*



Σχήμα 10.1θ *Ελαστική γραμμή – Βέλος κάμψης*

10.2 ΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΝΤΑΙ ΣΕ ΚΑΜΠΤΟΜΕΝΗ ΔΟΚΟ

Έστω, ότι μια διατομή μιας δοκού καταπονείται σε κάμψη· υπό την επίδραση εξωτερικής ροπής Μ, αυτή περιστρέφεται γύρω από τον ουδέτερο άξονα. Όταν οι εσωτερικές δυνάμεις σ·α που εκδηλώνονται στη δοκό θα παράγουν ζεύγος ίσο και αντίθετο με το ζεύγος Μ τότε θα επέλθει ισορροπία στη διατομή. Συμβολίζουμε με σ την τάση της δύναμης, με α την επιφάνεια ενός στοιχειώδους στρώματος (σχ.10.2β), με M_σ το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων σ·α ως προς άξονα περιστροφής τον ουδέτερο άξονα 0-0.

Έτσι θα έχουμε:

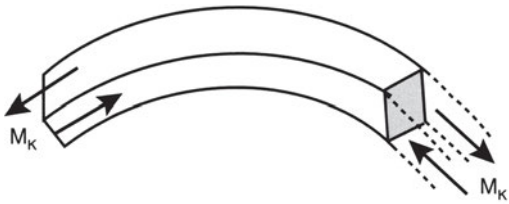
$$M_\sigma = M \qquad (1)$$

όπου

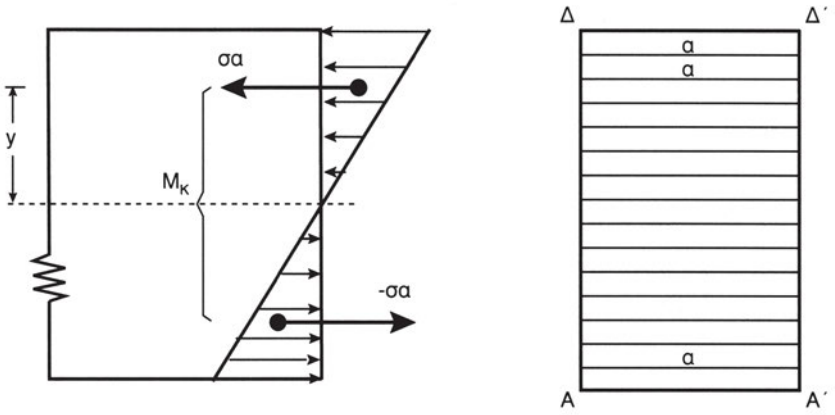
$$\Sigma\sigma\alpha \cdot \psi = M_\sigma \qquad (2)$$

Αν εξετάσουμε τις επιμηκύνσεις ή τις επιβραχύνσεις που εμφανίζονται στις διάφορες ίνες μιας δοκού, συμπεραίνουμε ότι θα είναι τόσο μεγαλύτερες, όσο θα είναι πιο απομακρυσμένες από τον ουδέτερο άξονα 0-0.

Οι παραμορφώσεις αυτές θα είναι (νόμος του Hooke) ευθέως ανάλογες με τις εσωτερικές δυνάμεις (τάσεις), με διάγραμμα τάσεων (απ' όπου φαίνονται οι αντίστοιχες κατανομές) αυτό του σχήματος 10.2β.



Σχήμα 10.2α *Διατομή στρεφόμενη περί τον ουδέτερο άξονα 0-0.*



Σχήμα 10.2β *Εσωτερικές δυνάμεις – τάσεις – σε διατομή της δοκού.*

Επειδή, απ' αυτό, οι τάσεις $σ_1$, $σ_2$, ..., $σ_v$ είναι ανάλογες των αποστάσεων y_1, y_2, ..., y_v των ινών από τον ουδέτερο άξονα 0-0, αν λ καλέσουμε το συντελεστή αναλογίας θα έχουμε:

$$σ = λ \cdot y \qquad (3)$$

Με βάση τις σχέσεις (2) και (3), η (1) γίνεται:

$$M_σ = Σ λy \cdot αy = λΣαy^2$$

Ο παράγοντας $Σαy^2$ δεν είναι άλλος από τη ροπή αδρανείας I_{0-0} της διατομής ως προς τον ουδέτερο άξονα 0-0· δηλαδή έχουμε:

$$M_σ = λ \cdot I_{0-0} = \frac{σ}{y} \cdot I_{0-0}$$

Άρα: $$σ = \frac{M}{J} \cdot y, \qquad \text{δηλαδή}$$

$$\boxed{σ = \frac{M_κ}{J} \cdot y} \qquad (10.2.1)$$

Από το θεμελιώδη αυτό τύπο της κάμψης αλλά και από όσα εκτενώς αναφέρθηκαν μπορούμε να συμπεράνουμε:

α) Στην κάμψη οι τάσεις δεν είναι οι ίδιες· με μηδενική τάση στον ουδέτερο άξονα 0-0, οι τάσεις αρχίζουν από μια ελαχίστη τιμή και καταλήγουν σε μια μεγίστη τιμή.

β) Αν τα μεγέθη I και $M_κ$ είναι δεδομένα και η μεταβλητή είναι η y (απόσταση y_i, κάθε ίνας), η σ θα γίνει μέγιστη, θα έχουμε δηλ. σ_{max}, αν γίνει μέγιστη και η y, πράγμα που συμβαίνει στις ακραίες ίνες.

γ) Οι τάσεις σε κάποια σημεία της δοκού βρίσκονται, αν βρούμε τα αντίστοιχα $M_κ$ και W.

δ) Αν σ_m καλέσουμε τη σ_{max} η οποία αναπτύσσεται στην ακραία ίνα –που απέχει από την ουδέτερη γραμμή, απόσταση y_m– τότε η τάση σ που αναπτύσσεται σε απόσταση ψ από την ουδέτερη γραμμή, θα είναι:

$$\sigma = \sigma_m \frac{y}{y_m} \qquad (10.2.2)$$

(ομοιότητα τριγώνων στο σχήμα 9.2β)

Οι **τιμές των ακραίων τάσεων** άρα θα είναι δύο όπου οι αποστάσεις της άνω και κάτω ίνας μιας διατομής από την ουδέτερη γραμμή θα είναι αντίστοιχα y_m και $y_μ$.

Έτσι θα έχουμε:

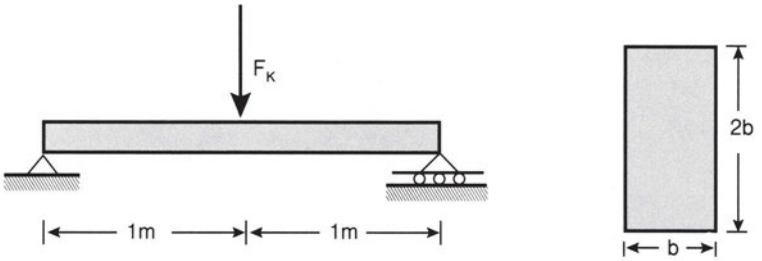
$$W_m = \frac{I}{y_m} \qquad (10.2.3)$$

$$W_μ = \frac{I}{y_μ} \qquad (10.2.4)$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι η κάμψη, σαν καταπόνηση, επιτρέπει στο υλικό ανάληψη δυνάμεων, πολύ μικρότερη από όση η θλίψη και ο εφελκυσμός.

Έστω η παρακάτω δοκός με

$$\sigma = \sigma_{επιτ} = 1400 \frac{daN}{cm^2} \qquad \text{και } b = 6 \text{ cm}$$



Σχήμα 10.2γ

Για την κάμψη από την F, έχουμε:

$$W_{υπαρ} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b\cdot(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2}{3}b^3$$

Άρα: $$W_{υπαρ} = \frac{2}{3}\cdot 6^3\,cm^3 = 144cm^3$$

Επειδή δε, $$M_{max} = \sigma_{επ}\cdot W_{υπαρχ.},$$

θα έχουμε: $$M_{max} = 1400\,\frac{daN}{cm^2}\cdot 144\,cm^3$$

Άρα: $$\underline{M_{max} = 2.016\,daN\cdot m}$$

Επειδή στην αμφιέρειστη δοκό έχουμε $M_{max} = \frac{F\cdot l}{4}$

τότε προκύπτει: $$\underline{F_κ = 4032\,daN} \qquad (1)$$

Για τον εφελκυσμό της δοκού, έχουμε: $F_{εφ} = \sigma\cdot A$, δηλαδή

$$F_{εφ} = 1400\,\frac{daN}{cm^2}\cdot 6\,cm\cdot 12\,cm$$

δηλαδή $$\underline{F_{εφ} = 100.800\,daN} \qquad (2)$$

Από τη σύγκριση των (1) και (2) σχέσεων έχουμε:

$$\underline{F_{εφ} = 25F_κ}$$

Δηλαδή, **η κάμψη επιτρέπει στο υλικό ανάληψη δυνάμεων, μικρότερων από όση ο εφελκυσμός** (ή η **θλίψη**).

10.3 ΔΟΚΟΣ ΙΣΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΣΕ ΚΑΜΨΗ

Από τη σχέση: $$\sigma = \frac{M_κ}{W}$$

συνάγουμε, ότι τη διατομή της δοκού πρέπει να την τοποθετήσουμε έτσι, ώστε να έχουμε τη μέγιστη δυνατή W ως προς τον κύριο άξονα κάθετο στα φορτία της δοκού. Τις διαστάσεις της διατομής προσδιορίζουμε ανάλογα με την τιμή της $M_κ$, ώστε ο παραπάνω λόγος να παραμένει σταθερός.

Η δοκός που η $σ_{max}$ είναι η ίδια σε κάθε διατομή της δοκού, την καλούμε **δοκό ίσης αντοχής σε κάμψη**.

Η διατομή της δοκού μεταβάλλεται από θέση σε θέση, όμως η τάση της δοκού είναι σταθερή. Η διατομή της δοκού στην οποία αντιστοιχεί η max$M_κ$, λέγεται επικίνδυνος διατομή.

ΓΕΝΙΚΑ

1. Ο γενικός τύπος που χρησιμοποιούμε για τη λύση των προβλημάτων, είναι

$$\sigma = \frac{M_κ}{W} \qquad (10.3.4)$$

2. Για τις διαστάσεις της διατομής, όταν αυτές ζητούνται, έχουμε

$$W_{απαιτ} = \frac{maxF_κ}{σ_{επ}} \qquad (10.3.5)$$

3. Η εκλογή των διαστάσεων μιας δοκού θα είναι τέτοια ώστε η υπάρχουσα ροπή αντίστασης, $W_{υπαρ.}$, να είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη ροπή αντίστασης $W_{απαιτ.}$

δηλ. $$W_{υπαρ} \geq W_{απαιτ} \qquad (10.3.6)$$

4. Από τις περιπτώσεις 2 και 3 γίνεται φανερό ότι

$$W_{υπαρ} = \frac{maxM_κ}{σ_{υπαρ}} \geq W_{απαιτ} \qquad (10.3.7)$$

δηλαδή για τον έλεγχο των τάσεων θα πάρουμε τον τύπο:

$$\sigma_{\upsilon\pi\alpha\rho} = \frac{\max M_{\kappa}}{W_{\upsilon\pi\alpha\rho}} \leq \sigma_{\epsilon\pi\iota\tau\rho} \qquad (10.3.8)$$

δηλ. για τη μεγίστη επιτρεπομένη ροπή κάμψης θα έχουμε:

$$\max M_{\kappa} = \sigma_{\epsilon\pi\iota\tau\rho} \cdot W_{\upsilon\pi\alpha\rho} \qquad (10.3.9)$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δοκός ορθογωνική 9×16 cm καταπονείται από δύο ίσες και αντίθετες ροπές M_K = 28.000 daN· cm.

Να βρεθούν οι τάσεις σ_1 και σ_2 που έχουμε σε μια διατομή της δοκού για y_1=4 cm και y_2=9 cm

Λύση

Έχουμε: $$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{9 \cdot 16^3}{12} cm^4 = 3.072 cm^4$$

Για y_1 = 4, έχουμε:

$$\sigma_1 = \frac{M_{\kappa}}{I} \cdot y_1 = \frac{28.000 daN \cdot cm \cdot 4cm}{3.072 cm^4}$$

Άρα: $$\sigma_1 = 36{,}46 \frac{daN}{cm^2}$$

Για y_2 = 9 cm, έχουμε:

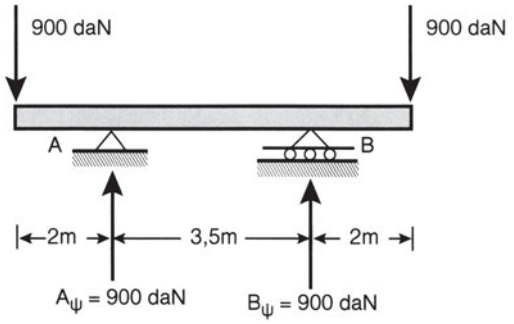
$$\sigma_2 = \frac{M_{\kappa} \cdot y_2}{I} = \frac{28.000 daN \cdot cm \cdot 9cm}{3.072 cm^4}$$

Άρα: $$\sigma_2 = 82{,}03 \frac{daN}{cm^2}$$

2. Δίδεται δοκός σιδερένια, διατομής διπλού ταυ, με

$$\sigma_{\epsilon\pi\iota\tau\rho}=1200 \frac{daN}{cm^2}$$

(σχήμα 10.4α). Να βρεθεί ο τύπος της σιδερένιας αυτής δοκού, ώστε να είναι ικανή να αντέξει τα φορτία της.



Σχήμα 10.4α

Λύση

Είναι $M_κ = 900\ daN \cdot 2m = 1800\ daN \cdot m$

Από τη σχέση:

$$W_{απαιτ} = \frac{max M_κ}{σ_{επ}}$$

Έχουμε:

$$W_{απαιτ} = \frac{1800\,daN \cdot m}{1200\,daN/cm^2} = 150 cm^3$$

Με τη βοήθεια πινάκων και για I_{16}, $W = 117\ cm^3$ και για I_{18}, $W = 161\ cm^3$. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι θα χρησιμοποιήσουμε τη δοκό I_{18}.

3. Σε δοκό, ξύλινης κατασκευής, διατομής 21×28 cm, να διαπιστώσετε ότι, αν η $σ_{επ} = 80\ daN/cm^2 = cm^2$, η δοκός βρίσκεται σε καλές συνθήκες ισορροπίας.

Λύση

Επειδή $M_κ = 1800\ daN \cdot m$ και $W = \frac{21 \cdot 28 cm^3}{6}$

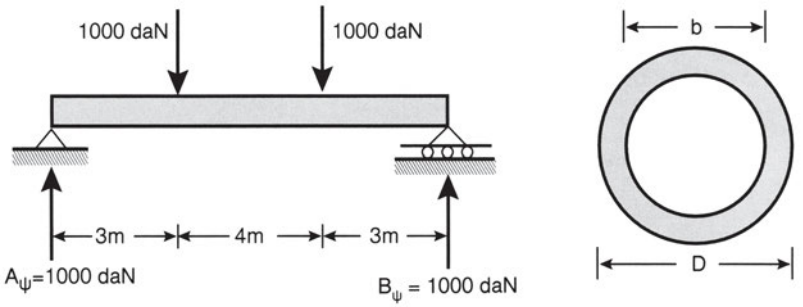
δηλ. $W = 2744\ cm^3$ και $\frac{M_κ}{W} \le σ_{επ}$

θα έχουμε:

$$\frac{M_κ}{W} = \frac{1800\ daN \cdot m}{2744 cm^3} = \frac{180000\,daN \cdot cm}{2744 cm^3} = 65{,}60\ \frac{daN}{cm^2} < 80\ \frac{daN}{cm^2}$$

Πράγματι η δοκός βρίσκεται σε καλές συνθήκες ισορροπίας.

4. Της δοκού, του σχήματος 9.4β, βρείτε τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής αν $\frac{D}{d} = \frac{10}{7}$, v = 5 και $\sigma_{διαρ}$ = 3500 at.



Σχήμα 10.4β

Λύση

Οι αντιδράσεις:

Ay = $B_ψ$ = 1000 daN και M_{max} = 1000 daN · 3m δηλ. M_{max} = 300.000 daN · cm.

Επειδή $\sigma_{επ} = \frac{\sigma_{διαρ}}{v}$, έχουμε: $\sigma_{επ} = \frac{3500\,daN/cm^2}{5} = 700\frac{daN}{cm^2}$

Από τη σχέση: $\frac{D}{d} = \frac{10}{7}$, έχουμε: d = 0,7 D

Από τη σχέση: $W = 0{,}1\frac{D^4 - d^4}{D}$,

έχουμε: $W = 0{,}1\frac{D^4 - (0{,}7)^4 D^4}{D} = 0{,}1D^3 - 0{,}024D^3 = 0{,}076D^3$

Από τη σχέση: $W = \frac{M_{max}}{\sigma_{επ}}$,

έχουμε: $0{,}076D^3 = \frac{300.000\,daN\cdot cm}{700\,\frac{daN}{cm^2}} = 428{,}57\,cm^3$

δηλαδή $D = \sqrt[3]{\frac{428{,}57\,cm^3}{0{,}076}} = \sqrt[3]{5639}\,cm$

Άρα: D = 17,8 cm και d = 12,46 cm

5. Δοκός από χάλυβα, ορθογωνικής διατομής 3x6 cm ανοίγματος i = 3 m φορτίζεται στο μέσον της με φορτίο F. Αν $\sigma_{επ\,χαλ} = 140\ N/mm^2$, να βρεθεί το φορτίο F.

Λύση

Για την ορθογωνική διατομή, έχουμε:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{3cm \cdot 6^2 cm^2}{6} = 18 cm^3$$

Από τη σχέση: $M_{max} = \sigma_{επ} \cdot W$,

έχουμε: $M_{max} = 140 \cdot 18 \cdot 10^3\ N \cdot mm = 252 \cdot 10^4\ Nmm = 2,52\ KN$

Από τη σχέση: $M_{max} = \frac{F \cdot l}{4}$ έχουμε: $F = \frac{4 \cdot 2,52}{3} KN$

Άρα: $\underline{F = 3,36\ KN}$

6. Στην αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 10.4γ να βρεθούν:

α) Οι αντιδράσεις στα σημεία στήριξης Α και Β

β) Το διάγραμμα [Q], τεμνουσών δυνάμεων

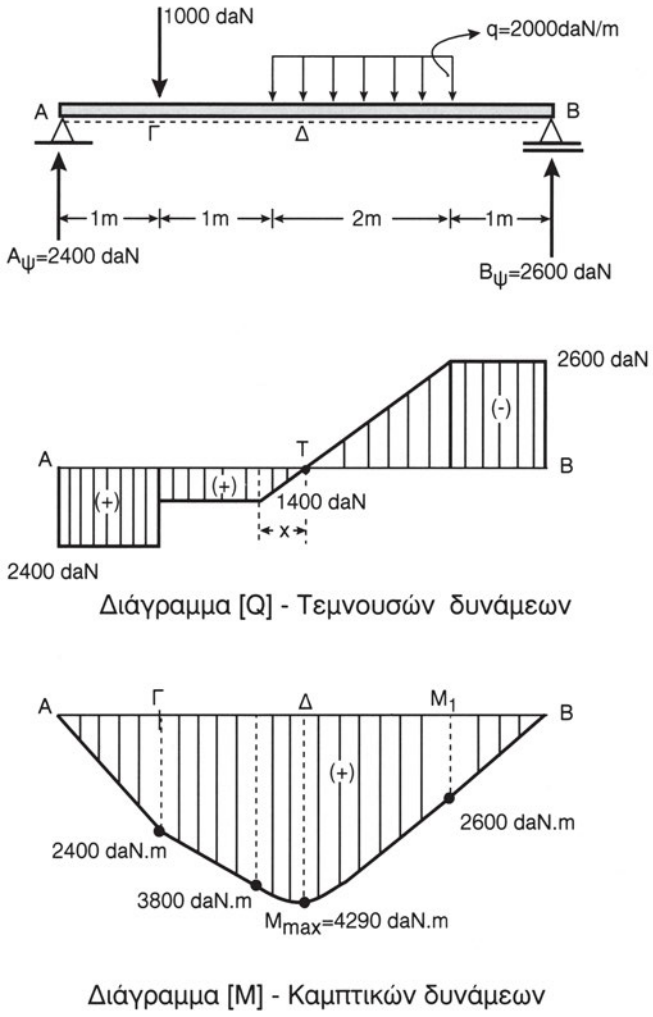
γ) Το διάγραμμα [Μ] καμπτικών ροπών

δ) Η μέγιστη ροπή κάμψης, M_{max}, και η θέση που αναπτύσσεται αυτή στη δοκό.

ε) Η $W_{απαιτ}$ της διατομής της δοκού

$$\sigma_{επιτρ} = 1000\ \frac{Kp}{cm^2}$$

Λύση



Σχήμα 10.4γ *Καταπόνηση της δοκού σε κάμψη*

Υπολογισμός Αντιδράσεων

α) $\Sigma F_x = 0, \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0, \quad A_y - 1000\ daN - 4000\ daN + B_\psi = 0$

$\Sigma M^{A}_{F_i} = 0, \quad 1000\ daN \cdot 1m + 4000\ daN \cdot 3m - 5mB_\psi = 0$

από την οποία προκύπτει: $\underline{B_\psi = 2600\ daN}$

και άρα: $\underline{A_{\psi} = 2400\ daN}$

δ) Από το διάγραμμα [Q], έχουμε:

$$x = \frac{Q}{q} = \frac{1400}{2000} m = 0,7 m$$

Από το διάγραμμα [M], έχουμε:

$$M_{max} = 3800\ daN \cdot m + \frac{1400 \cdot 0,7}{2}\ daN \cdot m$$

Άρα: $\underline{M_{max} = 4290\ daN \cdot m}$

ε) Έχουμε $\sigma_{επ} = \frac{M_{max}}{W}$ απ' όπου: $W = \frac{M_{max}}{\sigma_{επ}}$

$$W = \frac{429000\,daN \cdot cm}{1000\,daN / cm^2}$$

Άρα: $\underline{W = 429\ cm^3}$

7. Αν έχουμε μια δοκό από σκυρόδεμα που κάμπτεται πού τοποθετούμε τον χάλυβα; Στο κάτω, ή στο πάνω μέρος της δοκού;

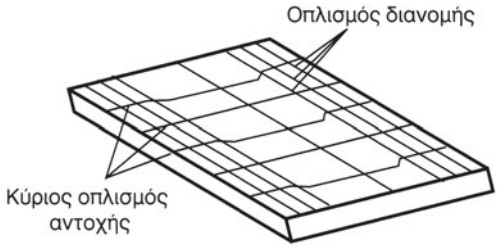
Λύση

Μας είναι γνωστό, ότι το κάτω μέρος της δοκού καταπονείται σε εφελκυσμό, ενώ το πάνω μέρος της σε θλίψη.

Ο χάλυβας έχει μεγαλύτερη αντοχή σε εφελκυσμό, απ' ό,τι το σκυρόδεμα (αυτό έχει μεγαλύτερη αντοχή σε θλίψη). Άρα, οι εφελκόμενες τάσεις θα αναληφθούν από τον χάλυβα και αυτός θα τοποθετηθεί στο κάτω μέρος της δοκού.

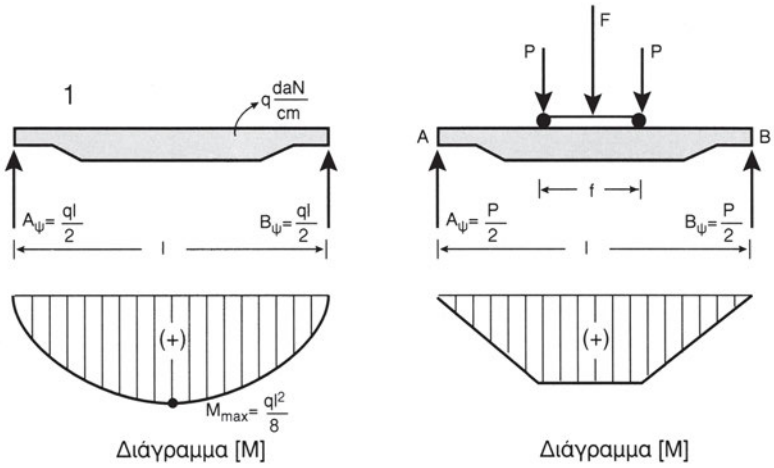


Σχήμα 10.4δ *Τοποθέτηση χάλυβα σε καμπτόμενη δοκό*



Σχήμα 10.4ε *Τοποθέτηση χάλυβα σε πλάκα*

8. Ανάλυση δυνάμεων που ενεργούν σε γερανογέφυρα



Σχήμα 10.4στ *Γερανογέφυρα*

α) Ο κύριος φορέας της γερανογέφυρας καταπονείται σε κάμψη. Ενεργούν επ' αυτού:

i) Το ίδιο βάρος του φορέα G,

ii) το κινητό φορτίο P με το ωφέλιμο βάρος Q συν το ίδιο βάρος του φορτίου G_0 και

iii) η πλευρική οριζόντια δύναμη, ίση με τη δύναμη πέδησης του φορέα. Έχουμε:

$$A_\psi = B_\psi \frac{q \cdot l}{2} \quad \text{και} \quad M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

β) Αν έχουμε κινητό φορτίο, που ενεργεί στο μέσον, τότε η δυσμενέστερη θέση φορτίσεως, προκύπτει για το φορτίο που βρίσκεται στο μέσον (του ανοίγματος). Έχουμε δε:

$$A_\psi = B_\psi = \frac{F}{2}$$

και

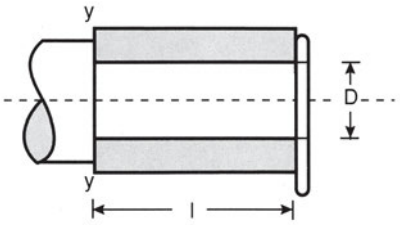
$$M_{max} = \frac{F}{2}\left(\frac{l-f}{2}\right) = \frac{F}{4}(l-f)$$

9. Στροφέας (σχ. 10.4ζ) καταπονείται με κατανεμημένο φορτίο P = 6000 daN. Το μήκος l του τριβέα είναι 18 cm και η επιτρεπόμενη πίεση επιφ. p = 20 daN/cm^2. Να βρεθούν:

α) η διάμετρος D του στροφέα

β) η καμπτική ροπή M_K στη θέση y - y

γ) η τάση κάμψης $\sigma_κ$ στη θέση y – y



Σχήμα 10.4ζ *Στροφέας καταπονούμενος σε κάμψη*

Λύση

α) Έχουμε $\frac{p}{\rho} = F$

Άρα $\frac{6000\,daN}{20\,daN/cm^2} = \underline{300\ cm^2 = F}$

και επειδή l·D = OF έχουμε

$$D = \frac{300\,cm^2}{18\,cm} = 16,67\,cm$$

β) Επειδή $M_κ = \frac{P \cdot l}{2}$, έχουμε: $M_K = \frac{6000daN \cdot 18cm}{2}$

άρα $M_κ$ = 54000daN

$$W = 0,1 \cdot D^3 = 0,1 \cdot 16,67^3 cm^3 = 463,24 cm^3$$

και επειδή: $\sigma_{\kappa} = \dfrac{M_{\kappa}}{W} = \dfrac{54000}{463,24}\dfrac{daN}{cm^2}$

Άρα, $\sigma_{\kappa} = 116,57 \dfrac{daN}{cm^2}$

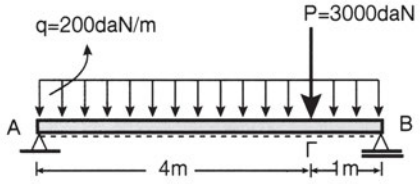
10. Στην αμφιέρειστη δοκό του σχήματος ζητούνται :

α) Το διάγραμμα [Q] .

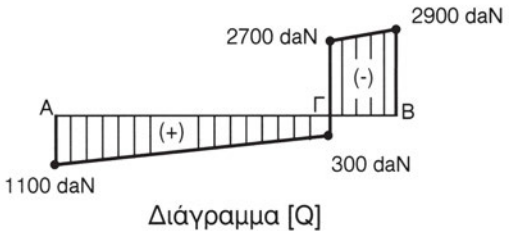
β) Το διάγραμμα [M].

γ) Οι διαστάσεις της ορθογωνικής διατομής της δοκού hxb, αν h = 2b και $\sigma_{\varepsilon\pi} = 240$ daN/cm^2.

δ) Σε ποια απόσταση από τη στήριξη Α βρίσκεται η δυσμενέστερη διατομή της δοκού και γιατί.

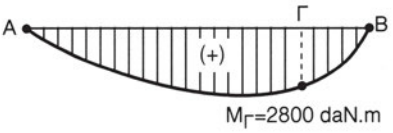


α)



Διάγραμμα [Q]

β)



Διάγραμμα [M]

Σχήμα 10.4η *Αμφιέρειστη δοκός καταπονούμενη σε κάμψη*

γ) $W_{απαιτ} = \dfrac{M_{max}}{\sigma_{\varepsilon\pi}}$ Άρα $W_{απαιτ} = \dfrac{2800\,daN \cdot 100cm}{240\,\dfrac{daN}{cm^2}}$

Άρα $W_{απαιτ} = 1166{,}7\ cm^3$

και από τη σχέση:

$$W_{απαιτ} = \frac{b \cdot h^2}{6}\ ,\ \text{έχουμε:}\ W = \frac{b \cdot (2b)^2}{6}$$

Επειδή

$$W_{απαιτ} = 1166{,}7\ cm^3,\ \text{έχουμε}\ 1166{,}7\ cm^3 = \frac{4b^3}{6}$$

η οποία μας δίνει

$$b = \sqrt[3]{1750}\,cm = 12\,cm$$

και άρα: $h = 2b = 24\ cm$

δ) Η δυσμενέστερη συνεπώς διατομή είναι το σημείο Γ, γιατί σ' αυτό έχουμε την M_{max} και τις μέγιστες τάσεις.



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΕΚΑΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Οι διάφορες διατομές μιας δοκού περιστρέφονται γύρω από ένα άξονα –τον ουδέτερο άξονα– που συμπίπτει με εκείνον του κέντρου βάρους των διατομών αυτών.

Οι περιστροφές αυτές παράγουν εφελκυσμό σε μερικές ίνες και παράγουν θλίψη σε κάποιες άλλες. Οι τάσεις αυτές είναι ευθέως ανάλογες με τις αποστάσεις y_i από τον ουδέτερο άξονα 0-0, και αντιστρόφως ανάλογες με τη ροπή αδρανείας των διατομών ως προς αυτόν τον άξονα.

- Κατά την κάμψη μιας δοκού, όταν φορτίζεται με ζεύγη ίσης ροπής και αντίθετης φοράς, έχουμε καμπύλωση της δοκού και μετατοπίσεις των επιπέδων διατομών που περιστρέφονται γύρω από τον ουδέτερο άξονα 0-0. Τα σημεία του ουδέτερου άξονα έχουν μηδενικές τάσεις.
  Στις εγκάρσιες διατομές της δοκού έχουμε και άξονες, που αποτελούν το στρώμα των ουδετέρων ινών.

- Τα παραπάνω ισχύουν, αν ισχύουν και μόνο τότε οι προϋποθέσεις - παραδοχές, που θέσαμε στην αρχή της εξέτασης του κεφαλαίου της κάμψης.

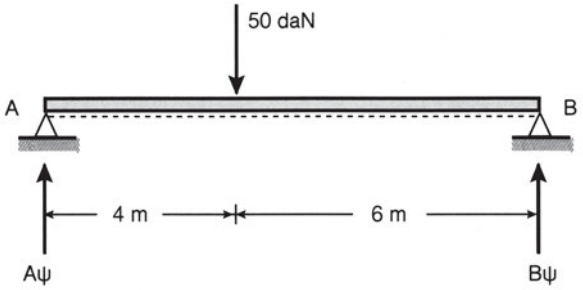
- Στις καμπτόμενες δοκούς, εξαντλείται η αντοχή **μόνο** των ακραίων ινών. Η περιοχή της διατομής που βρίσκεται κοντά στην ουδέτερη γραμμή, αναλαμβάνει πολύ - πολύ μικρές τάσεις και αυτός είναι ο λόγος που συγκεντρώνουμε μακριά από την ουδέτερη γραμμή το υλικό των δοκών και μάλιστα σε δύο ζώνες συμμετρικές και τις ενώνουμε με ένα λεπτό κορμό. (Το διπλό ταυ το χρησιμοποιούμε για να έχουμε οικονομία στο υλικό).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αμφιέρειστη δοκός ορθογωνικής διατομής 4×6 cm, δέχεται φορτίο 50 daN. Να βρεθούν:

α) Η σ_{max}

β) Οι ακραίες τάσεις στο μέσο της δοκού



Απάντηση: $\left(\sigma_{max}=500\ \frac{daN}{cm^2},\ \sigma = 417\ \frac{daN}{cm^2}\right)$

2. Αμφιέρειστη δοκός κυκλικής διατομής, έχει: l = 3 m, $\sigma_{επ}$ = 120 daN/cm^2 και ομοιόμορφη φόρτιση q = 60 daN/m καθ' όλο το μήκος της. Να ευρεθεί η ακτίνα R της κυκλικής διατομής.

Απάντηση: (R≃4cm)

3. Δίδεται μια άτρακτος από χυτοσίδερο. Το πηλίκο των διαμέτρων τους είναι 1,4 και $\sigma_{επ}$ = 800 at. Να βρεθεί το πάχος της διατομής.

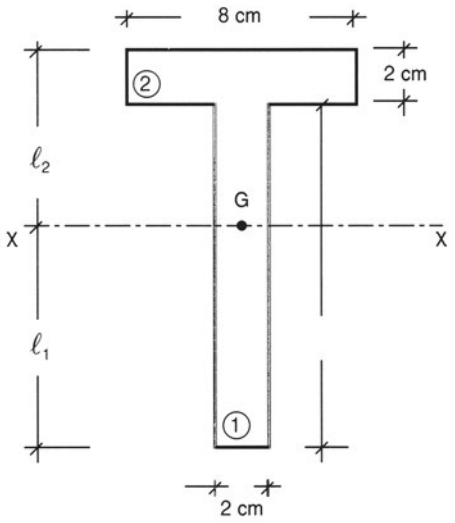
Απάντηση: (D≅20cm, d≅14cm)

4. Αμφιέρειστη δοκός μήκους l = 3,5 m και με ομοιόμορφη φόρτιση q = 200 daN/m αποτελείται από χαλύβδινο έλασμα με διατομή απλού ταυ.

Να βρεθούν στη δυσμενέστερη θέση (2) οι τάσεις σ_1 και σ_2 της πάνω και της κάτω ίνας.

(Να βρεθεί ότι: e_1 = 8,8 cm, e_2 = 5,2 cm, J = 763,74 cm^4,

$\sigma_2 = -208{,}5\ \frac{daN}{cm^2}$)



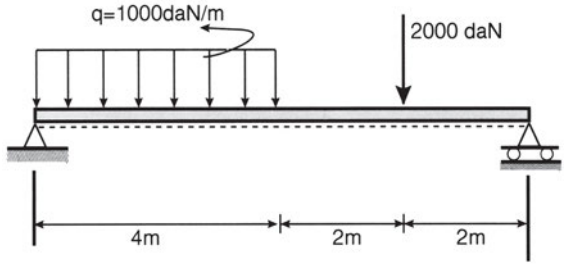
Απάντηση: $\sigma_1 = 353 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$

5. Στην αμφιέρειστη δοκό να βρεθούν:

α) Οι A_ψ , B_ψ

β) Τα διαγράμματα [Q], [M]

γ) Η μέγιστη ροπή κάμψης maxM_K και η θέση που αναπτύσσεται στη δοκό καθώς και αντίστοιχη max σ, αν η ροπή αντίστασης της διατομής είναι: W = 1000 cm^3.



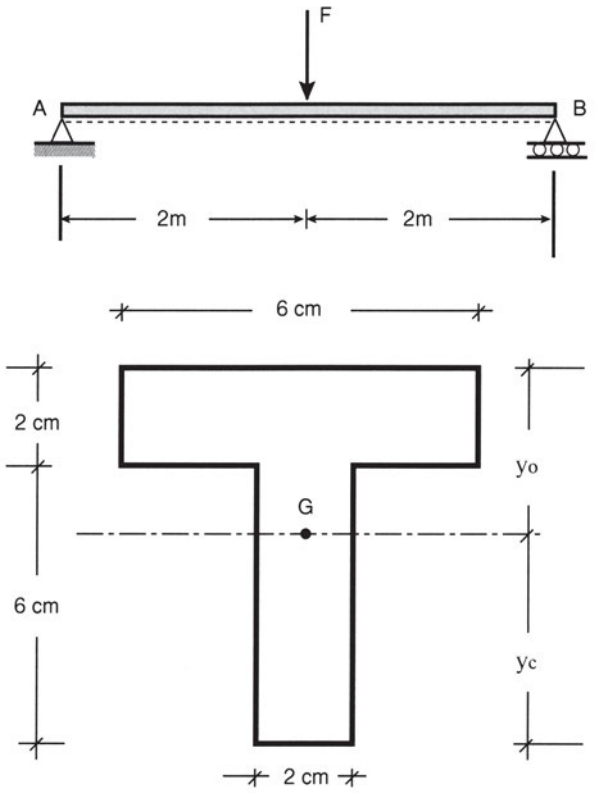
Απάντηση: (A_ψ = 3500 daN, B_ψ = 2500 daN, max M_κ = 6125 daN·m, max σ = 612,5 daN/cm^2)

6. Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος φέρει άγνωστο φορτίο F. Η διατομή της δοκού είναι απλό ταυ. Να βρεθούν:

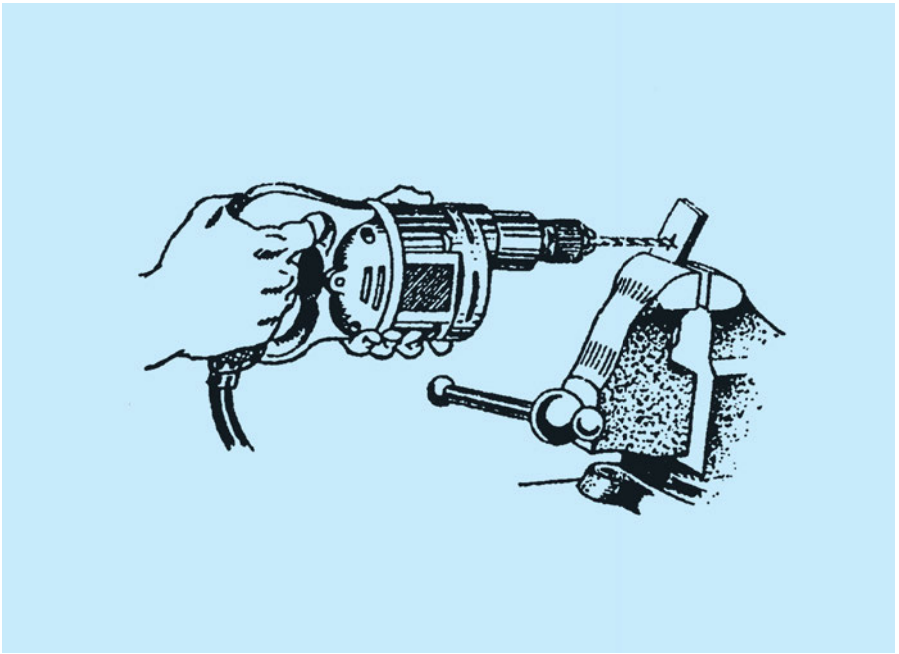
α) Η θέση του K·B της διατομής.

β) Οι ροπές αντίστασης της πάνω και κάτω ίνας της διατομής αφού βρεθεί η ροπή αδρανείας ως προς τον κεντροβαρικό οριζόντιο άξονα.

γ) Η τιμή του μέγιστου φορτίου F που μπορεί να φέρει η δοκός, αν το υλικό της έχει την ίδια αντοχή σε εφελκυσμό και θλίψη, με $\sigma_{επ}$ = 100 daN/cm^2.



Απάντηση: (y_o =3cm, I_x=136 cm^4, W_c=27,2 cm^3, W_o = 45,3 cm^3, F=453 daN έλεγχος επί της άνω ίνας, F = 272 daN έλεγχος επί της κάτω ίνας, F_{max} = 272 daN)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ **11**

ΣΤΡΕΨΗ

11.1 Γενικά

11.2 Η παραμόρφωση και οι τάσεις στην στρέψη

11.3 Η στρεπτική ροπή και οι σχέσεις της με τις τάσεις και τις παραμορφώσεις

11.4 Η ιδιομορφία της στρέψης

11.5 Τύπος για την τάση και την παραμόρφωση σε διάφορες διατομές φορέων κατά τη στρέψη

11.6 Υπολογισμοί ατράκτου σε στρέψη

11.7 Εφαρμογές

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Οι μαθητές:

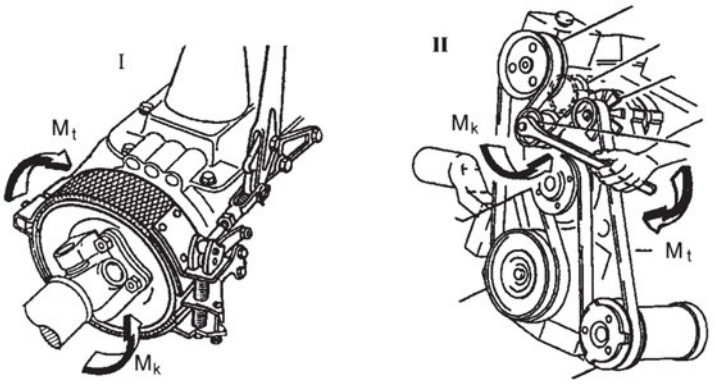
- Να εξηγούν την έννοια της στρέψης και να γνωρίζουν την ιδιομορφία της.
- Να μάθουν τη θεμελιώδη εξίσωση της στρέψης
- Να εξηγούν τη σχέση, μεταξύ της ισχύος και της ροπής περιστροφής
- Να υπολογίζουν τη μέγιστη ισχύ, που μπορεί να μεταδοθεί από ένα άξονα.
- Να γνωρίζουν υπολογισμό ατράκτου σε στρέψη.

11.1 ΓΕΝΙΚΑ

Όταν φρενάρουμε ένα αυτοκινούμενο όχημα, π.χ. αυτοκίνητο, μηχανάκι, με τους μηχανισμούς της πέδης (φρένου), συγκρατούμε τον κινούμενο άξονα, σε κάποιο κατάλληλα διαμορφωμένο σημείο, έτσι ώστε να τον αναγκάσουμε να σταματήσει την περιστροφή του.

Πάνω στον άξονα, λοιπόν, ασκούνται δύο αντίθετες δράσεις. Η $M_κ$ της μηχανής, που τον κινεί και η M_t του φρένου, που τον σταματά, (σχ.11.1αΙ). Επομένως, είναι φυσική συνέπεια, ότι ο άξονας καταπονείται, από αυτές τις δράσεις.

Ανάλογη καταπόνηση υφίσταται και ένας φυτευτός κοχλίας (μπουλόνι), όταν τον σφίγγουμε (σχ. 11.1αΙΙ).



Σχήμα 11.1.α *Περιπτώσεις εμφάνισης στρεπτικής καταπόνησης*

Ο κοχλίας αυτός, αφενός υφίσταται την αντίσταση του υλικού, αφού έχει τερματίσει την διαδρομή του και αφετέρου τη δράση M_t του κλειδιού, που τον σφίγγει. Υπάρχουν πολλά τέτοια παραδείγματα καταπόνησης στοιχείων κατά τη λειτουργία των μηχανών, ή τη συναρμολόγηση, γενικά, των κατασκευών.

Στις δύο περιπτώσεις, που αναφέρθηκαν, αλλά και σε όσες ανάλογες μπορούμε να εξετάσουμε, παρατηρούμε, ότι υπάρχει η περιστροφική κίνηση, ή η τάση, για περιστροφική κίνηση. Αλλά περιστροφική κίνηση έχουμε, ως αποτέλεσμα δράσεως ροπών, πάνω σ' ένα σώμα.

Στις περιπτώσεις που είδαμε, του άξονα δηλαδή και του κοχλία, είναι προφανές, ότι ενεργούν δύο ροπές.

Στον άξονα έχουμε :

α) την κινητήρια ροπή $M_κ$, προερχόμενη από τη μηχανή

β) την ανθιστάμενη ροπή M_t προς την κινητήρια, προερχόμενη από το φρένο.

Στον κοχλία έχουμε :

α) την κινητήρια ροπή $M_κ$, προερχόμενη από το κλειδί,

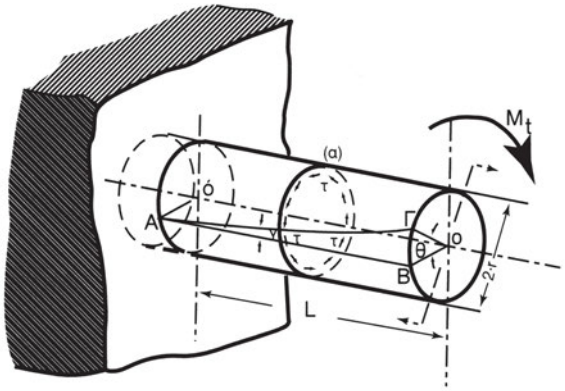
β) την ανθιστάμενη M_t, προς την κινητήρια, προερχόμενη από το σώμα.

Είναι δεδομένο, ότι τη στιγμή που παύει η κίνηση, οι δύο αυτές αντίφορες ροπές είναι κατά μέτρο, ίσες. Στις περιπτώσεις αυτές, λέμε, ότι τ**ο σώμα καταπονείται σε στρέψη.**

11.2 Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΤΡΕΨΗ

Ας δούμε μία απλοποιημένη περίπτωση καταπόνησης σε στρέψη.

Στο σχήμα 11.2.α, έχουμε μία ράβδο, κυκλικής διατομής, ακτίνας r (ένα κύλινδρο), που είναι πακτωμένη κατά το ένα άκρο της, ενώ στο άλλο, σε απόσταση ℓ εφαρμόζεται μία ροπή M_t, κάθετη στον άξονα της ράβδου.



Σχήμα 11.2.α *Η παραμόρφωση ράβδου κυκλικής διατομής καταπονούμενης σε στρέψη*

Παρά το γεγονός ότι η εξεταζόμενη περίπτωση είναι απλοποιημένη, εντούτοις είναι πολύ κοντά στη μηχανολογική πράξη, (π.χ. στους άξονες, στις ατράκτους κ.λπ.).

Στη ράβδο του σχήματος 11.2.α, πριν εφαρμόσουμε τη ροπή M_t, χαράζουμε μία γενέτειρα, την ΑΒ. Έχοντας υπόψη, ότι και εδώ, στη στρέψη, ισχύει ο νόμος του Hooke και ότι μπορούμε, ακόμη, να υποθέσουμε, ότι το υλικό της ράβδου είναι “ομογενές” και “ισότροπο”, τότε, μπορούμε να δεχθούμε, ότι κατά την παραμόρφωση της ράβδου, από την καταπόνηση σε στρέψη, ισχύουν τα παρακάτω:

α) Όλες οι κάθετες προς τον άξονα, διατομές, παραμένουν επίπεδες.

β) Οι ακτίνες των διατομών παραμένουν ευθείες.

γ) Οι αποστάσεις μεταξύ των διατομών, παραμένουν σταθερές.

Μετά από τα παραπάνω, εφαρμόζοντας τη ροπή M_t (σχ. 11.2α) στο ελεύθερο άκρο της ράβδου, το πείραμα δείχνει, ότι η γενέτειρα, ΑΒ, παίρνει τη θέση της ΑΓ. Με τις παραδοχές που έχουμε κάνει, είναι προφανές, ότι οι διατομές ολισθαίνουν μεταξύ τους. Άρα, ισχύουν όσα είπαμε στο κεφάλαιο της διάτμησης, και έτσι σε κάθε διατομή, (π.χ. στην (α) του σχήματος 11.2.α) θα εμφανίζονται οι διατμητικές τάσεις τ, άρα η γωνία που σχηματίζει

η αρχική με την τελική θέση της γενέτειρας ΑΒ, δηλαδή η γωνία ΒΑΓ = γ, είναι η γωνία παραμόρφωσης, που προκαλεί η διάτμηση.

Επομένως, η αντίστοιχη τάση τ θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{\tau}{\gamma} = G \qquad (11.2.\alpha)$$

όπου G, είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού της ράβδου.

Οι παραμορφώσεις των φορέων μέσα στα όρια ισχύος του νόμου του Hooke, είναι πολύ μικρές. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε το σχήμα ΑΒΓ, σαν ορθογώνιο τρίγωνο.

Τότε θα έχουμε: $(ΒΓ) = (ΑΒ)\ εφγ$ (11.2.β)

και επειδή η γωνία γ είναι πολύ μικρή, είναι εφγ = γ εφόσον η γωνία γ μετράται σε rad,

οπότε η σχέση 11.2.α γράφεται:

$$(ΒΓ) = \ell \cdot \gamma \qquad (11.2.\gamma)$$

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε, ότι για το μήκος του τόξου ΒΓ, ισχύει η σχέση

$$(ΒΓ) = r \cdot \theta \qquad (11.2.\delta)$$

όπου θ = η γωνία περιστροφής.

Από τις σχέσεις 11.2.γ και 11.2.δ έχουμε

$$\ell \cdot \gamma = r \cdot \theta,$$

ή, λύνοντας ως προς γ, έχουμε

$$\gamma = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) r \qquad (11.2.\varepsilon)$$

Η σχέση αυτή συνδέει τα στοιχεία της γεωμετρίας του φορέα, (το μήκος ℓ και την ακτίνα r της διατομής), με το αποτέλεσμα της δράσης της στρεπτικής ροπής, δηλαδή την παραμόρφωση, που είναι η γωνία παραμόρφωσης γ και η γωνία στροφής θ.

Από τη σχέση 11.2.ε μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

Η γωνία παραμόρφωσης γ, είναι:

α) ανάλογη προς την απόσταση r από τον άξονα της ράβδου

β) ανάλογη προς τη γωνία στροφής θ που προκαλεί η στρεπτική ροπή M_t

γ) αντιστρόφως ανάλογη προς το μήκος ℓ της ράβδου, από τη θέση της

πάκτωσης μέχρι τη θέση εφαρμογής της ροπής M_t.

Τη σχέση 11.2.α, λύνοντάς την ως προς το γ, μπορούμε να τη γράψουμε και ως

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad (11.2.\zeta)$$

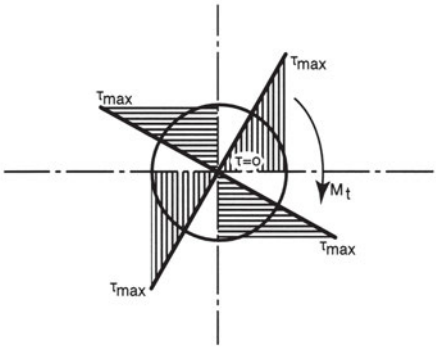
Συνδυάζοντας έτσι τη σχέση 11.2.ε με τη σχέση 11.2.ζ, έχουμε:

$$\frac{\tau}{G} = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) r \qquad (11.2.\eta)$$

Η σχέση αυτή συνδέει την τάση τ και τη γωνία στροφής θ, με τα γεωμετρικά στοιχεία της ράβδου.

Επίσης, από την ίδια σχέση 11.2.η φαίνεται ότι η τάση τ και η ακτίνα r (η απόσταση δηλαδή από τον άξονα της ράβδου) σε μία διατομή, είναι ποσά ανάλογα. Άρα, η τάση τ, θα έχει μηδενική τιμή στον άξονα της ράβδου και μέγιστη στην περιφέρεια.

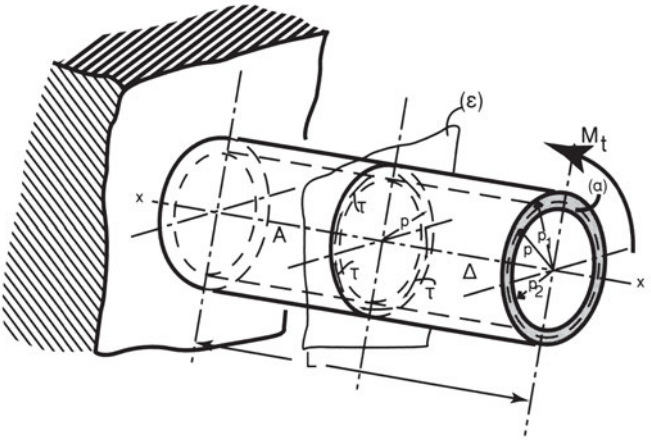
Στο σχήμα 11.2β φαίνεται η διανομή των τάσεων στην κυκλική διατομή.



Σχήμα 11.2.β *Η διανομή των τάσεων σε κυκλική διατομή*

Σημείωση: Για την καλή λειτουργία των μηχανών, η γωνία θ, δεν πρέπει να υπερβαίνει ορισμένα όρια, έστω και αν ο άξονας αντέχει, την καταπόνηση. Ένα κριτήριο είναι θ ≤ 15΄/m = 0΄,25/m. Ένα άλλο κριτήριο είναι αν d η διάμετρος του άξονα, θ ≤ 1°/20·d.

11.3 Η ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΚΑΙ ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕ ΤΙΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ



Σχήμα 11.3.α *Οι σχέσεις της στρεπτικής ροπής M_t με τις τάσεις και τις παραμορφώσεις, μέσα στα όρια του νόμου του Hooke.*

Έστω ένας λεπτότοιχος σωλήνας (σχ. 11.3α), έτσι που να μπορούμε, χωρίς σοβαρή απόκλιση από τη πραγματικότητα, να πούμε ότι

$$\rho_1 \approx \rho_2 \approx \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho$$

όπου ρ_1, ρ_2, ρ η εξωτερική, η εσωτερική και η μέση τιμή, αντίστοιχα, της ακτίνας της κάθετης διατομής, προς τον άξονα του σωλήνα.

Έστω το εμβαδόν του δακτυλίου της διατομής αυτής ίσον με α.

Έστω, ότι ο σωλήνας αυτός, είναι πακτωμένος στο αριστερό άκρο του, ενώ στο δεξιό εφαρμόζεται μία ροπή M_t, κάθετη προς τον άξονα του σωλήνα. Το σύστημα είναι σε ισορροπία. Ας θεωρήσουμε μία τομή, με το επίπεδο (ε), κάθετη προς τον άξονα του σωλήνα. Εξετάζουμε το δεξιό τμήμα Δ. Για να παραμείνει αυτό σε κατάσταση ισορροπίας, θα πρέπει η ροπή των τάσεων που αναπτύσσονται στην διατομή της τομής, να εξισορροπεί τη ροπή M_t, κάθετη προς τον άξονα του σωλήνα.

Επειδή, όπως είπαμε παραπάνω, ο σωλήνας είναι πολύ λεπτότοιχος, η διανομή των τάσεων στην επιφάνεια της διατομής της τομής, θα είναι ομοιόμορφη. Επομένως, η δύναμη που ασκείται στη διατομή της τομής, θα είναι

$$f = \tau \cdot \alpha$$

και η ροπή, της δύναμης αυτής, ως προς τον άξονα του σωλήνα, θα είναι:

$$M_f = f \cdot \rho = \tau \cdot \alpha \cdot \rho \qquad (11.3.\alpha)$$

Άρα, για την ισορροπία του δεξιού τμήματος Δ, αφού πρέπει να είναι:

$$M_f = M_t \qquad (11.3.\beta)$$

θα έχουμε, συνδυάζοντας την 11.3.α με την 11.3.β

$$\tau \cdot \alpha \cdot \rho = M_t$$

ή
$$\tau = \frac{M_t}{\alpha \cdot \rho} \qquad (11.3.\gamma)$$

Αν τώρα διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της 11.3.γ με το ρ, θα έχουμε την έκφραση:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{M_t}{\alpha \cdot \rho^2} \qquad (11.3.\delta)$$

Αλλά, κατά τα γνωστά (κεφ. 2), το μέγεθος $I_\rho = \alpha \cdot \rho^2$, είναι η ροπή αδράνειας της διατομής του σωλήνα, (που είναι δακτύλιος) και άρα η 11.3.δ γράφεται:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{M_t}{I_\rho} \qquad (11.3.\varepsilon)$$

Κατ' αναλογία προς την σχέση 11.3.η της προηγούμενης παραγράφου,

$$\frac{\tau}{G} = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) r$$

μπορούμε να έχουμε την έκφραση:

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) G$$

οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) G = \frac{M_t}{I_\rho} \qquad (11.3.\zeta)$$

Τις παραπάνω αυτές σχέσεις, αποδείξαμε για την περίπτωση του σωλήνα του σχήματος 11.3.α, με τις προϋποθέσεις που θέσαμε.

Στην περίπτωση τώρα που έχουμε μία συμπαγή κυκλική ράβδο - συνήθης περίπτωση αξόνων και ατράκτων - τότε, η διατομή δεν είναι δακτύλιος αλλά κυκλικός δίσκος και αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ίδιοι τύποι. Δηλαδή, είναι:

$$\frac{\tau}{r} = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) G = \frac{M_t}{I_r} \qquad (11.3.\eta)$$

όπου r, η ακτίνα της διατομής και

από την 11.3.η έχουμε:

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_r} = \frac{M_t}{I_r / r}$$

αλλά

$$\frac{I_r}{r} = W_r$$

είναι η πολική αντίσταση της διατομής και άρα

$$\tau = \frac{M_t}{W_r} \qquad (11.3.\theta)$$

Για κυκλική διατομή με d =2r, ισχύει:

$$W_r = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}$$

και από τη σχέση 11.3.η έχουμε για την τάση:

$$\tau = \frac{M_t}{W_r} = \frac{16M_t}{\pi d^3} = \frac{2M_t}{\pi r^3} \qquad (11.3.\iota)$$

και για τη γωνία στροφής θ μεταξύ δύο διατομών μίας ατράκτου που απέχουν απόσταση, θα έχουμε:

$$\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_\rho} = \frac{32M_t \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{2M_t \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot r^4} \qquad (11.3.\kappa)$$

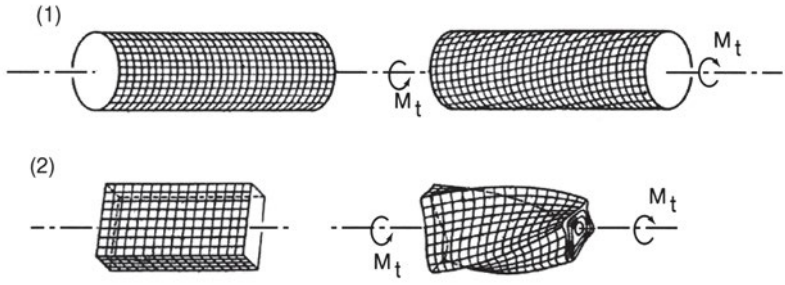
Έτσι, οι σχέσεις 11.3.ι και 11.3.κ δίνουν την τάση τ και τη γωνία θ, ως συνάρτηση της στρεπτικής ροπής M_t, συνδέοντάς τις με τα γεωμετρικά στοιχεία της ατράκτου.

11.4 Η ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΑ ΤΗΣ ΣΤΡΕΨΗΣ

Στα διάφορα είδη των καταπονήσεων που εξετάσαμε μέχρι τώρα δεν λάβαμε υπόψη το γεωμετρικό σχήμα της διατομής, του καταπονούμενου στοιχείου.

Πραγματικά, το σχήμα της διατομής, δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη και τη διανομή των τάσεων σ' αυτήν, ούτε συνεισφέρει υπολογίσιμα στο είδος και στο μέγεθος των παραμορφώσεων. Η διαπίστωση αυτή οφείλεται στο γεγονός, ότι μέσα στα όρια του νόμου του Hooke, οι διατομές παραμένουν επίπεδες, κατά τις παραμορφώσεις των φορέων.

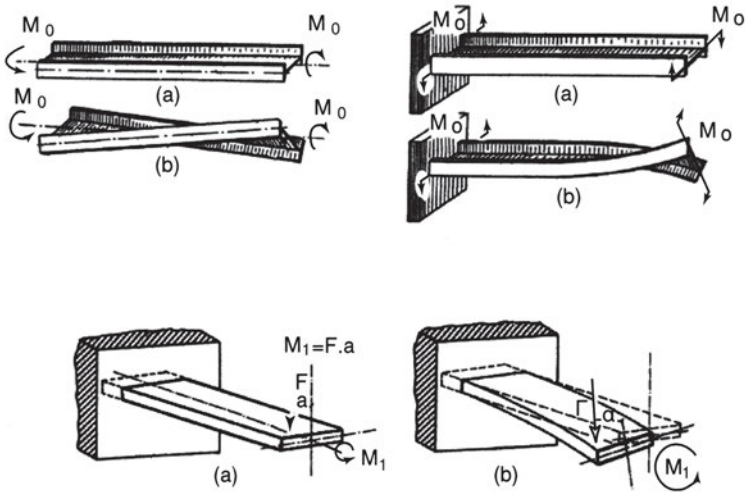
Στη στρέψη, τα παραπάνω, ισχύουν μόνο για την κυκλική διατομή. Αυτό είναι πειραματικά ελέγξιμο.



Σχήμα 11.4.α *Η πειραματική απόδειξη της ιδιομορφίας της στρέψης*

Στο σχήμα 11.4.α, έχουμε ένα κύλινδρο (I) και ένα παραλληλεπίπεδο (II). Σε αυτά τα στερεά έχουμε χαράξει ένα κάναβο από κάθετες και παράλληλες γραμμές, προς τους κύριους άξονές τους. Μετά την επιβολή των ροπών M_t, φαίνεται καθαρά, ότι στον κύλινδρο παραμένει η καθετότητα των διατομών, ενώ στο παραλληλεπίπεδο έχουμε στρέβλωσή τους.

Στις κατασκευές μας, όμως, είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε και στοιχεία με διατομές ποικίλων σχημάτων, π.χ. μορφοσίδηρων (γωνιών, Τ, διπλών Τ κ.τ.λ.) (σχ. 11.4.β). Ακόμα, έχουμε και περιπτώσεις, όπου η στρεπτική ροπή δεν ενεργεί κάθετα στον κύριο άξονα του στοιχείου και έχουμε πάλι στρεβλώσεις στις διατομές, παρόλο που βρισκόμαστε μέσα στα όρια ισχύος του νόμου του Hooke.



Σχήμα 11.4.β *Παραμόρφωση φορέων υποκείμενων σε στρέψη, μη κυκλικής διατομής*

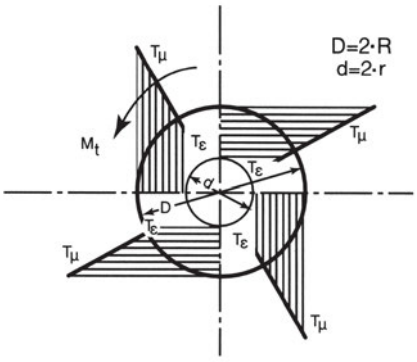
11.5 ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΦΟΡΕΩΝ, ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΕΨΗ

Η θεωρητική ανάλυση που χρειάζεται, για να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ της στρεπτικής ροπής M_t και των αντίστοιχων τάσεων και παραμορφώσεων, είναι πολύ δύσκολη υπόθεση. Σε αρκετές περιπτώσεις μάλιστα, αναγκαζόμαστε να προσεγγίζουμε το θέμα πειραματικά, προκειμένου να έχουμε στοιχεία για τους υπολογισμούς των κατασκευών μας.

Στις επόμενες σελίδες παρατίθενται στοιχεία από διάφορες περιπτώσεις φορέων, μη κυκλικής διατομής, που παρουσιάζονται συχνά στις κατασκευές, και τα οποία στοιχεία θα δοθούν χωρίς μαθηματικές αποδείξεις.

Α. Δακτυλοειδής διατομή

(Σχήμα 11.5.α)



Σχήμα 11.5.α *Δακτυλιοειδής διατομή: Η κατανομή των τάσεων λόγω στρεπτικής ροπής*

$$\tau_\mu \cong \frac{5M_tD}{D^4 - d^4} = \frac{40M_tR}{R^4 - r^4} \text{ στην εξωτερική περιφέρεια}$$

$$\tau_\varepsilon \cong \frac{5M_td}{D^4 - d^4} = \frac{40M_tr}{R^4 - r^4} \text{ στην εσωτερική περιφέρεια}$$

Η γωνία στροφής θ, σε rad, ανάμεσα σε δύο διατομές, που η απόσταση μεταξύ του είναι ℓ,

$$\theta = \frac{10M_t\,\ell}{G\left(D^4 - d^4\right)} = \frac{160 \cdot M_t\ell}{G\left(R^4 - r^4\right)}$$

Οι τύποι αυτοί ισχύουν για αποστάσεις, ρ, από τον άξονα στα όρια

$$r \le \rho \le R$$

Β. Σωληνωτές διατομές

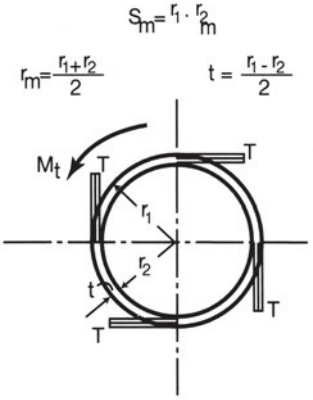
α. Κυκλική διατομή (Σχήμα 11.5.β)

Επειδή το πάχος του τοιχώματος t είναι μικρό, η τάση σ' αυτό είναι σταθερή, οπότε

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot S_m \cdot t}$$

ενώ η γωνία στροφής θ, σε rad, ανάμεσα σε δυο διατομές, που απέχουν μεταξύ τους, είναι:

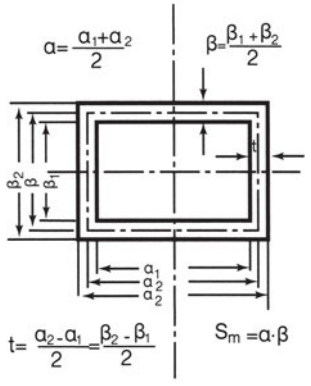
$$\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{2 \cdot G\,\pi \cdot t \cdot r_m^3}$$



Σχήμα 11.5.β *Σωληνωτή κυκλική διατομή. Η κατανομή των τάσεων λόγω στρεπτικής ροπής.*

β. Ορθογωνική διατομή (Σχήμα 11.5.γ)

Ενδιαφέρουσα πρακτικά περίπτωση γιατί εδώ υπάγονται τα στραντζαριστά. Έχουμε λοιπόν:



Σχήμα 11.5.γ *Ορθογωνική σωληνωτή διατομή (στραντζαριστό)*

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

$$t = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

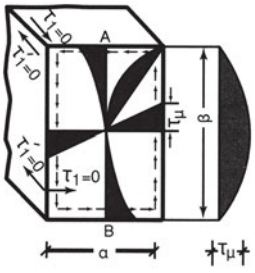
$$S_m = \alpha \cdot \beta$$

Η τάση στο μέσο της πλευράς, δίνεται με μεγάλη προσέγγιση από τον τύπο:

$$r = \frac{M_t}{2 \cdot S_m \cdot t}$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε περιπτώσεις μη κυκλικών διατομών, αυτές δεν παραμένουν επίπεδες και άρα, η γωνία στροφής θ είναι πολύ δύσκολο να εκφρασθεί με απλό τύπο.

Γ. Ορθογωνική διατομή (Σχήμα 11.5.δ)



β/α	S_1	S_2	S_3
0.1	0.141	0.208	1.000
1.2	0.199	0.263	0.935
1.5	0.294	0.346	0.859
1.75	0.375	0.418	0.820
2.0	0.457	0.493	0.795
2.5	0.622	0.645	0.766
3.0	0.790	0.801	0.753
4.0	1.123	1.128	0.745
5.0	1.455	1.455	0.744
6.0	1.789	1.789	0.743
8.0	2.456	2.456	0.742
10.0	3.123	3.123	0.742

$I_p = S_1 \cdot \beta^4$

$W_t = S_2 \cdot \beta^3$

Σχήμα 11.5.δ *Ορθογωνική διατομή. Η διανομή των τάσεων λόγω στρεπτικής ροπής*

Εδώ, η μέγιστη τάση τ_μ είναι στο μέσον της μεγάλης πλευράς στο σημείο Α και είναι:

$$\tau_\mu = \frac{M_t}{W_t}$$

ενώ η τάση τ στο μέσον της μικρής πλευράς (σημείο Β), είναι:

$$\tau = s_3 \cdot \tau_\mu = s_3 \frac{M_t}{W_t}$$

Η γωνία στροφής θ γειτονικών διατομών είναι

$$\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_p}$$

Η περίπτωση b/a=1, αντιστοιχεί στην τετραγωνική διατομή.

Δ. Για διατομή **ισοπλεύρου τριγώνου**, πλευράς α, έχουμε :

$$\tau = \frac{20M_t}{\alpha^3}$$

Η τάση αυτή αναπτύσσεται στο μέσον της πλευράς, ενώ στην κορυφή είναι μηδενική η γωνία στροφής των γειτονικών διατομών και η οποία γωνία στροφής, δίνεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot \frac{\sqrt{3}}{80} \cdot \alpha^4}$$

Ε. Για άλλου είδους διατομές, όπως L, T, H κ.τ.λ., υπάρχουν εμπειρικοί τύποι, τα δε στοιχεία I_p και W_p που είναι γεωμετρικά στοιχεία και χαρακτηρίζουν τη διατομή, βρίσκονται από τους σχετικούς πίνακες.

11.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΤΡΑΚΤΟΥ ΣΕ ΣΤΡΕΨΗ

Άτρακτος είναι εκείνο το στοιχείο των μηχανών, που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά ισχύος και τη μετάδοση ροπών στρέψης είναι ένα μακρύ εξάρτημα, κυκλικής ή δακτυλιοειδούς, συνήθως, διατομής και σπανιότερα, τετραγωνικής. Στην πράξη, το εξάρτημα αυτό, η άτρακτος υπόκειται σε σύνθετη καταπόνηση. Δηλαδή, υφίσταται, συγχρόνως, πολλών ειδών καταπονήσεις. Εκτός από τη στρέψη, υπόκειται και σε κάμψεις, εκεί που είναι οι τροχαλίες ή οι οδοντωτοί τροχοί που μεταφέρουν τη ροπή και ακόμα, επειδή ένα κινούμενο εξάρτημα στην έδρασή του δεν είναι πακτωμένο, άρα έχουμε και ταλαντώσεις, λόγω μη απόλυτης σύμπτωσης του γεωμετρικού άξονα με τον άξονα στροφής κ.τ.λ.

Όλα τα παραπάνω δημιουργούν πάρα πολλές δυσκολίες στη θεωρητική αντιμετώπιση του θέματος του υπολογισμού της αντοχής των ατράκτων. Μία πρώτη προσέγγιση, είναι να υπολογίσουμε την αναγκαία διάσταση

της ατράκτου, μόνο σε στρέψη, υπολογίζοντας ως επιτρεπόμενη τάση, τιμή πολύ μικρότερη της κανονικής π.χ. Για τα διάφορα είδη χάλυβα, οι τιμές είναι στα όρια:

$$\tau = 500 \div 800 \text{ daN / cm}^2$$

ενώ στην περίπτωση της ατράκτου, παίρνουμε:

$$\tau = 120 \div 400 \text{ daN / cm}^2$$

Ουσιαστικά δηλαδή υπολογίζουμε πολύ αυξημένο τον συντελεστή ασφάλειας.

Στη συνέχεια, βέβαια, γίνεται επανέλεγχος των αποτελεσμάτων, έχοντας πια υπόψη, τα λοιπά γεωμετρικά και λειτουργικά στοιχεία του μηχανισμού, μέσα από τον σχεδιασμό του.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μία άτρακτος, κυκλικής διατομής από υλικό που έχει

$$\tau_{\varepsilon\pi} = 400 \text{ daN/cm}^2$$

καταπονείται σε στρέψη, από μία ροπή 400 Nm. Αν κρίνουμε, ότι οι τυχόν άλλες επιβαρύνσεις κάμψης κ.λπ., δεν είναι τόσο σημαντικές, μπορούμε να την υπολογίσουμε μόνο σε στρέψη, θεωρώντας μικρότερο το $\tau_{\varepsilon\pi}$, π.χ.

$$\tau_{\varepsilon\pi} = 400 \text{ daN/cm}^2$$

Τότε από τη σχέση 11.3ι θα έχουμε:

$$\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{16M_t}{\pi \cdot d^3}$$

ή

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi}}}$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές, έχουμε:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 400}{\pi \times 40000000}} = \sqrt[3]{51 \times 10^{-6}} \cong 0,097 \cong 3,7\,\text{cm} \cong 4\,\text{cm}$$

Στη συνέχεια γίνεται έλεγχος, ως προς τη γωνία στροφής θ. Από τη σχέση 11.3.κ είναι:

$$\theta = \frac{32M_T\ell}{G\pi \cdot d^4}$$

όπου θα πρέπει $\theta / \ell \leq 15' / m = 0{,}0044$ rad

Εάν G = 81 GN/m^2, θα έχουμε:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \times 400}{81 \times 10^9 \times \pi \times 0{,}0044}} = \sqrt{0{,}00001143} = 0{,}058\text{m} = 5{,}8\text{cm}$$

άρα θά λάβουμε d = 6 cm.

11.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Αξονίσκος ο οποίος καταπονείται σε στρέψη, έχει διάμετρο 8mm και μήκος 30 mm. Στην ακραία του διατομή μετρήθηκε γωνία στροφής 10΄ 30΄΄. Αν το υλικό του έχει μέτρο ολίσθησης 7.95×10^3 daN/mm^2, να υπολογισθεί η αναπτυσσόμενη τάση και η διατμητική παραμόρφωση στην επιφάνεια του αξονίσκου.

Λύση

Μας δίνονται:

d = 2r = 8 mm, θ = 10΄ 30΄΄, ℓ = 30 mm και = 7.95×10^3 daN/ mm^2

Και *ζητούνται:* r και γ.

1. Μετατρέπουμε τις μοίρες σε ακτίνια και θα έχουμε:

$$\theta = (10'.30'') = 10'.5 = \left(\frac{10'.5}{60}\right)^0 = \frac{\pi}{180} \times \frac{10.5}{60}\text{ rad} = 0{,}00305\text{ rad}$$

2. Για να βρούμε τη διατμητική παραμόρφωση, εφαρμόζουμε τον τύπο 11.2.ε

$$\gamma = (\theta / \ell)r$$

$$\gamma = \frac{0{,}00305}{30} \times 4$$

$$\gamma = 0{,}0004072\text{ rad}$$

$$\text{ή } \gamma = 0{,}0004072 \times \frac{180^0}{\pi} = 0{,}02333^0 = (0{,}02333 \times 60)' = 1{,}399 = 1'24''$$

3. Για να βρούμε τώρα τη διατμητική τάση, εφαρμόζουμε τον τύπο 11.2.α

$$\frac{\tau}{\gamma} = G$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

άρα $\tau = 7.95 \times 10^3 \frac{daN}{mm^2} \times 0,0004072 = 3,24\ daN/mm$

Απάντηση

α) Η διατμητική παραμόρφωση είναι:

$$\gamma = 1΄24΄΄$$

β) Η διατμητική τάση είναι:

$$r = 3,24\ daN/mm^2$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος μιας ατράκτου, για τη μεταφορά μιας ροπής 100 KNm. Το μήκος της ατράκτου είναι 2m. Η άτρακτος είναι συμπαγής και κατασκευάστηκε από υλικό που έχει $\tau_{επ}$ = 30 MN/m^2 και μέτρο διάτμησης G = 7,95 ×10^3 daN/mm^2.

Λύση

Μας δίνονται:

M_t = 100 KNm, $\tau_{επ}$ = 30 MN/m^2, ℓ = 2m, G = 7,95 × 10^3 daN/mm^2

και ζητείται η d, δηλαδή η διάμετρος της ατράκτου.

1. Επειδή έχουμε συμπαγή άτρακτο, κυκλικής διατομής θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: 11.3. i

$$\tau_{επ} = \frac{16M}{\pi \cdot d^3}$$

και λύνοντας ως προς d, έχουμε:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_{επ}}}$$

Τακτοποιούμε τις μονάδες

M_t= 100 KNm = 100×10^3Nm,

$$G = 7{,}95 \times 10^3 \ \frac{daN}{mm^2} = 7{,}95 \times 10^{10} \ \frac{N}{m^2},\ \tau_{επ} = 30 \ \frac{MN}{m^2} = 30 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2}$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο και προκύπτει:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 10^3}{\pi \times 30 \times 10^6}} = \sqrt[3]{0.0169} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{17,9} = 0,26m$$

άρα d =26cm.

2. Πρέπει, ακόμη, να γίνει έλεγχος της δυστρεψίας της ατράκτου, γιατί η καλή λειτουργία των μηχανισμών δεν επιτρέπει να υπερβεί η γωνία στροφής (η,θ, παρ. 11.2) κάποια όρια. Μία καλή κατάσταση λειτουργίας υπάρχει αν έχουμε θ ≤ 15΄/m. Εφαρμόζοντας τον τύπο 11.2 η

$$\frac{\tau}{G} = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) r$$

και λύνοντας ως προς θ, έχουμε:

$$\theta = \frac{\tau \cdot \ell}{G \cdot r} = \frac{2 \cdot \tau \cdot \ell}{G \cdot d}$$

$$\theta = \frac{2 \times 30 \times 10^6 \times 2}{79,5 \times 10^{10} \times 0,26} = 0,0005805 \ rad/m$$

$\theta = 0{,}0332602^0 \approx 2'$

και η ανηγμένη γωνία, ανά μέτρο μήκους της ατράκτου, είναι:

$$\frac{\theta}{\ell} = \frac{2'}{2} = 1'/m \ < 15'/m$$

Απάντηση

d = 26cm

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να υπολογισθεί η διάμετρος του άξονα ενός ηλεκτροκινητήρα, του οποίου η ισχύς είναι 10 Kw. Στο κανονικό σημείο λειτουργίας του, έχει 1360 στροφές ανά λεπτό. Το υλικό του άξονα έχει $\tau_{επ}$= 50N/mm^2 και G = 79,5 × 10^3 N/mm^2 το μήκος του άξονα είναι 40cm.

Λύση

Μας δίνονται:

P = 10Kw

f = 1360 RPM

$\tau_{\varepsilon\pi} = 50 N/mm^2$

$\ell = 40cm$

$G = 79,5 \times 10^3 N/mm^2$

Μας ζητείται η d (η διάμετρος δηλ. του άξονα του ηλεκτροκινητήρα)

1. Για τη δοσμένη ισχύ, η στρεπτική ροπή, ως γνωστό, από τη Μηχανική, είναι:

$$M_t = \frac{P}{2\pi f}$$

δηλαδή

$$M_t = \frac{10 \times 10^3}{2\pi \frac{1360}{60}} = 70,22 \text{ Nmm}$$

2. Από τη σχέση (11.3.ι), $\left(\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{16M_t}{\pi \cdot d^3} \right)$ λύνοντας ως προς d, έχουμε :

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi}}}$$

ή

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 70,22}{\pi \cdot 50 \times 10^6}} = 0,01927 m \simeq 19,3 mm$$

3. Ο έλεγχος, ως προς την επιτρεπόμενη τάση μέσα από τη σχέση 11.3θ

$$\left(\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{M_t}{W_r} \right)$$

και όπου W_r = η πολική ροπή αντίστασης της κυκλικής διατομής, μας δίδει:

$$W_r = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

$$W_r = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \times 19,3^3}{16} = 1411 \text{ mm}^3$$

Έχουμε, άρα:

$$\tau = \frac{70220}{1411} = 49,76\,N/mm^2 < 50\ N/mm^2$$

4. Ο έλεγχος, ως προς τη γωνία στροφής, μέσα από τη σχέση (11.3.κ)

$$\theta = \frac{32 \cdot M_t \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot d^4}$$

μας δίδει:

$$\theta = \frac{32 \times 70220 \times 400}{79,5 \times 10^3 \times \pi \times (19,3)^4} = 0,0259 rad$$

και η, ανά μέτρο μήκους του άξονα, γωνία, είναι:

$$\frac{\theta}{\ell} = \frac{0,0259}{0,4} = 0,064\ rad/m > 0,004\ rad/m$$

$$(0,004\ rad = 15')$$

Ο έλεγχος, ως προς τη γωνία στροφής, δεν είναι ικανοποιητικός. Θα υπολογίσουμε τον άξονα, με αυτόν τον περιορισμό. Έχουμε λοιπόν:

$$\theta = 0,004\ rad/m$$

άρα, $\theta = 0,004 \cdot \ell = 0,004 \times 0,4 = 0,0016\ rad$

Θα είναι λοιπόν (από τη σχέση 9.3.κ)

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t \ell}{G \cdot \pi \theta}}$$

$$\theta = \frac{32 \cdot M_t \ell}{G \cdot \pi d^4}$$

ή

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \times 70220 \times 400}{79,5 \times 10^3 \times \pi \times 0,0016}} = 38,726\ mm$$

Απάντηση:

$$d = 38,8\ mm$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Ράβδος, ορθογωνικής διατομής, από χάλυβα με G = 80 GN/m^2, έχει διαστάσεις διατομής 100×150 mm και μήκος ℓ = 1000mm. Η ράβδος καταπονείται σε στρέψη, από ροπή 12 KNm. Να υπολογιστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στα μέσα των πλευρών, καθώς και η γωνία στροφής.

Λύση

Μας δίνονται:

πλευρές α = 100mm, β = 150 mm, ℓ = 1000mm,

G = 80GN/m^2,

M_t = 12KNm.

Μας ζητούνται: $\tau_{1\mu}$,$\tau_{2\mu}$,θ

1. Ο λόγος των πλευρών είναι: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{150}{100} = 1,5$ και από τον πίνακα του σχ.11.5.δ, έχουμε:

$$s_1 = 0,294$$

$$s_2 = 0,346$$

$$s_3 = 0,859$$

2. Υπολογίζουμε τις ροπές αδράνειας και αντίστασης και είναι:

$$I_p = s_1 \cdot \beta^4 \text{ ή } I_p = 0,294 \times (0,15)^4 = 14,9 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$W_r = s_2 \cdot \beta^3 \text{ ή } W_r = 0,340 \times (0,15)^3 = 11,7 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

3. Η μεγαλύτερη τάση $\tau_{\iota\mu}$, στο μέσον της μεγάλης πλευράς, είναι:

$$\tau_{1\mu} = \frac{M_t}{W_r} \quad \text{ή} \quad \tau_{1\mu} = \frac{12 \times 10^3}{11,7} = 102,6 \text{N / cm}^2$$

4. Η τάση στο μέσον της μικρής πλευράς, θα είναι:

$$\tau_{2\mu} = s_3 \, \tau_{1\mu} \quad \text{ή} \quad \tau_{2\mu} = 0,859 \times 102,6 = 88,1 \text{ N/cm}^2$$

5. Η γωνία στροφής δίνεται από τη σχέση $\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_p}$ και άρα, έχουμε

$$\theta = \frac{12 \times 10^3 \times 1}{80 \times 10^9 \times 14,9 \times 10^{-5}} = 0,0010 \text{rad}$$

ή

$$\theta = 0,05729^0 = 3´26´´,3$$

Απάντηση:

1) $\tau_{1\mu}$= 102,6 N/m^2

2) $\tau_{2\mu}$= 88,1 N/m

3) θ = 3΄26΄΄,3

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ο

Να προσδιορίσετε, για ποιες τιμές της διαμέτρου χαλύβδινης κυκλικής συμπαγούς ατράκτου, το κριτήριο ασφάλειας, είναι η γωνία στροφής και όχι η επιτρεπόμενη τάση.

Λύση

1. Για να έχουμε ασφαλή και κανονική λειτουργία, θα πρέπει, ανά μέτρο μήκους της ατράκτου, να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\tau_{\varepsilon\pi} \geq \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

και

$$\theta_{\varepsilon\pi} \geq \frac{32M_t}{G\pi d^4}$$

2. Για να είναι το κριτήριο ασφάλειας η γωνία στροφής, θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως και πάλι οι σχέσεις :

$$\tau_{\varepsilon\pi} \geq \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

και

$$\theta_{\varepsilon\pi} = \frac{32M_t}{G\pi d^4}$$

3. Διαιρώντας, κατά μέλη, τις δύο σχέσεις, θα έχουμε:

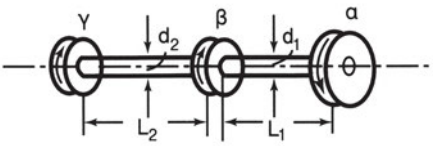
$$\frac{\tau_{\varepsilon\pi}}{\theta_{\varepsilon\pi}} \geq \frac{\frac{16\,M_t}{\pi\cdot d^3}}{\frac{32\,M_t}{G\cdot\pi\cdot d^4}} = \frac{G\cdot d}{2}$$

Απάντηση:

$$d \leq \frac{2\,\tau_{\varepsilon\pi}}{G\,\theta_{\varepsilon\pi}}$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6ο

Στο διπλανό σχήμα 11.7.α η κινητήρια τροχαλία (α), μεταδίδει 380 Kw στο σύστημα των δύο τροχαλιών (β) και (γ) από τα οποία 150 kw στην (β) και 230kw στη (γ).



Σχήμα 11.7.α

Αν οι στροφές περιστροφής είναι $f = 120\ r \cdot \rho \cdot m$, η μέγιστη τάση $\tau_m = 2100\ N/cm^2$ και οι αποστάσεις των τροχαλιών $\ell_1 = 180\ m$ και $\ell_2 = 120\ cm$, να υπολογισθούν:

1. Ο λόγος των διαμέτρων d_1 / d_2 ,έτσι ώστε, η μέγιστη τάση στρέψης στα δύο μέρη της ατράκτου, να είναι η ίδια και
2. Οι διάμετροι d_1 και d_2, στα δύο μέρη της ατράκτου

Λύση

Μας δίνονται:

$P_\alpha = 380\ Kw$

$P_\beta = 150\ Kw$

$P_\gamma = 230\ Kw$

$f = 120\ rpm = 2\ sec^{-1}$

$\ell_1 = 180\ cm$

$\ell_2 = 120\ cm$

$\tau_m = 2100\ N/cm^2$

Μας ζητούνται:

d_1 / d_2 για να είναι $\tau_\alpha = \tau_\gamma$

d_1, d_2

1. Αν είναι M_α και M_γ οι στρεπτικές ροπές που αναπτύσσονται αντίστοιχα στις τροχαλίες (α) και (β), τότε θα είναι σύμφωνα και με τη σχέση 11.3.ι

$$\tau = \frac{M_t}{W_r}$$

$$\tau_\alpha = \frac{16M_\alpha}{\pi \cdot d_1^3}$$

και

$$\tau_\gamma = \frac{16M_\gamma}{\pi \cdot d_2^3}$$

Επειδή ζητάμε να είναι $\tau_\alpha=\tau_\gamma$ θα έχουμε

$$\frac{16M_\alpha}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{16M_\gamma}{\pi \cdot d_2^3} \quad \text{ή} \quad \frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{M_\alpha}{M_\gamma}}$$

Όπως όμως ξέρουμε, από τα μαθήματα της Φυσικής, η ροπή είναι ανάλογη προς την ισχύ και άρα:

$$\frac{M_\alpha}{M_\gamma} = \frac{P_\alpha}{P_\gamma}$$

οπότε

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{P_\alpha}{P_\gamma}} = \sqrt[\eta]{\frac{380}{230}} = 1.18$$

2. Από τα μαθήματα της Φυσικής επίσης, μας είναι γνωστό, ότι η στρεπτική ροπή συνδέεται με την αντίστοιχη ισχύ, με τη σχέση :

$P = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$ ή

$$M = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P}{f}$$

Άρα έχουμε:

$$M_\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P_\alpha}{f} \quad \text{και} \quad M_\gamma = \frac{1}{2\pi} = \frac{P_\gamma}{f}$$

Σύμφωνα, όμως, με την παραπάνω σχέση 9.3.i,

$$\tau_m = \frac{16M_t}{\pi \cdot d^3} \quad \text{ή} \quad M_t = \frac{\tau_m \pi \cdot d^3}{16}$$

οπότε

$$\frac{\tau_m \cdot \pi \cdot d_1^3}{16} = \frac{1}{2\pi} \frac{P_\alpha}{f}$$

και

$$\frac{\tau_m \cdot \pi \cdot d_2^3}{16} = \frac{1}{2\pi} \frac{P_\gamma}{f}$$

και λύνοντας, ως προς d, έχουμε:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{2\pi^2}\frac{P_\alpha}{f \cdot \tau_m}} \quad \text{και} \quad d_2 = \sqrt{\frac{16}{2\pi^2}\frac{P_\gamma}{f \cdot \tau_m}}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις τιμές, λαμβάνουμε:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{380 \times 10^3}{2 \times 21 \times 10^6}} = 0{,}19 \text{ m} = 19 \text{ cm}$$

και

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16}{2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{230 \times 10^3}{2 \times 21 \times 10^6}} = 0{,}164 \text{ m} = 16{,}5 \text{ cm}$$

Απάντηση

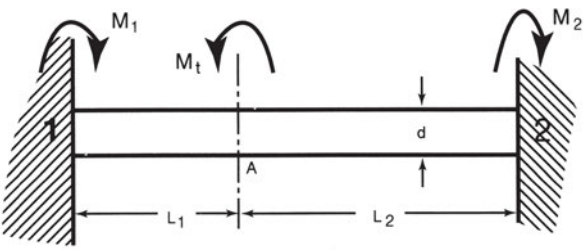
1) $\frac{d_1}{d} = 1{,}18$

2) $d_1 = 19$ cm

3) $d_2 = 16{,}5$ cm

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7ο

Χαλύβδινη κυλινδρική ράβδος, πακτωμένη και στα δύο άκρα της, καταπονείται από τη δράση στρεπτικής ροπής που εφαρμόζεται σε ενδιάμεση διατομή και σε αποστάσεις από τις αντίστοιχες πακτώσεις, ℓ_1, ℓ_2. Ζητούνται οι στρεπτικές ροπές των πακτώσεων M_1 και M_2 καθώς και η απαιτούμενη διάμετρος, για δεδομένο $\tau_{επ}$.



Σχήμα 11.7.β

Λύση

Μας δίνονται:

Η ροπή M_t, τα μήκη ℓ_1, ℓ_2 και η $\tau_{επ}$.

Μας ζητούνται:

Οι ροπές των πακτώσεων M_1 καθώς και M_2 και η διάμετρος d.

Είναι προφανές, ότι η γωνία στρέψης της διατομής Α, εκεί που εφαρμόζεται η ροπή M_t είναι η ίδια, και από την πλευρά της πάκτωσης (1) και από την πλευρά της πάκτωσης (2). Αρα, από τη σχέση 11.3.κ θα έχουμε:

$$\theta = \frac{M_1 \cdot \ell_1}{G \cdot I_p} = \frac{M_2 \cdot \ell_2}{G \cdot I_p}$$

Από τη σχέση αυτή εξάγουμε ότι:

$$M_1 \ell_1 = M_2 \ell_2 \quad \text{αλλά και} \quad M_t = M_1 + M_2$$

Με βάση αυτές τις δύο εξισώσεις, καταλήγουμε στο ότι:

$$M_1 = \frac{\ell_2 M_t}{\ell_1 + \ell_2} \text{ αλλά και } M_2 = \frac{\ell_1 M_1}{\ell_1 + \ell_2}$$

Η ζητούμενη δε διάμετρος, προκύπτει από τη σχέση 11.3.ι και είναι:

$$d = \sqrt{\frac{16 \ell_1 M_t}{\pi \left(\ell_1 + \ell_2 \right) \tau_{επ}}}$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8ο

Ράβδος ορθογωνικής διατομής, από χάλυβα, έχει διαστάσεις α= 100mm και β = 200mm μήκος δε ℓ = 2000 mm.

Η ράβδος καταπονείται από στρεπτική ροπή M_t= 12 KNm.

Ζητούνται: Η τ_{max} και η γωνία στρέψης θ.

Δίδεται: G = 81 GN/m^2

Λύση

Μας δίνονται:

α) Η διατομή της ράβδου διαστάσεων 100 mm × 200 mm,

β) το μήκος ℓ = 2000mm,

γ) η στρεπτική ροπή M_t= 12KNm και

δ) το G = 81 GN/m^2

Μας ζητούνται:

Η μέγιστη αναπτυσσόμενη τάση $\tau_{επ}$ και η γωνία στρέψης θ.

1) Στην παράγραφο 11.5, περίπτωση γ, για την ορθογωνική διατομή και από τον πίνακα του σχήματος 11.5.δ για τιμή του λόγου των διαστάσεων

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{200}{100} = 2$$

έχουμε:

$$s_1 = 0,457,\ s_2 = 0,293,\ s_3 = 0,795$$

Από αυτά παίρνουμε:

$I_p = s_1 \cdot \beta^4$

$W_t = s_2 \cdot \beta^3$

Δηλαδή

$I_p = 0,457 \times 200^4 = 7,31 \times 10^8\ mm^4$

$W_2 = 0,493 \times 200^3 = 3,9 \times 10^6\ mm^3$

η δε τιμή της τάσης, στο μέσον της μεγάλης πλευράς, είναι :

$$\tau_m = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\tau_m = \frac{12000Nm}{3,94 \times 10^6 \cdot 10^{-9}\ m^3} = 3,05\ MN/m^2$$

ενώ η τάση, στο μέσον της μικρής πλευράς, είναι:

$$\tau_\mu = s_3 \cdot \tau_m = 0,795 \times 3,05\ MN/m^2$$

και η γωνία στροφής

$$\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_p}$$

$$\theta = \frac{12000\,\text{Nm} \times 2\,\text{m}}{81 \times 10^9\,\text{N/m}^2 \times 7.31 \times 10^8 \times 10^{-12}\,\text{m}^4}$$

$$\theta = 0{,}04 \times 10^{-3}\,\text{rad} = 8'',244$$



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΝΔΕΚΑΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Φορέας καταπονείται σε στρέψη όταν ασκείται ροπή σε επίπεδο κάθετο στον άξονά του. Στις διατομές του φορέα, που καταπονείται σε στρέψη, αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις. Στη στρέψη, το σχήμα της καταπονούμενης διατομής, παίζει ρόλο. Έτσι για κυκλική διατομή έχουμε:

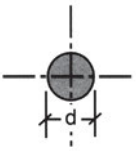
- Σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης $G = \tau/\gamma$
- Σχέση διατμητικής παραμόρφωσης και γωνία στροφής, γειτονικών διατομών $\gamma = (\theta/\ell) \cdot r$
- Σχέση τάσης και γωνίας στροφής, γειτονικών διατομών $\tau/G = (\theta/\ell) \cdot r$.
- Σχέση στρεπτικής ροπής, τάσης και γωνίας στροφής, γειτονικών διατομών $\tau/\rho = (\theta/\ell)G = M_t/I_p$

Για διατομές μη κυκλικές έχουμε αποκλίσεις από τους παραπάνω τύπους. Η προσαρμογή των τύπων, σε διατομές άλλης μορφής, γίνεται με συντελεστές που προκύπτουν από πειράματα. Για μερικές περιπτώσεις διατομών, που απαιτούν συχνότερα στην πράξη, παραθέτουμε το παρακάτω τυπολόγιο:

1) Κυκλική διατομή:

$$\tau_\mu = \frac{M_t}{W_r} = \frac{16M_t}{\pi \cdot d^3} = \frac{2M_t}{\pi \cdot r^3}$$

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G\, I_p} = \frac{32M_t \cdot L}{G \cdot \pi d^4} = \frac{2M_t \cdot L}{\pi r^4}$$

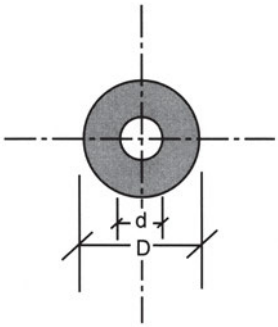


2) Δακτυλιοειδής διατομή:

$$\tau_\mu = \frac{M_t}{W_R} = \frac{16\, M_t\, D}{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)} \cong \frac{5\, M_t\, d}{D^4 - d^4}$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{W_r} = \frac{16M_t \cdot d}{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)} \cong S\frac{M_t\, d}{D^4 - d^4}$$

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{GI_p} = \frac{32M_t \cdot L}{G \cdot \pi\left(D^4 - d^4\right)} = 10\, \frac{M_t \cdot L}{G\left(D^4 - d^4\right)}$$



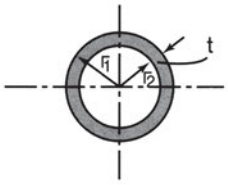
3) Σωληνωτή διατομή:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r_m = \frac{M_t}{2\pi t r_m^2}$$

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G\, I_p} = \frac{M_t \cdot L}{G\, 2\pi\, t\, r_m^2}$$

$$t = r_1 - r_2$$

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$



4) Ορθογωνική σωληνική διατομή

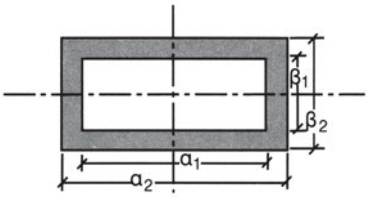
$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

$$S_m = \alpha \cdot \beta$$

$$t = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

$$\tau = \frac{M_t}{2 S_m t}$$



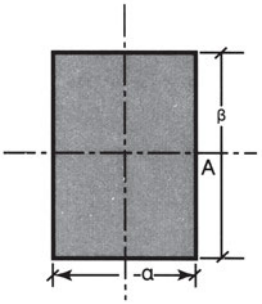
5) Ορθογωνική διατομή

$I_p = S_1 \beta^4$, $W_r S_2 \cdot \beta^3$

$$\tau_\mu = \frac{M_t}{W_r}$$ στο σημείο A

$$\tau = \frac{M_t}{W_r} S_3$$ στο σημείο B

$$\theta = \frac{M_t L}{G I_p}$$

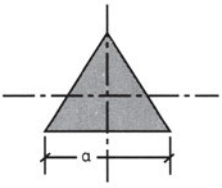


Οι συντελεστές S_1, S_2, S_3 στο σχήμα 11.5.δ

6) Τριγωνική διατομή (ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α)

$$\tau_\mu = \frac{20 M_t}{\alpha^4}$$

$$\theta = \frac{M_t L}{G \frac{\sqrt{3}}{80} \alpha^4}$$





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογισθούν η διάμετρος, η γωνία στροφής και η γωνία παραμόρφωσης ενός άξονα που καταπονείται σε στρέψη από μία ροπή 50KN/m^2 όταν η επιτρεπόμενη τάση είναι 30 MN/m^2 και το μέτρο διάτμησης είναι G= 80GN/m^2.

Απάντηση: d = 20,4 cm, θ = 12΄ 38΄΄,3, γ = 1΄9΄΄ ,61

2. Να υπολογισθούν η εσωτερική και η εξωτερική διάμετρος ενός άξονα, με δακτυλιοειδή διατομή, καθώς και η γωνία στροφής. Ο άξονας καταπονείται σε στρέψη από μία ροπή 50KN/m^2 η επιτρεπόμενη τάση είναι 30 MN/m^2 και το μέτρο διάτμησης είναι G= 80GN/m^2 ο λόγος των διαμέτρων είναι 0,9

Απάντηση: d = 26 cm, D = 29 cm, = 9΄

3. Στις δύο προηγούμενες ασκήσεις έχουμε δύο διαφορετικών γεωμετρικών στοιχείων άξονες που είναι από το ίδιο υλικό και καταπονούνται από την ίδια ροπή. Από τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω ασκήσεων, τι συμπεράσματα μπορείτε να εξαγάγετε από το γεγονός της διαφοράς τους ως προς τα γεωμετρικά στοιχεία.

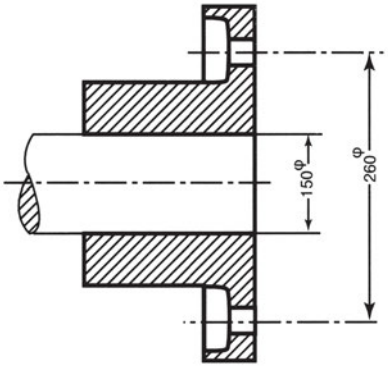
4. Ποια τάση θα αναπτυχθεί σε ένα άξονα, διαμέτρου d, που έχει μέτρο διάτμησης G = 80GN/mm^2 αν θέσουμε ως προϋπόθεση ότι η γωνία στροφής θα είναι 1° σε μήκος ℓ = 20d.

Απάντηση: τ_{max} = 34,8 N/mm^2

5. Άξονας πακτωμένος κατά το ένα άκρο του, καταπονείται σε στρέψη. Ο άξονας αυτός έχει μήκος 1000mm, είναι κατασκευασμένος από χάλυβα με G = 83x104 daN/cm^2 και η επιτρεπόμενη τάση είναι $\tau_{επ}$=80 daN/cm^2. Αν θέλουμε για λόγους οικονομίας να εξαντλήσουμε τα όρια αντοχής, ποιά θα πρέπει να είναι η διάμετρος του άξονα; (Η μέγιστη επιτρεπόμενη γωνία στροφής θ_{max} = 0°,25/m).

Απάντηση: d = 4,5 cm

6. Να υπολογισθεί η μεγαλύτερη ισχύς που μπορεί να μεταβιβασθεί από ένα άξονα διαμέτρου 150 mm ο οποίος στρέφεται με 240 rpm, όταν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\tau_{επ}$ = 55 N/mm^2. Ο άξονας αυτός έχει ένα σύνδεσμο με έξι μπουλόνια, περιφερειακά σε μία διάμετρο 260 mm. Να ορίσετε τη διάμετρο των μπουλονιών όταν η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση τους είναι τ_{1max} = 100N/cm^2.



Σχήμα 11.9α

Απάντηση : P = 920 kw, d = 24,4 mm

7. Να υπολογισθούν οι αναγκαίες διάμετροι εσωτερική d και εξωτερική D, ενός άξονα με δακτυλιοειδή διατομή, ο οποίος μεταφέρει ισχύ 750kw με 50rpm.

Δίδονται:

α) η γωνία στροφής θ από $1° / _{20D}$

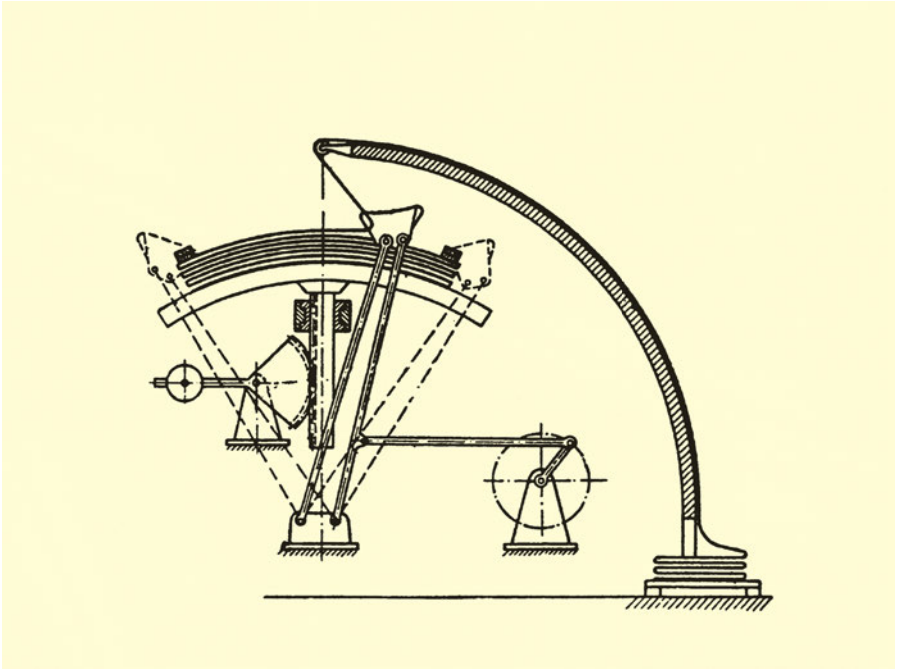
β) στη d/D = 0,6

γ) G = 85 ×10^3 N/mm^2

Απάντηση: D = 283 mm d = 169,5 mm

8. Ένα δακτυλιοειδής άξονας έχει εξωτερική διάμετρο D=10 cm και εσωτερική d = 7.5 cm. Να υπολογισθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στην εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια του άξονα, όταν αυτός καταπονείται σε στρέψη από μία ροπή M_t = 2000 Nm. Να υπολογισθεί επίσης η γωνία στροφής. Το μήκος του άξονα είναι 1m και το υλικό έχει μέτρο διάτμησης G = 80GN/m^2.

Απάντηση T_m = 14,9 MN/m^2, τ_μ =11,2 MN/m^2, θ = 12΄ 49΄΄ ,64



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

12.1 Εισαγωγικά

12.2 Η έρευνα στα φαινόμενα των σύνθετων καταπονήσεων

12.3 Λυγισμός

12.4 Περιπτώσεις σύνθετων καταπονήσεων

12.5 Εφαρμογές

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

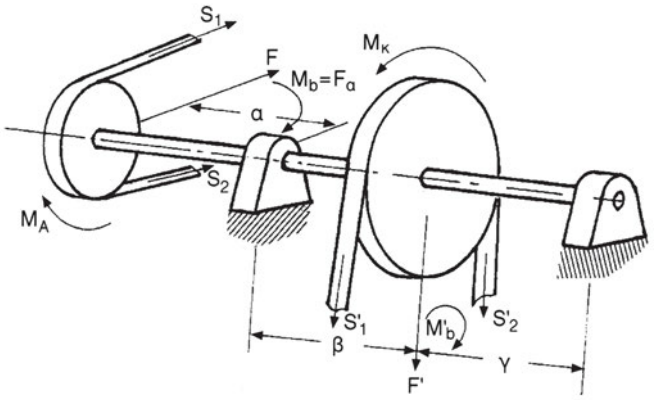
Οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν το σύνθετο των καταστάσεων καταπόνησης της ύλης και την πολυπλοκότητα των σχετικών φαινομένων.
- Να γνωρίσουν απλές περιπτώσεις συνθέτων καταπονήσεων και να μπορούν να αναγνωρίζουν, απλές περιπτώσεις, στη πράξη.

12.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Μέχρι τώρα, εξετάσαμε καταστάσεις, όπου οι φορείς, όπως λ.χ. οι ράβδοι, οι άξονες, οι δοκοί, τα υποστηλώματα, κ.α υπόκεινται σε ένα μόνο είδος φόρτισης. Δηλαδή, καταπονούνται, είτε μόνο σε εφελκυσμό, είτε μόνο σε κάμψη, είτε μόνο σε στρέψη κ.τ.λ.

Στις κατασκευές μας, όμως, τις περισσότερες φορές εμφανίζονται **σύνθετες καταστάσεις**. Δηλαδή, καταστάσεις, όπου διάφορα μέλη ενός μηχανισμού, ή φορέα, καταπονούνται, συγχρόνως, σε περισσότερα είδη φορτίσεων. Μία άτρακτος π.χ., μπορεί να καταπονείται, ταυτοχρόνως, σε κάμψη και στρέψη.



Σχήμα 12.1.α *Άτρακτος καταπονούμενη σε στρέψη και κάμψη*

Πρέπει, επίσης, να αναφέρουμε ότι, εκτός των φορτίων, παίζουν ρόλο στη συμπεριφορά της ύλης και οι συνθήκες υπό τις οποίες, τα φορτία αυτά, ενεργούν.

Τέτοιες συνθήκες, είναι:

- Οι υψηλές ή οι χαμηλές θερμοκρασίες του περιβάλλοντος.

Γενικά, οι πολύ μεγάλες ή οι πολύ μικρές θερμοκρασίες, μεταβάλλουν τις μηχανικές ιδιότητες των σωμάτων. Οι τιμές του ορίου αναλογίας, του ορίου θραύσεως, του μέτρου ελαστικότητας κ.τ.λ., μεταβάλλονται. Επομένως, αλλάζουν και οι επιτρεπόμενες τάσεις. Ακόμη, στις υψηλές θερμοκρασίες, έχουμε έντονο και το φαινόμενο του **ερπυσμού**. Το φαινόμενο αυτό, συνίσταται στη συνεχή παραμόρφωση ενός σώματος, με την πάροδο του χρόνου, υπό την επίδραση σταθερής δύναμης, την οποία, υπό κανονικές συνθήκες, το σώμα αυτό αντέχει, χωρίς παραμόρφωση*.

- Η ταχύτητα επιβολής της φόρτισης.

Στην περίπτωση της καταπόνησης σε θλίψη, αν η επιβολή του φορτίου γίνει σε πολύ μικρό χρόνο, τότε έχουμε το φαινόμενο της **κρούσης**, όπου επεμβαίνει και η κινητική ενέργεια του ταχύτατα επιβαλλόμενου φορτίου.

- Η μεταβολή των φορτίων και ο τρόπος των μεταβολών

Όταν η φόρτιση μεταβάλλεται και μάλιστα περιοδικώς, τότε έχουμε την περίπτωση της **δυναμικής φόρτισης**. Η περίπτωση αυτή, είναι πάρα πολύ συχνή. Εμφανίζεται δε σε όλες τις κινητήριες μηχανές. Εδώ, ο φορέας αντέχει πολύ μικρότερο φορτίο και μας ενδιαφέρει και ο αριθμός των εναλλαγών. Περίπτωση δυναμικής φόρτισης, είναι και η ταλάντωση του φορέα. Τέτοια φόρτιση, επίσης, έχουμε σε ατράκτους, όπου, λόγω κακής κατασκευής, δεν συμπίπτει απόλυτα ο γεωμετρικός άξονας με τον άξονα στροφής. Ταλαντώσεις έχουμε και σε προβόλους που φορτίζονται με μεταβαλλόμενα φορτία, όπως στις πτέρυγες των αεροπλάνων. Στις περιπτώσεις αυτές, παρατηρείται αστοχία του υλικού, παρόλο που τα φορτία είναι κατώτερα των ανεκτών ορίων. Αυτό ακριβώς αποτελεί και το φαινόμενο της **κόπωσης** .

* Το φαινόμενο αυτό είναι εμφανές και σε συνήθεις θερμοκρασίες, σε αντικείμενα κατασκευασμένα με κακής ποιότητας πλαστικά υλικά.

12.2 Η ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΕΩΝ

Από όσα είπαμε, φαίνεται ότι η συμπεριφορά της ύλης, στις εξωτερικές επιδράσεις, είναι πολύπλοκη. Πολύπλοκα είναι, κατά συνέπεια, και τα προβλήματα που τίθενται, προκειμένου να μπορούμε να έχουμε ασφαλείς και οικονομικές κατασκευές. Η έρευνα έχει αποδείξει, ότι ο τρόπος κατασκευής του κάθε στοιχείου (χύτευση, έλαση, μηχανουργική κατεργασία), σε συνδυασμό με την κρυσταλλική δομή του και την ακρίβεια της κατασκευής του, έχουν μεγάλη σημασία για την αντοχή που παρουσιάζει. Επειδή, λοιπόν, οι παράμετροι των προβλημάτων αυτών είναι πολλές και αρκετές φορές, άγνωστες, δεν είναι δυνατή η διατύπωση μίας γενικής θεωρητικής πρότασης, για τη μελέτη αυτών των καταστάσεων. Για τους παραπάνω λόγους, στις μάλλον απλούστερες περιπτώσεις, υπάρχουν, και οι ανάλογες προσεγγιστικές θεωρήσεις, ενώ, για τις άλλες έχουμε πειραματικές έρευνες προσεγγίσεις.

Στην πειραματική έρευνα, έχουμε :

- Καταστροφικές μεθόδους (ελέγχους), όπως είναι λόγου χάρη, το πείραμα του εφελκυσμού, που εξετάσθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Π.χ., η εξέταση του σκυροκονιάματος (beton) στην οικοδομή, για τη λήψη δείγματος που υποβάλλεται σε θλίψη, μέχρι καταστροφής του, συνιστά μία τέτοια μέθοδο.

- Μη καταστροφικές μεθόδους (ελέγχους).

Αυτές χρησιμοποιούνται όπου, εκ των πραγμάτων, δεν είναι επιθυμητή η καταστροφή του εξεταζόμενου στοιχείου, όπως π.χ. των στοιχείων φέροντα οργανισμού τεχνικού έργου, ή των μηχανημάτων, για την ελαχιστοποίηση του κινδύνου απρόβλεπτης αστοχίας του υλικού.*

Ο στόχος όλων αυτών των προσπαθειών, θεωρητικών και πειραματικών, είναι να βρούμε την τάση εκείνη, που είναι ισοδύναμη προς τις τάσεις που προκύπτουν, σε κάθε σημείο (διατομή) του επιβαρυνόμενου στοιχείου εξ αιτίας των διαφόρων φορτίσεων.

Οι τάσεις, όπως ξέρουμε, είναι ανισματικά μεγέθη, άρα, εφόσον ενεργούν στο αυτό σημείο, μπορούν να έχουν μία συνισταμένη το πρόβλημα, βέβαια, δεν είναι τόσο απλό, γιατί δεν γνωρίζουμε, πλήρως, τη συμμετοχή κάθε επιβάρυνσης του φορέα στο τελικό αποτέλεσμα. Για να γίνει αυτό πιο

* Αυτές οι μέθοδοι στηρίζονται στη βασική ιδέα, ότι καποια σοβαρή κακοτεχνία επιβαρύνει το εξάρτημα και ο έλεγχος γίνεται ακόμη και όταν είναι η μηχανή σε λειτουργία με τεχνικές, όπως τα δυνορεύματα, τα μαγνητικά σωματίδια, την υπέρυθρη ακτινοβολία, την τομογραφία και άλλα ανάλογα.

κατανοητό, αναφέρουμε ότι στην περίπτωση ατράκτου που καταπονείται σε στρέψη και κάμψη, έχουμε τέσσερις θεωρητικές προσεγγίσεις, που κάθε μία καταλήγει και σε διαφορετική διατύπωση την ισοδύναμη τάσης*.

Αν σ_b, η τάση κάμψης και τ_t, η τάση στρέψης, τότε είναι:

- Σύμφωνα με τη θεωρία της μέγιστης ορθής τάσης:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_b + \sqrt{\sigma_\sigma + 4\tau_t^2}\right) \qquad (12.2.\alpha)$$

- Σύμφωνα με τη θεωρία της μέγιστης ανηγμένης παραμόρφωσης:

$$\sigma = \left(0,35\sigma_b + 0,65\sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}\right) \qquad (12.2.\beta)$$

- Σύμφωνα με τη θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2} \qquad (12.2.\gamma)$$

- Σύμφωνα με τη θεωρία της ενέργειας της παραμόρφωσης:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2} \qquad (12.2.\delta)$$

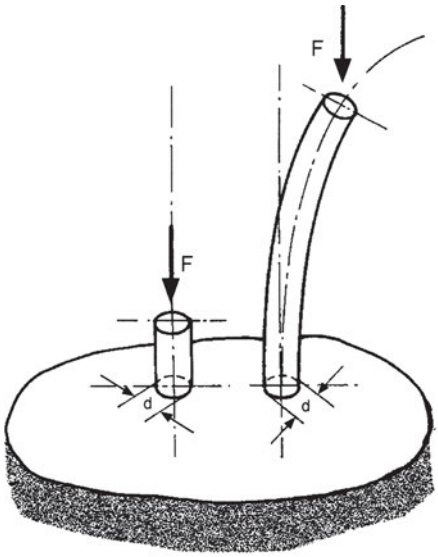
12.3 ΛΥΓΙΣΜΟΣ

12.3.1 Γενικά

Είναι εύκολο να δούμε, με ένα απλό πείραμα, ότι η συμπεριφορά της ύλης, στην καταπόνηση της θλίψης, εξαρτάται και από το ύψος του καταπονούμενου στοιχείου.

Παίρνουμε δύο στοιχεία, από το αυτό υλικό, που παρουσιαζόταν αρκετή αντοχή σε θλίψη, και τα οποία διαφέρουν, μόνο ως προς το ύψος. Έστω, δύο κυλινδρικοί ράβδοι της αυτής διαμέτρου d.(σχ.12.3.1α,) πακτωμένες στο κάτω μέρος.

* Είναι θέμα του μελετητή, ποια έκφραση θα χρησιμοποιήσει.



Σχήμα 12.3.1α *Η διαφορά συμπεριφοράς στην καταπόνηση της θλίψης, εξαιτίας της διαφοράς ύψους του στοιχείου.*

Θλίβουμε τις δύο ράβδους με το αυτό φορτίο, αυξάνοντάς το σταδιακά. Σε μία τιμή F του φορτίου, παρατηρούμε ότι, ενώ είναι

$$\sigma = \frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}} < \sigma_{\varepsilon\pi}$$

η ψηλή ράβδος κάμπτεται και, χωρίς παραπέρα αύξηση του φορτίου, συνεχίζει να κάμπτεται και τελικά καταστρέφεται. Το φαινόμενο που περιγράψαμε, λέγεται **λυγισμός**. Είναι προφανές, ότι εφόσον ο φορέας κάμπτεται, θα υπάρχει και μια καμπτική ροπή M_t, εκτός του θλιπτικού φορτίου F, και άρα, έχουμε μία σύνθετη καταπόνηση.

12.3.2 Βασικά χαρακτηριστικά του Λυγισμού

Όπως στις περισσότερες περιπτώσεις συνθέτων καταπονήσεων, έτσι και στο λυγισμό, έχουμε πειραματικές έρευνες και διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις. Από όλα αυτά, έχουμε καταλήξει στα εξής συμπεράσματα :

α) Στην περίπτωση θλίψης ενός φορέα, κατά την έννοια της μεγαλύτερης διάστασής του, αν αυτή η διάσταση είναι πάνω από οκτώ φορές μεγαλύτερη από τις άλλες του διαστάσεις, έχουμε εμφάνιση του φαινομένου του λυγισμού.

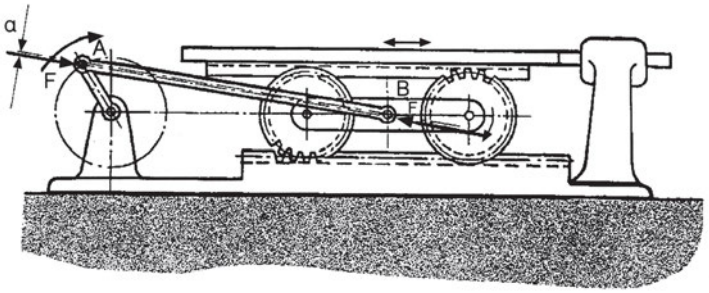
β) Όσο μεγαλώνει το μήκος, τόσο εντονότερο γίνεται το φαινόμενο του λυγισμού και τόσο μικρότερο φορτίο απαιτείται για την εμφάνισή του.

γ) Το σώμα, μετά την εμφάνιση του φαινομένου του λυγισμού, καταστρέφεται, ενώ το φορτίο, ούτε έχει υπερβεί το όριο αντοχής του υλικού στην καταπόνηση της θλίψης, ούτε αυξάνει.

Η περίπτωση, όπου η παραμόρφωση αυξάνεται, χωρίς επί πλέον αντίστοιχη αύξηση του φορτίου, είναι μία **ασταθής εντατική κατάσταση** και τέτοια είναι ο λυγισμός.

12.3.3 Η φυσική εξήγηση του λυγισμού - κρίσιμο φορτίο

Τα διάφορα μέλη των κατασκευών μας, όπως οι δοκοί με τα υποστηλώματα, στα δομικά έργα, ή τα βάκτρα με τους διωστήρες, στις μηχανολογικές κατασκευές, δεν συνδέονται ακλόνητα μεταξύ τους, ούτε η σύνδεση γίνεται μόνο σε ένα μαθηματικό σημείο, αλλά γίνεται σε μία ολόκληρη επιφάνεια. Δια μέσου της επιφάνειας αυτής γίνεται και η μεταβίβαση των δυνάμεων. Στο σχήμα 12.3.3.α, το βάκτρο καταπονείται, εναλλάξ, σε εφελκυσμό και θλίψη.



Σχήμα 12.3.3.α *Στον μηχανισμό διωστήρα στροφάλου, το βάκτρο ΑΒ υπόκειται σε θλίψη και εφελκυσμό εναλλάξ*

Για διαφόρους λόγους, είτε από κακή κατασκευή, είτε από κινήσεις της μηχανής π.χ. από ταλαντώσεις, είτε από εξωτερικά αίτια, π.χ. από σεισμούς, δεν συμπίπτει απόλυτα ο άξονας ενέργειας της δύναμης με τον άξονα συμμετρίας του εξαρτήματος,αλλά εμφανίζεται μοχλοβραχίονας α (σχ. 12.3.3.α) ,και δημιουργείται, επομένως, η ροπή $M_t = a \cdot F$

Με κατάλληλη τιμή της F, εμφανίζεται ο λυγισμός.

Ονομάζουμε **κρίσιμο φορτίο λυγισμού** (F_k), το αξονικό φορτίο θλίψης που είναι ικανό να προκαλέσει την εμφάνιση της καμπυλότητας του άξονα του φορέα, **χωρίς**, όμως, αυτή η παραμόρφωση να επιδεινώνεται. Ελάχιστη αύξηση, ή μείωση της τιμής της F_k, μπορεί να επιφέρει επιδείνωση της παραμόρφωσης και καταστροφή του φορέα, ή εξαφάνιση της παραμόρφω-

σης αντίστοιχα. Είναι δηλαδή, η τιμή του F_k ,το όριο μεταξύ της σταθερής εντατικής κατάστασης της θλίψης και της ασταθούς τοιαύτης του λυγισμού. Αν Α, το εμβαδόν της διατομής του φορέα, η κρίσιμη τάση θα είναι:

$$\sigma = \frac{F_k}{A} \qquad (12.3.3\alpha)$$

12.3.4 Ο τύπος του Eüler

Πειραματικά, έχει αποδειχθεί ότι ο λυγισμός, καθώς και η τιμή του κρίσιμου φορτίου, εξαρτώνται από :

α) το υλικό του φορέα

β) τη γεωμετρία του φορέα

γ) τον τρόπο με τον οποίο εντάσσεται ο φορέας στην κατασκευή.

Ακόμη, πειραματικά στοιχεία μας επιτρέπουν να δεχθούμε, ότι οι παρακάτω παραδοχές, βρίσκονται μέσα στα όρια της πραγματικότητας:

α) Ο φορέας είναι ράβδος, ιδανικά ευθύγραμμη

β) Το φορτίο ενεργεί, ακριβώς, στον άξονα της ράβδου

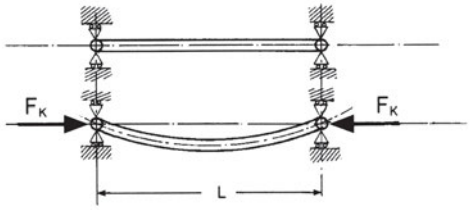
γ) Το υλικό της ράβδου είναι ομοιογενές ισότροπο και με τις ίδιες ιδιότητες, τόσο απέναντι στον εφελκυσμό, όσο και απέναντι στη θλίψη.

δ) Κατά την εφαρμογή του κρίσιμου φορτίου F_k, και για την αναπτυσσόμενη κρίσιμη τάση σ_k, ισχύει, ότι δεν είναι μεγαλύτερη του ορίου αναλογίας σ_α δηλαδή:

$$\sigma_k < \sigma_\alpha$$

άρα, είμαστε στην περιοχή που ισχύει ο νόμος του Hooke.

Με όλα τα παραπάνω, ο Eüler θεώρησε μία ράβδο, που τα άκρα της μπορούσαν μεν να περιστρέφονται, αλλά ευθύγραμμη κίνηση μπορούσαν να κάνουν, μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. (σχ.12.3.4.α).



Σχήμα 12.3.4.α *Η ράβδος του Euler*

Με τα παραπάνω πειραματικά στοιχεία και τις παραδοχές που έθεσε ο Eüler, διατύπωσε την εξής σχέση:

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ}}{\ell^2} \qquad (12.3.4.α)$$

όπου: F_k: το κρίσιμο φορτίο λυγισμού
E: το μέτρο ελαστικότητας του υλικού
$I_{ελ}$: η μικρότερη ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου
ℓ: το μήκος της ράβδου

Όπως είδαμε, κρίσιμη τάση λυγισμού εκφράζεται μέσα από τη σχέση :

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}$$

όπου A η επιφάνεια της διατομής της ράβδου, και άρα :

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ}}{A\,\ell^2}$$

αλλά,

$$\frac{I_{ελ}}{A} = i_{ελ},$$

όπου i η ακτίνα αδράνειας της διατομής
και άρα, έχουμε:

$$\sigma_k = \frac{\pi \cdot E \cdot i_{ελ}^2}{\ell^2}$$

το πηλίκο $\frac{i_{ελ}}{\ell}$ το ονομάζουμε λυγηρότητα λ, άρα,

$$\lambda = \frac{i_{ελ}}{\ell} \qquad (12.3.4.β)$$

και ο τύπος γίνεται:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \qquad (12.3.4.\gamma)$$

δεδομένου δε ότι το Ε, για τα διάφορα είδη των χαλύβων και του ελατού σιδήρου, που θεωρούνται κύρια μηχανολογικά υλικά, είναι περίπου το ίδιο, αποδεικνύει ότι η συμπεριφορά των υλικών αυτών εξαρτάται από τη λυγηρότητα.Θα πρέπει εδώ να πούμε ότι ο τύπος του Euler ισχύει εντός των ορίων του Νόμου του Hooke. Αυτό εξασφαλίζεται, στην πράξη με το να έχουμε το λ>100.

12.3.5 Ανηγμένο μήκος λυγισμού

Στην προηγούμενη παράγραφο (12.3.4), είπαμε, εκτός των άλλων, ότι ο λυγισμός και το κρίσιμο φορτίο του, εξαρτώνται και από τον τρόπο που ο φορέας, εντάσσεται μέσα στην κατασκευή. Πραγματικά, το πείραμα έδειξε, ότι το μήκος ℓ της ράβδου που θα μπαίνει στον τύπο του Eüler, δεν είναι πάντα το γεωμετρικό, αλλά θα είναι ένα άλλο μήκος, το **ανηγμένο μήκος λυγισμού** ℓ_k που είναι συνάρτηση του γεωμετρικού μήκους της ράβδου και του τρόπου στήριξής της, μέσα στον μηχανισμό. Ταξινομήθηκαν τέσσερις περιπτώσεις.

αν είναι: ℓ το γεωμετρικό μήκος της ράβδου και
ℓ_k το ανηγμένο μήκος λυγισμού:

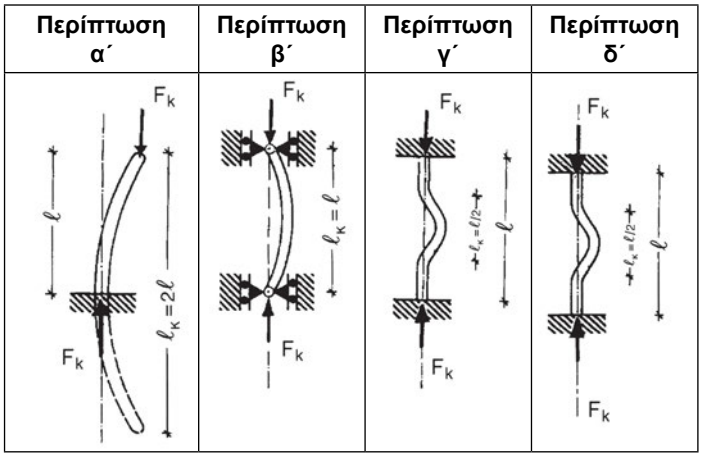
α) Η ράβδος να είναι πακτωμένη, μόνο κατά το ένα άκρο, ενώ το άλλο άκρο να είναι ελεύθερο, οπότε $\ell_k = 2\ell$

β) Η ράβδος να είναι πακτωμένη και κατά τα δύο άκρα, οπότε $\ell_k = \ell/2$

γ) Η ράβδος να είναι πακτωμένη, κατά το ένα άκρο, ενώ το άλλο άκρο να έχει άρθρωση, δηλαδή ελευθερία περιστροφής και ευθύγραμμη δυνατότητα κίνησης, μόνο κατά την έννοια του αρχικού άξονα της ράβδου, οπότε $\ell_k = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$

δ) Η ράβδος να έχει άρθρωση και στα δύο άκρα, όπως επίσης, τη δυνατότητα ευθύγραμμης κίνησης και των δύο άκρων, κατά την έννοια του αρχικού άξονα της ράβδου, οπότε $\ell_k = \ell$

Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο σχ. 12.3.5.α



Σχήμα 12.3.5 *Οι βασικές περιπτώσεις στερέωσης ράβδων, καταπονούμενων σε λυγισμό και το κατά περίπτωση ανηγμένο μήκος λυγισμού.*

Στην πράξη οι συναρμογές των ράβδων στο σύστημα (μηχανισμό ή φορέα) στο οποίο εντάσσονται, δεν κατατάσσονται πάντα καθαρά, σε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις, που ήδη αναφέρθηκαν. Σε αυτές τις περιπτώσεις, των ενδιαμέσων δηλαδή καταστάσεων, το αναγκαίο ανηγμένο μήκος ορίζεται κατά την κρίση του μελετητή.

12.3.6 Η μέθοδος των συντελεστών ω

Όταν σχεδιάζεται μία κατασκευή, μελετάται συγχρόνως και η ροή των δυνάμεων σ' αυτήν και διευκρινίζεται, σε τι είδους καταπόνηση υπόκειται κάθε στοιχείο της. Για τα στοιχεία εκείνα, που υπάρχουν ενδείξεις ότι θα υποστούν την καταπόνηση του λυγισμού, θα πρέπει να γίνει έλεγχος της αντοχής τους σ' αυτήν την καταπόνηση.

Μία απλή μέθοδος γι' αυτόν τον έλεγχο, βασίζεται στην παρατήρηση που εξάγεται από τον τύπο του Eüler (σχέση 12.3.4.γ)

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

και ο οποίος μας δείχνει ότι η κρίσιμη τάση εξαρτάται, για κάθε υλικό, τελικά, από τη λυγηρότητα λ. Έτσι, συντάχθηκαν πίνακες, απ' όπου, ανάλογα με τη λυγηρότητα του στοιχείου, βρίσκουμε το συντελεστή μείωσης των $\sigma_κ$ (κρίσιμων τάσεων λυγισμού), ως προς την $\sigma_{επ}$, (επιτρεπόμενη τάση θλίψη), που διεθνώς συμβολίζεται με γράμμα ω. Είναι, δηλαδή:

$$\omega = \frac{\sigma_{\kappa}}{\sigma_{\varepsilon\pi}} > 1 \qquad (12.3.6.\alpha)$$

Για τον έλεγχο, εργαζόμαστε ως εξής: και με την προϋπόθεση, ότι γνωρίζουμε το υλικό του στοιχείου καθώς επίσης και τη γεωμετρία του στοιχείου. Έτσι με βάση το υλικό, συμβουλευόμαστε τον αντίστοιχο πίνακα και από τη γεωμετρία μεν βρίσκουμε το λ, ενώ από τον πίνακα, το ω.

Αν, λοιπόν, είναι Α η διατομή του στοιχείου που καταπονείται με δύναμη F, τότε η αναπτυσσόμενη τάση ελέγχεται από τη σχέση:

$$\sigma = \omega \frac{F}{A} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \qquad (12.3.6.\beta)$$

Παραθέτουμε, για παράδειγμα, μερικούς από τους πίνακες των συντελεστών ω, για μερικά μηχανουργικά υλικά.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.3.6α

Συντελεστές λυγισμού ω για χάλυβες κατά DIN 1050

α) Για St 00.12, για χάλυβα εμπορίου και για St 37.12

λ	λ+ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
0	**1,00**	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0
10	**1,01**	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	0
20	**1,02**	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	20
30	**1,05**	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	30
40	**1,10**	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	40
50	**1,17**	1,18	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	50
60	**1,26**	1,27	1,29	1,30	1,31	1,32	1,34	1,35	1,36	1,38	60
70	**1,39**	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	70
80	**1,59**	1,61	1,63	1,66	1,69	1,71	1,74	1,78	1,81	1,84	80
90	**1,88**	1,92	1,95	2,00	2,04	2,09	2,14	2,19	2,24	2,30	90
100	**2,36**	2,41	2,46	2,51	2,56	2,61	2,66	2,71	2,76	2,81	100
110	**2,86**	2,91	2,97	3,02	3,07	3,13	3,18	3,24	3,29	3,35	100
120	**3,40**	3,46	3,52	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,87	3,93	120
130	**4,00**	4,06	4,12	4,18	4,25	4,31	4,37	4,44	4,50	4,57	130
140	**4,63**	4,70	4,77	4,83	4,90	4,97	5,04	5,11	5,18	5,25	140
150	**5,32**	5,39	5,46	5,53	5,61	5,68	5,75	5,83	5,90	5,98	150
160	**6,05**	6,13	6,20	6,28	6,36	6,44	6,51	6,59	6,67	6,75	160
170	**6,83**	6,91	6,99	7,08	7,16	7,24	7,32	7,41	7,49	7,57	170
180	**7,66**	7,75	7,83	7,92	8,00	8,09	8,18	8,27	8,36	8,44	180
190	**8,53**	8,62	8,72	8,81	8,90	8,99	9,08	9,17	9,27	9,36	190
200	**9,46**	9,55	9,65	9,74	9,84	9,94	10,03	10,13	10,23	10,33	200
210	**10,43**	10,53	10,63	10,73	10,83	10,93	11,03	11,13	11,24	11,34	210
220	**11,44**	11,55	11,65	11,76	11,86	11,97	12,08	12,18	12,29	12,40	220
230	**12,51**	12,62	12,72	12,83	12,94	13,06	13,17	13,28	13,39	13,50	230
240	**13,62**	13,73	13,84	13,96	14,08	14,19	14,31	14,42	14,54	14,66	240
250	**14,78**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	250

β) Για χάλυβα St 52

λ	λ+ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
0	**1,00**	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	0
10	**1,01**	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	10
20	**1,03**	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	20
30	**1,07**	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,12	30
10	**1,13**	1,11	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	40
50	**1,22**	1,23	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33	**50**
60	**1,35**	1,36	1,38	1,40	1,42	1,41	1,46	1,48	1,50	1,52	60
70	**1,54**	1,57	1,59	1,62	1,65	1,68	1,71	1,74	1,78	1,81	70
80	**1,85**	1,89	1,93	1,98	2,03	2,08	2,13	2,19	2,25	2,32	80
90	**2,39**	2,17	2,55	2,64	2,74	2,81	2,96	3,08	3,22	3,38	90
100	**3,55**	3,62	3,69	3,76	3,81	3,91	3,98	4,06	4,14	4,21	**100**
110	**4,29**	4,37	4,45	4,53	4,61	4,69	4,77	4,85	4,91	5,02	110
120	**5,11**	5,19	5,28	5,37	5,45	5,54	5,63	5,72	5,81	5,90	120
130	**5,99**	6,09	6,18	6,27	6,37	6,46	6,56	6,66	6,75	6,85	130
110	**6,95**	7,05	7,15	7,25	7,35	7,46	7,56	7,66	7,77	7,87	140
150	**7,98**	8,09	8,19	8,30	8,41	8,52	8,63	8,74	8,85	8,97	**150**
160	**9,08**	9,19	9,31	9,42	9,54	9,65	9,77	9,89	10,01	10,13	160
170	**10,25**	10,37	10,49	10,61	10,74	10,86	10,98	11,11	11,21	11,36	170
180	**11,49**	11,62	11,75	11,88	12,01	12,14	12,27	12,40	12,53	12,67	180
190	**12,80**	12,91	13,07	13,21	13,35	13,48	13,62	13,76	13,90	14,04	190
200	**14,18**	14,33	14,47	14,61	14,76	14,90	15,05	15,20	15,31	15,49	**200**
210	**15,64**	15,79	15,94	16,09	16,24	16,39	16,55	16,70	16,85	17,01	210
220	**17,16**	17,32	17,48	17,64	17,79	17,95	18,11	18,27	18,44	18,60	220
230	**18,76**	18,92	19,09	19,25	19,12	19,58	19,75	19,92	20,09	20,26	230
240	**20,43**	20,60	20,77	20,94	21,11	21,29	21,46	21,64	21,81	21,99	210
250	**22,16**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	250

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.3.6β

Συντελεστές λυγισμού ω για χυτοσίδηρο κατά DIN 1051

	λ+										
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
0	**1,00**	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0
10	**1,01**	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	10
20	**1,05**	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	20
30	**1,11**	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	30
40	**1,22**	1,21	1.25	1,27	1,29	1,31	1,32	1,34	1,36	1,37	40
50	**1,39**	1,42	1,45	1,47	1,50	1,53	1,56	1,59	1,61	1,64	**50**
60	**1,67**	1,72	1,78	1,83	1,89	1,94	1,99	2,05	2,10	2,16	60
70	**2,21**	2,31	2,47	2,60	2,73	2,86	2,98	3,11	3,21	3,37	70
80	**3,50**	3,59	3,69	3,78	3,87	3,97	4,06	4,15	4,24	4,34	80
90	**4,43**	4,53	4,63	4,74	4,84	4,94	5,04	5,14	5,25	5,35	90
100	**5,45**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**100**

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.3.6γ

Συντελεστές λυγισμού ω για ξύλα κατά DIN 1052

	λ+									
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	**1,00**	1,01	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,06
10	**1,07**	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15
20	**1,15**	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24
30	**1,25**	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35
40	**1,36**	1,38	1,39	1,40	1,42	1,43	1,44	1,46	1,47	1,49
50	**1,50**	1,52	1,53	1,55	1,56	1,58	1,60	1,61	1,63	1,65
60	**1,67**	1,69	1,70	1,72	1,74	1,76	1,79	1,81	1,83	1,85
70	**1,87**	1,90	1,92	1,95	1,97	2,00	2,03	2,05	2,08	2,11
80	**2,14**	2,17	2,21	2,24	2,27	2,31	2,34	2,38	2,42	2,46
90	**2,50**	2,54	2,58	2,63	2,68	2,73	2,78	2,83	2,88	2,94
100	**3,00**	3,07	3,14	3,21	3,28	3,35	3,43	3,50	3,57	3,65
110	**3,73**	3,81	3,89	3,97	4,05	4,13	4,21	4,29	4,38	4,46
120	**4,55**	4,61	4,73	4,82	4,91	5,00	5,09	5,19	5,28	5,38
130	**5,48**	5,57	5,67	5,77	5,88	5,98	6,08	6,19	6,29	6,40
140	**6,51**	6,02	6,73	6,84	6,95	7,07	7,18	7,30	7,41	7,53
150	**7,65**	7,77	7,90	8,02	8,14	8,27	8,39	8,52	8,65	8,78
160	**8,91**	9,04	9,18	9,31	9,45	9,58	9,72	9,86	10,00	10,15
170	**10,29**	10,13	10,58	10,73	10,88	11,03	11,18	11,33	11,48	11,64
180	**11,80**	11,95	12,11	12,27	12,44	12,60	12,76	12,93	13,00	13,26
190	**13,43**	13,61	13,78	13,95	14,12	11,30	14,48	14,66	14,84	15,63
200	**15,20**	15,38	15,57	15,76	15,95	16,14	16,33	16,52	16,71	16,91
210	**17,11**	17,31	17,51	17,71	17,92	18,12	18,33	18,53	18,74	18,95
220	**19,17**	19,38	19,60	19,81	20,03	20,25	20,47	20,69	20,92	21,14
230	**21,37**	21,60	21,83	22,06	22,30	22,53	22,77	23,01	23,25	23,49
240	**23,73**	23,98	24,22	24,47	24,72	24,97	25,22	25,48	25,73	25,99
250	**26,25**	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.3.6δ

Συντελεστές λυγισμού ω για αργιλιοκράματα κατά DIN 4113

	α) κανονικά αργιλιοκράματα Al–Cu–Mg										
					λ+	λ+					
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
0	**1,00**	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0
10	**1,01**	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	10
20	**1,03**	1,04	1,06	1,07	1,10	1,11	1,13	1,14	1,16	1,17	20
30	**1,18**	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37	30
40	**1,39**	1,41	1,44	1,46	1,49	1,52	1,54	1,56	1,59	1,63	40
50	**1,66**	1,69	1,73	1,76	1,80	1,83	1,87	1,90	1,93	1,96	**50**
60	**1,99**	2,05	2,11	2,16	2,22	2,28	2,34	2,39	2,45	2,51	60
70	**2,57**	2,65	2,73	2,81	2,88	2,96	3,04	3,12	3,20	3,28	70
80	**3,36**	3,45	3,51	3,63	3,72	3,81	3,90	3,99	4,08	4,17	80
90	**4,26**	4,36	4,46	4,56	4,66	4,75	4,85	4,95	5,05	5,15	90
100	**5,25**	5,36	5,47	5,58	5,69	5,80	5,92	6,03	6,14	6,25	**100**
110	**6,36**	6,48	6,60	6,72	6,84	6,96	7,08	7,21	7,33	7,45	110
120	**7,57**	7,70	7,83	7,96	8,09	8,22	8,35	8,18	8,62	8,71	120
130	**8,88**	9,02	9,16	9,31	9,45	9,59	9,73	9,87	10,02	10,16	130
140	**10,30**	10,45	10,60	10,75	10,91	11,06	11,21	11,36	11,52	11,67	110
150	**11,82**	11,98	12,15	12,31	12,47	12,63	12,80	12,96	13,12	13,20	**150**
160	**13,45**	13,62	13,79	13,97	14,15	14,32	14,49	14,67	14,81	15,02	160
170	**15,19**	15,37	15,55	15,71	15,93	16,11	16,29	16,48	16,66	16,85	170
180	**17,03**	17,22	17,12	17,61	17,80	18,00	18,20	18,40	18,60	18,78	180
190	**18,97**	19,17	19,38	19,58	19,79	19,99	20,20	20,40	20,61	20,81	190
200	**21,02**	21,23	21,45	21,66	21,88	22,09	22,31	22,52	22,71	22,95	**200**
210	**23,17**	23,39	23,62	23,85	21,07	21,30	24,53	21,75	21,98	25,20	210
220	**25,43**	25,67	25,90	26,14	26,38	26,61	26,85	27,10	27,32	27,56	220
230	**27,80**	28,05	28,54	28,80	29,03	29,28	29,53	29,53	29,78	30,02	230
240	**30,27**	30,53	30,78	31,01	31,30	31,55	31,81	32,07	32,33	32,58	210
250	**32,84**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**250**

	β) αργιλιοκράματα Ai-Mg3, F18										
					λ+						
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
0	**1,00**	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0
10	**1,00**	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	10
20	**1,00**	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	20
30	**1,02**	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	30
40	**1,06**	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	40
50	**1,15**	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,22	1,22	1,23	1,25	**50**
60	**1,26**	1,27	1,28	1,29	1,31	1,32	1,33	1,34	1,36	1,37	60
70	**1,38**	1,39	1,40	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,51	70
80	**1,52**	1,53	1,55	1,57	1,58	1,60	1,62	1,63	1,64	1,66	80
90	**1,68**	1,70	1,72	1,74	1,76	1,77	1,79	1,81	1,83	1,85	90
100	**1,87**	1,89	1,91	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07	**100**
110	**2,09**	2,12	2,16	2,19	2,23	2,26	2,29	2,33	2,36	2,39	110
120	**2,43**	2,47	2,51	2,56	2,60	2,64	2,68	2,72	2,76	2,81	120
130	**2,85**	2,89	2,94	2,98	3,03	3,07	3,12	3,16	3,21	3,25	130
140	**3,29**	3,35	3,40	3,45	3,50	3,54	3,60	3,64	3,69	3,71	140
150	**3,79**	3,84	3,89	3,95	3,99	4,05	4,10	4,15	4,21	4,26	**150**
160	**4,31**	4,37	4,42	4,48	4,53	4,59	4,65	4,70	4,76	4,81	160
170	**4,87**	4,93	4,99	5,05	5,11	5,16	5,22	5,28	5,34	5,40	170
180	**5,46**	5,52	5,58	5,64	5,71	5,77	5,83	5,89	5,95	6,02	180
190	**6,08**	6,14	6,21	6,28	6,34	6,41	6,48	6,54	6,61	6,67	190
200	**6,74**	6,81	6,88	6,95	7,02	7,08	7,15	7,22	7,29	7,36	**200**
210	**7,43**	7,50	7,57	7,65	7,72	7,79	7,87	7,94	8,01	8,09	210
220	**8,16**	8,23	8,30	8,38	8,45	8,52	8,60	8,67	8,74	8,82	220
230	**8,92**	8,99	9,08	9,16	9,24	9,31	9,39	9,47	9,55	9,63	230
240	**9,71**	9,79	9,87	9,95	10,04	10,12	10,20	10,28	10,37	10,45	240
250	**10,53**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**250**

12.4 ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΕΩΝ

12.4.1 Άτρακτοι, καταπονούμενες σε κάμψη και στρέψη

Στο κεφάλαιο της στρέψης (12.6), προσεγγιστικά, υπολογίσαμε μία άτρακτο μόνο σε στρέψη.

Έστω, τώρα, μία άτρακτος που καταπονείται σε στρέψη και κάμψη, ταυτόχρονα. Αν έχουμε την δυνατότητα να υπολογίσουμε τη ροπή στρέψης και τη ροπή κάμψης, που την καταπονούν, τότε, μπορούμε να είμαστε ακριβέστεροι στους υπολογισμούς μας. Αν είναι, λοιπόν, M_b η καμπτική ροπή και M_t η ροπή στρέψης, τότε, κατά τα γνωστά, έχουμε :

α) Για την κάμψη: $\sigma_b = \dfrac{M_b}{W_b}$

β) Για την στρέψη: $\tau_t = \dfrac{M_t}{W_p}$

Η ισοδύναμη τάση, μπορεί να υπολογισθεί από ένα τύπο της παραγράφου 12.2

Έστω τον, $\sigma = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$

Επειδή, για κυκλική διατομή ατράκτου διαμέτρου d κατά τα γνωστά, είναι:

$$\sigma_b = \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d^3} \text{ και } \tau_t = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3}$$

θα έχουμε:

$$\sigma_i = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

Στη συνέχεια, μπορούμε ακόμα να ελέγξουμε και την παραμόρφωση, από τον τύπο:

$$\theta = \frac{M_\ell}{G\, I_p}$$

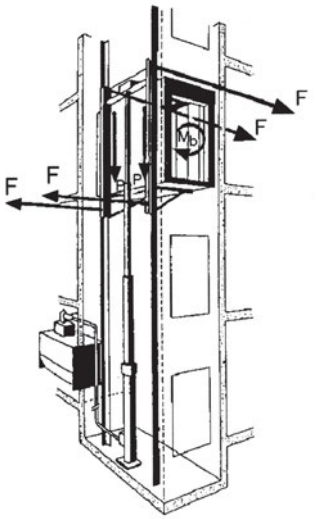
Για κυκλική διατομή, διαμέτρου d, είναι:

$$\theta = \frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot d^4}$$

Η παραμόρφωση αυτή, δεν θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 0,25° ανά μέτρο μήκους της ατράκτου.

12.4.2 Ράβδοι καταπονούμενες σε κάμψη και λυγισμό

Στους υδραυλικούς ανελκυστήρες με πλάγια ανάρτηση, οι οδηγοί - ράβδοι είναι οπίσω και, συνήθως, πακτωμένοι κάτω. Ο θάλαμος, επομένως, είναι σε πρόβολο (σχ.12.4.2.α). Σε μία τέτοια εγκατάσταση, το φαινόμενο της καταπόνησης των οδηγών - ράβδων σε κάμψη και λυγισμό, είναι πολύ έντονο στην περίπτωση εκείνη που θα λειτουργήσει το σύστημα “αρπαγής”*. Τότε, οι οδηγοί επιβαρύνονται από το βάρος του θαλάμου και του ωφέλιμου φορτίου, (έστω P) (σχ.12.4.2.α) και συγχρόνως, ο θάλαμος, που είναι σε πρόβολο, πιέζει κάθετα προς τον άξονα του οδηγού, το πάνω στήριγμά του προς τα δεξιά, και το κάτω προς τα αριστερά, με τη δύναμη F. Έτσι, έχουμε τη ροπή M_b (σχ. 12.4.2.α).



Σχήμα 12.4.2α *Διάταξη εγκατάστασης υδραυλικού ανελκυστήρα, έμμεσης ανάρτησης, με οδηγούς πακτωμένους κάτω. Οι οδηγοί υπόκεινται σε κάμψη και λυγισμό.*

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω, ένας συνηθισμένος ανελκυστήρας 8 ατόμων (8×75kp = 600kp), που κινείται με ταχύτητα έως 0,63m/s και διαθέτει συσκευή "αρπαγής"*, ακαριαίας πέδησης. Η οδηγός - ράβδος υλικού st37 έχει διατομή Τ, διαστάσεων 80×80×9 mm και στοιχεία (όπως αυτά υπάρχουν στους πίνακες των κατασκευαστών):

α) διατομή A =13,56 cm^2

β) ροπή αντίστασης Wy = 9,7 cm^3

γ) ακτίνα αδράνειας l_y = 1,69 cm

δ) μήκος λυγισμού = η απόσταση των στηριγμάτων = 110 cm

ε) λυγηρότητα $\lambda = \frac{110}{1,69} = 65$

στ) από τον πίνακα των ω, για υλικό st37, ω =1.32

Από τη γεωμετρία της κατασκευής του ανελκυστήρα, η δύναμη κάμψης είναι της τάξης των F= 550Kp, η δύναμη που προκαλεί τον λυγισμό, είναι:

P = 1,5 (ωφέλιμο φορτίο + βάρος θαλάμου), ή

P = 1,5 × (600+500) =1650Kp

Η συνολική λοιπόν καταπόνηση των οδηγών σε κάμψη και λυγισμό, είναι

$$\sigma = 0,9\,\sigma_b + \sigma_\kappa = 0,9\,\frac{F\cdot\ell}{4W_y} + \frac{P\cdot\omega}{A} \quad \text{(πειραματικός τύπος)}$$

Έτσι: $\sigma = 0,9\times\frac{550\times110}{4\times9,7} + \frac{1650\times1,32}{13,56} = 1563,97\ kp/cm^2$

και το επιτρεπόμενο όριο για την περίπτωση αυτή είναι 1800 kp/cm^2, ή daN/cm^2

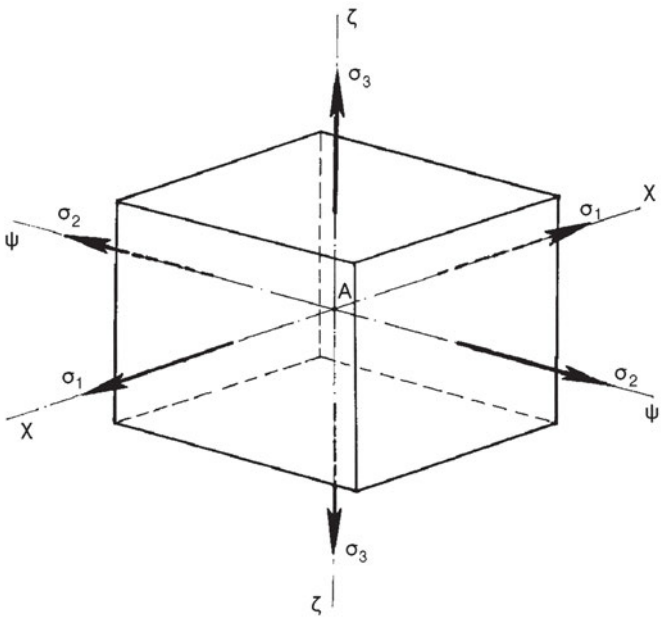
* Το σύστημα αρπαγής δένει το θάλαμο πάνω στους οδηγούς, όταν για ποιονδήποτε λόγο ο θάλαμος αρχίζει να πέφτει με ταχύτητα μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη.

12.4.3 Πολυδιάστατες εντατικές καταστάσεις

12.4.3.1 Γενικά

Εξετάζοντας μέχρι τώρα, την εντατική κατάσταση των φορέων, στις διάφορες μορφές καταπόνησής τους, περιοριστήκαμε στην εξέταση των αναπτυσσόμενων τάσεων σε διατομές κάθετες προς τον κύριο άξονα του φορέα.

Αυτό έγινε, γιατί εξετάζαμε, κυρίως, φορείς με επίμηκες σχήμα. Τέτοιοι φορείς είναι οι άξονες, οι δοκοί, τα υποστηλώματα, τα βάκτρα, οι διωστήρες. Εκτός, όμως, από φορείς αυτής της διαμόρφωσης, στις κατασκευές μας έχουμε και επιφανειακές διαμορφώσεις, όπως τοιχία, κελύφη, καθώς και φορείς μεγάλου όγκου, όπως βάθρα.



Σχήμα 12.4.3.1.α *Στοιχειώδης κύβος, εντατικής κατάστασης, περί σημείο Α καταπονούμενου σώματος.*

Θεωρητικά, σε κάθε σημείο επί ενός καταπονούμενου σώματος, μπορούμε να θεωρήσουμε (σχ. 12.4.3.1α) ένα στοιχειώδη κύβο, οι έδρες του οποίου να είναι κάθετοι προς τους κύριους άξονες. Το στοιχείο αυτό καταπονείται από τις τάσεις σ_1, σ_2, σ_3 που είναι ,ανά δύο, κάθετες μεταξύ τους και παράλληλες προς τους κύριους άξονες του σώματος.

Διακρίνουμε, λοιπόν, τρεις περιπτώσεις καταπονήσεων:

1. **Την τριαξονική καταπόνηση:**

Όταν δηλαδή όλες οι τάσεις είναι διάφορες του μηδενός

2. **Την διαξονική καταπόνηση**

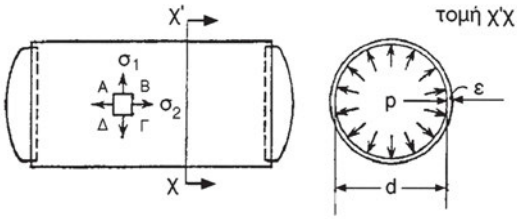
Όταν δηλαδή μία, μόνο, των τάσεων αυτών, είναι μηδέν.

3. **Την μονοαξονική καταπόνηση**

Όταν δηλαδή μία, μόνο, των τάσεων αυτών, δεν είναι μηδέν.

12.4.3.2 Παράδειγμα πολυδιάστατης εντατικής κατάστασης

Θα εξετάσουμε, τώρα, μία συνηθισμένη περίπτωση. Είναι η περίπτωση λέβητα υπό πίεση. Ο λέβητας είναι ένα σιδερένιο δοχείο, φτιαγμένο από ελάσματα, των οποίων το πάχος ε, είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με τη διάμετρό του.



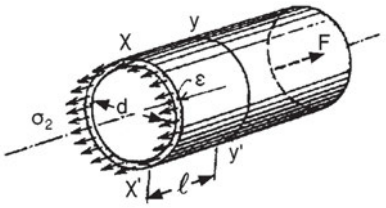
Σχήμα 12.4.3.2.α *Λέβητας υπό πίεση. Υπόκειται σε διαξονική καταπόνηση.*

Στο σχήμα 12.4.3.2.α, βλέπουμε ένα λέβητα με μία εσωτερική πίεση P. Η πίεση αυτή πιέζει, ομοιόμορφα τα τοιχώματα και τους πυθμένες του λέβητα. Το αποτέλεσμα της πίεσης αυτής στο εσωτερικό του λέβητα είναι:

α) Η τάση να πεταχθούν προς τα έξω οι πυθμένες, δηλαδή να κοπεί ο λέβητας, κατά μία τομή χχ΄, να κοπεί δηλαδή κατά τη διάμετρό του.

β) Συγχρόνως, η τάση να ανοίξει ο λέβητας κατά μήκος, δηλαδή κατά γενέτειρα. Αν επομένως, απομονώσουμε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο από το τοίχωμα του λέβητα, το ΑΒΓΔ (σχ. 12.4.3.2.α), αυτό θα υπόκειται σε εφελκυσμό και κατά την γενέτειρα, με τάση σ_2, ενώ κατά την διάμετρο,με τάση σ_1. Έχουμε, επομένως, μία διαξονική καταπόνηση. Ας φανταστούμε, ότι κόβουμε τον λέβητα του σχ.12.4.3.2.α, κατά τομή χχ΄ και ας εξετάσουμε την ισορροπία του δεξιού σχήματος σχ. 12.4.3.2.β. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στον πυθμένα και τείνουν να τον αποσπάσουν κατά την τομή χχ΄, είναι:

$$F = p \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$



Σχήμα 12.4.3.2β *Οι δυνάμεις στον πυθμένα λέβητα υπό πίεση.*

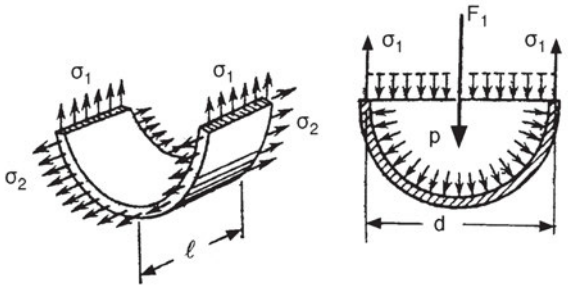
Η δύναμη αυτή αντισταθμίζεται από τις τάσεις που αναπτύσσονται στην τομή χχ΄. Η τομή χχ΄ είναι ένας δακτύλιος, με εσωτερική διάμετρο d και πάχος ε. Το εμβαδόν είναι κατά προσέγγιση*:

$A_2 = \pi \cdot d \cdot \varepsilon$

Άρα η αναπτυσσόμενη τάση σ_2, κατά τη διάμετρο, είναι:

$$\sigma_2 = \frac{p \frac{\pi d^2}{4}}{\pi d \varepsilon}$$

$$\sigma_2 = \frac{p\, d}{4\, \varepsilon} \qquad (12.4.3.2.\alpha)$$



Σχήμα 12.4.3.2γ *Οι αναπτυσσόμενες τάσεις, κατά γενέτειρα, σε λέβητα υπό πίεση.*

Για να υπολογίσουμε τώρα, τις τάσεις που αναπτύσσονται κατά τη γενέτειρα θεωρούμε ένα τμήμα του λέβητα, μήκους ℓ μεταξύ των τομών χ-χ΄

---

*Το εμβαδόν είναι:

$$A = \frac{\pi (d + 2\varepsilon)^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d^2 + 4\varepsilon^2 + 4d\varepsilon - d^2) = \pi\varepsilon^2 + \pi d\varepsilon$$

Ο όρος $\pi\varepsilon^2$, επειδή το ε είναι μικρό, παραλείπεται άρα $A = \pi \cdot d \cdot e$

και y-y΄. (Σχήμα 12.4.3.2.β). Απομονώνουμε το τμήμα αυτό (σχ. 12.4.3.2γ) και παίρνουμε μία τομή, κατά διάμετρο. Η δύναμη F_1 στη διατομή, εξαιτίας της πίεσης P, είναι $F_1 = p \cdot d \cdot \ell$.

Η δύναμη αυτή αναπτύσσει τις τάσεις σ_1 στα τοιχία, κατά γενέτειρα, του λέβητα. Το εμβαδόν των τοιχίων είναι:

$$A_1 = 2 \cdot \ell \cdot \varepsilon$$

άρα, για τις τάσεις σ_1,έχουμε:

$$\sigma = \frac{p\, d\, \ell}{2\, \ell\, \varepsilon}$$

$$\sigma_1 = \frac{p\, d}{2\, \varepsilon} \qquad (12.4.3.2.\beta)$$

Τριαξονική καταπόνηση έχουμε σε περιπτώσεις αντικειμένου με σχετικό όγκο, όπως είναι, π.χ. οι σιδηροτροχιές του τραίνου που καταπονούνται από τις ρόδες του.

Η εξέταση, όμως, τέτοιων ζητημάτων, είναι πέραν των στόχων αυτών των μαθημάτων.

12.4.4 Δυνάμεις κωλυόμενες διαστολής – συστολής

Από τη Φυσική ξέρουμε, ότι αν μεταβληθεί η θερμοκρασία ενός σώματος, από θ_1 σε θ_2,($\theta_2 < \theta_1$ είναι η ψύξη, $\theta_2 > \theta_1$ είναι η θέρμανση), τότε έχουμε μεταβολή των διαστάσεών του. Αν η μεταβολή των διαστάσεων μπορεί να γίνει ελεύθερα, τότε στο σώμα δεν αναπτύσσονται τάσεις, εξαιτίας της θερμοκρασιακής μεταβολής. Αντίθετα, αν εμποδίζεται η μεταβολή των διαστάσεων, είναι σαν να καταπονούμε το σώμα με δύναμη, που θα επιβάλλει παραμόρφωση, αντίθετη από την μεταβολή, λόγω της θερμοκρασιακής διαφοράς. Παραδείγματος χάρη, αν θερμαίνουμε μία ράβδο και δεν την αφήνουμε να διασταλεί, είναι σαν να την θλίβουμε με θλιπτική δύναμη, που προκαλεί βράχυνση, ίση με την επιμήκυνση, λόγω της θερμάνσεώς της. Αν οι αναπτυσσόμενες τάσεις, εξαιτίας των παραπάνω αναφερθέντων αιτίων, δεν είναι γνωστές- ώστε να, αντιμετωπισθούν τα αποτελέσματά τους - μπορεί να φθάσουμε μέχρι και της καταστροφής του σώματος που υπόκειται σ' αυτές τις τάσεις. Έτσι, όπου είναι δυνατόν, αφήνουμε ελεύθερες τις διαστολές, με τη δημιουργία αρμών διαστολής, εδράνων κύλισης κ.ά, οπωσδήποτε όμως πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε αυτές τις τάσεις, σε κάθε περίπτωση.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω μία ράβδος, αρχικού μήκους ℓ_1 στη θερμοκρασία θ_1 που θερμαίνεται στη θερμοκρασία θ_2, και αποκτά μήκος ℓ_2. Τότε, κατά τα γνωστά από τη Φυσική,

$$\ell_2 = \ell_1 [1+ \alpha (\theta_2 - \theta_1)]$$

όπου α , ο γνωστός συντελεστής γραμμικής διαστολής του υλικού.
Ο τύπος γράφεται και

$$\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} = \alpha\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

Η έκφραση $(\ell_2-\ell_1)/\ell_1$ είναι η ανηγμένη μήκυνση και η τάση που θα αναπτυχθεί, αν την εμποδίσουμε θα είναι, κατά τον νόμο του Hooke:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1}$$

και άρα

$$\frac{\sigma}{E} = \alpha\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

Επομένως

$$\sigma = \alpha \cdot E(\theta_2-\theta_1) \qquad (12.4.4.\alpha)$$

όπου Ε, το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

12.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Χυτοσιδηρά σωληνωτή κολόνα έχει ύψος ℓ = 6m, εξωτερική διάμετρο D=140mm και εσωτερική = 100mm. Το υλικό κατασκευής της έχει μέτρο ελαστικότητας $E=10^7 N/cm^2$.

Ζητείται το επιτρεπόμενο φορτίο, αν η κολόνα είναι πακτωμένη στο κάτω μέρος και ελεύθερη στο πάνω και θέλουμε να έχουμε συντελεστή ασφαλείας 4.

Λύση

Μας δίνονται:

D = 140 mm, d = 100 mm, h = 6m, $E = 10^7\ N/cm^2$, v = 4 και το ανηγμένο μήκος λυγισμού $\ell_κ = 2\ell$ (γιατί είναι πακτωμένη μόνο στο κάτω μέρος).

Μας ζητείται: Το επιτρεπόμενο φορτίο $F_{επ}$.

1. Η ροπή αδράνειας της διατομής είναι

$$I_p = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(14^4 - 10^4\right)$$

$$I_p = 1394{,}86\ cm^4$$

2. Το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(14^2 - 10^2\right)$$

$$A = 75{,}4\ cm^4$$

3. Το ανηγμένο μήκος λυγισμού είναι

$$\ell_κ = 2 \cdot \ell = 2{\times}6 = 12\ m$$

ή

$$\ell_κ = 1200\ cm$$

4. Η ακτίνα αδράνειας της διατομής είναι

$$i = \sqrt{\frac{I_p}{A}} = \sqrt{\frac{1394{,}86}{75{,}4}}\ cm \quad \text{ή} \quad i = 4{,}3\ cm$$

5. Η λυγηρότητα είναι

$$\lambda = \frac{\ell_\kappa}{i} = \frac{1200}{4,3} \quad \text{ή} \quad \lambda = 279,07 > 100$$

είμαστε μέσα στα όρια του νόμου του Hooke και άρα ισχύει, ο τύπος του Eüler.

6. Το κρίσιμο φορτίο είναι:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_p}{\ell_\kappa^2} = \frac{\pi^2 \times 10^7 \times 1394,86}{1200^2} \quad \text{ή} \quad F_\kappa = 95,6 \text{ KN}$$

7. Το επιτρεπόμενο φορτίο

$$F_{\varepsilon\pi} = \frac{F_\kappa}{v} = 23,9 \text{KN}$$

Απάντηση: $F_{\varepsilon\pi} = 23,9$ KN

2. Στύλος NPT 4 1/2 (DIN 1024) από st 37 με επιτρεπόμενη τάση θλίψης 14daN/mm^2 και μήκος 2m, που είναι πακτωμένος και από τα δύο άκρα, καταπονείται σε θλίψη, κεντρικά, από φορτίο 30KN. Να ελεγχθεί η αντοχή του στύλου σε λυγισμό.

Λύση

Μας δίνονται: ℓ = 2m αμφίπακτος άρα ℓ_κ =0,5. Τα γεωμετρικά δοχεία του στύλου NPT 4 1/2. st37. Το $\sigma_{\varepsilon\pi}$= 14 daN/mm^2, το φορτίο F = 30KN

Μας ζητείται ο έλεγχος σε λυγισμό:

1) Το ανηγμένο μήκος είναι

$\ell_\kappa = 0,5\ l = 0,5 \text{ X } 200$

$\ell_\kappa = 100$ cm ή

2) Από τον πίνακα DIN 1024 έχουμε

$I_{min} = 4,01$ cm^4

$i_{min} = 0,93$ cm

$A = 4,67$ cm^2

οπότε η λυγηρότητα είναι

$$\lambda = \frac{\ell_\kappa}{i} = \frac{100}{0,93} \quad \text{ή} \quad \lambda = 107,5 > 100$$

Από τον πίνακα 12.3.6.α για st 37 και λ = 107,5 έχουμε ω = 2,735 άρα

$$\sigma = \frac{F \cdot \omega}{A}$$

$$\sigma = \frac{30 \times 10^3 \times 2,735}{4,67} = 17.569,6 \text{ N/cm}^2$$

$\sigma = 17,6 \text{ daN/mm}^2$

Επομένως έχουμε

$\sigma = 17,6 \text{ daN/mm}^2 > 14, \text{ daN/mm}^2 = \sigma_{\varepsilon\pi}$

Απάντηση: Ο στύλος δεν αντέχει σε λυγισμό.

3. Σε ένα άξονα αναπτύσσεται συγχρόνως ροπή κάμψης 400Nm και ροπή στρέψης 200 Nm. Αν η επιτρεπόμενη ισοδύναμη τάση είναι 600KN/m^2. Να υπολογισθεί η διάμετρος του άξονα.

Λύση

Μας δίνεται: $M_b = 400$ Nm, $M_t = 200$Nm

$\tau_{\varepsilon\pi} = 600 \text{ KN/m}^2$

Μας ζητείται: d

1) η αναπτυσσόμενη τάση κάμψης είναι

$$\sigma_b = \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d^2}$$

$$\sigma_b = \frac{32 \times 400}{\pi \times d^3} = \frac{4074}{d^3}$$

Η αναπτυσσόμενη τάση στρέψης είναι

$$\tau_t = \frac{16M_t}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \times 200}{\pi \cdot d^3} = \frac{1018,6}{d^3}$$

Από τον τύπο 12.2.δ έχουμε την ισοδύναμη τάση

$$\sigma = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$$

$$600\times10^3 = \frac{1}{d^3}\sqrt{\left(4074,4\right)^2 + 3\left(1018,6\right)^2} = \frac{1}{d^3}\sqrt{19.711.373,28} \simeq$$

$$d^3 \simeq \frac{4439,7}{600\times10^3} = 115,15\times10^{-3}$$

$$d = \sqrt[3]{115,15\times10^{-3}} = \frac{1}{10}\times1,155 = 0,1155\text{m}$$

Απάντηση: d ≅ 12 cm

4. Ζητείται το πάχος των ελασμάτων από τα οποία θα κατασκευάσουμε λέβητα, που έχουν $\sigma_{επ}$= 800×10^{3}N/m^2, όταν η διάμετρος του λέβητα θα είναι d= 3,4 m, ώστε να αντέχει πίεση ρ=10×10^3 N/m^2.

Λύση

Μας δίνεται: d = 3,4 m, ρ = 10×10^3 N/m^2

$\sigma_{επ}$ = 800×10^3 N/m^2

Μας ζητάνε: το πάχος ε

Από τη σχέση 12.4.3.2β έχουμε

$$\varepsilon = \frac{p\cdot d}{2\sigma}$$

$$\varepsilon = \frac{10\times10^3\times3,4}{2\times800\times10^3}$$

άρα ε = 0,02125 m = 21,2 mm

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η σχέση 12.4.3.2.β είναι θεωρητική. Στην πράξη προσαυξάνουμε το πάχος ε από 1 έως 3 mm για την κάλυψη της αναπόφευκτης φθοράς από οξειδώσεις.

Απάντηση: ε = 22,5 mm

5. Σε ποια πίεση μπορεί να εργασθεί ένας λέβητας διαμέτρου 2,8m, όταν ένας άλλος λέβητας, από το ίδιο υλικό φτιαγμένο με το ίδιο πάχος ελά-

σματος έχει διάμετρο 3,5 m και αντέχει μέγιστη πίεση 14000N/m^2. Τι συμπέρασμα μπορεί να βγεί από την άσκηση αυτή.

Λύση

Μας δίνεται:

d_1 = 2,8 m, d_2= 3,5 m και P_2= 14000 N/m^2 τα λοιπά στοιχεία των λεβήτων ίδια.

Μας ζητάνε: P_1

Για τον πρώτο λέβητα έχουμε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{p_1 \cdot d_1}{2\varepsilon}$$

Για τον δεύτερο λέβητα έχουμε:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{p_2 \cdot d_2}{2\varepsilon}$$

Τα πρώτα μέλη αυτών των σχέσεων είναι ίσα άρα

$$\frac{p_1 \cdot d_1}{2\varepsilon} = \frac{p_2 \cdot d_2}{2\sigma}$$

$$p_1 \cdot d_1 = p_2 \cdot d_2$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Συμπέρασμα: Οι πιέσεις είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις διαμέτρους των λεβήτων. Για τη ζητούμενη p_1 θα έχουμε:

$$p_1 = p_2 \frac{d_2}{d_1}$$

$$p_1 = 14000 \frac{3,5}{2,8} = 17500 N/m^2$$

Απάντηση: p_1 = 17,5 KN/m^2

6. Χαλύβδινη ράβδος (E = 210 GN/m^2, $\alpha=12\times10^{-6}$ $grad^{1}$) είναι πακτωμένη και στα δύο άκρα της. Η διατομή της είναι 20 cm^2. Ζητείται η δύναμη που θα καταπονήσει τη ράβδο αν αυτή θερμανθεί με μία αύξηση της θερμοκρασίας της κατά 30 °C.

Λύση

Μας δίνονται

$A = 20\ cm^2 = 2 \times 10^{-3}\ m^2$ $\alpha = 12 \times 10^{-6}$

$E = 210\ GN/m^2 = 210 \times 10^2$ $\theta = 30\ °C$

Μας ζητείται: F

Από τη σχέση 10.4.4.α θα έχουμε

$\sigma = \alpha \cdot E(\theta_2 - \theta_1)$ ή $\sigma = 12 \times 10^{-6} \times 210 \times 10^9 = 75,6\ MN/m^2$

και άρα

$F = \sigma \cdot A = 75,6 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-3}$

$F = 151,2 \times 10^3\ N/m = 151,2\ KN/m^2$

Απάντηση: $F_1 = 151,2\ KN/m^2$

7. Άτρακτος, κυκλικής διατομής καταπονείται σε στρέψη από μία στρεπτική ροπή $M_t = 8 \times 10^3$ Nm και σε κάμψη από μία καμπτική ροπή $M_t = 2 \times 10^3$ Nm. Να υπολογισθεί η διάμετρος της ατράκτου αν η επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{επ} = 600\ daN/cm^2$ και $G = 81\ GN/m^2$.

Λύση

Μας δίνονται:

$M_t = 8 \times 10^3 Nm$, $M_t = 2 \times 10^3 Nm$

$\sigma_{επ} = 600\ daN/cm^2 = 60 \times 10^6 N/m$

Μας ζητείται η d

Από τη σχέση 12.2.δ υπολογίζουμε την ισοδύναμη τάση

$\sigma = \sqrt{\sigma_b + 3\tau_t^2}$ αλλά για κυκλική διατομή είναι:

$$\sigma_b = \frac{32M_t}{\pi \cdot d^3}$$

και

$$\tau_t = \frac{16M_t}{\pi \cdot d^3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{32^2 M_b^2}{\pi^2 \cdot d^6} + 3\frac{16^2 M_t^2}{\pi^2 \cdot d^6}} = \frac{16}{\pi \cdot d^3}\sqrt{4M_b^2 + 3M_t^2}$$

άρα,

$$60\times10^6 = \frac{16}{\pi \times d^3}\sqrt{4\times\left(2\times10^3\right)^2 + 3\times\left(8\times10^3\right)^2} = \frac{16}{\pi \times d^3}\sqrt{208\times10^6}$$

$$60\times10^6 = \frac{16\times10^3\sqrt{208}}{\pi \times d^3}$$

$$d^3 = \frac{16\times10^3\sqrt{208}}{\pi\times60\times10^6}$$

$$d = \sqrt[3]{1,224\times10^{-3}} = \frac{1}{10}\sqrt{1,224} = \frac{1,06}{10} = 0,106\text{m}$$

d = 10,6 cm

Ελέγχοντας τώρα ως προς τη γωνία στροφής θ, θα είχαμε τα αυτά αποτελέσματα όπως στο παράδειγμα της παραγράφου 12.6 και τελικά θα παίρναμε d =12,3 cm ≅ 13 cm

Αν στην περίπτωση αυτή η καμπτική ροπή ήταν μεγαλύτερη π.χ. $M_b = 16 \times 10^3$ Nm θα είχαμε

$$60\times10^6 = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4\times\left(16\times10^3\right)^2 + 3\times\left(8\times10^3\right)^2}$$

$$60\times10^6 = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{1216\times10^6}$$

$$d^3 = \frac{16\times10^3\times\sqrt{1216}}{\pi\times60\times10^6} = \frac{1}{10^3}\times2,96$$

$$d = \frac{1}{10^3}\sqrt[3]{2,06} = 0,143\text{ m} = 14,3\text{ cm}$$



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΩΔΕΚΑΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Στην πράξη, οι κατασκευές μας, σχεδόν ποτέ δεν καταπονούνται σε ένα μόνο είδος καταπόνησης. Ακόμη, οι συνθήκες μέσα στις οποίες βρίσκεται και λειτουργεί ο φορέας και ο τρόπος επιβολής των φορτίων παρουσιάζουν πολλές περιπτώσεις.

- Έτσι εκτός από τις απλές καταπονήσεις, εφελκυσμό, θλίψη, διάτμιση, κάμψη, στρέψη και τους συνδυασμούς τους, πάνω στον ίδιο φορέα, έχουμε και τις ποικιλίες στον τρόπο εφαρμογής των φορτίων. Τα φορτία μπορεί να εφαρμοσθούν σταδιακά ή να μεταβάλλονται. Έχουμε λοιπόν στατικές ή δυναμικές ή και κρουστικές φορτίσεις. Επίσης παίζει ρόλο, σε αρκετές περιπτώσεις και η διάρκεια φόρτισης όπως και η θερμοκρασία του χώρου που βρίσκεται ο φορέας. Έτσι έχουμε τα φαινόμενα της **κόπωσης** και του **ερπυσμού**.

- Ιδιαίτερα εξετάσαμε την περίπτωση του λυγισμού. Ο λυγισμός είναι σύνθετη κατάσταση θλίψης και κάμψης σε συνδυασμό με τη μορφή του φορέα. Βασικό χαρακτηριστικό του λυγισμού και προϋποθέσεις του είναι, συγκριτικά, το μεγάλο ύψος και η μικρή διατομή του φορέα.

- Στο λυγισμό έχουμε τα εξής στοιχεία:

  Ανηγμένο ή ελεύθερο μήκος λυγισμού ℓ_k.

Είναι το γραμμικό μέγεθος που ανάλογα με τον τρόπο στήριξης του φορέα αντικαθιστά στους υπολογισμούς το πραγματικό μήκος του.

Κρίσιμο φορτίο F_k: Είναι το φορτίο που αρχίζει να εμφανίζεται η παραμόρφωση του λυγισμού .

Κρίσιμη τάση $\sigma_κ$: Είναι η τάση που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο.

Λυγηρότητα λ: Είναι το αδιάστατο μέγεθος που χαρακτηρίζει τη δυνατότητα του φορέα να αντιμετωπίζει τον κίνδυνο του λυγισμού ισχύουν στον λυγισμό, στα πλαίσια του νόμου αναλογία οι εξής τύποι:

$$F_K = \frac{\pi^2 E \cdot I}{\ell_K^2}$$

$$\lambda = \frac{\ell_\kappa}{i_{min}}$$

$$\sigma_k = \frac{F_K}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{A\ell_K^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

- Για τον απολογισμό ατράκτου σε κάμψη και στρέψη ισχύει:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_\theta + 3\tau_\rho^2}$$

- Για τον υπολογισμό ράβδου σε κάμψη και λυγισμό ισχύει:

$$\sigma = 0{,}9\sigma_s + \sigma_k$$

Στον υπολογισμό λέβητα υπό πίεση έχουμε τάση κατά τη διάμετρο:

$$\sigma_2 = \frac{pd}{4\varepsilon}$$

- Τάση κατά τη γενέτειρα:

$$\sigma_2 = \frac{pd}{4\varepsilon}$$

όπου ε το πάχος της λαμαρίνας του λέβητα και d η διάμετρος του λέβητα.

Στην περίπτωση των δυνάμεων κωλυόμενης διαστολής – συστολής έχουμε ανάπτυξη τάσης:

$$\sigma = \alpha \cdot E\,(\theta_2 - \theta_1)$$

α ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του υλικού

Ε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού

$\Delta_\theta = \theta_2 - \theta_1$ η διαφορά θερμοκρασίας που προκαλεί τη διαστολή ή τη συστολή.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χαλύβδινος στύλος, τετραγωνικής διατομής πλευράς α=50mm και μήκους = 2,8m είναι πακτωμένος κατά το ένα άκρο του ενώ στο άλλο έχει δυνατότητα ολίσθησης. Αν το υλικό έχει μέτρο ελαστικότητας $E=21MN/cm^2$ ζητείται το επιτρεπόμενο φορτίο ώστε ο συντελεστής ασφάλειας να είναι 5.

Απάντηση: $F_{επ}= 55,04KN$

2. Χαλύβδινος στύλος με κυκλική διατομή διαμέτρου 10 cm, είναι πακτωμένος και στα δύο άκρα του. Το ύψος του είναι 5m. Δίνεται μέτρο ελαστικότητας του υλικού $E= 210\ KN/mm^2$.

Να υπολογιστούν:

α) Η λυγηρότητα,

β) το κρίσιμο φορτίο

γ) η κρίσιμη τάση

Απάντηση: α) $\lambda = 100$, β) $F_κ = 1627,8KN$, γ) $\sigma_κ = 20,7\ KN/cm^2$

3. Βάκτρο εμβόλου ατμομηχανής έχει μήκος 300cm. Το βάκτρο καταπονείται από δύναμη 80KN. Αν το υλικό του βάκτρου είναι t 52 ($E= 2,1×10^7\ N/cm^2$) και ο συντελεστής ασφάλειας 10, να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος.

Απάντηση: d = 10 cm

4. Να βρεθεί η λυγηρότητα ενός ξύλινου στύλου, ορθογωνικής διατομής $20×25\ cm^2$ αμφίπακτου με μήκος 8m.

Απάντηση: $\lambda = 69,3$

5. Υποστύλωμα από NPI 10 (DIN1025φ 1) από st 52, μήκους 4.5 m είναι αμφίπακτο. Να υπολογισθεί πόσο φορτίο αντέχει σε λυγισμό με συντελεστή ασφάλειας v=5.

Απάντηση: $F_{επ}= 7028,3\ N$

6. Κυλινδρικός λέβητας από ελάσματα πάχους ε = 30mm και $\sigma_{επ} = 800\ KN/m^2$ θέλουμε να εργάζεται σε πίεση $12×10^3 N/m^2$. Μέχρι ποια διάμετρο μπορούμε να τον κατασκευάσουμε.

Απάντηση: d = 4 m

7. Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν συγκρίνουμε δύο λέβητες ως προς την πίεση λειτουργίας τους αν είναι καθ' όλα όμοιοι και διαφέρουν μόνο κατά το πάχος του ελάσματός τους.

Εφαρμογή $P_1 = 2\times10^3 N/m^2$, $\varepsilon_{1=}$ 4cm, ε_2 = 6cm ποια η P_2;

Απάντηση: α) τα πάχη των ελασμάτων είναι ανάλογα των πιέσεων , β) $P_2 = 3 \times 10^3 N/m^2$

8. Τέσσερις χαλύβδινοι στύλοι με κυκλική διατομή στηρίζουν ένα πατάρι βάρους 50 KN. Συγχρόνως ο χώρος όπου βρίσκονται οι στύλοι, θερμαίνεται από 15 °C σε 60 °C. Αν είναι για το υλικό των στύλων $E = 210\ GN/m^2$, $\alpha = 12\times10^{-6}\ rad^{-1}$, $\sigma_{\theta\rho}= 500\ MN/m^2$ και ο συντελεστής ασφάλειας ν = 5. Να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος των στύλων.

Απάντηση: d = 4 cm.

9. Άτρακτος κυκλικής διατομής καταπονείται σε στρέψη από ροπή M_t = 12 KNm και σε κάμψη από ροπή M_b = 6KNm. Να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος αν είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = 60\ MN/m^2$ $G = 81\ GN/m^2$ και $\theta < 0{,}00436\ rad/m$.

Απάντηση: d =13,6 cm

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΕΡΓΟ - ΙΣΧΥΣ - ΑΠΛΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

13.1 Γενικά

13.2 Έργο

13.3 Μηχανική ισχύς

13.4 Απλές μηχανές

13.5 Κεκλιμένο επίπεδο

13.6 Ο κοχλίας του Αρχιμήδη

13.7 Μετάδοση της περιστροφικής κίνησης



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

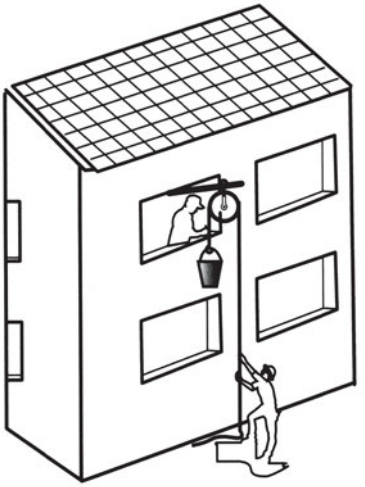
Οι μαθητές να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τι είναι έργο –παραγόμενο και ωφέλιμο– ισχύς – βαθμός απόδοσης μιας μηχανής. Χρησιμοποιώντας τους τύπους, να υπολογίζουν τα μεγέθη αυτά και να εφαρμόζουν σωστά τις μονάδες που τα ορίζουν.

- Να εξηγούν το σκοπό που έχει κάθε μηχανή.
- Να γνωρίζουν ότι σκοπός της μηχανής είναι να αλλάζει τα χαρακτηριστικά της δύναμης που εφαρμόζουμε για να ισορροπήσει ή να υπερνικήσει των αντίσταση.
- Να εφαρμόζουν, κατά περίπτωση, στις περιγραφόμενες απλές μηχανές, το θεώρημα των ροπών και να βρίσκουν τη μαθηματική σχέση: προσπάθειας-φορτίου, και να σχολιάζουν σε ποιο υπάρχει μηχανικό πλεονέκτημα.
- Να κατανοούν και να εφαρμόζουν τη σχέση μετάδοσης στην περιστροφική κίνηση και να διακρίνουν την ιμαντοκίνηση, την οδοντωκίνηση και αλυσοκίνηση.

13. ΑΠΛΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

13.1 Γενικά – Περί μηχανής (απλής)

Κάθε διάταξη που μετατρέπει ενέργεια μιας μορφής σε ενέργεια άλλης μορφής, λέγεται **μηχανή.** Στην περίπτωση, δε που δεν έχουμε σε διάταξη τέτοια μετατροπή, αλλά, τόσο το **προσφερόμενο έργο** σ' αυτήν, όσο και το από αυτήν **αποδιδόμενο (έργο),** είναι μηχανικό, η διάταξη αυτή λέγεται απλή μηχανή. Μπορούμε δηλαδή να πούμε, ότι με την **απλή μηχανή** μετασχηματίζουμε μηχανική ενέργεια σε μηχανικό έργο Σχήμα (13.1α).



Σχήμα 13.1α *Ανύψωση βάρους*

Με τις μηχανές δεν γίνεται οικονομία έργου, αλλά μπορούμε να μεταβάλλουμε την ένταση, τη διεύθυνση, τη φορά, και το σημείο της καταβαλλόμενης δύναμης.

Θα γνωρίσουμε πιο κάτω, διάφορες απλές μηχανές, όπου η συμβολή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα, υπήρξε σπουδαιοτάτη.

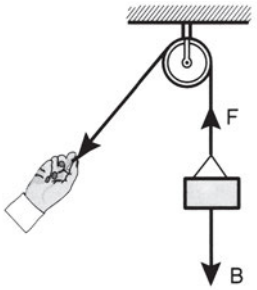
13.2 ΕΡΓΟ

Λέμε, ότι μια σταθερά δύναμη F εκτελεί έργο W, όταν μετακινεί απαραίτητα το σημείο εφαρμογής της, κατά τη διεύθυνσή της. Το παραγόμενο έργο, στην περίπτωση αυτή, λέγεται **μηχανικό έργο.**

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

α) Στο παράδειγμα αυτό, όπου ο άνθρωπος ανυψώνει σώμα βάρους Β ασκώντας σε αυτό σταθερά δύναμη F με τη βοήθεια της τροχαλίας*, παρατηρούμε ότι **το έργο της δύναμης F είναι παραγόμενο,** γιατί το σώμα κινείται κατά τη διεύθυνση της F, **ενώ το έργο του βάρους Β είναι καταναλισκόμενο.**

* Πιο κάτω θα μιλήσουμε εκτενώς για τις απλές αυτές μηχανές.



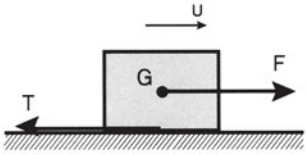
Σχήμα 13.2α *Ανύψωση βάρους*

β) Στο παράδειγμα αυτό ο άνθρωπος ασκεί στο σώμα δύναμη F με σταθερή ταχύτητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το **έργο της F είναι παραγόμενο** (θα δούμε πιο κάτω ότι W = F · s όπου s = ut) ενώ **το έργο της T** (δηλ. το έργο της τριβής) **είναι καταναλισκόμενο.**

Από τα παραπάνω παραδείγματα, γίνεται φανερό ότι:

1. Το έργο W μιας δύναμης F είναι ανάλογο με το μέγεθος της δύναμης αυτής.

Δηλαδή, μια δύναμη των 1000 N αποδίδει έργο διπλάσιο από το έργο των 500 N για την ίδια μετατόπιση.



Σχήμα 13.2β *Μετακίνηση βάρους*

2. Το έργο W μιας δύναμης F, είναι ανάλογο της μετάθεσης του σημείου εφαρμογής κατά τη διεύθυνση της δύναμης.

Δηλαδή μια δύναμη των 500 N, μετακινούμενη κατά ένα διάστημα s = 10 m, αποδίδει διπλάσιο έργο από μια δύναμη ίση πάλι με 500 N, αλλά μετακινούμενη κατά διάστημα S = 5 m.

Έτσι συνάγουμε: **απαραίτητη προϋπόθεση για την επίτευξη έργου, αποτελεί η μετατόπιση της F κατά διάστημα S του σημείου εφαρμογής της κατά τη διεύθυνση της δύναμης.** Αν δηλαδή S = 0, τότε W = 0.

Μονάδες έργου Στο Διεθνές σύστημα, μονάδα έργου είναι το Joule, δηλαδή είναι το έργο, το παραγόμενο υπό δυνάμεως F = 1 N και της οποίας

το σημείο εφαρμογής μετατοπίζεται κατά S = 1 m.

Η δύναμη F = 1 kp, όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά S = 1 m, παράγει έργο W = 1 m kp = 1 Kpm (στο Τ.Σ.)

Στο σύστημα CGS, η μονάδα έργου ονομάζεται έργιο (erg) και ορίζεται: 1 erg = 1 dyn · 1 cm.

Μεταξύ των παραπάνω μονάδων έργου, υπάρχουν οι σχέσεις:

1 Joule = 10^5 dyn·10^2 cm και 1 Joule = 10^7 erg

1 kp·m = 9,81 N · 1 m και 1 kp·m = 9,81 Joule

Άρα 1 kp·m ≃10 Joule

Θα εξετάσουμε τώρα περίπτωση, που το σημείο εφαρμογής της δύναμης F μετακινείται πάνω στο φορέα της και προς την κατεύθυνσή της.

Όπως αναφέραμε πιο πάνω αν:

F = 1N και S =1m $\Rightarrow$ W = 1J

F = 2N και S = 1 m $\Rightarrow$ W = 2J

F = 2N και S = 2m $\Rightarrow$ W = 4J

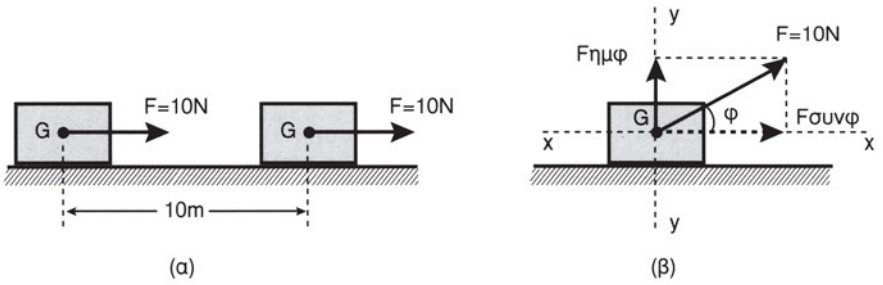
κ.ο.κ.

Άρα το παραγόμενο έργο είναι:

$$\boxed{W = F \cdot S} \qquad (13.2.1)$$

και μάλιστα είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος.

Στο οριζόντιο επίπεδο (σχ. 12.2γ), θα έχουμε: W = 10N · 10m = 100 J



Σχήμα 13.2γ *Έργο δύναμης*

Εάν όμως είχαμε την περίπτωση του σχήματος (β) όπου δηλαδή το σημείο εφαρμογής G της δύναμης F μετακινείται σε ευθεία που σχηματίζει

γωνία φ με τη διεύθυνσή της, τότε αναλύοντας τη δύναμη F στις συνιστώσες της: Fσυνφ κατά τη διεύθυνση x-x και Fημφ κατά τη διεύθυνση y-y.

Σύμφωνα με τον ορισμό του έργου, η συνιστώσα Fσυνφ παράγει έργο W, ενώ η συνιστώσα Fημφ δεν παράγει έργο, γιατί δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της.

Άρα, θα έχουμε:

$$W = F \cdot s \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad (13.2.2)$$

και γίνεται φανερό ότι για φ = 90° τότε W = 0J = 0.

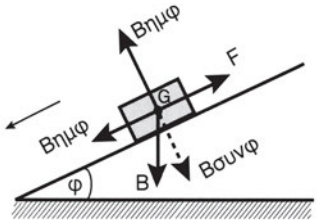
Είναι προφανές, ότι το έργο του βάρους ενός σώματος που μετακινείται οριζόντια, είναι μηδέν, γιατί η δύναμη του βάρους είναι κάθετη στην οριζόντια τροχιά του σώματος αυτού.

☞ Παρατήρηση

Από την εξίσωση ορισμού, δύναμη επί απόσταση που έχουν την ίδια, τόσο η ροπή όσο και το έργο, ενώ η ροπή είναι μέγεθος διανυσματικό, το έργο είναι μέγεθος μονόμετρο.

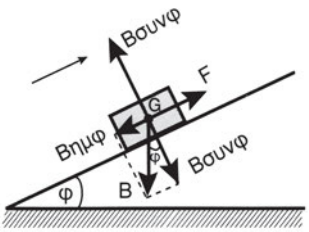
Ας θεωρήσουμε το φορτίο του προηγούμενου παραδείγματός μας, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο:

α) Αν το φορτίο κατεβαίνει από το **κεκλιμένο** επίπεδο, τότε το βάρος του είναι κινητήρια δύναμη, ενώ στην κίνηση ανθίστανται οι δυνάμεις F και Βημφ.



Σχήμα 13.2δ *Το φορτίο κατέρχεται*

β) Αν το φορτίο ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο, τότε το βάρος του **ανθίσταται** στην κίνηση (δύναμη αντίστασης).

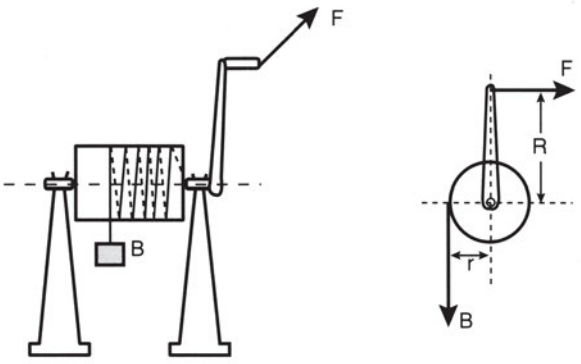


Σχήμα 13.2ε *Το φορτίο ανέρχεται*

Η δύναμη F που ενεργεί κατά την κατεύθυνση της κινήσεως παράγει έργο **κινητήριο,** ενώ η Β που αντιτίθεται στην κίνηση, παράγει έργο **καταναλισκόμενο.**

◆ Το έργο στην περιστροφική κίνηση

Ας πάρουμε το βαρούλκο του σχήματος 10.2στ



Σχήμα 13.2στ *Το έργο στην περιστροφική κίνηση*

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη F που ενεργούμε στη λαβή του, μετά από μια περιστροφή θα είναι: $W = F \cdot 2\pi R$ και για n το πλήθος στροφές η σχέση αυτή δίδει τον τύπο:

$$\boxed{W = F \cdot 2\pi R \cdot n} \qquad (13.2.3)$$

και επειδή το γινόμενο F·R είναι η ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής, και το γινόμενο 2πn είναι η γωνιά θ που σαρώνει τον στρόφαλο, σε ακτίνια, κατά την περιστροφή του, ο τύπος (12.2.3) γράφεται:

$$\boxed{W = M_F \cdot \theta} \qquad (13.2.4)$$

Στο κεφάλαιο 13.4 θα μιλήσουμε εκτενέστερα για τις **απλές μηχανές** (μοχλός, κεκλιμένο επίπεδο, βαρούλκο κ.λπ.)

13.3 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Οι κινητήρες, οι υδατοπτώσεις είναι μερικές από τις χρησιμοποιούμενες σήμερα **πηγές παραγωγής έργου.** Παράγουν έργο δηλαδή μηχανικό, όπως οι ατμομηχανές, οι ατμοστρόβιλοι, οι βενζινομηχανές, οι πετρελαιομηχανές, οι ηλεκτροκινητήρες.

Οι μηχανές που **παραλαμβάνουν το μηχανικό έργο** είναι οι εργαλειομηχανές (τόρνοι, φραίζα, πλάνη, οι αντλίες κ.λπ.).

Η **εκτίμηση της ικανότητος** μιας πηγής έργου συνεπάγεται και τον ικανό χρόνο που η πηγή αυτή θα παράγει και το ορισμένο έργο. Άρα, αν ξέρουμε το έργο που παράγεται σε κάθε χρονική μονάδα, τότε καταλήγουμε στην έννοια της ισχύος P, ως το πηλίκο του έργου W, που παράγεται σε χρονική διάρκεια t, δια του χρόνου αυτού.

$$\text{ισχύς} = \frac{\text{έργο}}{\text{χρόνος}}, \qquad P = \frac{W}{t} \tag{13.4.1}$$

Η ισχύς είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος.

Το τι μπορεί να σου προσφέρει μια μηχανή, εξαρτάται από την ισχύ της.

Μονάδες ισχύος

Στο S I, είναι το watt (w)

δηλαδή 1 watt = 1 Joule/1 sec

Στο Τ.Σ., είναι το Kpm/sec

Στο CGS, είναι το erg/sec

Την ισχύ των μηχανών, την μετράμε σε ίππους·

$$1 \text{ ίππος (1 CV ή 1 PS)} = \frac{75 \text{ kp} \cdot \text{m}}{\text{sec}}$$

Σχέσεις μεταξύ των μονάδων ισχύος

Watt = 1 Joule/sec = 10^7 erg/sec

1kp m/sec = 9,81 Joule/sec = 9,81 W

1CV = 75 kp m/sec = 736 W

1 HP = 76 kp m/sec = 746 W

1 KW = 1,36 CV

● Ένα **βατώριο** (1wh), είναι το έργο που παράγει μηχανή ισχύος 1 watt, λειτουργούσα επί 1 ώρα δηλ. 1 wh = 1w·1 h.

● Ένα **κιλοβατώριο** (1 kwh), είναι το έργο που παράγει μηχανή ισχύος 1Kw, λειτουργούσα επί 1 ώρα, δηλ. 1Kwh = 1 Kw·1h.

Επειδή 1 W = 1 Joule/sec, 1h = 3600 sec έχουμε:

$1Wh = 1\frac{Joule}{sec} \cdot 3600$ sec δηλαδή

1Wh = 3600 Joule

και 1 kWh = 1000 Wh = $3,6 \cdot 10^6$ Joule

Είναι φανερό, ότι η ισχύς ενός ζεύγους ροπής M, που στρέφεται με σταθερή ταχύτητα n στορφών στο λεπτό, θα είναι:

$$P = \frac{M \cdot 2\pi n}{60}$$

Σ' ένα ηλεκτροκινητήρα που στρέφεται με 800 στρ/min όταν από ζεύγος ροπής M = 40 mN κινείται το τύμπανο, η ισχύς του θα είναι σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο:

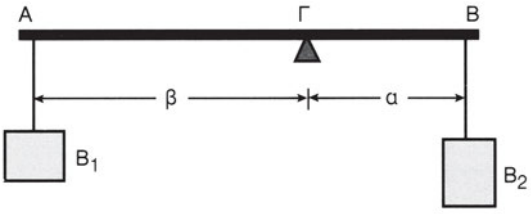
$$P = \frac{40 \cdot 2\pi \cdot 800}{60} = 3.349 \text{ W}$$

13.4 ΑΠΛΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

Αρχιμήδης ο Συρακούσιος

Γεννήθηκε το 287 π.Χ. στις Συρακούσες. Έργα του: «Περί των Μηχανικών Θεωρημάτων προς ερατοσθένην έφοδος (μέθοδος)», «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», «κύκλου μέτρησης», «Περί κωνοειδών και σφαιροειδών», «Περί του επταγώνου», «Αρχαί γεωμετρίας», «Περί του υδραυλικού ωρολογιού», περί «Επιπέδων ισορροπιών», όπου τίθενται με αυστηρότητα θέματα στατικής. Προσδιορίζοντας δηλ. ο Αρχιμήδης –στο τελευταίο αυτό έργο– τις συνθήκες ισορροπίας μιας βαρείας ευθείας, που στηρίζεται σε κατακόρυφο υπομόχλιο, δίδει τη σχέση που πρέπει να συνδέει τα βάρη και τα μήκη ανάρτησης από το υπομόχλιο Γ, για να υπάρχει ισορροπία.

Έτσι με το τελευταίο αυτό έργο, ο Αρχιμήδης θεμελίωσε τη στατική των στερεών και κέρδισε τον τίτλο του “Πατέρα της Μηχανικής”.



Σχήμα 13.4α *Ισορροπία ράβδου:* $B_1 \cdot \beta = B_2 \cdot \alpha$

Άλλα έργα του: “Περί κέντρων βαρών”, “κέντρων βάρους παραβολικών τμημάτων”.

Ο Αρχιμήδης υπήρξε ταυτόχρονα και ο θεμελιωτής της Υδροστατικής και στο χαμένο έργο του “Περί ζυγών” υπήρχαν διάφοροι ορισμοί, που αφορούσαν τα κέντρα βάρη σχημάτων, ως και τη μεταφορά ενέργειας, με τη βοήθεια των οδοντωτών τροχών.

Στις αποδείξεις των περίφημων προτάσεών του κάνει χρήση της λεγόμενης “Γεωμετρικής Άλγεβρας” την οποία βελτίωσε σε σχέση με τον Ευκλείδη.

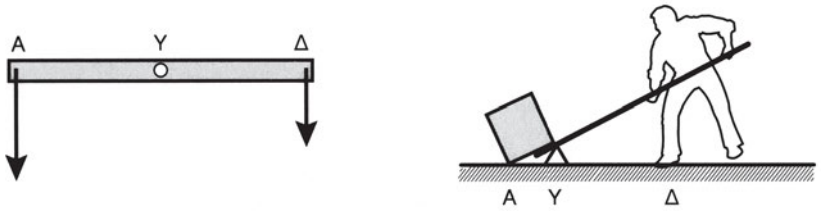
Χρησιμοποίησε και ανέπτυξε σε μεγάλο βαθμό τον Απειροστατικό λογισμό, τον οποίο χρησιμοποίησε για πρώτη φορά ο Ιπποκράτης ο Χίος και αργότερα ο Εύδοξος.

Ο Αρχιμήδης, όταν βρέθηκε αντιμέτωπος με την στρατιώτη που τον σκότωσε, είπε την περίφημη φράση: «Μη μου τους κύκλους τάραττε» ή κατά τη γνώμη άλλων, τη φράση: «Παρ’ κεφαλάν και μη παρά γραμμάν», δηλαδή, κτύπα το κεφάλι μου, αλλά πρόσεχε το σχήμα.

13.4.1 Μοχλός

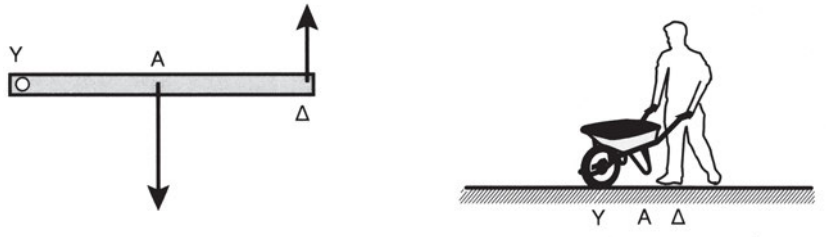
Είναι μια απλή μηχανή· αποτελείται από ένα άκαμπτο σώμα, που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα ή ένα σημείο του άξονα, που λέγεται υπομόχλιο (Υ) υπό την επίδραση δύο δυνάμεων ανταγωνιστικών, που εφαρμόζονται σε δύο διαφορετικά σημεία, Α και Δ εκτός του υπομοχλίου.

Μοχλός πρώτου είδους: Το υπομόχλιο Υ, βρίσκεται μεταξύ του σημείου εφαρμογής της δύναμης Δ και του σημείου εφαρμογής Α της αντίδρασης Α (σχ. 13.4β)



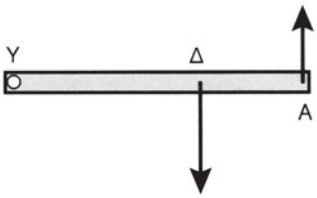
Σχήμα 13.4β

Μοχλός δευτέρου είδους: Το σημείο εφαρμογής της αντίδρασης Α, βρίσκεται μεταξύ του υπομοχλίου Υ και του σημείου εφαρμογής Δ της δύναμης Δ. (σχ. 13.4γ)



Σχήμα 13.4γ

Μοχλός τρίτου είδους: Το σημείο εφαρμογής Δ της δύναμης Δ, βρίσκεται μεταξύ του υπομοχλίου Υ και του σημείου εφαρμογής Α της αντίδρασης Α. (σχ. 13.4δ)





Σχήμα 13.4δ

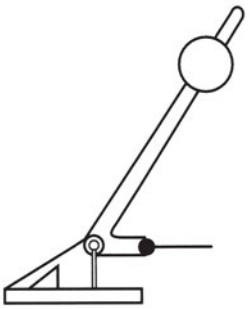
Ο μοχλός, θα δούμε πιο κάτω, ισορροπεί, αρκεί η μικρότερη δύναμη να έχει βραχίονα, ανάλογα μεγαλύτερο της άλλης δύναμης. Με τον τρόπο αυτό, ο μοχλός λειτουργεί ως απλή μηχανή, όπου η κινητήρια δύναμη που βάζουμε μπορεί να υπερνικήσει μια αντίδραση, πολύ μεγαλύτερης έντασης.

Αν οι βραχίονες των δύο δυνάμεων είναι ίσοι, τότε για να ισορροπεί ο μοχλός θα πρέπει να είναι ίσες και οι δυνάμεις, οπότε δημιουργείται ένα όργανο που το λέμε **ζυγό** (ζυγαριά).

Σύγχρονοι μοχλοί είναι:

α) ο **μοχλός διβραχιόνιος** με αντίβαρο.

Χρησιμοποιούνται στις χειροκίνητες αλλαγές των σιδηροδρόμων, και



Σχήμα 13.4ε



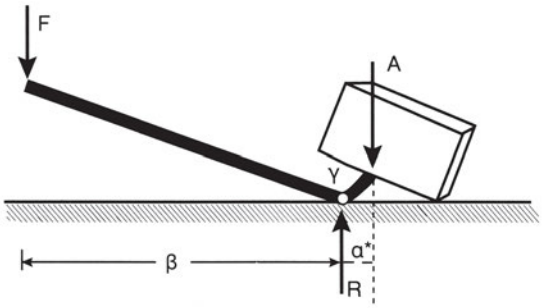
Σχήμα 13.4στ

Μοχλοί διβραχίονοι

β) ο **διβραχιόνιος μοχλός σε σχήμα σφονδύλου.** Χρησιμοποιείται σε μερικούς τύπους ρολογιών για να διατηρηθεί σταθερή η λειτουργία τους. (σχ. 12.4στ)

Στην περίπτωση του μοχλού (σχ. 12.4ζ) έχουμε μεταβολή του μέτρου των δυνάμεων. Η δύναμη F, είναι η **κινητήρια,** ενώ η δύναμη Α είναι η δύναμη **αντίστασης** του βάρους του σώματος, που ανυψώνεται. Η δύναμη R, είναι η δύναμη που ασκεί το υπομόχλιο Υ, είναι ίση και αντίθετη προς τη συνισταμένη των δυνάμεων F και Α.

Παρατηρούμε ότι: $F \cdot \beta = A \cdot \alpha$



Σχήμα 13.4ζ *Υπερνίκηση αντίστασης όπου β = βραχίονας της δύναμης F και α = βραχίονας της αντίστασης Α*

Αν $\frac{\beta}{\alpha} > 1$, τότε F > A. Δηλαδή:

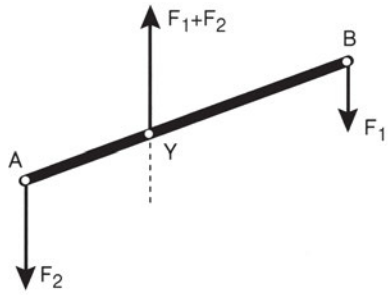
Όσο ο μοχλοβραχίονας της δύναμης είναι μεγαλύτερος του μοχλοβραχίονα της αντίστασης, τόσο η δύναμη που ασκούμε για να υπερνικήσουμε την αντίσταση, είναι μικρότερη.

Στο σχ. 13.4η παρατηρούμε (;) ότι ισχύει:

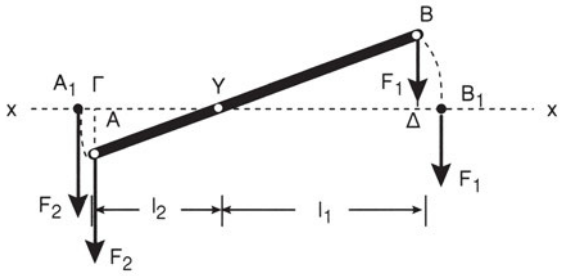
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$$

Αν $F_1 > F_2$, τότε: ΑΓ > ΒΔ δηλαδή

Όσο κερδίζουμε σε δύναμη το χάνουμε σε δρόμο· οι δρόμοι είναι αντιστρόφως ανάλογοι των δυνάμεων (ΧΡΥΣΟΥΣ ΚΑΝΩΝ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ).



Σχήμα 13.4η



Σχήμα 13.4η και 13.4θ *Χρυσούς κανών της Μηχανικής*

Όπως διαπιστώνουμε, από τα παραπάνω, η μελέτη των απλών μηχανών γίνεται για να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτές αφού εφαρμόσουμε:

α) τις συνθήκες ισορροπίας (όταν ισορροπούν) ή το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής (όταν κινούνται)

β) το αξίωμα της διατήρησης της ενέργειας.

Έτσι:

i) όταν δεν έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά τη λειτουργία τους, τότε το έργο της δρώσας δύναμης **(δαπανώμενο)** είναι ίσο με το έργο της ανθιστάμενης δύναμης **(ωφέλιμο).**

ii) όταν έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας, τότε θα λαμβάνεται υπ' όψη ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής, δηλ. το πηλίκο της αποδιδόμενης (ωφέλιμης) ισχύος προς την προσφερόμενη (δαπανώμενη) ισχύ. Δηλαδή:

$$n_A = \frac{P_{ωφ}}{P_{δαπ}} = \frac{E_{ωφ}}{E_{δαπ}} \qquad (13.4.1)$$

Είναι φανερό ότι η $n_A < 1$ γιατί δεν υπάρχει μηχανή που να λειτουργεί χωρίς αντιστάσεις. Αν $n_A = 90\%$ σημαίνει ότι μόνο το 90% της δαπανώμενης ισχύος μετατρέπεται σε ωφέλιμη ισχύ ενώ το 10% είναι απώλειες. Επανερχόμενοι στο σχ. 13.4θ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα των ροπών έχουμε:

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{YA}{YB}$$

δηλαδή, όταν ο λόγος $\frac{OA}{OB}$ γίνεται μικρότερος, μικρότερη δύναμη F_1 πρέπει να ασκήσουμε, για να υπερνικήσουμε τη δύναμη F_2. Για μετατόπιση του μοχλού από τη θέση ΑΒ στη θέση A_1B_1 θα έχουμε:

$$\frac{B_1\Delta}{A_1\Gamma} = \frac{YB_1}{YA_1} = \frac{F_2}{F_1}$$

δηλαδή

$$F_1 \cdot (B_1\Delta) = F_2 \cdot (A_1\Gamma)$$

γεγονός που σημαίνει, ότι τα έργα των δυνάμεων F_1 και F_2, είναι ίσα. Ώστε:

Το έργο της δύναμης κατά τη μετατόπιση του μοχλού, είναι ίσο με το έργο της αντίστασης.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο μοχλό ΑΥΒ του σχήματος 13.4i να υπολογισθεί η γωνία φ ώστε ο λόγος των βαρών B_1 προς B_2 να είναι ίσος με τη μονάδα,

δηλαδή: $\frac{B_1}{B_2} = 1$ και να ισχύει $\frac{AY}{YB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

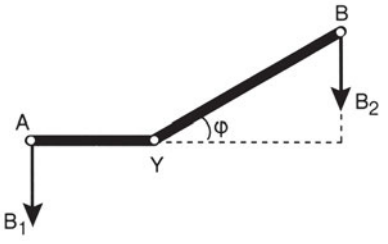
Λύση

Αν πάρουμε τις ροπές των B_1 και B_2 ως προς το σημείο (υπομόχλιο) Υ θα έχουμε:

$\Sigma M_{B_i}^{Y} = 0$

$B_1(AY) = B_2(Y\Gamma)$

$B_1(AY) = B_2(YB)\sigma\upsilon\nu\varphi$



Σχήμα 13.4i

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{(YB)}{(AY)} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma\upsilon\nu\varphi,\ \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα: $\underline{\varphi = 30^\circ}$

Ήρων ο Αλεξανδρινός

Γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια και έζησε γύρω στον 2ο-1ο π.Χ., όπου και δίδαξε. Έκανε εκτεταμένη εφαρμογή της Γεωμετρίας σε θέματα μετρήσεων και μηχανικής.

Το έργο του αποτελεί τον πυρήνα των γεωδαιτικών γνώσεων του Αρχαίου Ελληνικού κόσμου.

Ο Ήρων, σαν μηχανικός, εφαρμόζοντας τις θεμελιακές αρχές της Στατικής του Αρχιμήδη, οδηγήθηκε σε σημαντικά συμπεράσματα, όπως μας πληροφορεί ο Πάππος στο έργο του: «Μαθηματική συναγωγή».

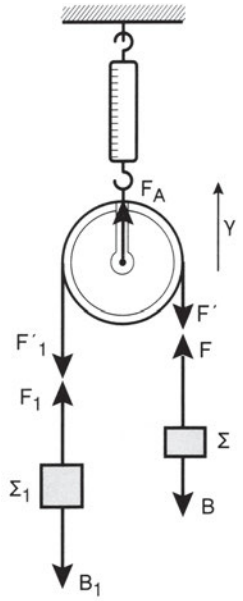
Θεωρούνταν αυθεντία στην κατασκευή διαφόρων μηχανισμών και πολεμικών συσκευών όπως του οδομέτρου και του τηλεβόλου.

Εμπνευσμένο από το πρόβλημα του Αρχιμήδη «με δεδομένη δύναμη να ανυψωθεί δεδομένο βάρος» είναι η κατασκευή «Βαρουλκός».

Η «κυκλική στερεά έλικα», το περί «Αυτοματοποιητικής», τα «Πνεύματα», ο «Ατμοστρόβιλος» είναι μερικά από τα έργα του Ήρωνα που σαν Γεωμέτρης, Γεωδαίτης, Μηχανικός και Φυσικός μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στους κορυφαίους μελετητές του τέλους της ελληνιστικής περιόδου, ως δημιουργός ενός αξιολογότατου έργου.

13.4.2 Τροχαλία

Είναι μια απλή μηχανή˙ αποτελείται από ένα δίσκο ο οποίος περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του (του δίσκου).

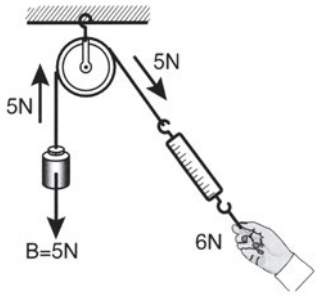


Σχήμα 13.4.2α *Τροχαλία*

Στην εξωτερική περιφέρεια της τροχαλίας, υπάρχει αυλάκι στην οποία προσαρμόζεται το σχοινί, ή γενικότερα ένα όργανο έλξεως. Η τροχαλία χρησιμεύει για την ανύψωση φορτίων και επιτρέπει στην κινητήρια δύναμη να ενεργεί κατά διεύθυνση ή φορά, διαφορετική από τη φορά της αντίστασης.

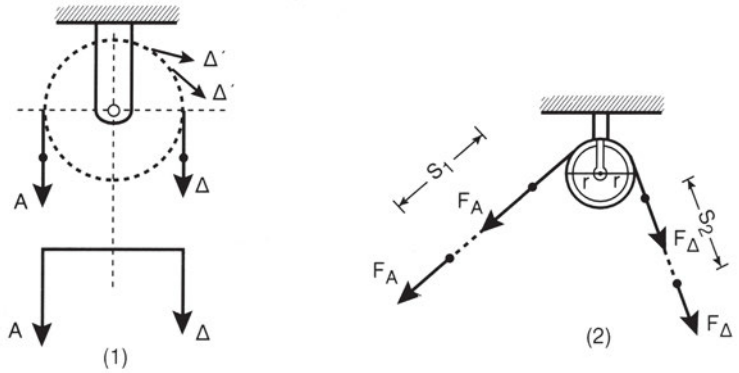
Σταθερή τροχαλία

Είναι, όταν ο δίσκος είναι στερεωμένος σ' ένα υποστήριγμα με δίχαλο. Στην περίπτωση αυτή, η κινητήρια δύναμη και η αντίσταση που εφαρμόζονται στα δύο αντίθετα άκρα του σχοινιού, έχουν την ίδια ένταση.



Σχήμα 13.4.2β *Τροχαλία*

Στη διάταξη του σχ. 12.4.2γ της απλής μηχανής, το έργο της δύναμης Δ προσφέρεται σ' αυτήν, ενώ το έργο της δύναμης Α (αντίστασης) αποδίδεται από αυτή*.



Σχήμα 13.4.2γ *Τροχαλία*

Στην περίπτωση **πάγιας** (ακίνητης) τροχαλίας** προσφέρεται σ' αυτήν μυική δύναμη F, για να ανυψωθεί βάρος Β. Ο δίσκος της τροχαλίας φέρει στην περιφέρειά του αύλακα και μπορεί να περιστρέφεται, περί σταθερό άξονα.

Χρησιμεύει για την ανύψωση βαρών, ή για την αλλαγή της διεύθυνσης μιας δύναμης.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από το ένα άκρο του νήματος πάγιας τροχαλίας αμελητέου βάρους, αναρτάται βάρος Β και στο άλλο άκρο του νήματος ενεργεί βάρος B_1 ($B_1 > B$). Ποια είναι η ένδειξη του δυναμομέτρου (σχ.13.4.2δ πάγια τροχαλία) όταν τα σώματα αφεθούν ελεύθερα;

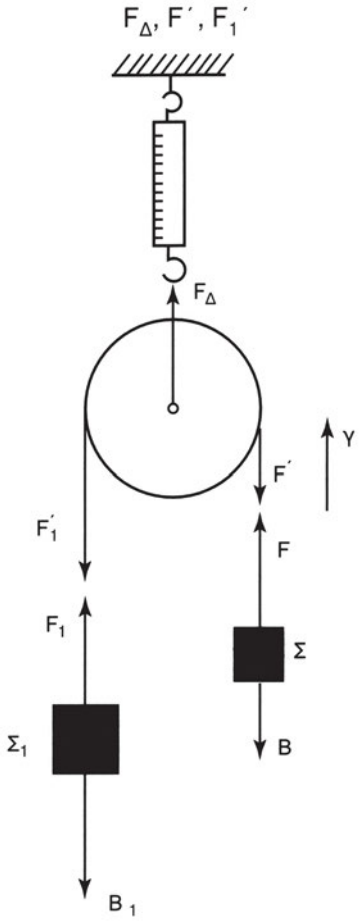
Εφαρμογή: B = 12 N, B_1 = 20 N.

* Με τις μηχανές δεν γίνεται οικονομία έργου, αλλά μπορούμε να μεταβάλλουμε την ένταση, τη διεύθυνση, τη φορά, το σημείο της καταβαλλόμενης δύναμης.

** Στην πάγια τροχαλία, εκτός από τις δυνάμεις F και Β ασκείται και μια τρίτη F_T που προέρχεται από την τροχαλιοθήκη της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο της τροχαλίας.

Λύση

Πάνω στην τροχαλία ασκούνται οι δυνάμεις:



Σχήμα 13.4.2δ *Πάγια τροχαλία*

Για την ισορροπία της τροχαλίας θα έχουμε:

$$F_\Delta = F' + F_1' \qquad (1)$$

Οι δυνάμεις F', F_1', F, F_1 ασκούνται υπό του νήματος αυτού, άρα θα έχουμε:

$$F_1 = F_1' = F = F' \qquad (2)$$

Επομένως: $F_{\Delta} = 2F$ (3)

Για το σώμα Σ, θα έχουμε: $F - B = m\gamma = \frac{B}{g} \cdot \gamma$ (4)

Για το σώμα Σ_1, θα έχουμε: $B_1 - F_1 = m_1\gamma = \frac{B_1}{g} \cdot \gamma$ (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) παίρνουμε:

$$\frac{F - B}{B_1 - F_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{F}{2B_1 - F_1}, \quad \frac{B}{B + B_1} = \frac{F}{2B_1}$$

Άρα:

$$F = \frac{2BB_1}{B + B_1}$$

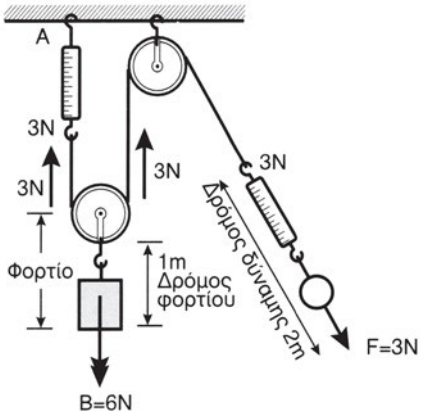
$$F_{\Delta} = \frac{4BB_1}{B + B_1}$$

Εφαρμογή: Για $B = 12N$, $B_1 = 20N$, έχουμε:

$$F_{\Delta} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 20}{12 + 20} N = 30\,N, \quad F = \frac{2 \cdot 12 \cdot 20}{12 + 20} N = 15\,N$$

Κινητή τροχαλία

Είναι, όταν ένα άκρο του σχοινιού στερεώνεται σ' ένα υποστήριγμα· στην περίπτωση αυτή, το φορτίο συγκροτείται από ένα δίχαλο που φέρει ο δίσκος και σε συνθήκες ισορροπίας, η ένταση της κινητηρίου δυνάμεως, είναι το μισό της αντίστασης.



Σχήμα 13.4.2ε *Κινητή τροχαλία*

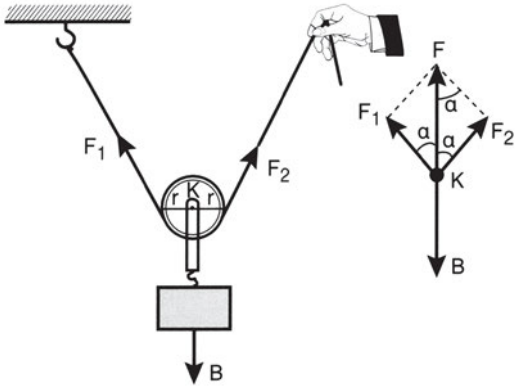
Στην περίπτωση της **κινητής τροχαλίας** (σχ. 13.4.2ε) έχουμε:

$$F_1 = F_2 = \frac{B}{2}$$

(τροχαλία με παράλληλα σχοινιά)

Από το σχήμα 13.4.2στ: $F_1 = \frac{B}{2\sigma\upsilon\nu\alpha}$ δηλαδή: $F_1 > \frac{B}{2}$

(τροχαλία με όχι παράλληλα σχοινιά)



Σχήμα 13.4.2στ *Κινητή τροχαλία*

Πράγματι: Αν πάρουμε τις ροπές των δυνάμεων ως προς Κ έχουμε:

$F_1 \cdot r = F_2 \cdot r$ δηλαδή $F_1 = F_2$

Επίσης $$\frac{F_1}{\eta\mu\alpha} = \frac{B}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{B}{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

Άρα: $$F_1' = \frac{B}{2\sigma\upsilon\nu\alpha} > \frac{B}{2}$$

Το προς ανύψωση φορτίο Β, για μια διαδρομή S του σημείου εφαρμογής της F, ανυψώνεται κατά S/2. Επομένως θα έχουμε:

$$W_F = F \cdot S$$

$$W_B = B \cdot \frac{S}{2} \qquad \text{Άρα: } n = \frac{B}{2F}$$

Στο μοχλό του σχ. 13.4θ που περιεστράφη από τη θέση xx΄ κατά γωνία ω, υπό την επίδραση των δυνάμεων F_1 και F_2 θα έχουμε:

$$W_{F_1} = F_1 l_1 \eta\mu\omega \quad , \quad W_{F_2} = F_2 l_2 \eta\mu\omega$$

Άρα:
$$n = \frac{P_{F_2}}{P_{F_1}} = \frac{W_{F_2} / t}{W_{F_1} / t} = \frac{F_2 \cdot l_2}{F_1 \cdot l_1}$$

Στην περίπτωση του **πολύσπαστου** σχ. 13.4.2ζ έχουμε συνδυασμό **μεταθετών** (ελεύθερων) και **αμετάθετων** (παγίων) τροχαλιών. Οι αμετάβλητες τροχαλίες βρίσκονται επί κοινής τροχαλιοθήκης, που στερεώνεται σε σταθερό υποστήριγμα, ενώ οι μεταθετές τροχαλίες βρίσκονται σε άλλη τροχαλιοθήκη, από την οποία εξαρτάται το φορτίο, που θέλουμε να ανυψώσουμε. Επιτυγχάνεται δια του συνδυασμού αυτού, η άσκηση μικρότερης δύναμης F και η μεταβολή της διεύθυνσής της. Είναι προφανές, ότι σε κάθε σχοινί, ασκείται δύναμη

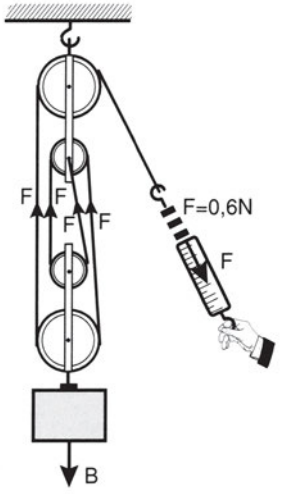
$$F = \frac{B}{4}$$

Εάν γενικά το πολύσπαστο διαθέτει συνολικά ν το πλήθος πάγιες και κινητές τροχαλίες, τότε, σε κάθε σχοινί ασκείται δύναμη:

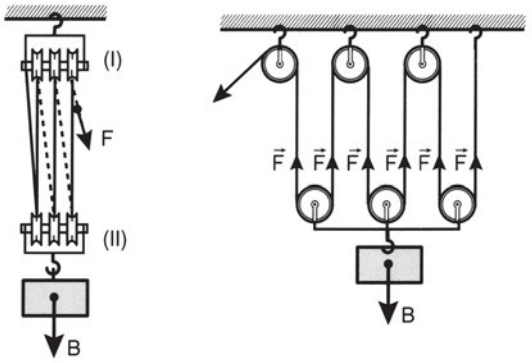
$$F = \frac{B}{v}$$

Στο σχήμα 13.4.2η η ισορροπία του σώματος βάρους Β εκφράζεται από την εξίσωση:

$$F = \frac{B}{6}$$



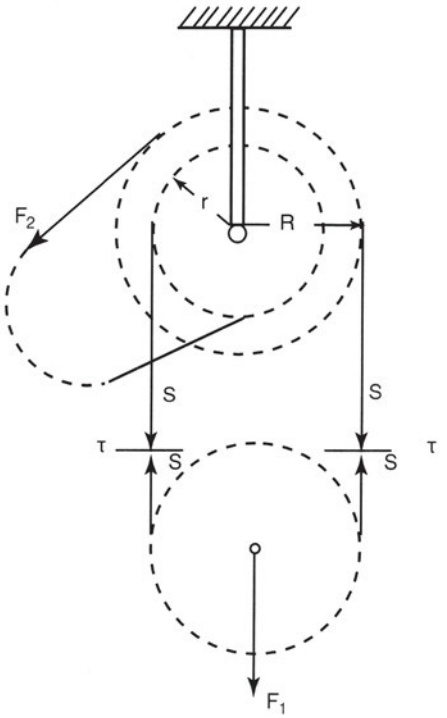
Σχήμα 13.4.2ζ *Πολύσπαστο με δύο τροχαλιοθήκες των δύο τροχαλιών η κάθε μία*



Σχήμα 13.4.2η *Κινητή τροχαλιοθήκη*

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων F_1 και F_2 που ενεργούν στη **διαφορική** τροχαλία (σχ. 13.4.2θ) στην περίπτωση ισορροπίας του συστήματος (δεν λαμβάνουμε υπ' όψη παθητικές αντιστάσεις).



Σχήμα 13.4.2θ *Διαφορική τροχαλία*

Λύση

Η διαφορική τροχαλία αποτελείται από δύο σταθερές τροχαλίες επί του αυτού άξονα, αλλά διαφορετικής διαμέτρου και από μία ελεύθερη.

Για την τομή τ-τ έχουμε:

$$S + S = F_1$$

Άρα $$S = \frac{F_1}{2}$$

Παίρνοντας την τρίτη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma M^{0}_{F_i} = 0 \,,\; F_2 R + Sr - SR = 0$$

Άρα: $$F_2 = \frac{R - r}{2R} F_1$$

Σημείωση:

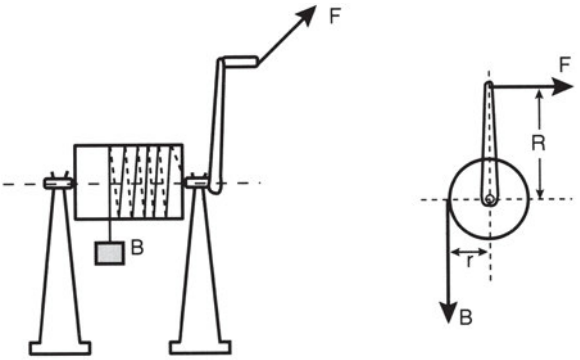
Αν n είναι ο βαθμός απόδοσης της διαφορικής τροχαλίας, η πραγματική δύναμη για να ανυψώσει το φορτίο F_1, θα δίνεται από τη σχέση:

$$F_2 = \frac{(R - r)\, F_1}{2Rn}$$

και εξαρτάται από τη σχέση $\frac{R - r}{2R}$ (ιδανική μετάδοσης)

13.4.3. Βαρούλκο

Είναι και αυτό μια απλή μηχανή που μπορούμε, εφαρμόζοντας περιορισμένες δυνάμεις, να ασκήσουμε ισχυρές ελκτικές δυνάμεις, μέσω ενός συστήματος σχοινιών ή αλυσσίδων. Τα σύγχρονα βαρούλκα χρησιμοποιούνται στα εργοτάξια για το χειρισμό γερανών και αναβατορίων στα κτίρια, για τη λειτουργία των ανελκυστήρων, στα πλοία για το χειρισμό της άγκυρας και την ανύψωση φορτίων (σχ.13.4.3α).



Σχήμα 13.4.3α *Βαρούλκο*

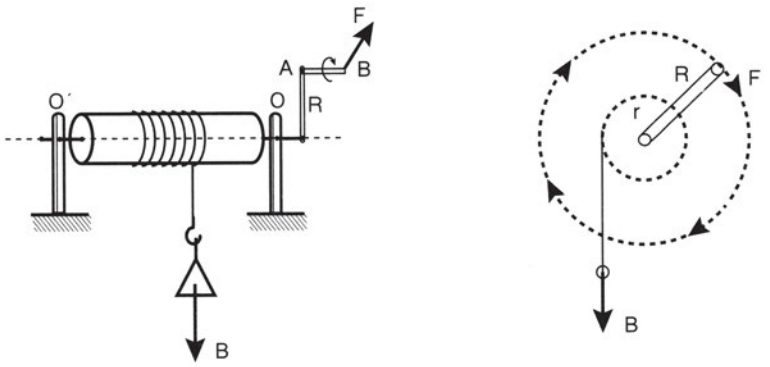
Τα μεγάλης ισχύος βαρούλκα τα χρησιμοποιούμε στα λιμάνια και στα ναυπηγεία που απαιτούν μετακινήσεις μεγάλων φορτίων.

Στην περίπτωση του βαρούλκου (σχ. 13.4.3β) της διάταξης δηλαδή που αποτελείται από έναν κύλινδρο ακτίνας r (τύμπανο) και μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα 00΄, εφαρμόζοντας το θεώρημα των ροπών στην περίπτωση ισορροπίας, θα έχουμε:

$$B \cdot r = FR$$

Άρα:
$$F = \frac{r}{R} \cdot B$$

που σημαίνει ότι η δύναμη που ισορροπεί το βάρος B, είναι τόσο μικρότερη όσο μικρότερη είναι η ακτίνα r του βαρούλκου και όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος R του μοχλού του στροφάλου.



Σχήμα 13.4.3β

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ο στρόφαλος ενός βαρούλκου έχει μήκος 50 cm και το τύμπανο ακτίνα r = 5 cm. Ο χειριστής του βαρούλκου εκτελεί 50 στροφές ανά λεπτό, ανυψώνοντας βάρος 40 N. Να βρείτε:

α) Τη δύναμη που ασκείται από το χειριστή του βαρούλκου και

β) την καταβαλλόμενη ισχύ.

Λύση

α) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα των ροπών στην περίπτωση ισορροπίας, θα έχουμε:

$$B \cdot 2\pi r = F \cdot 2\pi R$$

$$B \cdot r = F \cdot R \text{ (συνθήκη ισορροπίας βαρούλκου)}$$

Άρα: $$F = \frac{B \cdot r}{R} = \frac{40N \cdot 5cm}{50cm} = 4\ N$$

β) Για την καταβαλλόμενη ισχύ, θα έχουμε:

$$P = F \cdot \upsilon = F \cdot 2\pi \nu R$$

$$P = 4\ N\ 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{50}{60} \cdot 0{,}5\ m/sec$$

Άρα: $$\underline{P = 10{,}47\ N\ m/sec}$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε βαρούλκο, ο στρόφαλος έχει μήκος 50 cm και ο κύλινδρος ακτίνα 5 cm. Ο χειριστής του δαπανά ισχύ 1/10 CV για να ανυψώσει βάρος 20 N. Αν η απόδοση του βαρούλκου είναι 0,6, να βρεθεί:

α) η δύναμη που ασκείται στο άκρο του στροφάλου και

β) πόσες στροφές ανά λεπτό θα εκτελεί ο χειριστής του στροφάλου.

Λύση

Η απόδοση δίνεται από τη σχέση:

$$n_A = \frac{P_{\omega\varphi}}{P_{\delta\alpha\pi}} \quad (1)$$

Όταν ο στρόφαλος εκτελεί x περιστροφές, το σώμα ανυψώνεται κατά

$$h = 2\pi r \cdot x \quad (2)$$

Η συχνότητα περιστροφής v, είναι:

$$v = \frac{x}{t} \quad (3)$$

Η ωφέλιμη ισχύς είναι:

$$P_{\omega\varphi} = \frac{B \cdot h}{t} \quad (4)$$

και η δαπανώμενη ισχύς είναι:

$$P_{\delta\alpha\pi} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{F \cdot 2\pi R \cdot x}{t} \quad (5)$$

Με βάση τις σχέσεις (2), (3), (4), (5), η σχέση (1) γίνεται:

$$\underline{n_A = \frac{B \cdot r}{F \cdot R}}$$

δηλαδή η σχέση που είδαμε προηγούμενα.

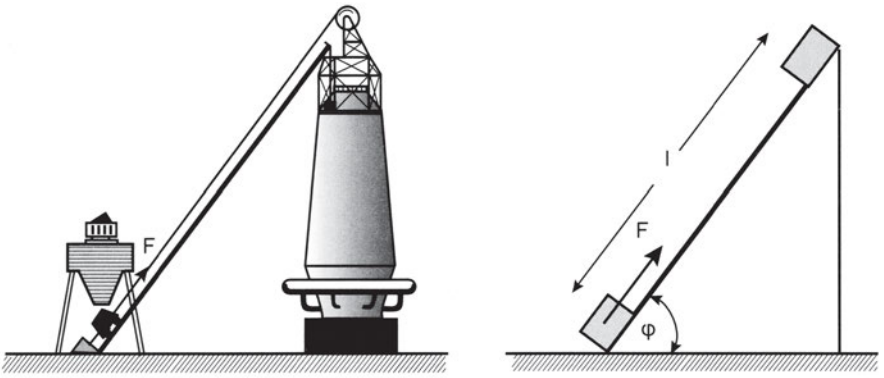
Λύνοντας ως προς F, έχουμε:

$$F = \frac{20N \cdot 0,05m}{0,6 \cdot 0,5m} = 3,33N$$

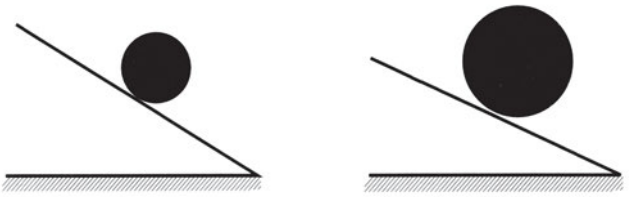
$$v = \frac{n_A P_{\delta\alpha\pi}}{B\ 2\pi r} = \frac{0,6 \cdot 75}{10 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,05} \frac{c}{sec} = \frac{45 \cdot 60}{62,8} \frac{c}{min} = 43 \frac{c}{min}$$

13.5 ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Είναι μια απλή μηχανή· αποτελείται από ένα σταθερό επίπεδο που σχηματίζει οξεία γωνία με μία οριζόντια επιφάνεια. Ένα σώμα, που είναι τοποθετημένο επί του κεκλιμένου επιπέδου, κινείται από τη δράση της συνιστώσας του βάρους που είναι παράλληλη προς αυτό το επίπεδο, ενώ η κάθετη συνιστώσα προς το κεκλιμένο επίπεδο, εξισορροπείται από την αντίδραση του επιπέδου αυτού.



Σχήμα 13.5α *Κεκλιμένο επίπεδο*



Σχήμα 13.5β *Κεκλιμένο επίπεδο*

Η επιτάχυνση που λαμβάνει ένα σώμα, είναι τόσο μεγαλύτερη –αν παραβλέψουμε τις τριβές– όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση του επιπέδου.

Την αρχή του κεκλιμένου επιπέδου εφαρμόζουμε π.χ. σε όλες τις κλίμακες, τις ανηφορικές οδούς κ.λπ. ιδιαίτερη εφαρμογή αυτού έχουμε και σε μια απλή μηχανή τη **σφήνα**.

Όλα τα εργαλεία κοπής: μαχαίρια, ξυράφια, πελέκεις κ.λπ. είναι σφήνες.

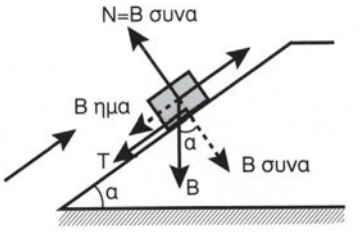
ΒΑΘΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Είναι προφανές ότι, αν έχουμε ένα φορτίο και θέλουμε να το έλξουμε κατακόρυφα, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύναμη, ίση με το βάρος του φορτίου.

Αν πάλι θέλουμε να μετακινήσουμε φορτίο που στηρίζεται σε οριζόντιο επίπεδο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύναμη, ίση με την τριβή.

Για να ανυψώσουμε φορτίο, με δύναμη μικρότερη από το βάρος του, σαν απλή μηχανή χρησιμοποιούμε το κεκλιμένο επίπεδο. Για να είναι δυνατή η ανύψωση του φορτίου, θα πρέπει να ενεργήσουμε με δύναμη:

$$B\,\eta\mu\alpha + n\,B\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$



Σχήμα 13.5γ *Φορτίο σε κεκλιμένο επίπεδο*

Άρα ο βαθμός απόδοσης του κεκλιμένου επιπέδου, θα είναι:

$$n_A = \frac{B\,\eta\mu\alpha}{B\,(\eta\mu\alpha + n\,\sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha + n\,\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{1 + n\,\sigma\varphi\alpha}$$

Αν $\eta = \varepsilon\varphi\alpha_0$, τότε θα έχουμε:

$$\boxed{n_A = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha_0\,\sigma\varphi\alpha}} \qquad (13.5.1)$$

i) Αν $\alpha = \alpha_0$ ο τύπος 10.5.1 δίδει: $n = 0,5$

ii) Αν $\alpha < \alpha_0$ ο τύπος 10.5.1 δίδει: $n < 0,5$

iii) Αν $\alpha > \alpha_0$ ο τύπος 10.5.1 δίδει: $n > 0,5$

Κρίνεται σκόπιμο να τονισθεί ότι η μηχανή **προσλαμβάνει** έργο από το περιβάλλον και **αποδίδει** έργο στο περιβάλλον.

Η πρόσληψη αυτή του έργου από το περιβάλλον, αντιστοιχεί στη δαπανώμενη ισχύ P_Δ, ενώ η απόδοση έργου στο περιβάλλον, αντιστοιχεί στην

αποδιδόμενη ισχύ P_A όπου: $P_A < P_Δ$.

Το καταναλισκόμενο έργο καταναλίσκεται αφ' ενός μεν υπό της αντιστάσεων ($A_{ωφ}$) αφ' ετέρου δε υπό των τριβών.

Ο λόγος P_A / $P_Δ$, είναι μέγεθος χαρακτηριστικό μιας μηχανής και καλείται "συντελεστής απόδοσης".

Είναι δε:

$$n_A = \frac{P_A}{P_Δ} = \frac{P_{ωφ}}{P_{κατ}} \quad \text{συντελεστής απόδοσης} \qquad (13.5.2)$$

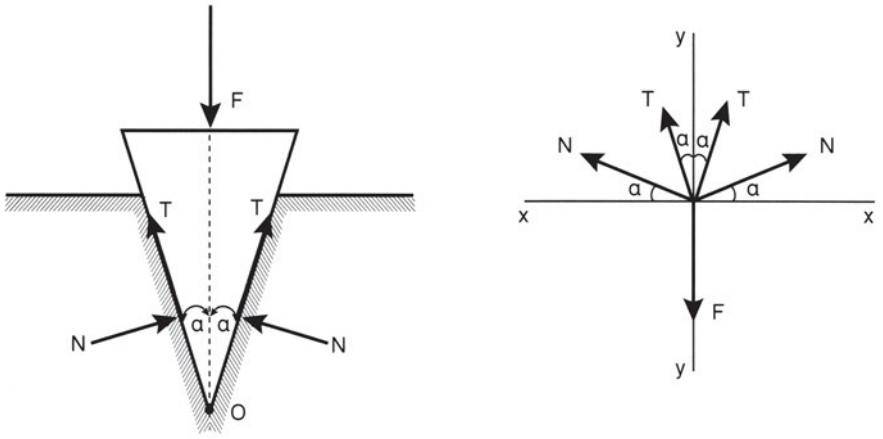
Η επί τοις εκατό % τιμή του συντελεστού απόδοσης μιας μηχανής λέγεται "απόδοση μηχανής" και είναι:

$$α = n_A \,\% \quad \text{Απόδοση μηχανής} \qquad (13.5.3)$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην ισοσκελή σφήνα του σχήματος (13.5δ) να υπολογισθεί η κάθετος δύναμη N αν: F = 5N, n_A = 0,16 και α = 15°.

Λύση



Σχήμα 13.5δ *Ισοσκελής σφήνα*

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0,\ F = 2T\sigma\upsilon\nu\alpha + 2N\eta\mu\alpha \qquad (1)$$

Επειδή $T = n \cdot N$, έχουμε:

$$F = 2nN\sigma\upsilon\nu\alpha + 2N\eta\mu\alpha$$

$$F = 2N\,(n\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)$$

Άρα:
$$N = \frac{F}{2(n\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)}$$

Επομένως: $N = \dfrac{5N}{2\left(0,60\sigma\upsilon\nu 15^{o} + \eta\mu 15^{o}\right)} = \dfrac{5N}{2\left(0,60 \cdot 0,966 + 0,259\right)}$

Άρα: $N \simeq 2,98\ N$

Στο παράδειγμά μας, θεωρούμε το ίδιο το βάρος της σφήνας αμελητέο. Αποτελεί δε η **σφήνα**, ένα στοιχείο μηχανών που υπόκεινται στους νόμους του κεκλιμένου επιπέδου.

Χρησιμεύει δε για τη σύσφιξη μιας τροχαλίας, ή ενός δίσκου συμπλέκτη επί άξονος, για την ανύψωση ή πλευρική μετατόπιση βάρους σε μικρή απόσταση, για την ασφάλιση των συρματόσχοινων, τη στερέωση των εκσκαπτικών οδόντων και αλλού.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τα σώματα με αντίστοιχα βάρη B_1 και B_2, συνδέονται με νήμα και ολισθαίνουν πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο γωνία κλίσεως α. Οι αντίστοιχοι συντελεστές τριβής είναι n_1, n_2.

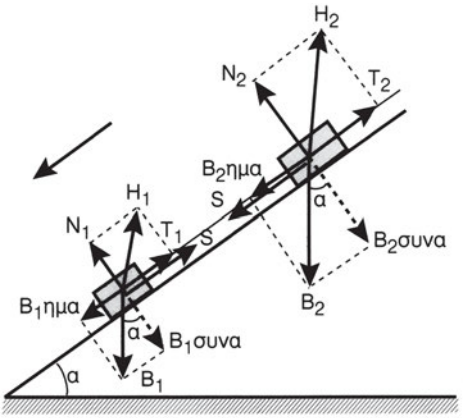
Να υπολογισθούν:

α) η επιτάχυνση γ των σωμάτων και

β) η τάση του νήματος S.

Λύση

(Για τη λύση της άσκησης αυτής θα υπενθυμίσουμε τρεις βασικούς τύπους της Μηχανικής: $F = m \cdot \gamma$, $B = m \cdot g$ και $T = n \cdot N$.)



Σχήμα 13.5ε

Έτσι για το σώμα βάρους B_1, θα έχουμε:

$$F^1_{\kappa\iota\nu} = B_1\eta\mu\alpha - S - n_1N_1$$

$$B_1\eta\mu\alpha - S - n_1N_1 = m_1\gamma \qquad (1)$$

$$F^2_{\kappa\iota\nu} = S + B_2\eta\mu\alpha - n_2N_2 = m_2\gamma \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) δι' απαλειφής της S έχουμε:

$$\eta\mu\alpha\,(B_1 + B_2) - \sigma\upsilon\nu\alpha\,(n_1B_1 + n_2B_2) = \gamma(m_1 + m_2) \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\gamma = \frac{\eta\mu\alpha\,(B_1 + B_2) - \sigma\upsilon\nu\alpha\,(B_1n_1 + B_2n_2)}{(B_1 + B_2) : g} \qquad (4)$$

Σημείωση

Αν υποθέσουμε ότι $n_1 = n_2 = n$ και $B_1 = B_2 = B = 10N$, τότε εξάγουμε τη γνωστή μας σχέση $\gamma = g\,(\eta\mu\alpha - n\sigma\upsilon\nu\alpha)$.

Εφαρμογή: Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$S = -m_1\gamma - n_1N_1 + B_1\eta\mu\alpha = -\frac{B_1}{g}\cdot\gamma - n_1B_1\sigma\upsilon\nu\alpha + B_1\eta\mu\alpha$$

Άρα:
$$S = B_1\left(-\frac{\gamma}{g} - n_1\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\right) \qquad (5)$$

$$S = 10 \cdot \left(- \frac{1,273}{10} - 0,3 \cdot 0,86 + 0,5 \right) = 10 \cdot \left(-0,127 - 0,258 + 0,5 \right)$$

Άρα: $S = 1,15$ N

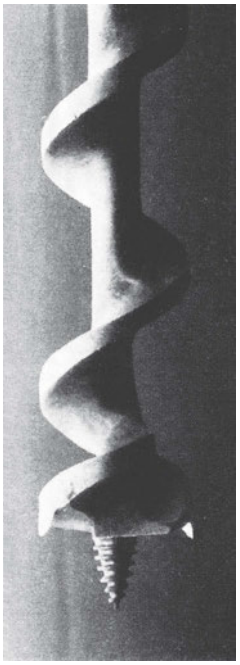
Στην παραπάνω σχέση (5), ελήφθη $\gamma = 1,273$ m/sec^2, αφού από την (4) προκύπτει:

$$\gamma = \frac{0,5 \cdot 30 - 0,86 \cdot 13}{3} = 1,273 \frac{m}{sec^2}$$

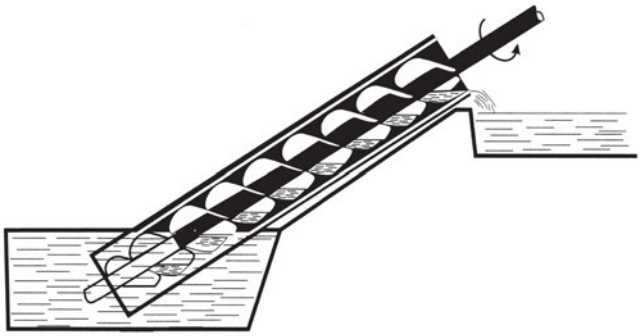
13.6 Ο ΚΟΧΛΙΑΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Η αδυναμία άρδευσης των χωραφιών της Αιγύπτου παρ' όλες τις τεράστιες ποσότητες νερού του Νείλου ποταμού, οδήγησε τον Αρχιμήδη να επινοήσει τη μηχανή αυτή, για να ανυψώνει το νερό σε υψηλότερη στάθμη και να γίνεται έτσι η διανομή του στα χωράφια, με ελεύθερη ροή.

Ο Διόδωρος ο Σικελιώτης (1ος αι. π.Χ.), αναφέρει, ότι στην Αίγυπτο αγρότες αρδεύουν τα χωράφια τους με τη μηχανή αυτή που επινόησε ο Αρχιμήδης και ότι στα ορυχεία της Ισπανίας, με τον κοχλία του Αρχιμήδη αντλούν τα νερά από τις πλημμυρισμένες στοές.



Σχήμα 13.6α *Κοχλίας*



Σχήμα 13.6β *Κοχλίας*

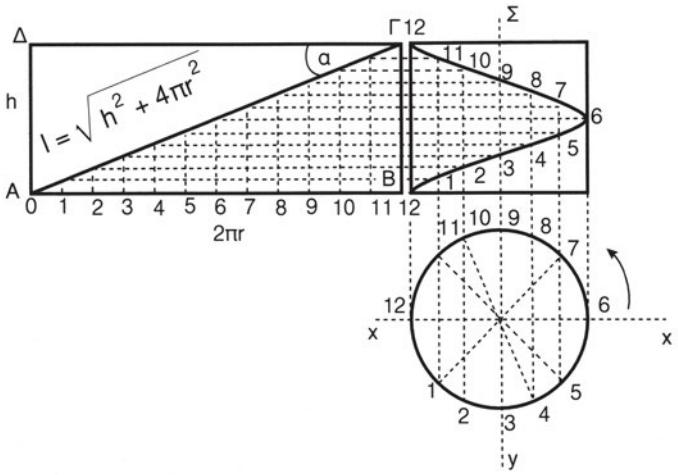
Στο βιβλίο του «Περί Αρχιτεκτονικής» ο Βιτρούβιος (1ος αιώνας π.Χ.) τονίζει, ότι η κλίση του πρέπει να ανταποκρίνεται στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και ότι το μήκος σε πόδια πρέπει να είναι ίσο με τη διάμετρό του σε δακτύλους· δηλαδή δίνει μια σχέση διαμέτρου-μήκους της τάξης του 1/15.

Ο κοχλίας του Αρχιμήδη επέτρεπε την άντληση μεγάλων ποσοτήτων νερού από μικρό βάθος, με κίνηση που δινόταν από ανθρώπους ή από ζώα με τη βοήθεια, ίσως, ξύλινων οδοντοτών τροχιών.

Σήμερα, για το σκοπό αυτό, και για μεγάλα βάθη, χρησιμοποιείται η ίδια συσκευή με πτερύγια που αποτελούν στερεά κυκλική έλικα, σε κατακόρυφη θέση με κίνηση από μηχανή.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΛΙΚΑΣ

Έστω το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου ΑΒΓΔ, ακτίνας r. Χωρίζουμε την περιφέρεια του κύκλου και την πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ σε δώδεκα ίσα μέρη. Ενώνουμε τα σημεία τομής, που αντιστοιχούν στους ίδιους αριθμούς και θα έχουμε τη γραμμή της έλικας. Στο σχήμα η έλικα ανέρχεται από αριστερά προς τα δεξιά (δεξιόστροφος έλικα).



Σχήμα 13.6γ

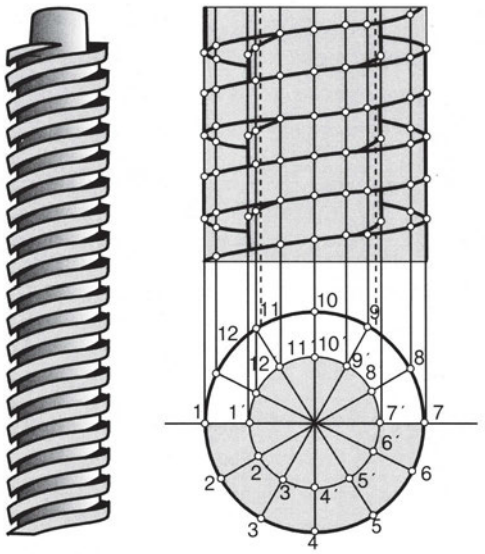
Στο σχήμα 13.6γ είναι:

h = το ύψος του βήματος

l = το βήμα της έλικας

r = η ακτίνα της έλικας

α = η γωνία της έλικας



Σχήμα 13.6δ *Τετραγωνικό σπείρωμα*

Αν αντί της γραμμής αυτής, τυλιχθεί επί του κυλίνδρου ένα επίπεδο σχήμα (τρίγωνο, τετράγωνο, τραπέζιο) κατά τη γραμμή της έλικας τότε σχηματίζεται ένα σπείρωμα.

Είναι προφανές ότι:

$$x = r\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$y = r\eta\mu\theta$$

$$z = r \cdot \theta \frac{h}{2\pi r} = \frac{h}{2\pi}\theta$$

Οι τρεις παραπάνω εξισώσεις, είναι οι εξισώσεις της κυλινδρικής έλικας. Επίσης έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{h}{2\pi r}$$

Αν ο κοχλίας έχει ν βήματα (κοχλίας πολλαπλού βήματος), τότε,

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\nu \cdot h}{2\pi r}$$

ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΚΟΧΛΙΩΝ

Οι κοχλίες χρησιμοποιούνται σαν μέσα:

α) **σύνδεσης**· δηλ. για να συνδέονται τεμάχια μηχανών μεταξύ τους **(κοχλίες σύνδεσης)**

β) **κίνησης,** είτε μιας περιστροφικής κίνησης σε ευθύγραμμη (π.χ. ανυψωτικοί μηχανισμοί, εργαλειομηχανές, πιεστήρια) ή μιας ευθύγραμμης σε περιστροφική, είτε μιας περιστροφικής σε περιστροφική (π.χ. οδοντωτός τροχός με ατέρμονα κοχλία).

Κοχλιοτόμος

Η εργαλειομηχανή που εκτελεί την εκσκαφή της ελικώσεως ενός κοχλία κατά μήκος μιας κυλινδρικής επιφάνειας, λέγεται **κοχλιοτόμος** και γίνεται, είτε στην εσωτερική, είτε στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου. Η χρήση αυτών των εργαλείων, έχει επεκταθεί ακόμα και στις απλές μηχανές, όπως στα δράπανα και τους τόρνους.

Στο στρόφαλο και στο άκρο του ασκούμε τη δύναμη F κάθετο στο επίπεδο του σχήματος. Αν παραστήσουμε με R το μήκος του στροφάλου τότε:

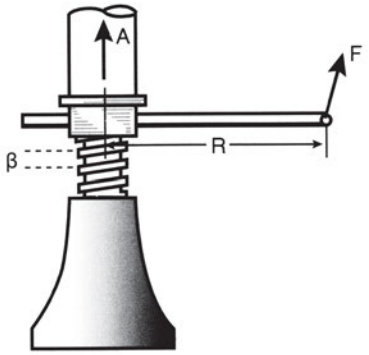
$$W_F = F \cdot 2\pi R$$

$$W_B = B \cdot 2\pi \cdot r$$

Άρα $$n_A = \frac{B \cdot 2\pi r}{F \cdot 2\pi R}$$

οπότε: $$n_A = \frac{B \cdot r}{F \cdot R}$$

Στην περίπτωση του κοχλία (σχ. 13.6.ε) της απλής μηχανής δηλ. που αποτελείται από τον **κυρίως κοχλία** και το **περικόχλιο**, όταν ο στρόφαλος μήκους R στραφεί κατά μια στροφή, τότε ο κοχλίας ανεβαίνει ή κατεβαίνει κατά ένα βήμα β*.



Σχήμα 13.6ε *Κοχλίας*

Ο κοχλίας στρέφεται με τη βοήθεια της δύναμης F, που ασκείται στο άκρο του μοχλού.

Τότε θα έχουμε:

$$W_F = F \cdot 2\pi R$$

$$W_A = A \cdot \beta$$

απ' όπου $$\boxed{n_A = \frac{A \cdot \beta}{2\pi FR}} \qquad (13.6.1)$$

Πράγματι, το έργο που παράγεται από τη δύναμη F, κατά μια πλήρη περιστροφή του κοχλία, είναι ίσο με:

$$W_F = \text{ροπή} \cdot \text{γωνία} = F \cdot R \cdot 2\pi.$$

* Βήμα κοχλία, λέγεται η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων της έλικας που βρίσκονται πάνω στην ίδια γενέτειρα· δηλ. είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ελικώσεων και όταν ο κοχλίας εκτελεί μια πλήρη περιστροφή, αυτός υφίσταται μετατόπιση ίση προς το βήμα του.

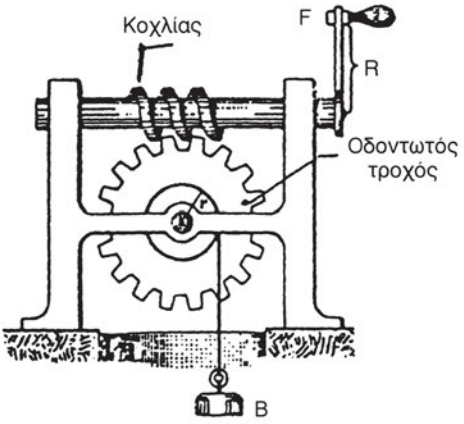
Κατά τη στροφή αυτή, ο κοχλίας θα προχωρήσει κατά το διάστημα β (βήμα κοχλία). Η δύναμη Α θα καταναλώσει έργο, ίσο με $W_A = A \cdot \beta$. Σύμφωνα με το αξίωμα διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε: $W_F = W_A$ με την προϋπόθεση αμελητέας τριβής. Άρα, για το βαθμό απόδοσης n, ισχύει ο τύπος Β.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στον ατέρμονα κοχλία του σχήματος 13.6στ ο τροχός έχει x οδόντες. Αποδείξτε, ότι:

$$F = \frac{B \cdot r}{x \cdot R}$$

Εφαρμογή: R = 1,5 r , x = 18 , B = 108N



Σχήμα 13.6στ *Ατέρμων κοχλίας*

Λύση

Ο ατέρμονας κοχλίας αποτελεί συνδυασμό κοχλία και οδοντωτού τροχού (σχήμα 13.6στ). Μια πλήρης περιστροφή του κοχλία, περιστρέφει τον οδοντωτό τροχό κατά διάστημα, ίσο προς το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων του.

Αφού ο τροχός έχει x οδόντες, τότε το άκρο του μοχλού εκτελεί x περιστροφές, δηλ. διάστημα ίσο με: $2\pi R \cdot x$, για να εκτελέσει ο τροχός μια περιστροφή.

Το φορτίο Β ανυψώνεται κατά 2πr. Επομένως θα έχουμε:

$$2\pi R \cdot x \cdot F = 2\pi r B$$

όπου:

$W_F = 2\pi R \cdot x \cdot F$ και $W_B = 2\pi r \cdot B$ (με την προϋπόθεση αμελητέας τριβής)

Άρα: $$F = \frac{B \cdot r}{x \cdot R}$$

Εφαρμογή: Για R = 1,5r, x = 18 οδόντες, B = 108N,

ο παραπάνω τύπος δίνει: $F = \frac{108N \cdot r}{18 \cdot 1,5 \cdot r} = 4N$

Άρα: $F = 4\ N$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το βήμα ενός κοχλία, είναι 2,5 cm. Ο χειριστής εξασκεί δύναμη F = 25N κάθετα στο άκρο του οριζόντιου στροφάλου, μήκους 1m. Να βρείτε τη δύναμη αντίστασης.

Λύση

Για τον κοχλία έχουμε:

$$F = 2\pi R = A \cdot \beta \qquad (1)$$

Λύνοντας την (1) ως προς A έχουμε:

$$A = \frac{F \cdot 2\pi R}{\beta}$$

Άρα: $$A = \frac{25N \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 100}{2,5} = 6280\ N$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τον κοχλία δίνονται: β = 2,5 cm, F = 25 N, A = 5000 N, R = 100 cm. Να βρεθεί η απόδοσή του.

Λύση

Η απόδοση του κοχλία θα είναι:

$$n_A = \frac{A \cdot \beta}{2\pi \cdot F \cdot R}$$

Άρα, θα έχουμε:

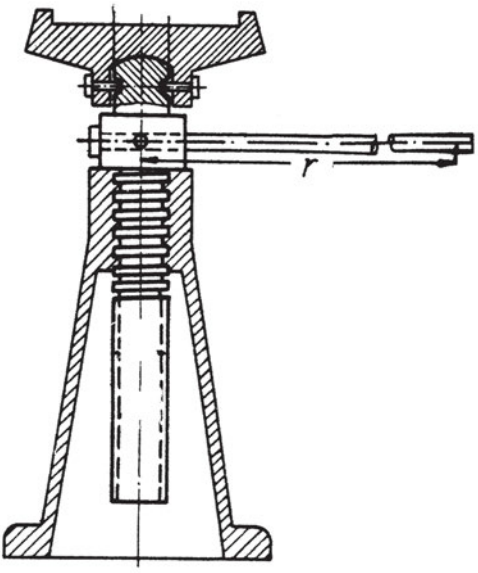
$$n_A = \frac{500N \cdot 2,5cm}{6,28 \cdot 25N \cdot 100cm} = 0,8$$

ΓΡΥΛΟΙ

Οι γρύλοι χρησιμοποιούνται για την ανύψωση, και την κατακόρυφη μετακίνηση, μεγάλων φορτίων π.χ. 20-25 tn σε μικρά κυρίως ύψη 30-40 cm. Αν οι γρύλοι μπορούν να γλυστρούν τότε γίνεται οριζόντια μετακίνηση των φορτίων.

Είναι απλοί και εύχρηστοι μηχανισμοί.

Έχουμε γρύλους με **οδοντωτό κανόνα και οδοντωρό τροχό, με κοχλία, γρύλους, υδραυλικούς** χρησιμοποιούμενους για φορτία μέχρι 300 tn και για διαδρομή 100 έως 300 mm, για μετακινήσεις βαριών φορτίων όπως για τις κυρίως δοκούς γερανογεφυρών και μεγάλων μηχανών, γρύλους υδραυλικούς αυτοκινήτων που χρησιμοποιούνται για βαρέα οχήματα έως 9 tn και για ανύψωση από 100 mm έως 900 mm.



Σχήμα 13.6. στ *Ανυψωτικός γρύλος*

13.7 ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Σε κάθε μετάδοση κίνησης απαραίτητα απαιτούνται δύο άξονες· ο κινητήριος άξονας, ο παρέχων την κίνηση, και ο κινούμενος άξονας, ο λαμβάνων την κίνηση, του οποίου οι στροφές, συνήθως, είναι σε αριθμό, μικρότερες από τις στροφές του κινητήριου άξονα. Ο κινητήριος άξονας, ανήκει στον κινητήρα, ο δε κινούμενος άξονας στον μηχανισμό της κίνησης.

Ο λόγος της περιστροφικής ταχύτητας n_2 του κινούμενου άξονα προς την περιστροφική ταχύτητα n_1 του κινητήριου άξονα ονομάζεται **"Σχέση μετάδοσης"** και είναι:

$$\iota = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi n}{60} \right) \tag{13.7.1}$$

όπου ω, η γωνιακή ταχύτητα.

Είναι μικρότερος της μονάδος και εκφράζει τον υποβιβασμό των στροφών ανά λεπτό, στον κινούμενο άξονα.

Εάν έχουμε περισσότερα από ένα ζεύγη μετάδοσης, π.χ. τρία ζεύγη αξόνων, όπου οι σχέσεις μετάδοσης είναι αντίστοιχα:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{n_4}{n_3} = \frac{1}{8,33}$$

τότε θα έχουμε μια μείωση των στροφών, κλιμακωτή και η σχέση μετάδοσης, θα είναι:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8,33} = \frac{1}{100}$$

Τους τρόπους μετάδοσης της περιστροφικής κίνησης από άξονα σε άξονα, τους διαμορφώνουν:

α) στην **οδοντοκίνηση,** οι οδοντωτοί τροχοί,

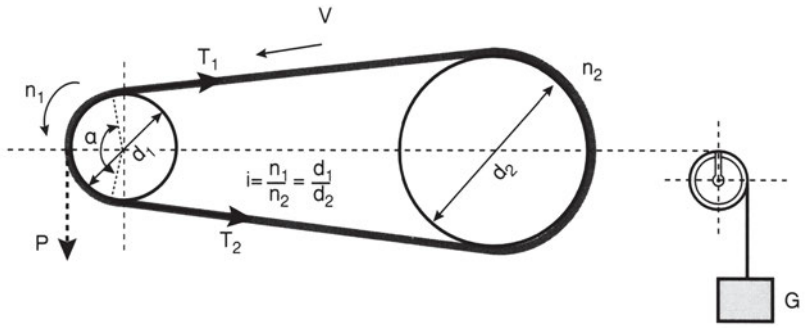
β) στην **αλυσοκίνηση,** η αλυσίδα και

γ) στην **ιμαντιοκίνηση** ο ιμάντας.

Σε όλες αυτές τις κινήσεις, ο λόγος των τιμών της περιστροφικής ταχύτητας, είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τον λόγο των διαμέτρων τους. Έτσι, θα έχουμε:

Οδοντοκίνηση	Αλυσοκίνηση	Ιμαντιοκίνηση
$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$ $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$	$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$	$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$

ΙΜΑΝΤΟΚΙΝΗΣΗ



Σχήμα 13.7α *Ιμαντοκίνηση*

Μετάδοση κίνησης με ιμάντα.

Σ' αυτήν είναι: η ο αριθμός των στροφών ανά λεπτό, v η περιφερειακή ταχύτητα σε m/s, i η σχέση μετάδοσης στροφών, T η τάση ιμάντος, n ο βαθμός απόδοσης της κίνησης, συνήθως από 0,96 έως 0,98, α η γωνία επαφής, P η περιφερειακή δύναμη που μεταβιβάζεται από την τροχαλία στον ιμάντα (ή αντιστρόφως) και G η δύναμη προέντασης, για να επιτευχθούν οι κατάλληλες συνθήκες τριβής.

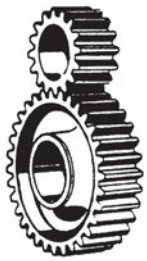
ΟΔΟΝΤΟΚΙΝΗΣΗ

Οι οδοντωτοί τροχοί είναι δίσκοι από μέταλλο, ξύλο, ή πλαστικό. Στην περιφέρειά τους έχουν χαραχθεί οδόντες. Χρησιμεύουν για τη μεταβίβαση περιστροφικών κινήσεων και περιφερειακών δυνάμεων από έναν άξονα σε άλλον άξονα.

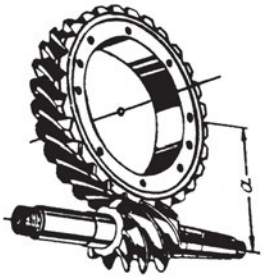
ΜΟΡΦΕΣ ΟΔΟΝΤΩΤΩΝ ΤΡΟΧΩΝ



Σχήμα 13.7β *Οδοντωτός τροχός με οδοντωτό κανόνα*



Σχήμα 13.7γ *Οδοντωτοί τροχοί με ευθύγραμμα μετωπικά δόντια*



Σχήμα 13.7δ *Ζεύγος οδοντωτού τροχού και ατέρμονα κοχλία*





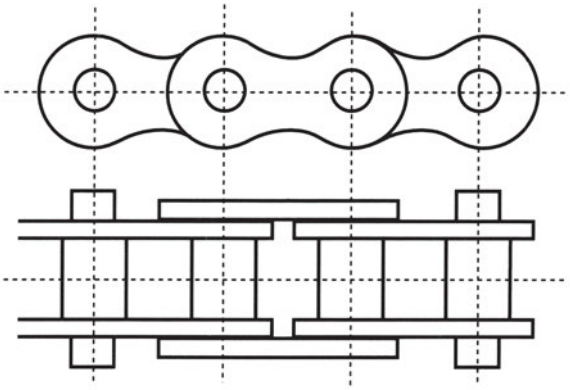
Σχήμα 13.7ε *Κωνικοί οδοντωτοί τροχοί*



Σχήμα 13.7στ *Ελικοειδείς οδοντωτοί τροχοί*

ΑΛΥΣΟΚΙΝΗΣΗ

Το σύστημα της αλυσοκίνησης, αποτελείται από δύο οδοντωτούς τροχούς, εκ των οποίων ο ένας είναι προσαρμοσμένος στον κινητήριο άξονα και ο άλλος πάνω στον άξονα, στον οποίο μεταδίδεται η κίνηση. Μέσω ατέρμονα αλυσίδας που περιβάλλει τους δύο τροχούς, έχουμε τη μετάδοση της κίνησης (Σχ. 13.7ζ).



Σχήμα 13.7ζ *Αλυσοκίνηση*



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Το βάρος είναι μία δύναμη, πάντα κατακόρυφη· το έργο της ισούται με το βάρος επί την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος. Όταν το σώμα ανεβαίνει, το έργο του βάρους είναι αρνητικό, ενώ όταν το σώμα κατεβαίνει, το έργο του βάρους είναι θετικό.

- Το ρυθμό της παραγόμενης ενέργειας W από τη μηχανή (κινητήρα) σε ένα χρόνο t την ονομάζουμε **ισχύ** της μηχανής.

- Την ισχύ που μας αποδίδει μία μηχανή όταν λειτουργεί την χαρακτηρίζουμε **ωφέλιμη** ($P_{ωφ}$) ενώ την ισχύ που απορροφάει η μηχανή την χαρακτηρίζουμε **καταναλισκόμενη** ($P_{κατ}$).

  Ο **συντελεστής απόδοσης** η της μηχανής είναι καθαρός αριθμός μικρότερος της μονάδος και εκφράζει την ποιότητα της μηχανής.

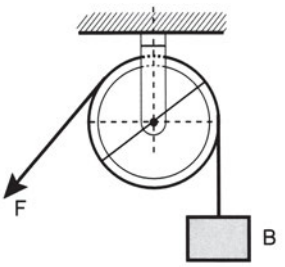
- Κάθε διάταξη που μετατρέπει ενέργεια, μιας μορφής, σε ενέργεια άλλης μορφής λέγεται μηχανή.

  Απλές μηχανές είναι: ο μοχλός, η τροχαλία, το βαρούλκο, το κεκλιμένο επίπεδο, ο κοχλίας, ο γρύλλος κ.λπ.



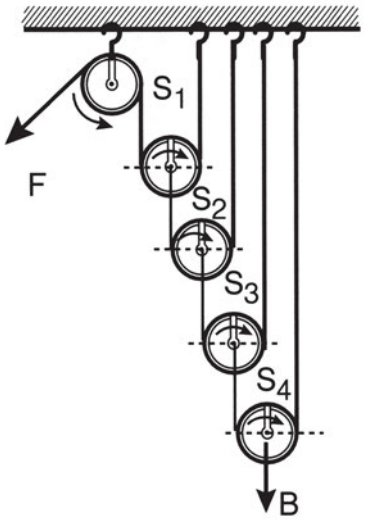
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη σταθερή τροχαλία θέλουμε να ανυψώσουμε φορτίο B = 30 N. Οι παθητικές αντιστάσεις ανέρχονται σε 5% του φορτίου. Ποια είναι η δύναμη που πρέπει να καταβάλουμε προς τούτο, και ο βαθμός απόδοσης;



Απάντηση: (F = 31,5 N, n = 0,95)

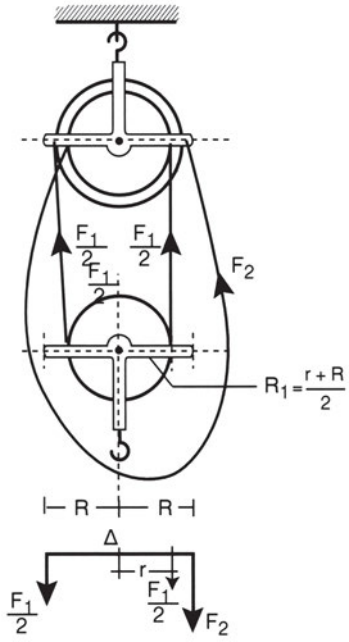
2. Στο συνδυασμό τροχαλιών να βρεθεί η δύναμη F για την ανύψωση φορτίου 1200 N, όταν ο βαθμός απόδοσης είναι n = 0,7.



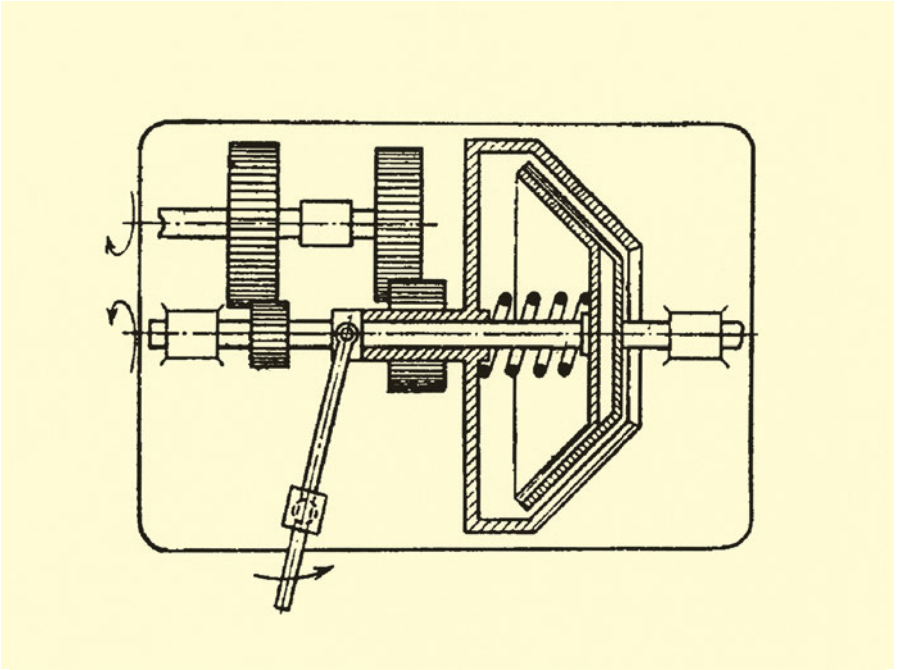
Απάντηση: (F≃107)

3. Το διαφορικό πολύσπαστο αποτελείται από δύο σταθερές τροχαλίες επί του ίδιου άξονα, αλλά διαφορετικής διαμέτρου, και από μία ελεύθερη τροχαλία. Οι τροχαλίες είναι κατασκευασμένες ως τροχοί αλυσίδας, η δε

λειτουργία του πολύσπαστου, γίνεται με ατέρμονα αλυσίδα. Αν είναι δεδομένο ότι για το λόγο $\frac{R-r}{2R} = \frac{1}{16}$, έχουμε: n = 0,51 και F_2 = 4 N, να βρείτε την F_1.



Απάντηση: (F_1 = 32,64 N)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

ΤΡΙΒΗ

14.1 Γενικά

14.2 Η φυσική ερμηνεία της τριβής

14.3 Κινητήρια δύναμη - αντίσταση - παθητικές αντιστάσεις

14.4 Τα είδη και οι νόμοι της τριβής

14.5 Έργο ισχύος και ροπή τριβής

14.6 Εφαρμογές

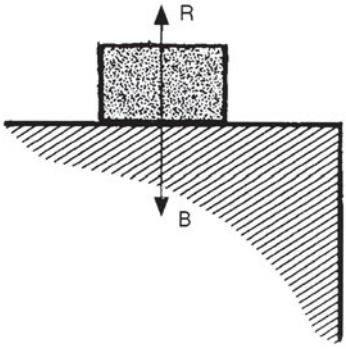
Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Οι μαθητές:

- Να εξηγούν τις έννοιες: κινητήρια δύναμη- αντίσταση.
- Να μπορούν να αναφέρουν και να αναγνωρίζουν τις κινητήριες δυνάμεις και τις αντιστάσεις.
- Να εξηγούν, τι είναι τριβή και να μπορούν να αναφέρουν τα είδη της.
- Να αναφέρουν, να εξηγούν και να μπορούν να εφαρμόσουν τους νόμους της τριβής, σε απλές περιπτώσεις.
- Να γνωρίζουν, τι είναι ο συντελεστής τριβής και τον τρόπο προσδιορισμού του στο κεκλιμένο επίπεδο.
- Να εξηγούν, να περιγράφουν και να υπολογίζουν την τριβή, τη ροπή, το έργο και την ισχύ, σε απλές πρακτικές εφαρμογές.
- Να γνωρίζουν και να μπορούν να εφαρμόσουν το νόμο του Euler.
- Να αντιλαμβάνονται και να εξηγούν το ρόλο της τριβής, σε απλά πρακτικά θέματα και να μπορούν να υπολογίζουν την τριβή

14.1 ΓΕΝΙΚΑ

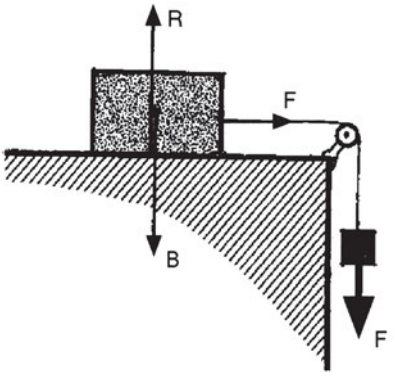
Εξετάζοντας, με μία πρώτη προσέγγιση, τα ζητήματα της Μηχανικής, δεχθήκαμε το "μαθηματικό" ή "ιδανικό" στερεό. Το στερεό αυτό, το φανταστήκαμε μη παραμορφώσιμο, άκαμπτο, και με απόλυτα λείες επιφάνειες. Με την υπόθεση αυτή, αντιμετωπίσαμε ικανοποιητικά, αρκετά προβλήματα. Ας δούμε, τώρα, ένα απλό πείραμα. Πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, σχ.14.1.α, τοποθετούμε ένα κύβο.



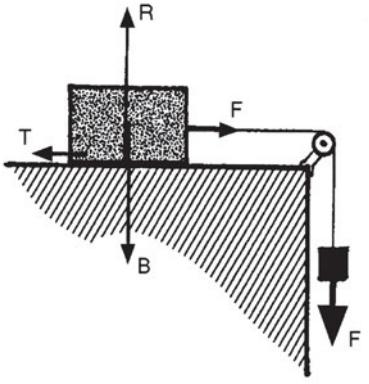
Σχήμα 14.1.α

Στον κύβο ενεργεί το βάρος του Β, κατακόρυφα, και άρα, κάθετα στο οριζόντιο επίπεδο όπου εδράζεται. Στον κύβο ενεργεί, ακόμη, κατά τα γνωστά, και η αντίδραση της έδρασης, η R.

Ξέρουμε από πείρα, ότι ο κύβος δεν θα κινηθεί. Επομένως, η αντίσταση R είναι αντίφορη ως προς το βάρος Β και κατά μέτρο είναι, B=R. Αν συνεχίζοντας το πείραμα, εφαρμόσουμε μία μικρή δύναμη F στον κύβο, και οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα 14.1.β, θα έπρεπε ο κύβος να κινηθεί προς την κατεύθυνση της F. Ξέρουμε, όμως, ότι αν η F δεν είναι αρκετά μεγάλη, ο κύβος δεν θα κινηθεί. Αυτό σημαίνει ότι, εκτός της F που επιβάλλουμε εμείς, εμφανίζεται, συγχρόνως με αυτήν και άλλη δύναμη, η Τ (σχ. 14.1.γ), ώστε να έχουμε ισορροπία. Η δύναμη αυτή λέγεται **δύναμη τριβής** και εμφανίζεται γιατί το πραγματικό σώμα είναι παραμορφώσιμο, δεν είναι άκαμπτο και οι επιφάνειές του δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν, ώστε να είναι απόλυτα λείες.



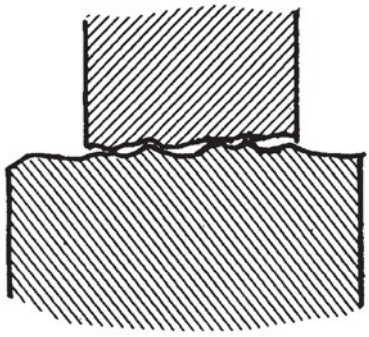
Σχήμα 14.1.β



Σχήμα 14.1.γ

14.2 Η ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ

Όταν εξετάζουμε, με ισχυρά μικροσκόπια, τις επιφάνειες των αντικειμένων, που κατασκευάζουμε, διαπιστώνουμε, ότι αυτές έχουν πολλές ανωμαλίες. Έτσι, η εικόνα που, σε μεγάλη μεγένθυνση, παρουσιάζουν δύο επιφάνειες, οι οποίες βρίσκονται σε επαφή, είναι όπως αυτή του σχήματος 14.2.α.



Σχήμα 14.2.α *Η εικόνα που παρουσιάζουν επιφάνειες σωμάτων σε επαφή, σε πολύ μεγάλη μεγέθυνση.*

Στην περιοχή επίση της επαφής δύο σωμάτων, υπάρχει και η παραμόρφωση που προκαλούν οι ροπές και οι δυνάμεις τις οποίες μέσω της επιφανείας επαφής, το ένα σώμα μεταβιβάζει στο άλλο.

Συνέπεια των παραπάνω πραγματικών καταστάσεων είναι, ότι όταν υπάρξει σχετική κίνηση μεταξύ σωμάτων που εφάπτονται, τότε, εκτός από την ενέργεια που απαιτείται για την κίνηση, θα χρειασθεί και ενέργεια για να αντιμετωπισθεί η αντίσταση, αφενός της εμπλοκής των ανωμαλιών των επιφανειών που εφάπτονται και αφετέρου του έργου των παραμορφώσεών τους. Αυτή η αντίσταση, που προκύπτει από αυτή την εμπλοκή των επιφανειακών ανωμαλιών και από το έργο των παραμορφώσεών τους, είναι η **τριβή.**

14.3 ΚΙΝΗΤΗΡΙΑ ΔΥΝΑΜΗ - ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ - ΠΑΘΗΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΙΣ

Η τριβή, για την οποία μιλήσαμε και σε προηγούμενες παραγράφους, δεν παράγει ωφέλιμο έργο. Για το λόγο αυτό, λέμε, ότι η τριβή είναι μία παθητική αντίσταση.

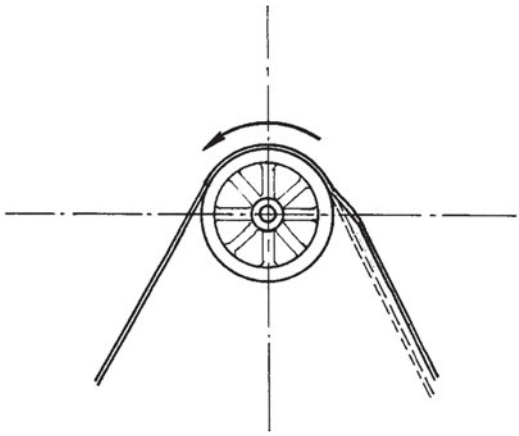
Γενικότερα, σε κάθε κίνηση όσον αφορά στο ρόλο τους, έχουμε τριών ειδών δυνάμεις :

α) Κινητήριες δυνάμεις. Είναι αυτές, που κινούν τις μηχανές και δίνουν ωφέλιμο έργο και προέρχονται από τη μυϊκή δύναμη, τους κινητήρες κ.λ.π.

β) Τις αντιστάσεις. Είναι οι δυνάμεις εκείνες που αντιστέκονται στις κινητήριες π.χ. το βάρος ενός φορτίου που σηκώνει ένας γερανός.

γ) Τις παθητικές αντιστάσεις: Είναι οι δυνάμεις αυτές που δεν παράγουν ωφέλιμο έργο, παρά μόνο αυξάνουν τη θερμοκρασία. Αυτές τις δυνάμεις δεν μπορούμε να τις αποφεύγουμε μέσα στους μηχανισμούς μας. Η προσπάθεια είναι στο να τις μειώσουμε. .Τέτοιου είδους δυνάμεις είναι και οι δυνάμεις τριβής που εμφανίζονται, όπως είπαμε, μεταξύ κινουμένων σωμάτων που εφάπτονται.

Παθητικές αντιστάσεις, δεν είναι μόνον οι τριβές μεταξύ δύο σωμάτων, αλλά και οι εσωτερικές τριβές από τις κάμψεις των σωμάτων, δεδομένου ότι τα πραγματικά σώματα δεν είναι άκαμπτα. Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζει πρακτικό ενδιαφέρον, κυρίως, όταν θέλουμε πολύ εύκαμπτα σώματα, όπως θέλουμε να είναι οι ιμάντες και τα συρματόσχοινα. Ιδιαίτερα, τέτοια στοιχεία μεγάλων διαστάσεων, δεν μπορούν να “αγκαλιάσουν” κανονικά την τροχαλία τους (σχ.14.3.α) και έτσι παρουσιάζεται το φαινόμενο της δυσκαμψίας.



Σχήμα 14.3.α *Δυσκαμψία ιμάντα*

Παθητικές αντιστάσεις και τριβές, έχουμε και κατά τη ροή των ρευστών υγρών και αερίων περί των οποίων θα μιλήσουμε παρακάτω.

Συμπερασματικά, παθητικές αντιστάσεις είναι δυνάμεις τριβής, είτε μεταξύ σωμάτων, είτε εσωτερικά, στα ίδια τα σώματα που κάμπτονται, και οι οποίες εμφανίζονται, όταν υπάρχει κίνηση.

Παρά το γεγονός οτι η τριβή, ως παθητική αντίσταση, δεν παράγει ωφέλιμο έργο, και επομένως είναι ανεπιθύμητη, εντούτοις, πολλές φορές στη μηχανολογία, αποδεικνύεται χρήσιμη. Πρώτη εφαρμογή της τριβής, είναι τα φρένα. Έχουμε, ακόμη, τους συνδέσμους τριβής, τη χρησιμοποιούμε επίσης στους ηλεκτροκίνητους ανελκυστήρες με την τροχαλία τριβής των συρματόσχοινων και σε άλλες αναγκαίες εφαρμογές.

14.4 ΤΑ ΕΙΔΗ ΚΑΙ ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ

Την τριβή την συναντάμε, όποτε δύο σώματα, που εφάπτονται μεταξύ τους, κινούνται το ένα ως προς το άλλο. Την τριβή την βρίσκουμε, και όταν τα εφαπτόμενα σώματα δεν κινούνται το ένα ως προς το άλλο, αλλά έχουν την τάση για κάτι τέτοιο.

Η παρατήρηση έχει δείξει, ότι, η τριβή εξαρτάται από το είδος της κίνησης μεταξύ των εφαπτομένων σωμάτων και γι' αυτό διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις της :

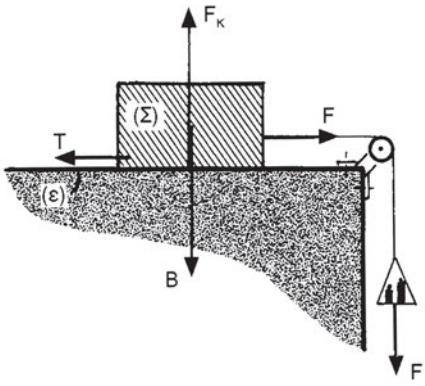
I) Την τριβή ολίσθησης

II) Τη στατική τριβή

III) Την τριβή κύλισης

I. *Τριβή ολίσθησης*

Έστω ένα σώμα (Σ) ,πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο (ε) (σχ. 14.4.α.)



Σχήμα 14.4.α *Σώμα ολισθαίνον σε οριζόντιο επίπεδο*

Με τη βοήθεια της τροχαλίας, όπως φαίνεται στο σχήμα, εφαρμόζουμε στο σώμα (Σ), μία δύναμη έλξης, την F. Αυξάνουμε ,σταδιακά, τη δύναμη F, μέχρι το σώμα να αρχίσει να ολισθαίνει ισοταχώς. Τότε, πάνω στο σώμα, ενεργούν α) η κινητήρια δύναμη F, β) το βάρος Β, κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο (ε), γ) η αντίφορη και ίση κατά μέτρο προς το βάρος Β, αντίδραση F_k της έδρασης του σώματος (Σ) πάνω στο επίπεδο (ε), και δ) η τριβή Τ. Επειδή το σώμα κινείται ισοταχώς, το σύστημα των δυνάμεων θα έχει συνισταμένη μηδέν. Από την εξίσωση που προκύπτει, υπολογίζουμε την

τριβή. Πειραματιζόμενοι με τη διάταξη του σχήματος 14.4.α, καταλήγουμε στους παρακάτω νόμους της τριβής ολίσθησης, τους οποίους πρώτος διατύπωσε ο Coulomb:

1. Η τριβή είναι, πάντα, αντίθετη προς την κίνηση.
2. Η τριβή είναι ανάλογη προς τη δύναμη, που ενεργεί κάθετα στο επίπεδο ολίσθησης.
3. Η τριβή εξαρτάται από το υλικό των σωμάτων που εφάπτονται και από την κατάσταση των επιφανειών ολίσθησης.
4. Η τριβή είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας ολίσθησης.
5. Η τριβή είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα ολίσθησης. (Αυτή η πρόταση ισχύει ικανοποιητικά, για ταχύτητες μέχρι 5 m/s .Για μεγαλύτερες, γενικά, η τριβή μειώνεται).

Οι παραπάνω νόμοι περιγράφονται από τη σχέση:

$$T = \eta \cdot F_k, \qquad (14.4.\alpha)$$

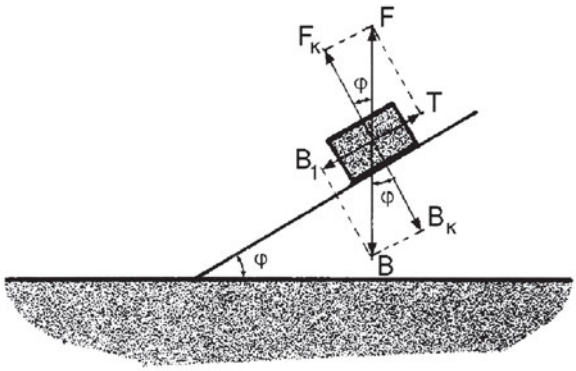
όπου Τ, η δύναμη τριβής

F_k, η κάθετη στην επιφάνεια ολίσθησης δύναμη.

η, ο συντελεστής τριβής που εξαρτάται από το υλικό και το είδος των επιφανειών ολίσθησης.

Από τη σχέση 14.4.α, φαίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης η, είναι καθαρός αριθμός.

Τα ίδια πράγματα ισχύουν και στην περίπτωση που αντί της τροχαλίας με το βάρος του (σχήμα 14.4.α), για να σύρουμε το σώμα (Σ), το έχουμε πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Έστω, λοιπόν, το σώμα (Σ) πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (σχ.14.4.β) και ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε τη γωνία φ της κλίσης του επιπέδου.



Σχήμα 14.4.β *Σώμα ολισθαίνον σε κεκλιμένο επίπεδο*

Όταν η γωνία φ είναι μικρή, το σώμα δεν κινείται. Αυξάνοντάς την, όμως, σε κάποια στιγμή, αρχίζει το σώμα να ολισθαίνει. Όταν η ολίσθηση γίνεται ισοταχής, έχουμε την ανάλογη περίπτωση, όπως και όταν σύραμε το σώμα στο οριζόντιο επίπεδο. Σ' αυτή την κατάσταση που το σώμα ολισθαίνει ισοταχώς, από την ανάλυση των δυνάμεων, κατά την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και την κάθετο προς αυτήν διεύθυνση, έχουμε: (σχ. 14.4.β).

$B_1 = T = F\eta\mu\varphi = B\eta\mu\varphi$

$B_\kappa = F_\kappa = F\sigma\upsilon\nu\varphi = B\sigma\upsilon\nu\varphi$

Διαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη, έχουμε:

$T/F_\kappa = \varepsilon\varphi\varphi$

$$T = \varepsilon\varphi\varphi \cdot F_\kappa \qquad (14.4.\beta)$$

Η γωνία φ, ονομάζεται γωνία τριβής και συγκρίνοντας τις σχέσεις 14.4.α και 14.4.β, έχουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \eta \qquad (14.4.\gamma)$$

Είναι, λοιπόν, εύκολα κατανοητό, από τη σχέση 14.4.γ, ότι με ένα κεκλιμένο επίπεδο με δυνατότητα μεταβολής της κλίσης του, μπορούμε πειραματικά, να προσδιορίσουμε το συντελεστή τριβής η, σε διάφορες περιπτώσεις.

Ενδεικτικά, αναφέρουμε μερικές τιμές του συντελεστού τριβής ολίσθησης (η):

α) η χάλυβα πάνω σε χάλυβα = 0,1

β) η λάστιχου σε βρεγμένη άσφαλτο = 0,5

γ) η λάστιχου σε στεγνή άσφαλτο = 0,7

ΙΙ. *Στατική τριβή*

Όπως είδαμε και στα δύο προηγούμενα πειράματα, και με το οριζόντιο και με το κεκλιμένο επίπεδο, η ολίσθηση του σώματος (Σ) δεν αρχίζει αμέσως, αλλά μετά από μία τιμή, είτε της δύναμης έλξης F, είτε της γωνίας κλίσης φ, κατά περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι, όταν οι δυνάμεις που προκαλούν την ολίσθηση (F και η B_1 = Fημ φ, σχ. 14.4.α και 14.4.β, αντίστοιχα) είναι μικρότερες από την αναγκαία τιμή που θα δημιουργούσε ολίσθηση, αντισταθμίζονται από την αναπτυσσόμενη τριβή, τη **στατική τριβή ολίσθησης $T_{στ}$**, και η οποία, προφανώς, είναι μικρότερη από αυτήν την τιμή που δίνει η σχέση 14.4.α, δηλαδή, ισχύει η ανισότητα $T_{στ}$ < η F_k.

Πειραματικές έρευνες έχουν αποδείξει, ότι η στατική τριβή έχει τη μεγαλύτερη τιμή της, τη στιγμή που αρχίζει η ολίσθηση του σώματος. Αμέσως μετά, έχουμε την κινητική τριβή ολίσθησης, που είναι κατα τι μικρότερη από τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.

Η στατική τριβή είναι αυτή που μας επιτρέπει να στεκόμαστε χωρίς να γλυστράμε, να κρατάμε αντικείμενα στα χέρια μας, να μην “φεύγουν” τα αυτοκίνητα από το δρόμο τους κ.α. Η στατική τριβή ολίσθησης, είναι η λεγόμενη **πρόσφυση**.

Επειδή η τριβή είναι μία παθητική αντίσταση, προσπαθούμε να την μειώσουμε. Ο βασικός τρόπος μείωσής της είναι η **λίπανση**. Η λίπανση γίνεται, βάζοντας υγρό ανάμεσα στις ολισθαίνουσες επιφάνειες. Το είδος του υγρού εξαρτάται από τις συνθήκες λειτουργίας της μηχανής, μπορεί, πάντως, να είναι νερό, λίπος, ορυκτέλαιο κ.λ.π. Η λίπανση, εκτός από τη μείωση του συντελεστού τριβής, βοηθά και στην απαγωγή της θερμότητας από τα στοιχεία της μηχανής που ολισθαίνουν μεταξύ τους καθώς επίσης, στη συντήρηση των εξαρτημάτων και στη μείωση της φθοράς τους.

Στον πίνακα που ακολουθεί, δίνονται τιμές των συντελεστών τριβής ολίσθησης (στατικής και κινητικής) από διάφορες πραγματικές περιπτώσεις, ανάλογα και με το είδος της λίπανσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 14.4.Α ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΡΙΒΗΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ

Προστριβόμενα υλικά	Κατάσταση επιφανειών	Εφαρμογές	Συντελεστής τριβής στατικής	κινητικής
χυτοσίδηρος με χυτοσίδηρο ή μπρούντζο	στεγνές	σύνδεσμοι τριβής	–	0.49
	με νερό	υδραντλίες	–	0.31
	λίπανση με λίπος	ζυγώματα μηχανών	0.16	0.15
	λίπανση με λάδι	έμβολα ατμομηχανών	0.10	0.07
σίδηρος με μπρούντζο	στεγνές	ζυγώματα	0.19	0.18
	με νερό	υδραντλίες	0.35	0.25
ατσάλι με χυτοσίδηρο	λίπανση με λάδι	ζυγώματα	0.12	0.09
σίδηρος με σίδηρο	στεγνές	οδηγοί ολίσθησης	–	0,14
	λίπανση με λάδι		0.17	–
σίδηρος με βαμβάκι ή κανάβι	λίπανση με λίπος	στυπιοθλίπτες	–	0.10

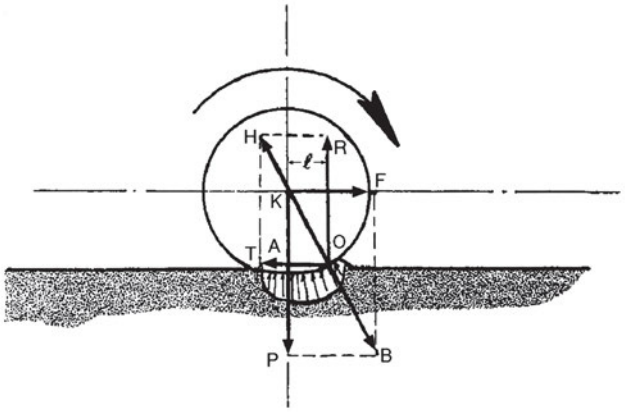
III. *Τριβή κύλισης*

Όταν ένας κύλινδρος κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει, τότε λέμε, ότι ο κύλινδρος **κυλά**. Αυτού του είδους η κίνηση, είναι δυνατή, γιατί υπάρχει η πρόσφυση (στατική τριβή) μεταξύ του κυλίνδρου και του επιπέδου, πάνω στο οποίο αυτός κινείται.

Κύλιση, στη πράξη, έχουμε στη κίνηση των τροχών, των ρουλεμάν, των ράουλων κ.α.

Κατά τη διάρκεια της κύλισης, όπως και στην ολίσθηση, παρουσιάζεται αντίσταση, ανθιστάμενη στην κίνηση. Πειραματικά, αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός, ότι πρέπει να ασκείται δύναμη πάνω στον κύλινδρο, για να μπορεί αυτός να συνεχίσει κινούμενος ισοταχώς. Η τριβή κύλισης οφείλεται στο παραμορφώσιμο των υλικών.

Έτσι, όταν ο κύλινδρος κινηθεί στο επίπεδο, η επαφή κυλίνδρου - επιπέδου δεν θα είναι μία γενέτειρα του κυλίνδρου, (δηλαδή μία ευθεία), αλλά μία περιοχή, μεγαλύτερη ή μικρότερη, ανάλογα με την πλαστικότητα των υλικών. Στην περιοχή αυτή της επαφής, θα έχουμε παραμόρφωση, τόσο του κυλίνδρου, που θα μεγαλώνει η καμπυλότητά του, όσο και του επιπέδου, που θα παρουσιάζει μία κοιλότητα κάτω από τον κύλινδρο και μία εξόγκωση προς την πλευρά της κίνησης. Δηλαδή, θα έχουμε μία εικόνα, όπως στο σχ. 14.4.γ.



Σχήμα 14.4.γ *Ισοταχής κύλιση κυλίνδρου σε οριζόντιο επίπεδο*

Συνέπεια, λοιπόν, της τριβής αυτής είναι, ότι οι δυνάμεις που ασκούνται από το επίπεδο, δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες γύρω από το θεωρητικό σημείο επαφής Α, και επομένως η συνισταμένη αντίδραση Η έχει για σημείο εφαρμογής, ένα άλλο, το Ο, προς την πλευρά της κίνησης. Η αυτή εικόνα παρουσιάζεται και στην περίπτωση που αντί κυλίνδρου, έχουμε σφαίρα. Στον κύλινδρο ενεργούν, το φορτίο Ρ (ίδιο βάρος και το βάρος του φορτίου που μεταφέρει), η δύναμη F για τη διατήρηση της ισοταχούς κίνησης και η αντίδραση Η. Αναλύουμε την αντίδραση Η στις συνιστώσες Τ οριζόντια και R κατακόρυφη και έτσι λόγω της ισοταχούς κίνησης, θα έχουμε με βάση τις γνωστές συνθήκες ισορροπίας (ΣΧ=0, ΣΥ=0, ΣΜ=0),

Είναι κατά μέτρο:

$P = R$ και $T = F$

και ακόμη $$(KA)\, T = R \cdot \ell \qquad (14.4.\delta)$$

αλλά και $(KA) \cong r$,

όπου r η ακτίνα του κυλίνδρου: άρα

$T \cdot r = R \cdot \ell$

ή και $F \cdot r = P \cdot \ell$ σχέση που μπορεί να γραφεί και ως:

$$F = \frac{\ell}{r} \cdot P^{*} \qquad (14.4.\varepsilon)$$

---

* το πηλίκο ℓ/r, ονομάζεται και συντελεστής έλξης

Από τη σχέση αυτή, έχουμε ότι η F, η δύναμη που είναι αναγκαία για την ισοταχή κίνηση του κυλίνδρου, είναι ανάλογη προς το φορτίο του. Πράγματι, από πείρα, είναι γνωστό ότι ένα όχημα βαρυφορτωμένο, θέλει μεγάλη δύναμη για να κινηθεί. Η δύναμη F, από την ίδια σχέση, είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την ακτίνα r του κυλίνδρου. Γι' αυτό στα οχήματα έχουμε μεγάλες ρόδες. Παρατηρώντας το σχήμα 14.4.γ, βλέπουμε ότι η ροπή $F \cdot r$ είναι η κινούσα ροπή, ενώ η ροπή $R \cdot \ell$ είναι η ανθιστάμενη. Δηλαδή, η ροπή $M_κ = R \cdot \ell$, είναι η **τριβή κύλισης** και ο μοχλοβραχίονας της ροπής αυτής, το ℓ, ονομάζεται **συντελεστής τριβής κύλισης**. Η τιμή τους εξαρτάται από την πλαστικότητα των υλικών. Μέσες τιμές του συντελεστού τριβής κύλισης διαφόρων υλικών, και η οποία έχει διαστάσεις μήκους, δίνονται παρακάτω:

1) ℓ χυτοσιδήρου πάνω σε χυτοσίδηρο

   χωρίς λίπανση = 0,045cm

2) ℓ χυτοχάλυβα πάνω σε χυτοχάλυβα

   χωρίς λίπανση = 0.050cm

3) ℓ χάλυβα πάνω σε χάλυβα

   χωρίς λίπανση = 0.005cm

4) ℓ τριβέων κύλισης, με λίπανση = 0.0005 έως 0.001cm

5) ℓ ελαστικού τροχού πάνω

   σε ασφαλτοτάπητα = 0.2cm

Λαμβάνοντας υπόψη μας τη σχέση 14.4.δ, η τριβή κύλισης $M_κ$ μπορεί να γραφεί και ως

$$M_κ = P \cdot \ell$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η τιμή της είναι ανάλογη προς το φορτίο του κυλίνδρου.

Παρατήρηση 1η

Η δύναμη Τ είναι αναγκαία για να έχουμε κύλιση, άλλως θα είχαμε μόνο ολίσθηση. Η δύναμη αυτή δεν παράγει έργο, γιατί το σημείο Ο (σχ.14.4.γ) παραμένει ακίνητο.

Παρατήρηση 2η

Για να έχουμε κύλιση, θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $\ell/r < n_{στ}$, δηλαδή, ο συντελεστής έλξης πρέπει να είναι μικρότερος από τον συντελεστή στατικής τριβής.

Παρατήρηση 3η

Η τριβή κύλισης είναι ροπή και ο συντελεστής τριβής κύλισης, μήκος.
Η τριβή ολίσθησης είναι δύναμη και ο συντελεστής της καθαρός αριθμός. Επομένως, δεν πρέπει να συγκρίνουμε τη, τριβή κύλισης με την τριβή ολίσθησης, γιατί είναι ανόμοια μεγέθη.

Εκείνο που ισχύει, είναι ότι η ενέργεια που πρέπει να καταναλώσουμε για να υπερνικήσουμε την αντίδραση της τριβής κύλισης, είναι πολύ μικρότερη από όση απαιτείται στην περίπτωση της τριβής ολίσθησης.

14.5 ΕΡΓΟ, ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΡΟΠΗ ΤΡΙΒΗΣ

Η τριβή ολίσθησης είναι μία δύναμη. Η δύναμη εκτελεί έργο, όταν μετακινείται το σημείο εφαρμογής της. Άρα, έργο θα εκτελεί και η τριβή, και θα υπάρχει,επομένως, και η ισχύς, που θα αντιστοιχεί σ' αυτό το εκτελούμενο έργο. Το έργο της τριβής είναι αυτό που πρέπει να καταβληθεί από την κινητήρια δύναμη, ώστε να πραγματοποιηθεί η κίνηση. Είναι αυτό που ονομάζουμε **απώλειες.**

Ο υπολογισμός αυτού του έργου γίνεται σύμφωνα με τα διδασκόμενα στο κεφάλαιο περί "Έργου και Ισχύος" στη Φυσική. Με δύο πολύ απλά παραδείγματα, θα γίνει κατανοητή η ενεργειακή συμπεριφορά της τριβής.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Η τράπεζα μίας πλάνης κινείται με μέση ταχύτητα v = 0.2 m/s. Το βάρος της τράπεζας αυτής είναι 8000N. Το εξάρτημα που επεξεργάζεται η πλάνη, είναι 5500N. Ζητείται η ισχύς που χρειάζεται για να υπερνικηθεί η τριβή της τράπεζας της πλάνης.

Απάντηση: Η τράπεζα της πλάνης, καθώς και η βάση πάνω στην οποία αυτή ολισθαίνει, είναι από χυτοσίδηρο. Σύμφωνα με τον πίνακα 14.4.Α ο συντελεστής τριβής ολίσθησης χυτοσιδήρου πάνω σε χυτοσίδηρο, με λίπανση, είναι 0.07. Η δύναμη που ενεργεί κάθετα στο επίπεδο ολίσθησης, είναι το βάρος της τράπεζας και το βάρος του προς επεξεργασία αντικειμένου. Δηλαδή:

$$F_k = 8000 + 4500 = 12500 \text{ N}$$

Η τριβή ολίσθησης, σύμφωνα με τη σχέση 14.4.α, είναι:

$$T = n \cdot F_K \quad \text{ή} \quad T = 0.07 \times 12500 = 875 \text{ N}$$

Η ισχύς δίνεται από το τύπο:

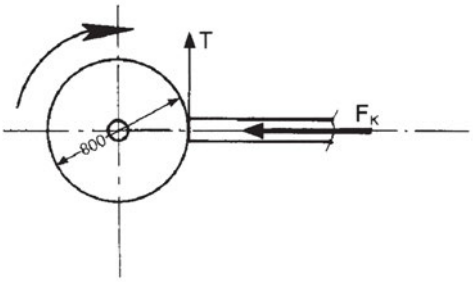
$$\text{Ισχύς} = \text{δύναμη} \times \text{ταχύτητα}$$

άρα, για την ισχύ της τριβής N_T έχουμε:

$$P_T = 875x0.2 = 175 \text{ W}$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Πόση είναι η ισχύς που χρειάζεται, ώστε να κινηθεί με f = 100 στρ/min, ένας ακονιστικός τροχός διαμέτρου d=800mm, για να ακονίσει ένα αντικείμενο που πιέζεται με δύναμη F_k =150N, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του τροχού, όπως φαίνεται στο σχήμα παραπλεύρως. Ο συντελεστής τριβής είναι 0,75.



Σχήμα 14.5.α

Απάντηση

Η δύναμη που ενεργεί κάθετα στις ολισθαίνουσες επιφάνειες, είναι η δύναμη που πιέζει το εξάρτημα πάνω στον τροχό είναι δηλαδή :

F_k=150N

Άρα η τριβή θα είναι (σχ. 14.4.α)

T = 0.75 × 150 = 112,5 N,

θα έχει φορά αντίθετη προς την κίνηση, και διεύθυνση κάθετη στη δύναμη F_k.Η δύναμη αυτή της τριβής δημιουργεί ροπή

$$M_T = T \cdot \frac{d}{2}$$

αντιτιθέμενη προς τον κινητήρια. Επομένως, έχουμε:

$$M_T = 112,5 \frac{0,8}{2} = 45 \text{ Nm}$$

και άρα η ισχύς θα είναι:

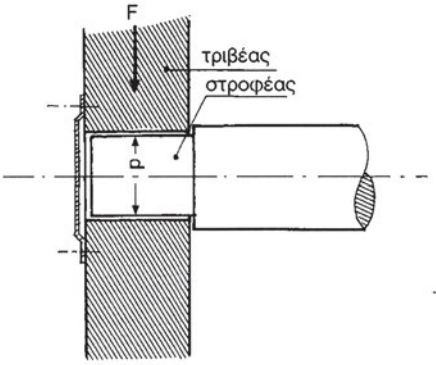
$$P_τ = M_τ \cdot 2\pi \cdot f \qquad \text{ή} \qquad P_τ = 45 \times 2\pi \cdot \frac{100}{60} = 428{,}4 \text{ W}$$

Ανάλογα δεδομένα έχουμε και για την περίπτωση της ροπής κύλισης.

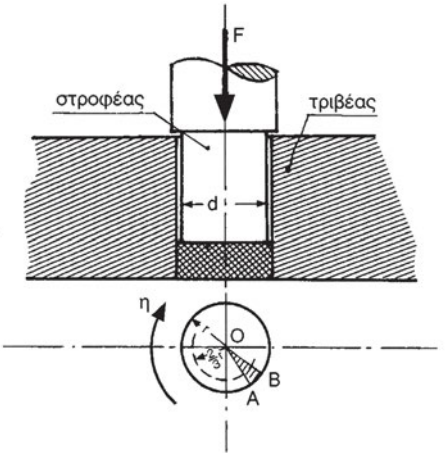
14.6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

14.6.1 Τριβή στροφέων

Στροφείς είναι οι περιοχές των αξόνων, με τις οποίες εδράζονται οι άξονες στα έδρανά τους. Οι περιοχές των εδράνων, μέσα στις οποίες μπαίνουν οι στροφείς είναι οι **τριβείς**. Οι στροφείς έχουν σχήμα κυλίνδρου, ενώ οι τριβείς είναι κυλινδρικές τρύπες.



Σχήμα 14.6.1.α *Ακτινικός στροφέας*

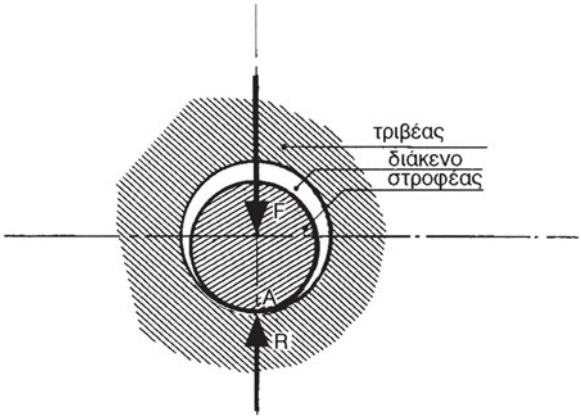


Σχήμα 14.6.1.β *Αξονικός στροφέας*

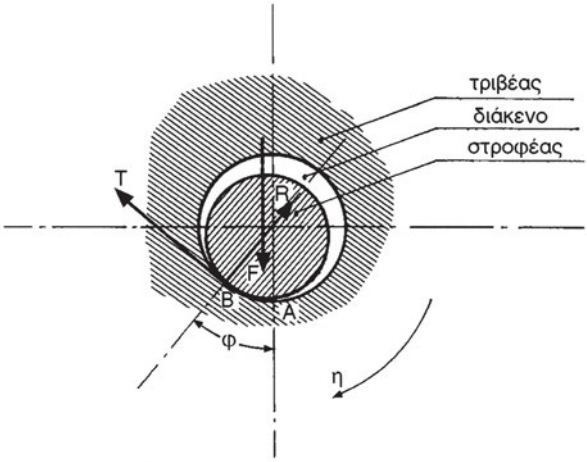
Ανάλογα με το πως δέχονται τα φορτία οι στροφείς, διακρίνονται σε ακτινικούς (σχ. 14.6.1.α) όταν δηλαδή τα φορτία είναι κάθετα στον άξονα του στροφέα και σε αξονικούς (σχ. 14.6.1.β) όταν δηλαδή τα φορτία είναι κατά τη διεύθυνση του άξονα του στροφέα.

Η διάμετρος του στροφέα είναι, πάντα, λίγο μικρότερη από τη διάμετρο του τριβέα, για να μπορεί ο στροφέας να περιστρέφεται μέσα στον τριβέα. Υπάρχει, επομένως, ένα διάκενο μεταξύ τριβέα και στροφέα. Επειδή τα σημεία εδράσεως των αξόνων υπόκεινται σε τριβές και φθορές, φαινόμενα ασφαλώς ανεπιθύμητα, τα σημεία αυτά, πάντοτε λιπαίνονται.

Α. Ακτινικοί στροφείς



Σχήμα 14.6.1.γ *Κατάσταση ηρεμίας*



Σχήμα 14.6.1.δ *Ο στροφέας κινείται (κατά τη φορά του βέλους)*

Όταν υπάρχει κατάσταση ηρεμίας, το σημείο επαφής μεταξύ του στροφέα και του τριβέα, είναι στο κατώτερο σημείο Α, (σχ. 14.6.1.γ) και για την ισορροπία είναι:

$$F = R \qquad (14.6.1.\alpha)$$

όπου R, η αντίδραση τριβέα στο σημείο επαφής

και F, το φορτίο που φέρει ο άξονας.

Όταν αρχίσει η κίνηση, (σχ. 14.6.1.δ), κατά τη φορά του βέλους, τότε το σημείο επαφής στροφέα - τριβέα μετατοπίζεται από το Α στο Β, έτσι ώστε να σχηματίζεται μία γωνία φ, μεταξύ της αντίδρασης R στο σημείο επαφής

και της κατακορύφου. Αυτή η γωνία φ στην πράξη είναι πολύ μικρή και είναι όπως και η γωνία τριβής στη σχέση 14.4.β. Έχουμε, λοιπόν,

$$T = \varepsilon\varphi\varphi R, \qquad (14.6.1.\beta)$$

όπου η εφαπτομένη φ είναι ο συντελεστής τριβής δηλαδή ,εφ φ = η . Λαμβάνοντας υπόψη μας και τη σχέση 14.6.1.α, έχουμε:

$$T = n \cdot F \qquad (14.6.1.\gamma)$$

Η ροπή στρέψης, εξαιτίας της τριβής είναι:

$$M_T = T \cdot \frac{d}{2} \qquad (14.6.1.\delta)$$

όπου d, η διάμετρος του στροφέα και N, ο αριθμός στροφών, ανά δευτερόλεπτο του στροφέα, οπότε η ισχύς θα είναι:

$$P_T = 2\pi \cdot N \cdot M_T \qquad (14.6.1\varepsilon)$$

ή, συνδυάζοντας τις 14.6.1.γ,δ,ε, καταλήγουμε στην έκφραση:

$$P_T = 2\pi \cdot N \cdot n \cdot F \cdot \frac{d}{2} \qquad (14.6.1.\sigma\tau)$$

που μας δίνει την **απώλεια ισχύος**, εξαιτίας της τριβής.

ΠΙΝΑΚΑΣ 14.6.Α ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΡΙΒΗΣ ΣΤΡΟΦΕΩΝ ΜΕ ΛΙΠΑΝΣΗ ΕΛΑΙΟΥ

ΥΛΙΚΟ ΠΡΟΣΤΡΙΒΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ		ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ	
ΣΤΡΟΦΕΙΣ	**ΤΡΙΒΕΙΣ**	**ΛΙΠΑΝΣΗ ΚΑΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ**	**ΛΙΠΑΝΣΗ ΣΥΝΕΧΗΣ**
Χυτοσίδηρος	Χυτοσίδηρος ή ορείχαλκος	0,07÷0,08	0.05
Σίδηρος	Ορείχαλκος ή χυτοσίδηρος	0,07÷0,08	0.05
Χαλύβδινος	Ορείχαλκος ή λευκό μέταλλο	0.08÷0,10	0.03 – 0.05

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ατμοστρόβιλος έχει ισχύ 8500KW, και κινείται με στροφές $N=1400min^{-1}$. Το φορτίο των στροφέων σε κάθε έδρανο, είναι 70KN. Τα έδρανα είναι

τέτοιας κατασκευής, ώστε ο συντελεστής τριβής τους να μπορεί να ληφθεί ως n=0.015. Αν η διάμετρος των στροφέων είναι 250mm ζητείται:

α. η απώλεια ισχύος εξαιτίας της τριβής και

β. η εκατοστιαία (%) αναλογία της απώλειας της ισχύος του στροβίλου.

Απάντηση

α. Από τη σχέση 14.6.1.στ, έχουμε :

$$P_T = 2 \times \pi \times \frac{1400}{60} \times 0,015 \times 70000 \times \frac{0.250}{2} W \quad \text{ή}$$

P_T=19242.25W = 19.3 kW

β. Η αναλογία στα % της απώλειας της ισχύος του στροβίλου είναι:

$$\frac{19,3 \times 100}{8500} = 0.227\%$$

Β. Αξονικοί στροφείς

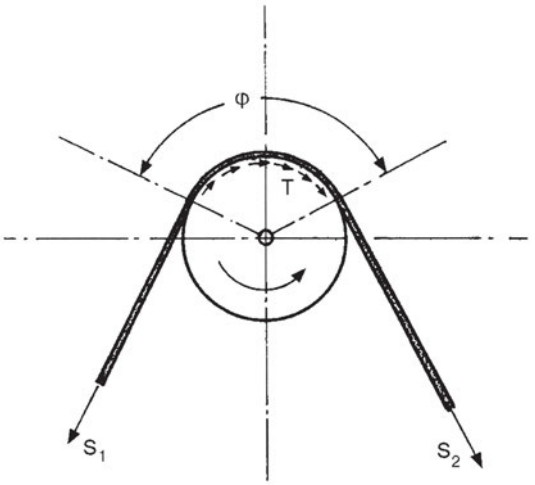
Αναφερόμαστε στο σχ.14.6.1.β. Δεχόμαστε ότι το φορτίο F κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνεια επαφής του στροφέα. Αυτό είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα, εφόσον το σύστημα στροφέα-τριβέα είναι καινούργιο. Στην περίπτωση που το σύστημα είναι μεταχειρισμένο, το φαινόμενο είναι αρκετά πολύπλοκο και πέραν των στόχων αυτού του βιβλίου. Ας πάρουμε ένα πολύ μικρό κυκλικό τομέα της επιφάνειας επαφής, τον O - AB. Εφόσον τον θεωρούμε πολύ μικρό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο τομέας αυτός είναι τρίγωνο. Τότε, το κ.β. αυτού του τριγώνου βρίσκεται κατά τα γνωστά, στα 2/3 της διαμέσου του, που εδώ είναι η ακτίνα r της επιφάνειας επαφής. Η συνισταμένη δύναμη της τριβής που ενεργεί στον τομέα, έχει ως σημείο εφαρμογής, το κ.β. αυτού. Άρα, η ροπή της τριβής είναι:

$$M_T = T \cdot \frac{2}{3} \cdot r \quad \text{ή} \quad M_T = n \cdot F \cdot \frac{2}{3} \cdot r$$

και αντίστοιχα η ισχύς:

$$P_T = 2 \cdot \pi \cdot N \cdot M_T = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot N \cdot n \cdot F \cdot r \qquad (12.6.1.\eta)$$

14.2.6.2 Τριβή σχοινιών και ιμάντων



Σχήμα 14.6.2.α *Η διάταξη των δυνάμεων σε τροχαλία*

Από αρχαιοτάτων χρόνων, για τη μεταφορά ή ανύψωση βαρών και για τη μετάδοση της κίνησης, χρησιμοποιήθηκαν και χρησιμοποιούνται ακόμη, συνδυασμοί τροχαλιών και τυμπάνων με εύκαμπτα στοιχεία. Τα εύκαμπτα αυτά στοιχεία είναι δερμάτινοι ιμάντες, ή σχοινιά καννάβινα, ή και τα τελευταία χρόνια συρματόσχοινα.

Είτε έχουμε μία απλή σταθερή τροχαλία, είτε ένα οποιοδήποτε πολύσπαστο, το βασικό στοιχείο σε ένα τέτοιο μηχανισμό, είναι μία τροχαλία (σχ. 14.6.2.α.) που περιβάλλεται, μερικώς, από ιμάντα ή σχοινί. Η τροχαλία στρέφεται όπως δείχνει το βέλος. Στο σύστημα ενεργούν :

α. στον αριστερό κλάδο του ιμάντα, η έλκουσα δύναμη S_1

β. στο δεξιό κλάδο του ιμάντα, η ανθισταμένη δύναμη S_2

γ. η τριβή T, αντίθετη πάντα στην κίνηση

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ του ιμάντα και της τροχαλίας ισχύουν οι επόμενες σχέσεις, όπως απέδειξε ο Euler:

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\eta\varphi} \quad \text{και} \quad T = S_1 - S_2 \qquad (14.6.2.\alpha)$$

όπου, S_1 = η έλκουσα δύναμη

S_2 = η ελκόμενη (η ανθιστάμενη) δύναμη

e = η βάση των Νετέριων (ή φυσικών) λογάριθμων = 2,718281

η = ο συντελεστής τριβής μεταξύ τροχαλίας και ιμάντα

Τ = η δύναμη τριβής

φ = η γωνία επικάλυψης του ιμάντα πάνω στη τροχαλία σε ακτίνια (rad)

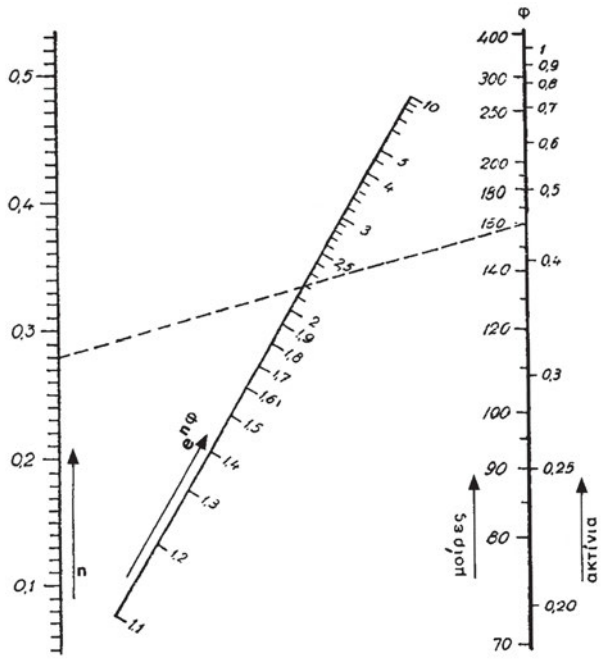
Σημείωση 1η. Για να μην έχουμε ολίσθηση θα πρέπει ο λόγος S_1 / S_2 να μην είναι μεγαλύτερος από το $e^{\eta\varphi}$. Άρα, πρέπει: $S_1 / S_2 < e^{\eta\varphi}$

Σημείωση 2η. Ο υπολογισμός του $e^{\eta\varphi}$ γίνεται, είτε με τη χρήση των λογάριθμων, είτε με υπολογιστική μηχανή (computer). Υπάρχουν όμως και πίνακες, όπως ο 14.6.Β και νομογραφήματα, όπως στον πίνακα 14.6.Γ (νομογράφημα του Soreau), που δίνουν τις τιμές του $e^{\eta\varphi}$, κατά περίπτωση, από το συντελεστή τριβής ή και τη γωνία περιέλιξης φ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 14.6.Β Τιμές του παράγοντα $e^{\eta\varphi}$

φ	ξύλινη τροχαλία μ = 0,47	τροχαλία από χυτοσίδηρο				
		μ = 0,12	μ = 0,18	μ = 0,25	μ = 0,28	μ = 0,38
36	1,34	1,01	1,12	1,17	1,19	1,27
72	1,81	1,16	1,25	1,37	1,43	1,61
108	2,43	1,25	1,40	1,60	1,69	2,05
144	3,26	1,35	1,57	1,87	2,02	2,60
180	4,38	1,46	1,76	2,19	2,41	3,30
216	5,88	1,57	1,97	2,57	2,81	4,19
252	7,90	1,66	2,21	3,00	3,43	5,32
288	10,60	1,83	2,47	3,51	4,09	6,75
324	14,30	1,97	2,77	4,11	4,87	8,57
360	19,20	2,12	3,10	4,81	5,81	10,90

ΠΙΝΑΚΑΣ 14.6.Γ Υπολογισμός του $e^{\eta\varphi}$ (νομογράφημα Soreau)



❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

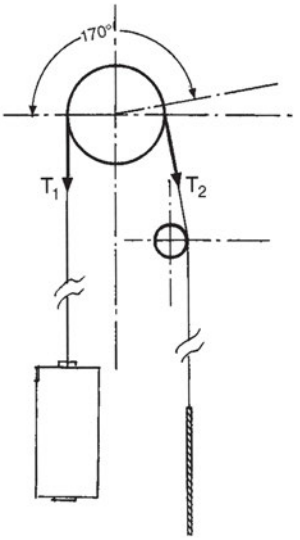
Από τα δεδομένα της πράξης έχουμε, ότι για ένα ανελκυστήρα 8 ατόμων :

Q (ωφέλιμο φορτίο): 8 × 75 kp = 600 kp ≅ 6000N

P (βάρος πλαισίων και θαλάμου): 500 kp ≅ 5000N

G (αντιβάρου): P+ θ/2 = 800 Kp 8000N

Για την ασφάλεια έναντι ολίσθησης των συρματοσχοίνων, εξετάζεται, η δυσμενέστερη από τις δύο περιπτώσεις που ακολουθούν:



Σχήμα 14.6.2.β *Τυπική διάταξη ανελκυστήρα με τροχαλία τριβής και αντίβαρου*

α) Κίνηση με άδειο θαλαμίσκο

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{G}{P}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{8000}{5000} = 1,6$$

β) Κίνηση με υπερφόρτωση 25%

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1,25 \cdot Q + P}{G}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1,25 \times 6000 + 5000}{8000} = 1.56$$

Για λόγους ασφάλειας, επίσης, υπάρχουν δύο συντελεστές ειδικών συνθηκών λειτουργίας

α) C_1 λόγω ταχύτητας. Για συνήθεις ταχύτητες $0<U<0.63m/s$ $C_1=1.1$

β) C_2 λόγω φθορών στην τροχαλία, όπου $C_2 = 1,2$

Ο συντελεστής τριβής των συρματοσχοίνων στα αυλάκια της χαλύβδινης τροχαλίας, είναι η=0.291, η γωνία (σχήμα 14.6.2.β) της επικάλυψης του συρματοσχοίνου πάνω στη τροχαλία είναι 170°, άρα, σε ακτίνια, θα είναι:

$$\varphi = 170 \cdot \frac{\pi}{180} = 2,967 \text{ rad}$$

Επομένως, θα πρέπει να έχουμε :

$T_1 / T_2 \cdot C_1 \cdot C_2 \leq e^{\eta\varphi}$

$1,6 \times 1,1 \times 1,2 \leq e^{0,291 \times 2,967}$

$2,112 \leq 2,371$

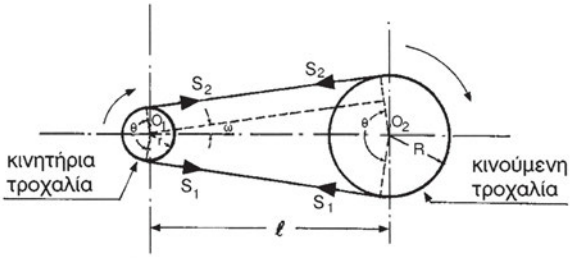
❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο (Ιμαντοκίνηση)

Ένα από τα σημαντικά προβλήματα της μηχανολογίας, είναι η μετάδοση της κίνησης από τις μονάδες ισχύος* προς τις παραγωγικές μονάδες**.

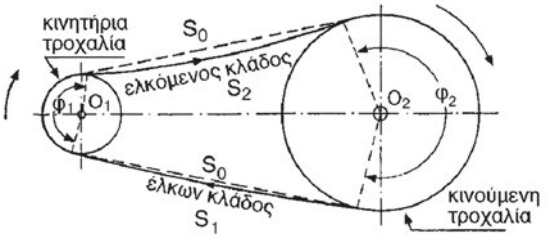
*ηλεκτροκινητήρες, μηχανές εσωτερικής ή εξωτερικής καύσης κ.α.

** τόρνοι, φρέζες, πρέσσες κ.τ.λ.

Το πρόβλημα είναι ένα, οι λύσεις όμως, είναι πολλές, γιατί είναι πολλές και οι περιπτώσεις και η κάθε μία από αυτές, έχει ειδικές απαιτήσεις. Σε πολλές απ' αυτές τις λύσεις παίζει ρόλο η τριβή. Μία απλή περίπτωση μετάδοσης της κίνησης, όπου συμμετέχει η τριβή, είναι η μετάδοση της κίνησης από άτρακτο σε άτρακτο, οι οποίες μεταξύ τους βρίσκονται σε κάποια απόσταση. Για τη μετάδοση αυτή, χρησιμοποιούνται τροχαλίες και ιμάντες, όπως φαίνεται στα σχ. 14.6.2.γ και 14.6.2.δ.



Σχήμα 14.6.2.γ *Απλή περίπτωση ιμαντοκίνησης (θεωρητική εικόνα)*



Σχήμα 14.6.2.δ *Απλή περίπτωση ιμαντοκίνησης (πραγματική εικόνα, κατά την κίνηση)*

Η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ του ιμάντα και των τροχαλιών, είναι αυτή που δημιουργεί τη κίνηση. Όταν το σύστημα είναι ακίνητο οι τάσεις* S_1 και S_2 στους δύο κλάδους, είναι ίσες ($S_1 = S_2 = S_0$). Μόλις εφαρμοσθεί μία ροπή στην κινητήρια τροχαλία, παρατηρούμε τον ένα κλάδο να τεντώνεται ("έλκων" κλάδος) και τον άλλο να χαλαρώνει ("ελκόμενος" κλάδος) σχ. 14.6.2.δ

Αυτή η διαφορά των τάσεων των κλάδων του ιμάντα, είναι βασική για

* Η ύπαρξη τάσης στον ιμάντα, προ της κίνησης, είναι αναγκαία, γιατί αν ο ιμάντας είναι χαλαρός, η κάθετη δύναμη στις επιφάνειες που εφάπτονται του ιμάντα και των τροχαλιών, θα είναι μικρή και άρα, θα είναι μικρή και η μεταξύ τους τριβή. Τότε, μόλις αρχίσει να περιστρέφεται η κινητήρια τροχαλία, θα έχουμε ολίσθηση του ιμάντα και δεν θα γίνεται η μετάδοση της κίνησης.

τη μεταφορά της κίνησης. Ισχύουν, έτσι, τα παρακάτω :

α. Οι σχέσεις 14.6.2.α, δηλαδή

$T = S_1 - S_2$ και $S_1/S_2 = e^{\eta\varphi}$,όπου η, ο συντελεστής τριβής μεταξύ ιμάντα και τροχαλίας, και φ, η γωνία επικάλυψης του ιμάντα πάνω στην τροχαλία.

β. Η ροπή που μεταφέρεται είναι:

$$M = (S_1 - S_2)\cdot r \qquad (14.6.2.\beta)$$

όπου r, η ακτίνα της κινητήριας τροχαλίας.

γ. Αν v, η ταχύτητα του ιμάντα, η αναπτυσσόμενη ισχύς είναι:

$$P = (S_1 - S_2)\cdot v \qquad (14.6.2.\gamma)$$

και αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις 14.6.2.α αυτή γίνεται

$$P = S_1\cdot\left(1-\frac{1}{e^{\eta\varphi}}\right)\cdot v \qquad (14.6.2.\delta)$$

Για τον υπολογισμό του όρου $e^{\eta\varphi}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες 14.6.Β ή 14.6.Γ.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η ακτίνα της κινητήριας τροχαλίας r = 0,3m της κινούμενης P = 0,6m και η απόσταση μεταξύ των ατράκτων =1,8m (σχ. 14.6.2.γ) .

Ζητείται: Να ορίσουμε το ελάχιστο πλάτος του ιμάντα για μεταφορά ισχύος P=7,5 kW και η τάση ηρεμίας του ιμάντα S_o.

Δεδομένα: Ταχύτητα ιμάντα v = 12 m/s, συντελεστής τριβής ιμάντα - τροχαλίας η = 0.25 η επιτρεπόμενη τάση για μεταφορά ισχύος στον ιμάντα S = 14 N/mm του πλάτους του ιμάντα.

Απάντηση:

Από τη γεωμετρία του σχήματος η γωνία $\omega = \frac{180 - \theta}{2}$

Από το τρίγωνο $0_1 0_2 A$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu_{0_2}A}{0_1\,0_2} = \frac{(R - r)}{\ell}$$

ή $$\frac{\eta\mu(180-\theta)}{2} = \frac{(0,6-0,3)}{1,8} = \frac{(0,3)}{1,8} = 0,1667$$

και από πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών, ή μικροϋπολογιστή, έχουμε:

$$\frac{(180-\theta)}{2} = 9^{o}36'$$

άρα

$\theta = 180 - 2 \times (9°36') \text{ ή } \theta = 160°\ 48' = 2,81$ rad

Υπολογίζουμε τον όρο $e^{\eta\theta}$, ως:

$$e^{\eta\theta} = e^{0,25\times2,81} = e^{0,703} = 2,02$$

Από τη σχέση 14.6.2.δ έχουμε:

$$P = S_1\left(1-\frac{1}{e^{\eta\varphi}}\right)v$$

ή $$7500 = S_1 \times \left(1-\frac{1}{2,02}\right)\times 12$$

ή $$\frac{7500}{12} = S_1\left(\frac{2,02-1}{2,02}\right) = S_1\frac{1,02}{2,02}$$

άρα $$S_1 = \frac{7500\times 2,02}{12\times 1,02} = 1237,7\text{N}$$

από τη σχέση 14.6.2.α έχουμε

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\eta\varphi}$$

και

$$S_2 = \frac{S_1}{e^{\eta\varphi}}$$

είναι όμως και

$$T = S_1 - S_2$$

Άρα

$$S_2 = \frac{1237,7}{2,02} \text{ ή } S_2 = 612,7 \text{ N}$$

Άρα, η μέγιστη μεταφερόμενη δύναμη, είναι 1237,7 N και επομένως, το πλάτος του ιμάντα θα πρέπει να είναι:

$$\frac{1237,7}{14} = 88,4 \text{ mm}$$

δηλαδή ένας ιμάντας πλάτους 90 mm. Η αρχική τάση ηρεμίας ενός ιμάντα, δίνεται από τον τύπο:

$$S_0 = \frac{(S_1 + S_2)}{2} \qquad (14.6.2.\varepsilon)$$

Άρα, έχουμε

$$S_0 = \frac{(123,7 + 612,7)}{2} \quad \text{ή} \quad S_0 = 925,2 \text{ N}$$

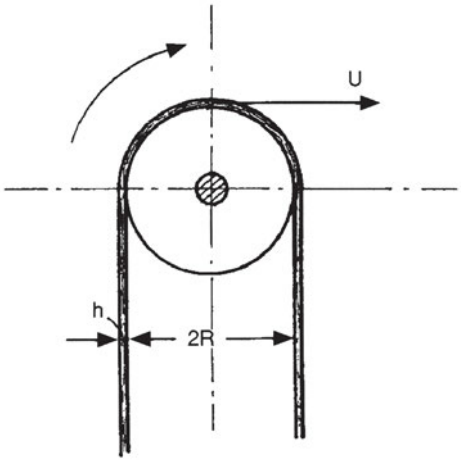
Παρατήρηση 1

Όπως ξέρουμε από τη Φυσική η γραμμική ταχύτητα στην περιστροφή είναι:

$$v = 2\pi \cdot f \cdot R$$

όπου f, η συχνότητα της περιστροφής.

Για να βρούμε την ταχύτητα του ιμάντα, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και το πάχος του. Έστω, τροχαλία διαμέτρου D = 2R (σχ. 14.6.2.ε) και ιμάντας πάχους h. Τότε, η ταχύτητα του ιμάντα θα είναι:



Σχήμα 14.6.2.ε

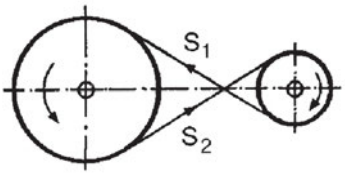
$$v = 2\pi f \frac{(D + h)}{2}$$

και από τις γνωστές σχέσεις $f_1 / f_2 = D_2 / D_1$, μπορούμε να έχουμε την ταχύτητα του ιμάντα από τα στοιχεία, είτε της κινούμενης, είτε της κινητήριας τροχαλίας με βάση τους τύπους:

$$v = 2\pi f_1 \frac{(D_1 + h)}{2} = 2\pi f_2 \frac{(D_2 + h)}{2} \qquad (14.6.2.\zeta)$$

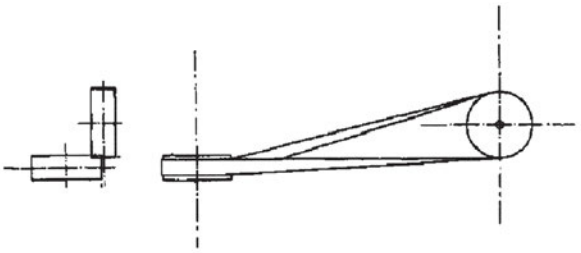
Παρατήρηση 2η

Με την ιμαντοκίνηση μπορούμε να αναστρέψουμε τη φορά κίνησης, Επίσης, μπορούμε να μεταφέρουμε την κίνηση και σε ατράκτους, που δεν είναι παράλληλοι. Χωρίς παραπέρα εξηγήσεις, στο σχήμα 14.6.2.ζ δείχνεται σχηματικά ο τρόπος αναστροφής, με τη διάταξη των διασταυρωμένων ιμάντων.



Σχήμα 14.6.2.ζ *Η διάταξη των διασταυρούμενων ιμάντων για την αναστροφή της κίνησης.*

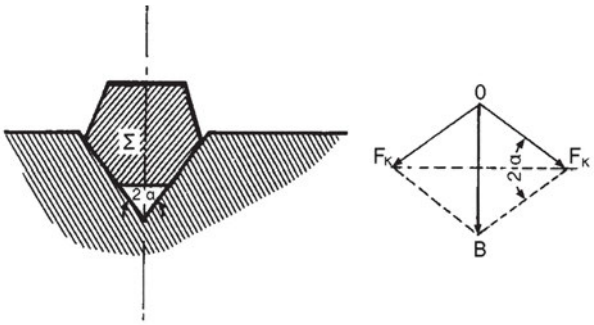
Στο σχήμα 14.6.2.η, επίσης σχηματικά δείχνεται ο τρόπος της ιμαντοκίνησης σε δύο ορθογώνιες, μεταξύ τους, ατράκτους.



Σχήμα 14.6.2.η *Ιμαντοκίνηση σε μη παράλληλες ατράκτους*

14.6.3 Τριβή σε σφηναύλακες

Η τριβή σε σφηναύλακες είναι ως προς την ανάλυση του θέματος ανάλογη με το πρόβλημα της τριβής σε κεκλιμένο επίπεδο. Το θέμα αυτό το αναπτύξαμε στην παράγραφο 14.4. Ας εξετάσουμε όμως, ειδικότερα την πολύ συνηθισμένη περίπτωση της οριζόντιας και ευθύγραμμης κίνησης εξαρτημάτων που έχουμε στις εργαλειομηχανές. Τέτοιες περιπτώσεις είναι, π.χ. η κίνηση του φορείου του τόρνου, η κίνηση της τράπεζας της πλάνης κ.λ.π. Για να γίνεται η οδήγηση των εξαρτημάτων ασφαλέστερα και σταθερότερα, χρησιμοποιούμε ισοσκελή πρισματικά αυλάκια (σφηναύλακες), μέσα στα οποία ολισθαίνουν τα ίδια τα εξαρτήματα. Στο σχήμα 14.6.3.α, έχουμε ένα σώμα βάρους Β, που ολισθαίνει σε σφηναύλακα με γωνία κορυφής 2α.



Σχήμα 14 6.3.α *Σώμα που ολισθαίνει σε σφηναύλακα και το δυναμοπολύγωνο της ανάλυσης του βάρους του.*

Αναλύοντας το βάρος του σώματος σε διευθύνσεις κάθετες στις έδρες της σφηναύλακας, έχουμε τις κάθετες προς τις επιφάνειες αυτές, δυνάμεις F_k. Από το δυναμοπολύγωνο, εύκολα συμπεραίνεται, ότι:

$$F_k = \frac{B}{2}\eta\mu\alpha \qquad (14.6.3.\alpha)$$

Για να κινηθεί το σώμα κατά μήκος της σφηναύλακας, θα πρέπει να ασκήσουμε δύναμη F, που να υπερνικήσει τις τριβές. Αν η ο συντελεστής τριβής, τότε, για κάθε έδρα, η τριβή θα είναι, κατά τα γνωστά, T= η. F_k,άρα, για τις δύο έδρες θα είναι: 2τ = 2η. F_k και επομένως

$$F = 2\tau = 2\eta F_k \qquad (14.6.3.\beta)$$

Αντικαθιστώντας τώρα, την F_k της σχέσης 14.6.3.β από τη σχέση 14.6.3.α, θα έχουμε:

$$F_k = 2\eta \cdot \frac{B}{2\eta\mu\alpha} = B\frac{\eta}{\eta\mu\alpha} \qquad (14.6.3.\gamma)$$

κι αν πάρουμε

ως $$\eta_1 = \frac{\eta}{\eta\mu\alpha} \qquad (14.6.3.\delta)$$

η σχέση 14.6.3.γ θα πάρει τη μορφή:

$$F = B\cdot\eta_1 \qquad (14.6.3.\varepsilon)$$

όπου η_1 είναι ο συντελεστής τριβής της κίνησης σε ισοσκελή πρισματική σφηναύλακα.

Επειδή ημα < 1, θα είναι και $\eta_1 > \eta$.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σώμα από χυτοσίδηρο, κινείται σε λιπαινόμενη πρισματική σφηναύλακα, επίσης από χυτοσίδηρο. Η γωνία κορυφής 2α της σφηναύλακας, είναι 110°.

Ζητείται
Ο συντελεστής τριβής μ_1 της κίνησης στην σφηναύλακα.

Απάντηση
Ο συντελεστής τριβής για χυτοσίδηρο πάνω σε χυτοσίδηρο, με λίπανση είναι μ=0,07 (πίνακας 14.4.Α) και με γνωστό το 2α (110°) ,άρα το α = 55° και επομένως, ημα = 0,8192, οπότε έχουμε

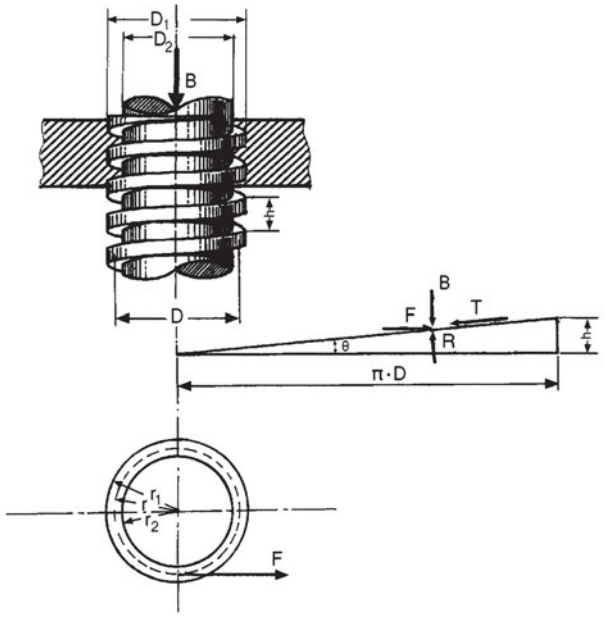
$$\eta_1 = \frac{\eta}{\eta\mu\alpha} = \frac{0,07}{0,8192} = 0,0855$$

Ανάλογη περίπτωση έχουμε και στην κίνηση του κοχλία (βίδας). Όταν κοχλιώνουμε (βιδώνουμε), ο κοχλίας περιστρέφεται, ολισθαίνοντας το σπείρωμά του στο περικόχλιό του, ή στο σώμα στο οποίο εισέρχεται και έτσι όλος ο κοχλίας κινείται ευθύγραμμα. Το πρόβλημα είναι το ίδιο και με την κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο.

Έστω, λοιπόν, κοχλίας κίνησης ή μεταφορά ισχύος*, με τετραγωνικό σπείρωμα (σχ. 14.6.3.β), που περιστρέφεται στο σταθερό περικόχλιό του, για να ανυψώσει φορτίο Β. Ο κοχλίας έχει διάμετρο πυρήνα D_2 και εξωτερική διάμετρο D_1, άρα η μέση διάμετρος είναι $D= (D_1 + D_2)/ 2$.

* **Κοχλίας κίνησης ή μεταφοράς ισχύος,** είναι εκείνος που μετατρέπει την περιστροφική κίνηση σε ευθύγραμμη και χρησιμοποιείται, κύρια, στους γρύλους. Έχει σπείρωμα τετραγωνικό ή τραπεζοειδές.

* **Κοχλίας σύνδεσης,** είναι εκείνος που συνδέει τεμάχια μεταξύ τους σε λυόμενες συνδέσεις. Έχει σπείρωμα τριγωνικό.



Σχήμα 14.6.3.β *Κοχλίας κίνησης και το ανάπτυγμα της μέσης έλικας του σπειρώματός του.*

Στο σχήμα 14.6.3.β φαίνεται και το "ανάπτυγμα" της μέσης έλικας αυτού του σπειρώματος. Το ανάπτυγμα είναι ένα κεκλιμένο επίπεδο, του οποίου η γωνία κλίσης είναι η γωνία κλίσης της μέσης έλικας του σπειρώματος και η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{h}{\pi \cdot D} \qquad (14.6.3.\alpha)$$

πάνω στο σπείρωμα ή στο κεκλιμένο επίπεδο (σχ. 14.6.3.β), ενεργούν:

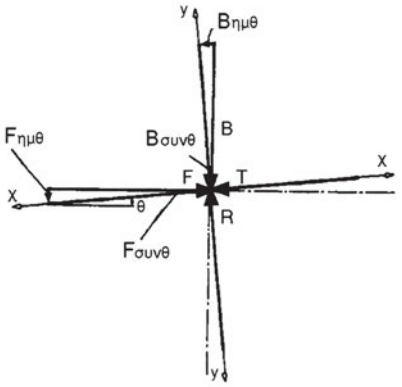
α) Το προς ανύψωση βάρος B, κατακόρυφα.

β) Η αντίδραση R, της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου, κάθετα σε αυτή.

γ) Η τριβή T, παράλληλα προς την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου και

δ) Η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη F, για την ανύψωση του βάρους, οριζόντια.

Αναλύουμε τις δυνάμεις αυτές στους άξονες χχ΄ παράλληλο προς την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου και yy΄ κάθετο προς αυτήν αντίστοιχα (Σχήμα 14.6.3.γ).



Σχήμα 14.6.3.γ *Η ανάλυση των δυνάμεων που ενεργούν στο σπείρωμα κοχλία, σε ορθογώνιο σύστημα x,x΄ - y,y΄.*

Εφαρμόζοντας τις γνωστές σχέσεις ισορροπίας

$\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$, έχουμε :

Fσυνθ - T - Bημθ = 0 και

$$R - F\eta\mu\theta - B\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \qquad (14.6.3.\beta)$$

Έχουμε επίσης,

$$T = \eta \cdot R \qquad (14.6.3.\gamma)$$

όπου η, ο συντελεστής τριβής, μεταξύ κοχλίου και περικοχλίου.

Αντικαθιστώντας την T στις 12.6.3.β ,από την 14.6.3.γ, έχουμε :

Fσυνθ - ηR - Bημθ = 0 και R-Fημθ - Bσυν θ = 0.

Απαλείφοντας την R μεταξύ των δύο τελευταίων καταλήγουμε στο ότι:

$$F = B \cdot \frac{\eta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\,\eta\mu\theta} = B \cdot \frac{\eta + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \eta\,\varepsilon\varphi\theta} \qquad (14.6.3.\delta^{*})$$

---

*Μπορούμε να έχουμε την 14.6.3.δ και σε μία άλλη πιο κομψή έκφραση, αν θέσουμε η = εφ φ, όπου φ η γωνία τριβής, οπότε:

$$F = \frac{B \cdot (\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\theta)}{(1 - \varepsilon\varphi\varphi \cdot \varepsilon\varphi\theta)} = B\,\varepsilon\varphi(\varphi + \theta)$$

Εάν πάλι θεωρήσουμε την κίνηση χωρίς τριβή, τότε, θεωρητικά φ = 0 και F_θ = B εφθ. Οπότε ο λόγος F/F_θ δίνει το βαθμό απόδοσης του κοχλία.

Μετά τα παραπάνω, εύκολα βρίσκουμε την αναγκαία ροπή περιστροφής του κοχλία, που είναι:

$$M_t = F \cdot \frac{P}{2} \qquad (14.6.3.\varepsilon)$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένας ανυψωτικός κοχλίας (γρύλλος) έχει τα εξής στοιχεία :

α) μέση διάμετρο D = 20mm

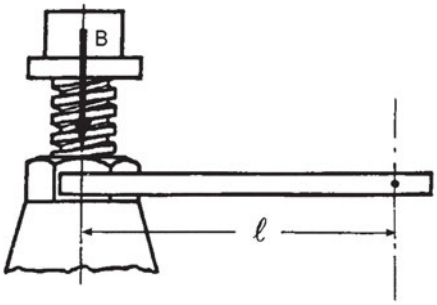
β) βήμα σπειρώματος h = 5mm

γ) συντελεστής τριβής μεταξύ κοχλία - περικοχλίου η= 0,15 και

δ) ένα μοχλοβραχίονα, μήκους ℓ = 0,5 m

Ζητείται

Η δύναμη που πρέπει να εφαρμοσθεί στο άκρο του μοχλοβραχίονα για την ανύψωση ενός φορτίου B = 1000N. Να βρείτε, ακόμη, το συντελεστή απόδοσης του κοχλία.



Σχήμα 14.6.3.δ

Απάντηση

Η γωνία κλίσης της μέσης έλικας του σπειρώματος του κοχλία, σύμφωνα με τη σχέση 14.6.3.α, είναι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta}{\pi \cdot d} = \frac{5}{20\pi} = 0{,}0796$$

Άρα, η αναγκαία δύναμη,σύμφωνα με τη σχέση 14.6.3.δ, είναι:

$$F = B\frac{n + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \eta\,\varepsilon\varphi\theta} = 1000 \times \frac{0{,}15 + 0{,}0796}{1 - 0{,}15 \times 0{,}0796} \text{ ή } F = 232{,}4\ N$$

Η αναγκαία ροπή, επομένως, σύμφωνα με την σχέση 14.6.3.ε θα είναι

$$M_t = F \cdot \frac{D}{2} = 232,4 \times 0,010 = 2,324 \text{ Nm}$$

Αυτή τη ροπή λοιπόν, θα πρέπει να μας δώσει και η δύναμη που θα εφαρμόσουμε στο άκρο του μοχλοβραχίονα άρα, για τη ζητούμενη δύναμη P, θα έχουμε:

$P \cdot \ell = M_t$ ή $P \times 0,5 = 2,324$ N

άρα

$P = 2,325/0,5 = 4,648$ N

Για να βρούμε το συντελεστή απόδοσης του κοχλία θα πρέπει να βρούμε και την θεωρητικά αναγκαία δύναμη, για την κίνηση χωρίς τριβή. Αυτή είναι:

$F_\theta = B$ εφθ ή $F_\theta = 1000 \times 0,0796 = 79,6$ N

Την πραγματική βέβαια δύναμη, την έχουμε βρει (F= 232,4 N) και ο βαθμός απόδοσης, είναι ο λόγος:

$$\frac{F_\theta}{F} = \frac{79,6}{232,4} = 0,343 \quad \text{ή} \quad 34,3\%$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ο γρύλλος δεν διαθέτει σύστημα καστάνιας, τότε, θα πρέπει να μπορεί να συγκρατεί το φορτίο, όταν πάψει να δρα η εξωτερική δύναμη. Δηλαδή, ο γρύλλος θα πρέπει να διαθέτει **αυτοπέδηση**. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να ισχύει:

εφθ < εφφ ή θ < φ

όπου θ, η γωνία κλίσης της μέσης έλικας του σπειρώματος και

φ, η γνωστή γωνία τριβής.

Π.χ. για ένα γρύλλο που λιπαίνεται κανονικά, ο συντελεστής τριβής είναι περίπου μ = 0,1 και άρα φ = 5° 40΄. Θα πρέπει, λοιπόν, για τη γωνία θ, να είναι: θ < 5° 40΄.

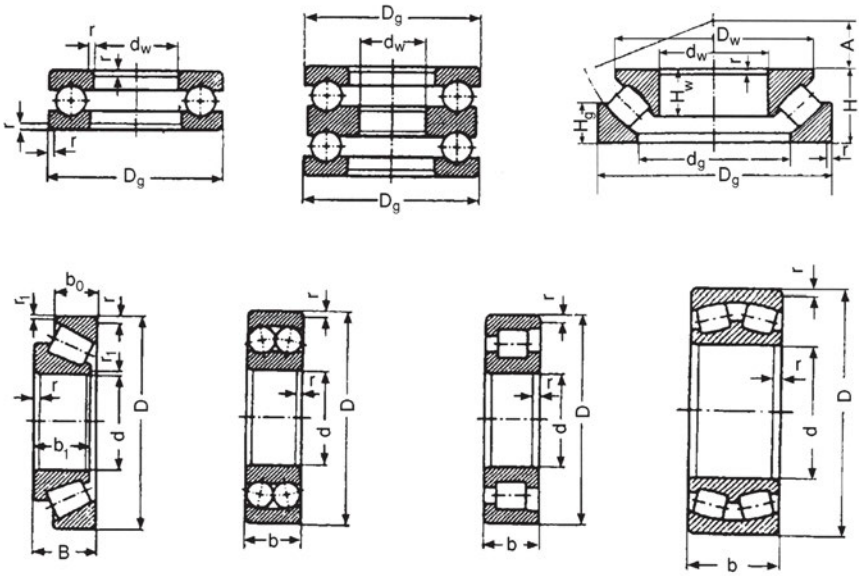
14.6.4 Αντικατάσταση της ολίσθησης με κύλιση

Επειδή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι απώλειες στην κύλιση είναι μικρότερες από ότι στην ολίσθηση, προσπαθούμε, όπου δεν συντρέχουν λόγοι περί του αντιθέτου, να αντικαταστήσουμε την ολίσθηση με κύλιση.

Είναι αρχαιότατη η μέθοδος μετακίνησης βαρέων αντικειμένων με τους κυλίνδρους, που και σήμερα, μερικές φορές, κύρια στις οικοδομές, χρησιμοποιείται. Βάζουμε κάτω από το βαρύ αντικείμενο, κυλίνδρους και το σπρώχνουμε οριζόντια. Τα παλιά χρόνια είχαν τους κορμούς δένδρων, σήμερα βάζουμε σιδηροσωλήνες (τα κατρακύλια).

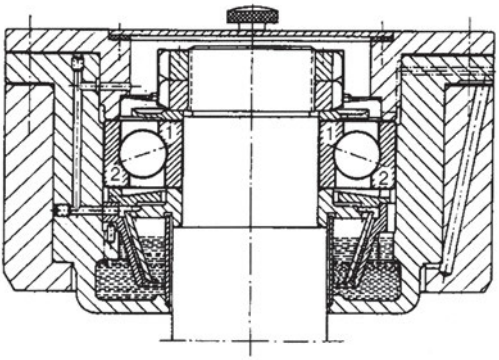
Επίσης στις μηχανές μας, και συγκεκριμένα στα έδρανα των αξόνων, χρησιμοποιούμε ένσφαιρους τριβείς (τριβείς κύλισης ή ρουλεμάν).

Υπάρχουν πολλά είδη ένσφαιρων τριβέων, (σχ. 14.6.4.α), έτσι ώστε να καλύπτονται οι ποικίλες ανάγκες των κατασκευών μας. Η βασική διαμόρφωσή τους αποτελείται από δύο ή τρεις δακτυλίους, ανάμεσα στους οποίους κυλούν τα στοιχεία της κύλισης, σε μία ή δύο σειρές. Τα στοιχεία κύλισης είναι σφαιρίδια, βαρελίσκοι, κυλινδρίσκοι και όλα αυτά κατασκευασμένα από βαμένο ατσάλι.



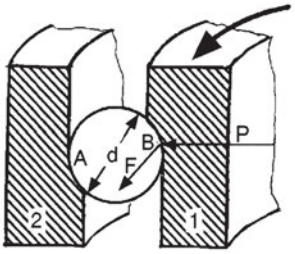
Σχήμα 14.6.4.α *Διάφορα είδη ένσφαιρων τριβέων (τριβέας κύλισης)*

Μία απλή περίπτωση εφαρμογής ένσφαιρου τριβέα, έχουμε στο σχ.14.6.4.β, όπου απεικονίζεται το πάνω μέρος ενός άξονα γεννήτριας και όπου έχει χρησιμοποιηθεί ένας μονόσφαιρος τριβέας γωνιώδους επαφής, μη λυόμενος.



Σχήμα 14.6.4.β *Εφαρμογή τριβέα κύλισης*

Ο δακτύλιος (1) του τριβέα (σχ. 14.6.4.β) έχει συναρμογή σύσφιξης με το στροφέα του άξονα. Ο δακτύλιος (2) είναι στερεωμένος στο σώμα του κελύφους της μηχανής. Έτσι, όταν στρέφεται ο άξονας ο δακτύλιος (1) στρέφεται μαζί του, ενώ ο δακτύλιος (2) είναι ακίνητος, και κατ' ανάγκη, οι σφαίρες κυλούν.



Σχήμα 14.6.4.γ *Δρώσες δυνάμεις σε τριβέα κύλισης*

Όπως είπαμε, όταν κινείται ο δακτύλιος (1), θα αρχίσουν οι σφαίρες να κυλούν, θα υπάρχει, επομένως δύναμη F, που θα ενεργεί κατά την εφαπτόμενη της κυκλικής τροχιάς των σφαιριδίων και θα υπερνικά τις τριβές κύλισης, στα σημεία κύλισης, Α και Β (σχ. 14.6.4.γ). Στον στροφέα ενεργεί, επίσης, το φορτίο P, κατά την ακτίνα της τροχιάς των σφαιριδίων.

Αν είναι ℓ, ο συντελεστής τριβής κύλισης, μεταξύ των δακτυλίων και των σφαιριδίων και παραλείψουμε, ως αμελητέο, το βάρος των σφαιριδίων, θα έχουμε:

$$F \cdot d = 2 \cdot \ell \cdot p$$

ή

$$F = \frac{2}{dp} \qquad (14.6.4.\alpha)$$

Η σχέση αυτή είναι ίδια με τη σχέση 14.4.ε

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αξονικός τριβέας απλής ενέργειας είναι φορτισμένος με φορτίο G = 10 τόνων. Κατασκευαστικά στοιχεία του στροφέα είναι:

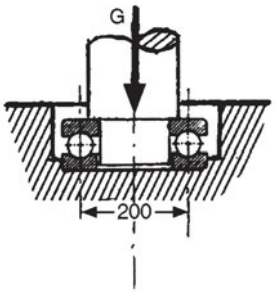
α) Διάμετρος τροχιάς των σφαιριδίων 210 mm

β) Διάμετρος σφαιριδίων = 40 mm

γ) Συντελεστής τριβής κύλισης = 0,002 cm

Στοιχεία του μηχανισμού:

Ο άξονας μεταφέρει ισχύ 900HP και στρέφεται με 100 στροφές, ανά λεπτό



Σχήμα 14.6.4.δ

Ζητούνται

α. Η δύναμη F που απαιτείται για την υπερνίκηση της τριβής

β. Η ισχύς της τριβής (οι απώλειες)

γ. Το ποσοστό των απωλειών της μεταφερομένης ισχύος λόγω των απωλειών του εδράνου

Απάντηση

α. Έχουμε τη σχέση 14.6.4.α ($F= 2\ell/d \cdot P$)

Αρχικά, πρέπει να τακτοποιήσουμε τις μονάδες:

ℓ = 0,002 cm = 0,00002 m,

d = 40mm = 0,040m,

P = 10τόνοι = 1000kp = 10000N

Άρα $F = \dfrac{2 \cdot 0{,}00002}{0{,}040 \cdot 10000}$ ή F = 10N

β. Η ισχύς είναι η δύναμη επί την ταχύτητα, άρα για την ταχύτητα έχουμε :

$v = \pi \cdot D \cdot f$

όπου:

π = 3,14159

D = 20mm = 0,21m

$$f = 100\ min^{-1} = \frac{100}{60} s^{-1}$$

και άρα

$$v = 3,14159 \times 0,21 \cdot \frac{100\,m}{60\,s} \quad \text{ή}$$

$$v = 1,1\ \frac{m}{s}$$

Επομένως, η ισχύς της τριβής είναι P = 10 × 1.1 = 11W

γ. Η εκατοστιαία (%) απώλεια των τριβών του εδράνου, της μεταφερομένης ισχύος, θα είναι:

$$\frac{P_T}{P} = \frac{11 \times 100}{900 \times 746} = 0,0016\%$$

(1 HP = 476 W)

14.6.5 Δύναμη έλξης οχήματος

Ο υπολογισμός της αναγκαίας δύναμης, για την έλξη οχήματος, είναι αρκετά πολύπλοκος γιατί πρέπει να υπολογισθούν οι απώλειες των εδράνων. Πρέπει, πάντως, να είναι γνωστές οι συνθήκες του δρόμου, ώστε να υπολογισθούν οι απώλειες από την κύλιση των τροχών στο δρόμο. Έχουμε π.χ. απώλειες από τις σούστες των αναρτήσεων, ενώ για τα αυτοκίνητα και τα οχήματα γενικά, που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες, έχουμε και αεροδυναμικές απώλειες.

Στη βιομηχανική πράξη, όπου τα οχήματα (γερανογέφυρες, περονοφόρα, βαγονέτα κλ.π.) κινούνται με μικρές ταχύτητες και με περίπου προκαθορισμένες συνθήκες, έχει υπολογισθεί, κατά περίπτωση, ένας συνολικός συντελεστής τριβής η_0. Έτσι, για να βρούμε τη δύναμη έλξης ενός οχήματος, πολλαπλασιάζουμε το ολικό φορτίο του οχήματος με τον ολικό συντελεστή τριβής.

Ας αναφέρουμε μερικές τιμές του συνολικού συντελεστή τριβής η_0:

1. Οχήματα κινούμενα σε σιδηροτροχιές, εάν μεν είναι σιδηροδρομικά, παρουσιάζουν η_0=0.002, ενώ αν είναι γερανογέφυρες η_0 = 0.009
2. Οχήματα με λαστιχένιες ρόδες, κινούμενα σε δρόμο ασφαλτοστρωμένο

καλής βατότητας παρουσιάζουν $\eta_0 = 0.01$ και σε δρόμο χαλικόστρωτο καλής βατότητας, $\eta_0 = 0.025$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μία γερανογέφυρα έχει βάρος "φορείου" της 3 τόνους, το βάρος της ίδιας της γερανογέφυρας είναι 40 τόνοι και το ωφέλιμο φορτίο 50 τόνοι.

Ζητούνται

Οι αντιστάσεις κίνησης του φορείου και της γερανογέφυρας (Σημ: Εξαιτίας κατασκευαστικών λόγων και συνθηκών λειτουργίας, έχουμε προσαυξήσεις, για μεν τα φορτία 40 έως 60%, για δε τη γερανογέφυρα 60 έως και 100%)

Απάντηση

Για το φορείο, οι αντιστάσεις κίνησης θα είναι:

ολικό φορτίο: 50 + 3 = 53 τόνοι = 530KN

Από τον πίνακα, έχουμε $\eta_0 = 0.009$ και άρα η δύναμη F_φ που αντισταθμίζει τις αντιστάσεις κίνησης, είναι (με προσαύξηση 50%) :

$F_\varphi = 530 \times 0{,}009 \times 1{,}5 \cong 7{,}16$ KN

Για τη γερανογέφυρα (με προσαύξηση 80%) το ολικό φορτίο είναι

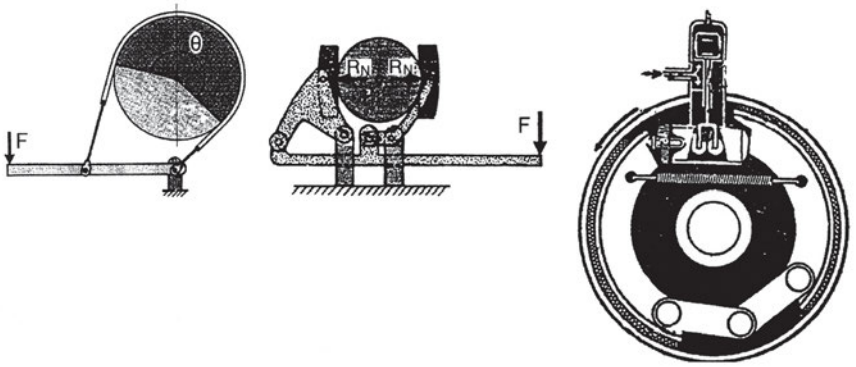
50 + 40 + 3 = 93 τόνοι = 930 KN και άρα $F_\gamma = 930 \times 0{,}009 \times 1{,}8 = 15{,}07$ KN

14.6.6 Φρένα – Συμπλέκτες

Τα φρένα (οι πέδες) είναι βοηθητικοί μηχανισμοί που σκοπό έχουν να σταματούν, να "φρενάρουν" μηχανές, π.χ. αυτοκίνητα, εργαλειομηχανές, κινητήρες κ.α.

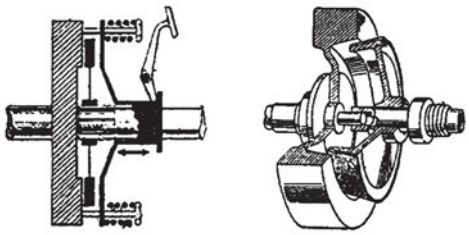
Υπάρχουν πολλά είδη φρένων (σχ.14.6.6.α), γιατί είναι πολλές και οι περιπτώσεις που είναι ανάγκη να χρησιμοποιηθούν αυτά.

Οι διαφορές μεταξύ τους δεν είναι μόνο μορφολογικές, αλλά έχουν να κάνουν και με την αρχή της λειτουργίας τους, πάντως, τα περισσότερα φρένα στηρίζουν τη λειτουργία τους στην ύπαρξη της τριβής.



Σχήμα 14.6.6α *Είδη φρένων*

Οι συμπλέκτες είναι, και αυτοί, βοηθητικοί μηχανισμοί, ένα υποσύνολο δηλαδή των μηχανισμών, που λέγονται **σύνδεσμοι**. Οι σύνδεσμοι αυτοί ενώνουν άξονες μεταξύ τους είτε μόνιμα, είτε με δυνατότητα διαχωρισμού. Οι συμπλέκτες είναι **λυόμενοι σύνδεσμοι**, που συμπλέκουν και αποσυμπλέκουν άξονες, χωρίς να σταματήσει η κίνησή τους. Υπάρχουν, επίσης, πολλές μορφές συμπλεκτών (σχ. 14.6.6.β). Οι περισσότερες μορφές συμπλεκτών στηρίζουν τη λειτουργία τους, όπως και τα φρένα, στην τριβή.



Σχήμα 14.6.6.β *Είδη συμπλεκτών*

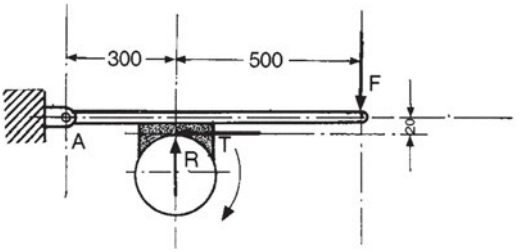
Στα φρένα και στους συμπλέκτες, που στηρίζουν τη λειτουργία τους στην τριβή, πρέπει να έχουμε μεγάλη τη δύναμη της ίδιας της τριβής, η οποία, όπως έχουμε αναφέρει, εξαρτάται από το συντελεστή τριβής, δηλαδή το είδος των επιφανειών που ολισθαίνουν μεταξύ τους και από τη δύναμη που κάθετα πιέζει αυτές τις επιφάνειες. Κατασκευαστικά, δημιουργούμε την πιέζουσα δύναμη μέσω ελατηρίων, αντίβαρων, ή υδραυλικής πίεσης και αυξάνουμε το συντελεστή τριβής με επιφάνειες όχι λείες,αλλά από υλικά, ανθεκτικά στη φθορά και στη θέρμανση, όπως π.χ. είναι τα φερμουίτ.

Οι υπολογισμοί των δυνάμεων και των ροπών στους συμπλέκτες, είναι πάντως, πέραν των στόχων αυτού του βιβλίου. Ας εξετάσουμε, όμως, ορισμένα παραδείγματα, υπολογίζοντας την ελάχιστη αναγκαία δύναμη που

απαιτείται, για να σταματήσει την κίνησή του ένας μηχανισμός. Θα βρούμε, δηλαδή, τη δύναμη φρεναρίσματος.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Στο παρακείμενο σχήμα, έχουμε ένα φρένο με σιαγόνα. Ο συντελεστής τριβής τυμπάνου -σιαγόνας έστω, η = 0,3. Αν η δύναμη τριβής είναι T =175 N, να ευρεθεί η ελάχιστη δύναμη F που απαιτείται, για να σταματήσει ο μηχανισμός.



Σχήμα 14.6.6.γ

Απάντηση

Όπως φαίνεται στο σχήμα, έχουμε την τριβή T και την κάθετη στις επιφάνειες δύναμη R. Έχουμε, επομένως:

$$T = \eta \cdot P \quad \text{ή} \quad R = \frac{T}{n} = \frac{175}{0,45}$$

και άρα R = 500 N.

Για τον υπολογισμό της F, θα θεωρήσουμε τις ροπές ως προς το σημείο A όλων των δυνάμεων, και για την ισορροπία του συστήματος, θα είναι $\Sigma M_A=0$

Έχουμε, λοιπόν,

$$F \times 800 + T \times 20 - R \times 300 = 0$$

$$F = \frac{(R \times 300 - T \times 20)}{800} = \frac{(500 \times 300 - 175 \times 20)}{800}$$

άρα F = 183,125 N

Αν η φορά του τυμπάνου ήταν αντίστροφη από αυτή που φαίνεται στο σχήμα, τότε η εξίσωση των ροπών $\Sigma M_A = 0$, θα ήταν:

$$F \times 800 - T \times 20 - R \times 300 = 0$$

ή $$F=\frac{(P\times 300+T\times 20)}{800}=\frac{(9500\times 300+175\times 20)}{800}$$

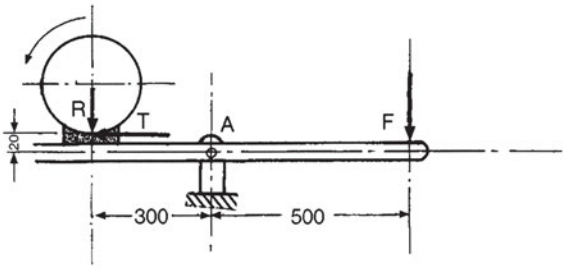
άρα F= 191,875 N

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Αν η δύναμη που χρειάζεται για να σταματήσει ο μηχανισμός που διαθέτει το φρένο του σχήματος, είναι F = 61N ,να υπολογίσετε τη δύναμη της τριβής T και την αντίδραση R, αν ο συντελεστής τριβής είναι η = 0,25.

Απάντηση

Για την ισορροπία του συστήματος, θα πρέπει οι ροπές ως προς το σημείο A όλων των δυνάμεων, να είναι μηδέν, δηλαδή $\Sigma M_A = 0$. Έχουμε, λοιπόν,



Σχήμα 14.6.6.δ

R ×300 + T×20 - F×500 = 0. Είναι όμως:

T = nR = 0,25 R, άρα

R×300 + 0,25×R×20 - F×500 = 0 ή

R (300 + 0,25×20) = F×500 ή

$$R=F\cdot\frac{500}{(300+0,25\times 10)}=\frac{61\times 500}{300+0,25\times 20}$$

άρα R = 100N

και η τριβή θα είναι

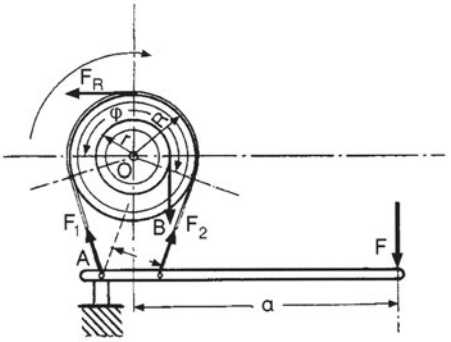
T = nR = 0,25x100,

άρα T = 25N

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

(Φρένα με εύκαμπτη ταινία)

Τα φρένα με εύκαμπτη ταινία αποτελούνται από μία χυτοσιδηρά τροχαλία που περιβάλλεται από εύκαμπτη ταινία, συνήθως χαλύβδινη. Υπάρχει και ένας μοχλός όπου εφαρμόζεται η δύναμη πέδησης. Ας σημειωθεί πάντως ότι και σε αυτά τα φρένα έχουμε αρκετές παραλλαγές.



Σχήμα 14.6.6.ε

Στο παρακείμενο, λοιπόν, σχήμα, έχουμε ένα βαρούλκο που είναι εφοδιασμένο με “φρένο ταινίας”.

Ζητάμε τη δύναμη F στο άκρο του μοχλού, ώστε το φορτίο B= 400N του βαρούλκου, να καταβαίνει ισοταχώς.

Δεδομένα

α) Ακτίνα τυμπάνου βαρούλκου r = 120 mm

β) Ακτίνα τυμπάνου φρένου R = 270mm

γ) λόγος των μοχλοβραχιόνων B/α =1:13

δ) γωνία περιέλιξης της ταινίας στην τροχαλία, φ = 252°

ε) συντελεστής τριβής τροχαλίας - ταινίας, η = 0,18

Απάντηση

Για να κινείται ισοταχώς το φορτίο, θα πρέπει η περιφερειακή δύναμη FR να ισούται με τη διαφορά των τάσεων των κλάδων της ταινίας του φρένου, δηλαδή θα έχουμε:

(1) $F_R = F_1 – F_2$

και για την ισορροπία του συστήματος, να είναι οι ροπές $\Sigma M_0 = 0$, άρα:

(2) $F_R \cdot R = B \cdot r$

Έχουμε, όμως, $\Sigma M_A = 0$, άρα $F \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta$ ή

(3) $F_2 = F \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{F_1}{F_2} = e^{\eta\varphi}$

άρα

(4) $F_1 = F_2 \cdot e^{\eta\varphi}$

Αντικαθιστούμε την F_1 της σχέσης (4) στη σχέση (1) και έχουμε:

(5) $F_R = F_2 \cdot e^{\eta\varphi} - F_2 = F_2 (e^{\eta\varphi} - 1)$

Επίσης, αντικαθιστούμε την F_2 της σχέσης (3) στη σχέση (5) και έχουμε:

(6) $F_R = \frac{F \cdot \alpha}{\beta} \cdot (e^{\eta\varphi} - 1)$

Αντικαθιστούμε και την FR της σχέσης (6) στη σχέση (2) και έχουμε:

$$F \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot (e^{\eta\varphi} - 1) \cdot R = B \cdot r$$

άρα

(7) $F = \frac{B \cdot r}{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot (e^{\eta\varphi} - 1) \cdot R$

Από τον πίνακα 14.6.Β για φ = 252° και η = 0,18, έχουμε: $e^{\eta\varphi} = 2.21$.

Αντικαθιστούμε, τέλος, τις τιμές στην (7) και έχουμε :

$$F = \frac{400 \times 120}{13 \times (2,21 - 1) \times 270} = 11,3N$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) μπορούμε να βρούμε και τις τάσεις των κλάδων της ταινίας του φρένου και οι οποίες είναι: F_1 = 146,9x2,21 =324,6N και

F_2= 11,3x13=146,9N.

Απάντηση F=11,3N



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Τριβή είναι η δύναμη αντίστασης κατά τη σχετική κίνηση δύο σωμάτων, που βρίσκονται σε επαφή. Η τριβή οφείλεται στις επιφανειακές ανωμαλίες και την ελαστικότητα των σωμάτων. Διακρίνουμε τρία είδη τριβής :

α) Την τριβή ολίσθησης

β) Την στατική τριβή

γ) Την τριβή κύλισης

Για την τριβή ολίσθησης, έχουμε : $T = \eta F_{\kappa}$

όπου

T = η δύναμη τριβής

F_K = η δύναμη που πιέζει κάθετα στην επιφάνεια ολίσθησης

η = ο συντελεστής τριβής

Η στατική τριβή είναι: $T_{\sigma\tau} \leq F_K$

Η τριβή κύλισης είναι μία ροπή $M_{\kappa} = P \cdot \ell$,

όπου

P η κάθετη δύναμη και

ℓ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με διαστάσεις μήκους



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ένα κιβώτιο βάρους B = 50N, πρόκειται να εκφορτωθεί μέσω μίας ράμπας με κλίση 25° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής είναι η = 0,6.

Ζητείται:

α) Η δύναμη F με την οποία θα ωθήσουμε το κιβώτιο ώστε αυτό να υπερνικήσει τη στατική τριβή και να ολισθήσει στη ράμπα και

β) Το ύψος που θα εφαρμόσουμε τη δύναμη ώστε να μην ανατραπεί το

κιβώτιο. Το κέντρο βάρους του κιβωτίου είναι σε ύψος β= 60cm από τη βάση του και σε οριζόντια απόσταση α= 40cm από την ακμή ανατροπής.

Απάντηση: α) F = 6,03 N, β) h < 90,049 cm

2. Μία σκάλα μήκους 3,4 m ακουμπάει στον τοίχο με κλίση α ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

α) Το βάρος της σκάλας είναι B_σ= 200N, ο συντελεστής τριβής με τον τοίχο M_B= 0,2 και με το δάπεδο η_A= 0,15. Να υπολογισθεί η γωνία α, όταν άνθρωπος βρίσκεται στη κορυφή της σκάλας, έτσι ώστε η σκάλα να μην ολισθήσει. (βάρος ανθρώπου B_α= 800N).

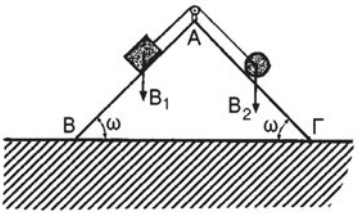
Απάντηση: α= 80° 30΄25΄΄ ,2

3. Ποιος ο βαθμός απόδοσης, κατά την ισοταχή ανύψωση σώματος, επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνονται: γωνία κεκλιμένου επιπέδου α = 30°, συντελεστής τριβής η = 0,15

Απάντηση: η_α = 0,794

4. Στα κεκλιμένα επίπεδα ΑΒ και ΑΓ, υπάρχουν, το σώμα βάρους B_1 =110 N και η ρόδα βάρους B_2 = 70 N, αντίστοιχα. Το σώμα έχει συντελεστή ολίσθησης με το επίπεδο η = 0,30 και αντίστοιχα η ρόδα συντελεστή τριβής κύλισης f = 0,40 cm και ακτίνα R = 40cm. Το σώμα και η τροχαλία συνδέονται, μέσω τροχαλίας χωρίς τριβή, με αβαρές νήμα. Να ευρεθεί ποια πρέπει να είναι, κατ' ελάχιστον η γωνία ω, ώστε το σύστημα να κινηθεί κατερχόμενο του επιπέδου ΑΒ.



Σχήμα 14.8.α

Απάντηση: ω= 45°

5. Ένα έλκυθρο, κινούμενο πάνω σε πάγο, έχει ίδιο βάρος 700N. Στο έλκυθρο επιβαίνουν πέντε άνθρωποι (μέσο βάρος ο καθένας 800N). Ποια είναι η αναγκαία δύναμη για να κινηθεί το έλκυθρο ισοταχώς. Δίνεται συντελεστής τριβής η = 0,015

Απάντηση: F= 70,5 N

6. Η τράπεζα μίας πλάνης κινείται με ταχύτητα U= 0,3 m/s. Το βάρος της τράπεζας αυτής είναι 9000N. Το μέρος της ισχύος της μηχανής που

διατίθεται για την υπερνίκηση των τριβών είναι 200Kw. Μέχρι ποιο βάρος μπορεί να είναι το προς επεξεργασία εξάρτημα.

Απάντηση: $B_{εξ}$= 8142,86N

7. Οι εξωτερικές δυνάμεις που δρούν πάνω σε ένα τριβέα είναι 300N. Αν η διάμετρος του στροφέα είναι 120mm και ο συντελεστής τριβής 0,1. Να υπολογισθεί: α) Η ροπή στρέψης της τριβής β) Η απώλεια ισχύος της τριβής τη στιγμή που ο άξονας περιστρέφεται με 250 rpm.

Απάντηση: M_t = 1,8 Nm, P_T = 23,6 W

8. Ανελκυστήρας τεσσάρων ατόμων, έχει γωνία περιέληξης των συρματοσχοίνων του στην τροχαλία τριβής φ=160°. Με δεδομένο ότι ο θάλαμος έχει βάρος 3000 N, να εξετάσετε την ασφάλεια του ανελκυστήρα αυτού από άποψη ολίσθησης των συρματοσχοίνων. Ταχύτητα ανελκυστήρα U<0,63 m/s.

Απάντηση: Ο ανελκυστήρας δεν ολισθαίνει.

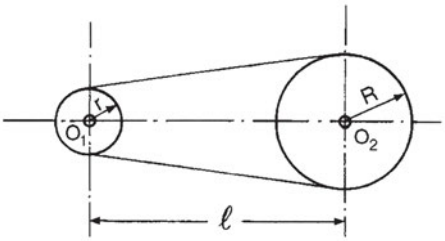
9. Δύο ίσες τροχαλίες περιστρέφονται με τη βοήθεια ενός ιμάντα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ ιμάντα και τροχαλιών είναι 0.4. Αν η έλκουσα δύναμη, στον ιμάντα, είναι 600N, να υπολογισθεί η ελκόμενη δύναμη στον άλλο κλάδο του ιμάντα.

Απάντηση: S_2 = 170,76N

10. Στην προηγούμενη άσκηση, αν η ακτίνα των τροχαλιών, είναι r = 20cm και η συχνότητα περιστροφής f = 240 rpm ο δε ιμάντας που χρησιμοποιείται έχει πάχος h = 25 cm, να υπολογίσετε την ταχύτητα του ιμάντα.

Απάντηση: U = 5,3 m/s

11. Τα στοιχεία μίας απλής ιμαντοκίνησης είναι r = 0,2 m, R = 0,6 m η ℓ = 2 m.
Το πλάτος του ιμάντα είναι 80mm και η μεταφερόμενη ισχύς είναι 8Kw. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του ιμάντα. Συντελεστής τριβής ιμάντα - τροχαλίας n = 0.25 και επιτρεπόμενη τάση για μεταφορά ισχύος στον ιμάντα 14N/mm ιμάντα.



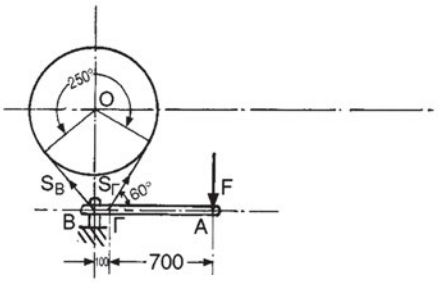
Σχήμα 14.8.β

Απάντηση: U= 14.43 m/s

12. Ένας ανυψωτικός κοχλίας έχει τα εξής στοιχεία: μέση διάμετρος D = 30mm, βήμα σπειρώματος h= 6mm, τριβή μεταξύ κοχλίου- περικοχλίου η = 0.15. Με ένα μοχλοβραχίονα μήκους ℓ = 0,5 m και μία δύναμη P = 10N, τι φορτίο μπορούμε να ανυψώσουμε και ποιος ο βαθμός απόδοσης του κοχλία.

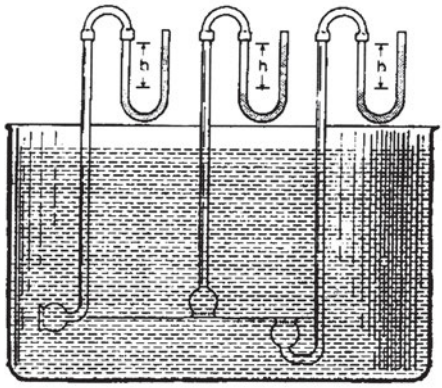
Απάντηση: B = 1545,2 N, η_A= 0,295 ή 29.5%

13. Σε ένα φρένο, με εύκαμπτη ταινία, η διάμετρος του τυμπάνου είναι 500mm, η δύναμη που ενεργεί στο άκρο του μοχλού είναι 200N και ο συντελεστής τριβής τυμπάνου - ταινίας είναι 0.3. Να υπολογισθεί η ροπή φρεναρίσματος, αν τα γεωμετρικά στοιχεία του φρένου είναι αυτά του σχήματος.



Σχήμα 14.8.γ

Απάντηση: M_t = 1209 Nm



ΚΕΦΑΛΑΙΟ **15**

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

15.1 Εισαγωγικά

15.2 Γενικά - ορισμοί

15.3 Υδροστατική πίεση

15.4 Η μεταβολή της υδροστατικής πίεσης μετά του βάθους

15.5 Τα Χαρακτηριστικά της υδροστατικής πίεσης

15.6 Η μεταφορά της πίεσης- Αρχή του Pascal

15.7 Αρχή του Αρχιμήδη

15.8 Όργανα μέτρησης της πίεσης

15.9 Εφαρμογές



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Οι μαθητές:

- Να δίνουν τον ορισμό της πίεσης και να γνωρίζουν τις μονάδες της
- Να γνωρίζουν τα χαρακτηριστικά της πίεσης των ρευστών, και της υδροστατικής πίεσης.
- Να διακρίνουν τις διάφορες μορφές της πίεσης (απόλυτης, μανομετρικής, ατμοσφαιρικής), και τις μεταξύ τους σχέσεις.
- Να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν τις αρχές του Αρχιμήδη και του Pascal.

15.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Τα κεφάλαια της Μηχανικής που εξετάζουν την ισορροπία ή την κίνηση των ρευστών, αποτελούν την **"Μηχανική των ρευστών"** ή **"Ρευστομηχανική".**

Τα ρευστά περιλαμβάνουν τις δύο από τις τρεις, υπό κανονικές συνθήκες, καταστάσεις της ύλης. Την **υγρή** και την **αέρια** κατάσταση.

Η **υγρή κατάσταση**, σε μία πρώτη προσέγγιση, χαρακτηρίζεται από το ότι τα υγρά δεν παρουσιάζουν αισθητή αντίσταση στη μεταβολή του σχήματός τους, ενώ παρουσιάζουν πολύ μεγάλη αντίσταση στη μεταβολή του όγκου τους έτσι ώστε να θεωρούνται, από πρακτικής πλευράς, ασυμπίεστα. Ακριβέστερα, σε υγρή κατάσταση βρίσκεται ένα σώμα, όταν υπό την επήρεια διατμητικών τάσεων αλλάζει, συνεχώς, το σχήμα του. Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι, ότι τα υγρά δεν αντέχουν το ίδιο βάρος.

Η **αέρια κατάσταση** έχει πολλές ομοιότητες με την υγρή αντίστοιχη γιατί ισχύουν τα αυτά ως προς τις διατμητικές τάσεις των υγρών.Τα αέρια διαφέρουν από τα υγρά, στα εξής :

α. Είναι συμπιεστά

β. Έχουν την εκτατική ιδιότητα, δηλαδή τείνουν να καταλάβουν όσον το δυνατόν, περισσότερο χώρο.

Ανάλογα με την ιδιαίτερη κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί το καθένα από τα παραπάνω αυτά σώματα, έχουμε:

- την υδροστατική, όταν εξετάζουμε την ισορροπία των υγρών
- την υδροδυναμική, όταν εξετάζουμε την κίνηση των υγρών
- την αεροστατική, όταν εξετάζουμε την ισορροπία των αερίων
- την αεροδυναμική, όταν εξετάζουμε την κίνηση των αερίων.

Σε αυτά τα μαθήματα θα ασχοληθούμε, κυρίως, με τα υγρά.

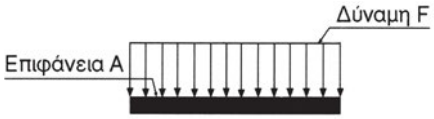
Παρατήρηση 1η. Ως προς το ασυμπίεστο των υγρών παρατηρούμε ότι χρειάζεται να ασκήσουμε πολύ μεγάλη δύναμη για να επιτύχουμε αντίστοιχη πολύ μικρή μείωση του όγκου των υγρών, ενώ μόλις παύσει να ενεργεί η πιέζουσα δύναμη, το υγρό επανέρχεται στον αρχικό του όγκο. Άρα τα υγρά, από άποψη όγκου, είναι τελείως ελαστικά.

Παρατήρηση 2η. Σε παχύρρευστα υγρά, όπως π.χ. το λάδι, αλλά και σε πολύ μικρές ποσότητες των υγρών γενικά, εμφανίζεται αντίσταση στη μεταβολή του σχήματός τους, ώστε να τείνουν να λάβουν σφαιρικό σχήμα (σταγόνες). Αυτό γίνεται γιατί εμφανίζονται δράσεις και άλλων δυνάμεων, όπως των δυνάμεων της συνοχής και της συνάφειας. Αυτά, όμως, είναι ειδικές περιπτώσεις που δεν ενδιαφέρουν τις συνηθισμένες τεχνικές εφαρμογές.

15.2 ΓΕΝΙΚΑ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Στα μαθήματα Φυσικής, έχει γίνει επαρκής ανάπτυξη των βασικών εννοιών, όπως της πίεσης, της πυκνότητας κλ.π .Ετσι, εδώ θα χρειασθεί μόνο μία σύντομη αναφορά.

Α.Πίεση (p). Με τον όρο **πίεση**, νοούμε το πηλίκον της δύναμης που ενεργεί κάθετα και ομοιόμορφα πάνω σε μία επιφάνεια, (σχ.15.2.α) δια του εμβαδού αυτής της επιφάνειας. Δηλαδή, άν



Σχήμα 15.2.α *Ο ορισμός της πίεσης*

F η δύναμη που ενεργεί κάθετα και ομοιόμορφα πάνω σε μία επιφάνεια και A το εμβαδόν της επιφάνειας, πάνω στην οποία ενεργεί η δύναμη F, τότε, η πίεση p της δύναμης F (πιέζουσας δύναμης) πάνω στην επιφάνεια εμβαδού A (πιεζόμενη επιφάνεια), ορίζεται ως:

$$p = \frac{F}{A} \qquad (15.2.\alpha)$$

Η μονάδα της πίεσης, στο σύστημα μονάδων S.I, είναι το πασκάλ (P_α), όπου:

$$1\ P_\alpha = \frac{1N}{1m^2}$$

ενώ παλαιότερα, χρησιμοποιόταν ως μονάδα πίεσης, το bar, όπου:

$1bar = 10^5\ P_\alpha$

Ατμοσφαιρική πίεση P_{atm}

Το μίγμα των αερίων που αποτελούν την ατμόσφαιρα της γης, ως υλικό σώμα που είναι, έχει βάρος. Το βάρος αυτό της ατμόσφαιρας συνιστά δύναμη, η οποία ενεργεί πάνω στις επιφάνειες των πραγμάτων που βρίσκονται εντός της. Έχουμε, επομένως, μία πίεση που οφείλεται στην ατμόσφαιρα την **ατμοσφαιρική πίεση**. Η τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης σε ένα τόπο εξαρτάται από το υψόμετρο του τόπου και από τις καιρικές συνθήκες. Ως προς το πρώτο, είναι εύκολα κατανοητό, ότι όσο ψηλότερα είμαστε, τόσο λιγότερο αέρα έχουμε από πάνω μας, άρα λιγότερο βάρος και κατ' ακολουθία μικρότερη πίεση. Από την παρατήρηση αυτή προκύπτει και η μέθοδος υπολογισμού του υψομέτρου από τη μείωση δηλαδή της ατμοσφαιρικής πίεσης. Για το δεύτερο, τις καιρικές δηλαδή συνθήκες, παρατηρούμε ότι η ροή των αερίων μαζών δημιουργεί διαφοροποιήσεις στις πιέσεις και έχουμε επαλληλία αεροστατικών και αεροδυναμικών φαινομένων. Σε κανονικές καταστάσεις, μία μέση τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης στην επιφάνεια της θάλασσας, είναι $P_o=1{,}012\times10^5\ P_\alpha$ παλαιότερα, αυτή η τιμή ονομαζόταν "φυσική ατμόσφαιρα" και ήταν μία από τις μονάδες μέτρησης πιέσεων,

όπως εξάλλου και η λεγόμενη τεχνική ατμόσφαιρα, όπου:

$1at = 1\ kp / cm^2 = 9{,}81\times10^4\ P_\alpha$.

Μανομετρική πίεση P_m

Μανομετρική πίεση, είναι η διαφορά της πίεσης, από την αντίστοιχη ατμοσφαιρική σε μία θέση.Η μανομετρική πίεση μπορεί να είναι, είτε θετική, είτε αρνητική, αν στην υπόψη θέση είναι μεγαλύτερη, ή μικρότερη από την ατμοσφαιρική αντίστοιχα. Λέγεται μανομετρική, γιατί είναι η πίεση την οποία μετρά ένα ειδικό όργανο μέτρησης πιέσεων, το μανόμετρο. Οι θέσεις των οποίων χρειάζεται να μετράμε τις πιέσεις, είναι π.χ. η είσοδος ή η έξοδος μίας αντλίας, τα διάφορα σημεία αντλίας, δικτύων σωληνώσεων, τα διάφορα βάθη ενός φράγματος κ.λ.π.

Απόλυτη πίεση P_{abs}

Απόλυτη πίεση είναι η πίεση η οποία μετράται από το μηδέν των πιέσεων που είναι το απόλυτο κενό.Αποδεικνύεται έτσι ότι $p_{abs} = p_m + p_{atm}$ (15.2.β)

Πυκνότητα ρ: Με τον όρο “πυκνότητα ή ειδική μάζα”, νοούμε το πηλίκον της μάζας μίας ποσότητας ύλης, δια του όγκου που αυτή η ποσότητα καταλαμβάνει. Δηλαδή άν:

m η μάζα μίας ποσότητας ύλης και

V ο όγκος αυτής της μάζας τότε:

$$p = \frac{m}{V} \qquad (15.2.\gamma)$$

Η μονάδα της πυκνότητας στο σύστημα μονάδων S.I είναι το kg / m^3

Ειδικό βάρος w Με τον όρο “ειδικό βάρος”,νοούμε το πηλίκον του βάρους μίας ποσότητας ύλης δια του όγκου που αυτή η ύλη καταλαμβάνει : Δηλαδή, άν:

Β το βάρος μίας ποσότητας ύλης και

V ο όγκος αυτής της μάζας, τότε:

Τότε $$W = \frac{B}{V} \qquad (15.2.\delta)$$

και επειδή B = m · g θα είναι και

$$w = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g \qquad (15.2.\varepsilon)$$

Η μονάδα του ειδικού βάρους στο σύστημα μονάδων S.I είναι N/m^3.

Ειδικός όγκος υ: Με τον όρο “ειδικός όγκος”, νοούμε το πηλίκον του όγκου που καταλαμβάνει μία ποσότητα μάζας, δια της μάζας αυτής. Δηλαδή, αν:

m, η μάζα μίας ποσότητας ύλης και

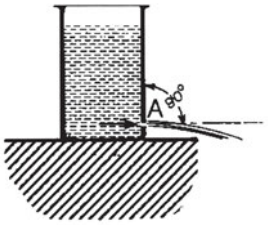
V, ο όγκος που αυτή η μάζα καταλαμβάνει, τότε

$$\upsilon = \frac{V}{m}$$

Η μονάδα του ειδικού όγκου στο σύστημα S.I είναι m^3/ kg.

15.3 ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ

Αποδεικνύεται θεωρητικά και επαληθεύεται πειραματικά, ότι μέσα στη μάζα μίας ποσότητας υγρού, γενικότερα ενός ρευστού, που είναι σε κατάσταση ισορροπίας, ασκούνται δυνάμεις.Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα, αν αφαιρέσουμε οτιδήποτε εμποδίζει τη δύναμη να δράσει. Ανοίγοντας π.χ. μία τρύπα (σχ. 15.3.α) σε δοχείο με υγρό, το υγρό εκρέει, έχουμε δηλαδή κίνηση και άρα υπάρχει δύναμη. Παρατηρούμε, επίσης, ότι στο σημείο εκροής, η διεύθυνση κίνησης του υγρού είναι κάθετη στην επιφάνεια του δοχείου. Αφού, λοιπόν, υπάρχει δύναμη F μέσα στη μάζα του υγρού, τότε, σε κάθε νοητή επιφάνεια με ένα εμβαδόν A, θα έχουμε και μία πίεση που υπολογίζεται από το γνωστό τύπο 15.2.α. p = F/A. Αυτή η πίεση, είναι η λεγόμενη **υδροστατική πίεση**.



Σχήμα 15.3.α *Η δύναμη του υγρού βρίσκει διέξοδο στην οπή και το υγρό εκρέει (υπό γωνία 90°)*

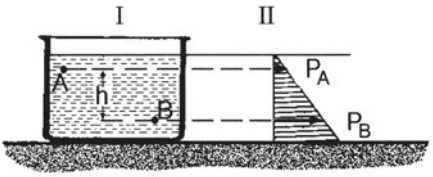
Για τις δυνάμεις που ασκούνται μέσα στη μάζα υγρού που ισορροπεί, έχουμε να παρατηρήσουμε, ότι είναι πάντα κάθετες σε οποιαδήποτε επιφάνεια, και με οποιοδήποτε προσανατολισμό, είτε μέσα στη μάζα του υγρού τις θεωρήσουμε, είτε στα τοιχώματα του δοχείου.

Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό, γιατί αν κάποια δύναμη από αυτές που ασκούνται στη μάζα του υγρού, ήταν υπό κλίση, ως προς κάποια επιφάνεια, τότε θα μας έδινε διατμητική συνιστώσα. Σε μία τέτοια περίπτωση, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει, το υγρό δεν θα ήταν σε ισορροπία. Γι' αυτό άλλωστε, και η εκροή του υγρού στο σχήμα 15.3.α γίνεται υπό γωνία 90°, ως προς το σχήμα του δοχείου. Από τα παραπάνω, προκύπτει η επόμενη θεμελιώδης αρχή για την Υδροστατική:

"Μέσα στη μάζα υγρού, που είναι σε κατάσταση ισορροπίας, κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες, και σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια, είτε αυτή είναι τμήμα των τοιχωμάτων ενός δοχείου, είτε βρίσκεται μέσα στη μάζα του υγρού, ασκείται πίεση που έχει κατεύθυνση από το υγρό, κάθετα, προς την επιφάνεια. Η τιμή της πίεσης αυτής είναι ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό της επιφανείας".

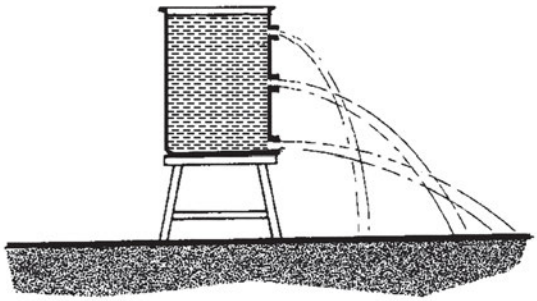
15.4 Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΜΕΤΑ ΤΟΥ ΒΑΘΟΥΣ

Έστω μία ποσότητα υγρού, που είναι μέσα σε ένα δοχείο και βρίσκεται σε ηρεμία, (σχ. 15.4.α).



Σχήμα 15.4.α *Η μεταβολή της υδροστατικής πίεσης μετά του βάθους*

Αφού το υγρό ισορροπεί, τότε η ελεύθερη επιφάνειά του θα είναι οριζόντια. Μπορούμε, επομένως, να φαντασθούμε ότι η μάζα του υγρού είναι διατεταγμένη κατά λεπτά στρώματα και όλα τα υπερκείμενα πιέζουν τα υποκείμενα, λόγω του βάρους τους. Άρα, η πίεση αυξάνει, όσο αυξάνει το βάρος. Αυτό φαίνεται και πειραματικά (σχ. 15.4.β)



Σχήμα 15.4.β *Πειραματική απόδειξη της αύξησης της υδροστατικής πίεσης μετά του βάθους*

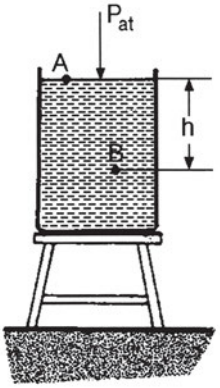
Αν δηλαδή, σε ένα δοχείο ανοίξουμε μερικές τρύπες, ίσου μεγέθους, θα διαπιστώσουμε ότι από τις χαμηλότερες τρύπες εκτινάσσεται μακρύτερα το υγρό, που σημαίνει ότι όσο πιό χαμηλά βρίσκεται η τρύπα, τόσο μεγαλύτερη είναι η αρχική ταχύτητα εκροής του υγρού, γεγονός που συνεπάγεται και μεγαλύτερη πίεση. Η παρακάτω θεμελιώδης πρόταση της Υδροστατικής, εκφράζει τη μεταβολή της πίεσης με το βάθος:

"Η διαφορά πιέσεων μεταξύ δύο σημείων μέσα στη μάζα ηρεμούντος υγρού, ισούται αριθμητικά, με το βάρος στήλης υγρού που έχει βάση, τη μονάδα επιφανείας και ύψος την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων".

Αναφερόμενοι στο σχήμα 15.4.α, αν η πίεση στο σημείο Α, Β είναι P_A και, P_B αντίστοιχα, τότε, επειδή η στήλη υγρού, με βάση τη μονάδα επιφανείας και ύψος την υψομετρική διαφορά μεταξύ του σημείου Α και του σημείου Β, δηλαδή το h, έχει όγκο 1. h και άρα έχει βάρος 1 .h w, όπου w= το ειδικό βάρος του υγρού. Έτσι θα έχουμε σύμφωνα με τη θεμελιώδη πρόταση για τη διαφορά πιέσεων:

$$P_B - P_A = h \cdot w \qquad (15.4.\alpha)$$

Αν το σημείο Α είναι στην επιφάνεια του υγρού, τότε η σχέση 15.4.α μας δίνει την πίεση ενός υγρού σε ορισμένο βάθος (σχ.15.4.γ).



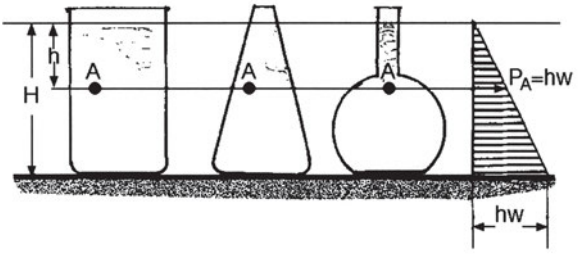
Σχήμα 15.4.γ *Η πίεση υγρού σε ορισμένο βάθος*

Επειδή η πίεση στο Α είνα η ατμοσφαιρική, τότε οι μανομετρικές πιέσεις είναι: $P_{mA} = 0$, $P_{mB} = wh$, ενώ οι απόλυτες πιέσεις είναι:

$P_{absA} = 1$ atm

$$P_{absB} = 1 \text{ at} + wh \qquad (15.4.\gamma)$$

Από την έκφραση της διαφοράς πιέσεων (σχέση 15.4.α) μεταξύ δύο σημείων Α,Β στη μάζα του υγρού, φαίνεται, ότι το σχήμα του δοχείου δεν έχει σημασία, ή, με άλλα λόγια η υδροστατική πίεση σε διάφορα βάθη του δοχείου δεν εξαρτάται από το σχήμα του (σχ. 15.4.δ) αλλά εξαρτάται, μόνο, από το θεωρούμενο βάθος και το ειδικό βάρος του υγρού. Επειδή η σχέση 15.4.α είναι πρώτου βαθμού (γραμμική σχέση), το διάγραμμα κατανομής των πιέσεων (σχ. 15.4.α ΙΙ και σχ. 15.4.δ) είναι ευθύγραμμο.



Σχήμα 15.4.δ *Η υδροστατική πίεση είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου*

15.5 ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

Από όλα όσα είπαμε μέχρι τώρα, προκύπτουν τα εξής χαρακτηριστικά για το υγρό που ηρεμεί (ισορροπεί) και για την υδροστατική πίεσή του :

1. Η πίεση επάνω σε στοιχειώδη επιφάνεια και, σε μία θέση του υγρού, είναι η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις.
2. Οι δυνάμεις που ασκούνται (άρα και οι πιέσεις) σε οποιεσδήποτε επιφάνειες μέσα στο υγρό, καθώς και στα τοιχώματα του δοχείου, είναι πάντα κάθετες προς αυτές, με φορά, από το υγρό προς τις επιφάνειες.
3. Η πίεση μέσα στο υγρό αυξάνει, όσο μεγαλύτερο είναι το βάθος .
4. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, αν υπάρχει, είναι οριζόντια.

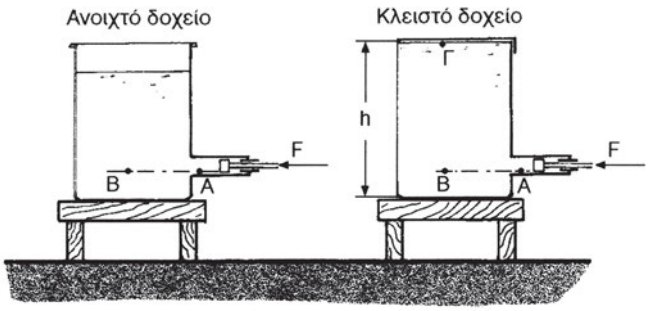
15.6 Η ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΠΙΕΣΗΣ - ΑΡΧΗ ΤΟΥ PASCAL

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε, ότι η διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων μέσα σε ένα υγρό που ηρεμεί, εξαρτάται από την υψομετρική διαφορά τους. Αν, επομένως, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, τότε η υψομετρική διαφορά τους είναι μηδέν, δηλαδή, h=0, οπότε από τη σχέση 15.4α θα έχουμε: P_A-P_B=0 ή $P_A = P_B$

Δηλαδή, σε όλα τα σημεία ενός επιπέδου, ηρεμούντος υγρού, οι πιέσεις είναι ίδιες. Αν όμως σε ένα υγρό που ηρεμεί, αυξήσουμε τη πίεση, π.χ. με ένα έμβολο στο σημείο Α (σχ. 15.5.α), τότε:

α) Στο ανοιχτό δοχείο, επειδή θα εμφανισθεί διαφορά πιέσεων μεταξύ των σημείων Α και Β του αυτού επιπέδου, θα έχουμε κίνηση και το υγρό θα υψωθεί μέσα σ' αυτό μέχρι εξισώσεως των πιέσεων, στα σημεία Α και Β.

β) Στο κλειστό δοχείο, επειδή τα υγρά είναι ασυμπίεστα, και αφού το δοχείο είναι πλήρες και το υγρό δεν μπορεί να κινηθεί, η πίεση που προστίθεται από το έμβολο στο σημείο Α, πηγαίνει παντού, σε όλα δηλαδή τα σημεία του υγρού. Πράγματι, έστω, (σχ. 15.5 α), ότι ο σωλήνας όπου κινείται το έμβολο, έχει διατομή S, αν εφαρμόσουμε στο έμβολο μία δύναμη F_1 στο σημείο Α θα έχουμε πίεση $P_{IA} = F_1 / S$. Στο σημείο Β, που είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, θα είναι, επίσης



Σχήμα 15.5.α *Η μεταφορά της πίεσης*

$$P_{IB} = \frac{F_1}{s} = P_{IA}$$

Στο σημείο Γ η πίεση θα είναι, σύμφωνα με τη παραπάνω σχέση 15.4.α

$P_{1B} - P_{1\Gamma} = hw$ ή

$$P_{1\Gamma} = P_{1B} - hw = \frac{F_1}{S} - hw$$

Αν, τώρα, εφαρμόσουμε στο έμβολο δύναμη $F = F_1 + F_2$,

θα έχουμε, κατά συνέπεια, στη θέση Α, πίεση

$$P_{2A} = \frac{F}{S} = \frac{F_1 + F_2}{S} = \frac{F_1}{S} + \frac{F_2}{S} = P_{1A} = \frac{F_2}{S}$$

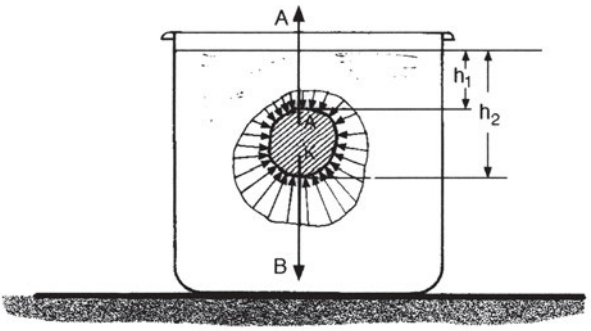
οπότε, στο σημείο Β (για τους λόγους που είπαμε προηγουμένως), θα έχουμε:

$$P_{2A} = P_{1B} + \frac{F_1}{S} \quad \text{ή} \quad P_{2A} = P_{1\Gamma} + \frac{F_1}{S}$$

Άρα, αν ένα υγρό ηρεμεί, η κάθε μεταβολή της πίεσης σε ένα άλλο σημείο του μεταφέρεται ισοποσώς σε όλα τα άλλα σημεία του υγρού. (Νόμος του Pascal).Αυτή είναι η βασική αρχή λειτουργίας πολλών υδραυλικών συστημάτων, όπως των υδραυλικών φρένων του αυτοκινήτου, του υδραυλικού πιεστηρίου κ. λ.π.

15.7 ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Αν βυθίσουμε ένα σώμα, μέσα σε υγρό (σχ. 15.7.α), τότε επάνω στις επιφάνειες αυτού του σώματος θα ασκηθεί, κάθετα, πίεση, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει.



Σχήμα 15.7.α *Η κατανομή των πιέσεων γύρω από ένα σώμα βυθισμένο μέσα σε ένα υγρό.*

Ας σημειωθεί πάντως, ότι στο επάνω μέρος, θα είναι μικρότερες οι πιέσεις από ότι στο κάτω, γιατί $h_1 < h_2$.

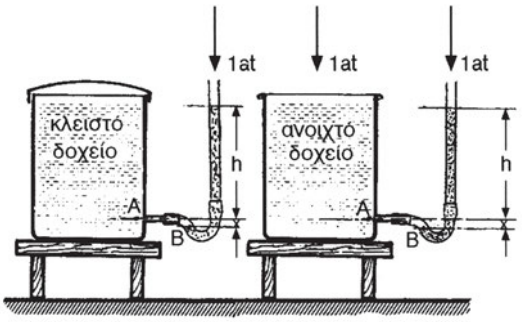
Αποδεικνύεται έτσι ότι η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων είναι πάντα μία δύναμη που έχει διεύθυνση κατακόρυφη, φορά προς τα επάνω και μέτρο το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού. Αν V ο όγκος του σώματος και w το ειδικό βάρος του υγρού, τότε, η δύναμη αυτή έχει μέτρο V·w και ονομάζεται **άνωση**. Αυτή η πρόταση αποτελεί την αρχή του Αρχιμήδη και διατυπώνεται ως εξής :

“Κάθε σώμα βυθισμένο μέσα σε υγρό που ηρεμεί, υφίσταται εκ μέρους του υγρού, άνωση, ίση προς το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού”.

15.8 ΟΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

α) Απλό μανόμετρο

Έστω, ένα δοχείο που περιέχει υγρό σε ηρεμία, ειδικού βάρους w_1 (σχ. 15.8.α) και του οποίου υγρού, θέλουμε να μετρήσουμε την πίεση στο σημείο Α. Στο σημείο αυτό, με κατάλληλο σύστημα, προσαρμόζουμε ένα γυάλινο σωλήνα σχήματος υ, που έχει μέσα του ένα υγρό ειδικού βάρους w_2. Ο σωλήνας αυτός είναι ένα απλό ανοιχτό μανόμετρο, τύπου υ. Είναι προφανές, ότι το υγρό που περιέχει το μανόμετρο, δεν πρέπει να αντιδρά χημικά με το υγρό του οποίου μετράμε την πίεση, ούτε να διαλύεται σε αυτό. Το σύστημα ισορροπεί, όπως φαίνεται στο σχήμα 13.8.α, οπότε, σύμφωνα με τη γνωστή σχέση 15.4.α., θα έχουμε:



Σχήμα 15.8.α *Μέτρηση της πίεσης με απλό ανοιχτό μανόμετρο τύπου U*

α) Από την πλευρά του δοχείου,

$$P_B - P_A = xw \qquad (15.8.\alpha)$$

όπου:

P_A η ζητούμενη πίεση στη θέση Α,

P_B η πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των υγρών του δοχείου και του μανόμετρου.

β) Από τη πλευρά του μανόμετρου και για την πίεση P_B στη διαχωριστική επιφάνεια, θα έχουμε:

$$P_B = 1_{atm} + w_2(h+x) \qquad (15.8.\beta)$$

Από τις σχέσεις 15.8.α και 15.8.β, απαλείφοντας το P_B, θα έχουμε:

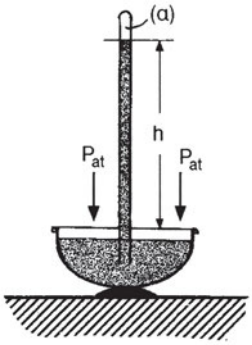
$1_{atm} + w_2(h+x) - P_A = xw_1$

και λύνοντας ως προς P_A θα έχουμε :

$$P_A = 1_{atm} + w_2(h+x) - xw_1 \qquad (15.8.γ)$$

Στη σχέση 15.8.γ, οι όροι του δεύτερου μέρους είναι όλοι γνωστοί. Τα w_1 και w_2 είναι και αυτά γνωστά. Εφόσον γνωρίζουμε τα υγρά, τα μήκη h και χ μπορούν και αυτά να μετρηθούν. Άρα, έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε την πίεση P_A. Η διαδικασία είναι ίδια, είτε το δοχείο είναι ανοιχτό, είτε είναι κλειστό, ισχύουν μάλιστα ακριβώς τα ίδια και για όλα τα ρευστά (υγρά ή αέρια).

β) Το βαρόμετρο, που είναι το όργανο με το οποίο μετράμε την ατμοσφαιρική πίεση, είναι και αυτό ένα μανόμετρο, που το ελεύθερο άκρο του είναι κλειστό, ενώ το άλλο είνα εμβαπτισμένο σε μία λεκάνη που υπάρχει υγρό ειδικού βάρους w. Ο σωλήνας του βαρόμετρου είναι, συνήθως, ίσιος. Στο σχήμα 15.8.β έχουμε το κλασσικό βαρόμετρο του Torricelli, με το οποίο, αυτός, απέδειξε, αφενός την ύπαρξη της ατμοσφαιρικής πίεσης και αφετέρου την μέτρησε. Η ατμοσφαιρική πίεση ενεργεί πάνω στην επιφάνεια του υγρού της λεκάνης και συγκρατεί μια στήλη υγρών μέσα στο σωλήνα, ύψους h. Ο χώρος (α) πάνω από τη στήλη, και μέσα στο σωλήνα, είναι κενός, διότι (η πίεση των ατμών του εξατμισθέντος υγρού στον κενό αυτό χώρο, θεωρείται αμελητέα και άρα,



Σχήμα 15.8.β *Βαρόμετρο Torricelli*

$1\ atm = h \cdot w$

Όπως έχουμε σημειώσει, στο σύστημα μονάδων SI, η τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης είναι:

$atm = 1.012\times10^5\ Pa = 101{,}2\times10^3\ N/m^2$,

Άρα, αν βάλουμε μέσα στο βαρόμετρο νερό και επειδή για το νερό

$w = 9{,}81\times10^3\ N/m^2$ άρα,

$atm = 1.012\times10^3 = h\cdot9{,}81\times10^3$ και

επομένως,

$$h = 1.012 \times \frac{10^3}{h} \cdot 9 \cdot 81 \times 10^3 = 10{,}32 \text{ m}$$

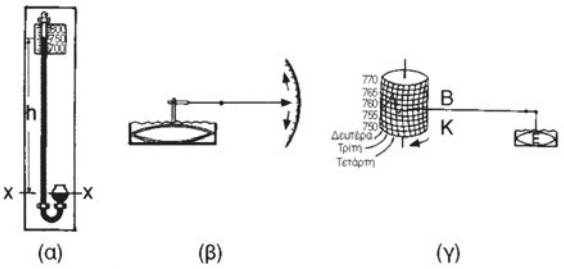
Με σωλήνα όμως τόσο μεγάλο, το αντίστοιχο όργανο είναι πολύ δύσχρηστο, γι' αυτό και χρησιμοποιούμε υγρό με μεγάλο ειδικό βάρος, όπως είναι ο υδράργυρος (το μόνο ρευστό μέταλλο στη φύση) που έχει w = 13,6 N/ m^3, οπότε τότε:

$atm = 1.012 \times 10^3 = h \cdot 13{,}6 \times 9{,}81 \times 10^3$ και

άρα

$$h = 1.012 \times \frac{10^3}{13{,}6} \cdot 9 \cdot 81 \times 10^3 = 0{,}758 \text{ m}$$

***Σημείωση*:** Επειδή στα βαρόμετρα χρησιμοποιείται ο υδράργυρος είχαμε ως μονάδα πίεσης και τα χιλιοστά υδραργύρου (m mHg)

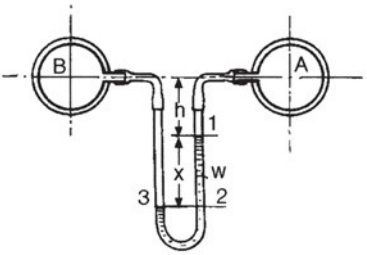


Σχήμα 15.8.γ *α) Εργαστηριακό βαρόμετρο, β) Μεταλλικό βαρόμετρο Vidi (αρχή), γ) Αυτογραφικό όργανο (αρχή)*

Στο σχήμα 15.8.γ έχουμε ένα εργαστηριακό βαρόμετρο Torricelli (α) και στα (β) και (γ) τις αρχές μεταλλικού βαρομέτρου (Vidi) και αυτογραφικού οργάνου.

γ) Το διαφορικό μανόμετρο U

Το διαφορικό μανόμετρο (σχ. 15.8.δ) είναι σωλήνας σε σχήμα υ και χρησιμοποιείται για την εύρεση της διαφοράς πίεσης μεταξύ δύο σημείων.



Σχήμα 15.8.δ *Μέτρηση διαφοράς πίεσης μεταξύ δυο σωλήνων με διαφορικό μανόμετρο*

Αν το υγρό στους σωλήνες έχει ειδικό βάρος w_1 και το υγρό του μανομέτρου w_2, τότε έχουμε:

(1). $P_1 - P_A = hw_1$

(2). $P_3 = P_2$

(3). $P_3 - P_B = (h + y)\, w_1$

(4). $P_1 - P_2 = xw_2$

και απαλείφοντας από τις τέσσερις αυτές σχέσεις τα P_1, P_2, P_3,

θα έχουμε:

Από την (1) $P_1 = P_A + hw_1$,

αντικαθιστώντας τη P_1 και την P_2 από την (2) στην (3) και (4) θα έχουμε:

(5). $P_2 - P_B = (h + y)\, w_1$ και

(6). $P_A + h\, W_1 - P_2 = h \cdot w_2$

Προσθέτοντας, τέλος, αυτές τις δύο, κατά μέλη, θα πάρουμε :

$P_A + h\, w_1 - P_B = (h+x) \cdot w_1 + x \cdot w_2$

ή $P_A - P_B = h\, w_1 + h \cdot w_1 + x \cdot w_2 = x(w_1 + w_2)$

Για πίεση μεγαλύτερη από δύο ατμόσφαιρες, καθώς και στις περισσότερες τεχνικές εφαρμογές, χρησιμοποιούμε μεταλλικά μανόμετρα, όπως αυτό του Bourdon, (σχ. 15.8.ε) που εκμεταλλεύονται την παραμόρφωση ενός καμπύλου μεταλλικού σωλήνα, ελλειπτικής διατομής όταν σε αυτόν διοχετευθεί το υπό πίεση ρευστό. Υπάρχουν και άλλα είδη μανομέτρων, όπως με διάφραγμα, ηλεκτρικά και άλλα, ώστε να καλύπτονται οι ανάγκες των πρακτικών εφαρμογών.



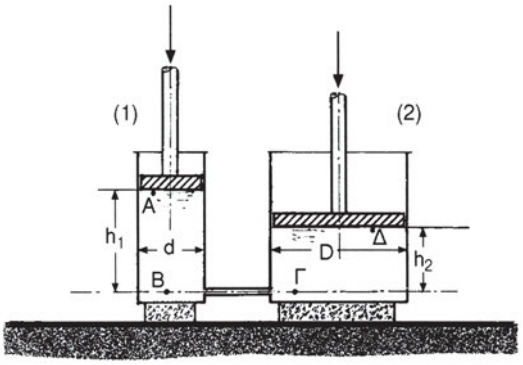
Σχήμα 15.8.ε *Μεταλλικό μανόμετρο (Bourdon)*

15.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στις δύο βασικές αρχές της Υδροστατικής στην αρχή δηλαδή του Pascal και σε εκείνη του Αρχιμήδη, στηρίζονται πολλές πρακτικές εφαρμογές. Στην αρχή του Pascal στηρίζονται εφαρμογές, όπως τα υδραυλικά φρένα των αυτοκινήτων τα υδραυλικά πιεστήρια, οι υδραυλικοί ανελκυστήρες οι αναρροφητικές και καταθλιπτικές αντλίες κ.α. Στην αρχή του Αρχιμήδη στηρίζεται η κατασκευή των πλοίων, των υποβρυχίων, των πλωτήρων που χρησιμοποιούνται σε αυτοματισμούς, σε μετρητικά όργανα, κ.α.

15.9.1 Υδραυλικό πιεστήριο

Στην παράγραφο 15.6 κάναμε αναφορά για την αρχή του Pascal, δηλαδή για την ικανότητα των υγρών να μεταφέρουν πίεση.
Έστω, λοιπόν, δύο κύλινδροι διαφορετικής διαμέτρου, (σχ. 15.9.1.α) που ενώνονται με ένα σωλήνα. Μέσα στους κυλίνδρους αυτούς λειτουργούν έμβολα. Υποθέτουμε τα βάρη αυτών των εμβόλων ως αμελητέα.



Σχήμα 15.9.1.α *Η αρχή του υδραυλικού πιεστηρίου - ανυψωτήρα*

Στο σύστημα, που ισορροπεί, υπάρχει υγρό ειδικού βάρους w. Για τη γενικότητα του θέματος, ας δεχθούμε ότι τα δύο έμβολα δεν βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Η επιφάνεια του κυλίνδρου (1) είναι, $s_1 = \pi d^2/4$ και του (2), $s_2 = \pi D^2/4$. Εφαρμόζουμε μία δύναμη F_1 στον κύλινδρο (1). Τότε, στη θέση Δ θα έχουμε μία πίεση $P_A = F_1/s_1$, που κατά τα γνωστά, θα ασκείται στο σημείο Β του κυλίνδρου (1), οπότε:

$$P_B = P_A + h_1 \cdot w$$

και αφού το Β και το Γ του κυλίνδρου (2), είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, θα είναι $P_B = P_\Gamma$ άρα, στη θέση Δ θα έχουμε:

$$P_\Delta = P_\Gamma - h_2 \cdot w$$

ή

$$P_\Delta = P_A + h_1 \cdot w - h_2 \cdot w = \frac{F_1}{S_1} + h_1 \cdot w - h_2 \cdot w$$

Αφού, όμως το σύστημα ισορροπεί, άρα θα πρέπει να υπάρχει και μία δύναμη F_2 στο έμβολο του κυλίνδρου (2), οπότε θα είναι και $P_\Delta = F_2/s_2$. Άρα, καταλήγουμε στο ότι:

$$\frac{F_2}{s_2} = \frac{F_1}{s_1} + w(h_1 - h_2)$$

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, όπως π.χ. στο υδραυλικό πιεστήριο, η διαφορά $(h_1 - h_2)$ είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με τον όρο F_1/s_1 έτσι ώστε να μπορούμε να διατυπώσουμε ότι:

$$\frac{F_2}{s_2} = \frac{F_1}{s_1}$$

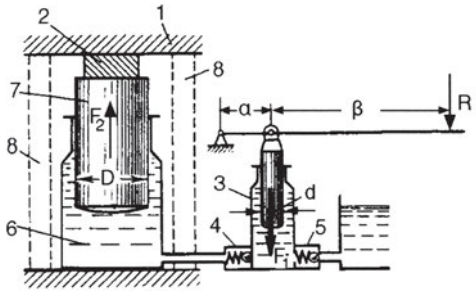
ή

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \qquad (15.9.1\alpha)$$

Δηλαδή, ο λόγος των δυνάμεων που εφαρμόζονται στα έμβολα είναι ανάλογος του τετραγώνου του λόγου των διαμέτρων των κυλίνδρων.
Π.χ. Αν D /d = 10, τότε ο λόγος των δυνάμεων θα είναι:

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = 100$$

δηλαδή, εφαρμόζοντας στον κύλινδρο της μικρής διαμέτρου, μία δύναμη έστω 10N, θα έχουμε στον άλλο, το μεγάλο κύλινδρο δύναμη 1000N. Αν, μάλιστα, έχουμε στην επιβολή της δύναμης F_1 ένα πολλαπλασιαστή, π.χ. ένα μοχλό, τότε, θα έχουμε πολύ μεγαλύτερη την F_2.



Σχήμα 15.9.1.β *Παράσταση υδραυλικού πιεστηρίου*

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο σχήμα 15.9.1.β. έχουμε τη σχηματική παράσταση μίας χειροκίνητης υδραυλικής πρέσσας.Με τη χειροκίνητη αντλία (3), εφαρμόζουμε πίεση στο κύλινδρο (6). Οι μοχλοβραχίονες της αντλίας έχουν λόγο α/β = 1/9.Οι βαλβίδες (5) και (4) είναι, αντίστοιχα, εισόδου και εκφόρτωσης. Αν ο λόγος των διαμέτρων των εμβόλων είναι D/d = 10 και η δύναμη που εφαρμόζεται στο μοχλό της αντλίας, είναι P=200N. Ποια είναι η δύναμη F_2;

Απάντηση

Η δύναμη F_1 στο έμβολο της αντλίας (3) είναι

$F_1\alpha = P(\alpha + \beta)$ ή $F_1 = P\,\dfrac{(\alpha+\beta)}{\alpha}$

Από τη σχέση α/β = 1/9 ή β/α = 9 προκύπτει: (α+β)/α = 10

Σύμφωνα με τη σχέση 15.9.1.α

$$F_2 = F_1 \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2 = P\,\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha} \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

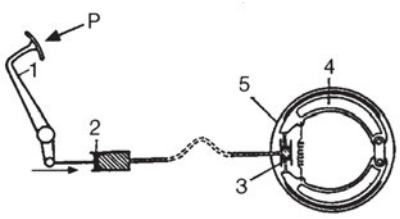
$F_2 = 200 \times 10 \times 10^2 = 200000N = 200\ KN$,

δηλαδή είναι δύναμη 1000 φορές μεγαλύτερη από την F_1.

Η διάταξη αυτή μπορεί να εργασθεί ως πιεστήριο, οπότε το προς πίεση σώμα είναι το (2) ενώ το (1) είναι στερεά συνδεδεμένο μέσω των στηλών (8), είτε ως αναβατόριο, οπότε το προς ανύψωση σώμα είναι το (1), ενώ οι στήλες (8) είναι οι ευθυντήριοι ράβδοι. Ας σημειωθεί ότι και οι υδραυλικοί ανελκυστήρες στηρίζονται στην ίδια αρχή. Επειδή, όμως, έχουμε διαφορετικές απαιτήσεις, υπάρχουν και κατασκευαστικές διαφοροποιήσεις.

15.9.2 Το υδραυλικό φρένο

Στο σχήμα 15.9.2. α έχουμε σχηματικά ένα υδραυλικό φρένο. Το υδραυλικό φρένο είναι μία απόλυτη εφαρμογή της αρχής του Pascal. Με το πεντάλ (1) του φρένου ενεργούμε επάνω στο έμβολο της αντλίας (2), με τη δύναμη P του



Σχήμα 15.9.2.α *Υδραυλικό φρένο αυτοκινήτου*

ποδιού. Κατά την αρχή του Pascal, η πίεση μεταφέρεται στο «βαρελάκι» (3) που ανοίγει με τα εμβολάκια του, τις σιαγόνες (4) οι οποίες με τη σειρά τους πιέζουν το παρέμβασμα τριβής (φερμουίτ) επάνω στο κέλυφος (5) του φρένου.

15.9.3 Εφαρμογή της αρχής του Αρχιμήδη

Στην παράγραφο 15.7, είδαμε την αρχή του Αρχιμήδη. Κατά την αρχή αυτή, όταν ένα σώμα βυθίζεται μέσα σε υγρό, εμφανίζεται η δύναμη της άνωσης Α. Εκτός, όμως, από την άνωση, υπάρχει πάντα και το ίδιο βάρος Β. Οι δυνάμεις αυτές, η άνωση και το βάρος, είναι συγγραμικές και αντίφορες και μπορεί να είναι ίσες ή άνισες. Έχουμε, επομένως, τρεις περιπτώσεις:

1) Η Α > Β

Στην περίπτωση αυτή η συνισταμένη του βάρους και της άνωσης έχει μέτρο Α-Β και φορά προς τα επάνω. Άρα, το σώμα θα κινηθεί προς την επιφάνεια του υγρού και θα επιπλεύσει, αφήνοντας μέσα στο υγρό, τόσο μέρος, όσο χρειάζεται για να εξισορροποιηθεί το βάρος του. Είναι η περίπτωση των σκαφών επιφανείας.

2) Β = Α

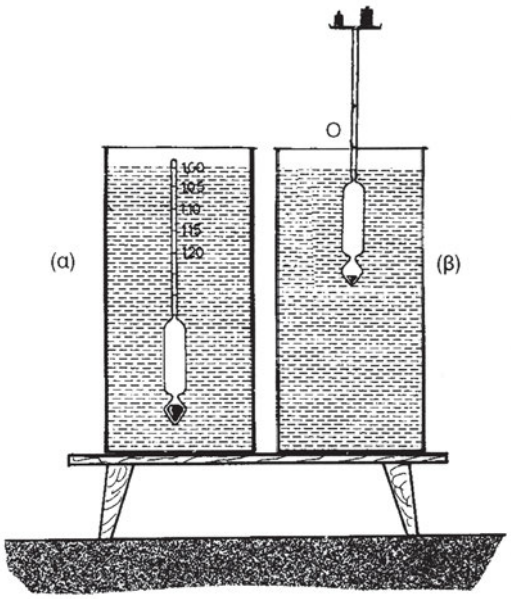
Εδώ, η συνισταμένη του βάρους και της άνωσης είναι μηδέν, και συνεπώς το σώμα αιωρείται μέσα στο υγρό. Είναι η περίπτωση των υποβρυχίων.

3) Η Α < Β

Εδώ, η συνισταμένη του βάρους και της άνωσης έχει μέτρο Β-Α και φορά προς τα κάτω. Άρα το σώμα βυθίζεται. Η περίπτωση αυτή βρίσκει εφαρμογή στις υποθαλλάσιες θεμελιώσεις.

15.9.4 Όργανα μέτρησης – πλωτήρες

Μια άλλη σπουδαία εφαρμογή της αρχής του Αρχιμήδη, είναι οι πλωτήρες. Οι πλωτήρες είναι όργανα μέτρησης διαφόρων ιδιοτήτων των υγρών π.χ. της πυκνότητας, της περιεκτικότητας των διαλυμάτων σε ορισμένο συστατικό, όπως, οινόπνευμα, ζάχαρη κ.λ.π, της μέτρησης της οξύτητας του λαδιού κ.α. Έχουμε δύο ειδών πλωτήρες (σχ. 15.9.4.α)



Σχήμα 15.9.4.α *Πλωτήρες α) σταθερού βάρους β) σταθερού όγκου*

1. Πλωτήρες σταθερού βάρους
   Το όργανο εδώ βυθίζεται στο υπό μέτρηση υγρό και διαβάζουμε την ένδειξη της κλίμακας στο "λαιμό" του οργάνου και η οποία κλίμακα είναι ανάλογη με ό,τι θέλουμε να μετρήσουμε.
2. Πλωτήρες σταθερού εκτοπίσματος. Αυτοί βυθίζονται πάντα μέχρι ορισμένου σημείου (ο), με τη βοήθεια σταθμών, και από τα οποία σταθμά προκύπτει η ζητούμενη ένδειξη.



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Τα υγρά αντέχουν μόνο ορθές θλιπτικές τάσεις και, πρακτικά, είναι ασυμπίεστα. Υπενθυμίζουμε ότι πίεση είναι, το πηλίκον της δύναμης που ενεργεί κάθετα και ομοιόμορφα επάνω σε μία επιφάνεια, δια του εμβαδού αυτής της επιφάνειας.

Από πλευράς ορολογίας:

α) $F= P/A$ και μονάδα έχει το 1 Pa = 1N/1 m^2. Έχουμε στους όρους

β) Ατμοσφαιρική πίεση P_{atm} η πίεση που ασκεί η ατμόσφαιρα

γ) Μανομετρική πίεση P_m: η διαφορά της πίεσης, σε μία θέση, από την ατμοσφαιρική

δ) Απόλυτη πίεση P_{abs}: Η πίεση που μετράται από το κενό και η οποία είναι $P_{abs} = P_m + P_{atm}$.

ε) Μια ποσότητα υγρού έχει:

m = μάζα, B = βάρος, V = όγκος.

Τότε ονομάζουμε:

πυκνότητα: $\rho = \frac{m}{V}$

ειδικό βάρος: $w = \frac{B}{V} = p \cdot g$ και

ειδικό όγκο: $\upsilon = \frac{V}{m}$

Υδροστατική πίεση: σε κάθε θέση μέσα σε μάζα ηρεμούντος υγρού, υπάρχει πίεση η οποία είναι ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις.Η τιμή της υδροστατικής πίεσης, σε κάθε σημείο είναι ίση με το βάρος στήλης υγρού, με ύψος, από το σημείο μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια και βάση ίση με την μονάδα.

Η αρχή του Pascal

Αν ένα υγρό ηρεμεί, τότε, κάθε μεταβολή της πίεσής του σε ένα σημείο, μεταφέρεται ισοποσώς σε όλα τα σημεία του υγρού.

Η αρχή του Αρχιμήδη

Κάθε σώμα, βυθισμένο ολόκληρο μέσα σε υγρό που ηρεμεί, υφίσταται εκ μέρους του υγρού, δύναμη, που τη λέμε άνωση, ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού, ο όγκος του οποίου είναι ίσος προς τον όγκο του βυθισμένου σώματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μία φυσική ατμόσφαιρα (at) είναι $9,81 \times 10^4 N/m^2$. Μετρώντας με τα βαρόμετρα λέμε ότι 1 at είναι (1) ίση με 760 mm Hg (2) ίση με 10333 mm H_20 .Να βρείτε τις σχέσεις μεταξύ mm Hg, mm H_20 και N/m^2.

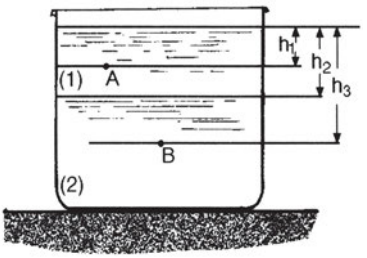
Απάντηση: 1mmHg = 13,6 mmH_20, 1mmH_20 = 0,0735mmHg, 1mmHg = 129,08N/m^2, 1mmH_20 = 9,49 N/m^2

2. Μία υδαταποθήκη σχήματος παραλληλεπιπέδου με βάση 6m×4m, περιέχει νερό σε ύψος 3m. Ποια είναι η πίεση στη βάση της υδαταποθήκης και ποια είναι η ολική δύναμη που ασκεί το περιεχόμενο νερό στη βάση.

Απάντηση: P = 29,43KN/m^2, F=705 KN.

3. Σε ένα δοχείο υπάρχουν δύο υγρά (τα οποία δεν αναμιγνύονται ούτε αντιδρούν χημικά μεταξύ τους). Το υγρό (1) έχει ειδικό βάρος $w_1 = 10\ KN/m^3$ και το (2) $w_2 = 9,8\ KN/m^3$. Ποιά είναι η διαφορά πίεσης, μεταξύ των σημείων Α και Β. Δίνονται $h_1 = 0,7m$, $h_2 = 1,2m$, $h_3 = 2,4m$.

Απάντηση: Δρ = 16,9 KN/m^2.



σχ.15.10.α

4. Ποια δύναμη πιέζει πώμα, εμβαδού $4cm^2$ που κλείνει μία οπή σε βάθος 1,5 σε ένα δοχείο που περιέχει υγρό ειδικού βάρους $w = 9,65\ KN/m^3$.

Απάντηση: F=5,79N

5. Το εμβαδόν του μεγάλου εμβόλου ενός υδραυλικού πιεστηρίου είναι $A_{max} = 150cm^2$ και του μικρού $A_{min} = 50cm^2$. Αν πάνω στο μικρό έμβολο ασκήσουμε κάθετα μία δύναμη $F_1 = 25N$, πόση θα είναι η δύναμη F_2 που θα εμφανισθεί στο μεγάλο έμβολο.

Απάντηση: F_2 =75N

6. Ένα κυλινδρικό βαρέλι έχει εμβαδόν βάσης 0,6 m^2 και ύψος 1m. Αν το βαρέλι είναι τελείως γεμάτο με νερό, ποια δύναμη ασκείται στον πυθμένα του; Αν στη συνέχεια εφαρμόσουμε στο πάνω μέρος του βαρελιού ένα σωλήνα διατομής, 5 cm^2 και συμπληρώσουμε άλλο ένα μέτρο νερό,

ποια θα είναι η νέα δύναμη που θα ασκείται στον πυθμένα; Να ευρεθούν, επίσης, τα ποσοστά αύξησης της ποσότητας του νερού και το αντίστοιχο της αύξησης της δύναμης πάνω στον πυθμένα (w =104 N/m^2).

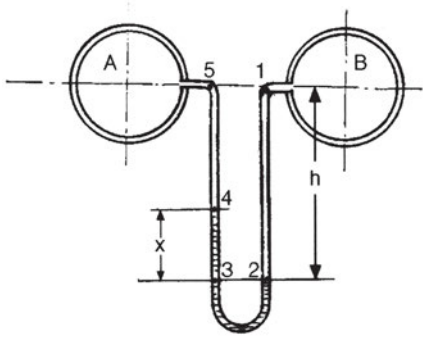
Απάντηση: F_1 = 6 KN, F_2 = 12KN
αύξηση δύναμης 100%
αύξηση ποσότητας νερού 0,083%

7. Ένα ομοιογενές σώμα ζυγιζόμενο στον αέρα έχει βάρος B_1 = 4N. Όταν είναι βυθισμένο στο νερό ζυγίζει B_2 = 3N. Το ειδικό βάρος του νερού είναι w = 99,86 N/m^3. Ποιό είναι το ειδικό βάρος του σώματος αν η άνωση στον αέρα θεωρηθεί αμελητέα.

Απάντηση: w = 40 KN/m^3

8. Ένα διαφορικό μανόμετρο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της διαφοράς πίεσης μεταξύ δύο σωλήνων που μεταφέρουν νερό. Το χρησιμοποιούμενο υγρό του μανομέτρου έχει ειδικό βάρος 1,6 N/m^3 και οι ενδείξεις του οργάνου είναι h= 30 cm και X = 10 cm. Ποια η διαφορά πίεσης των σωλήνων.

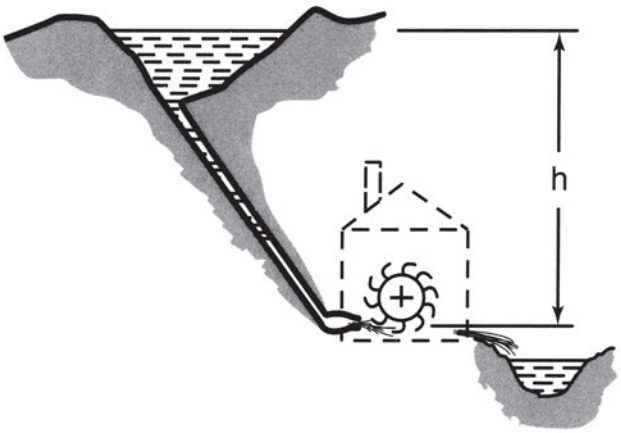
Απάντηση: Δρ AB = 588,6 N/m^2



σχ.15.10.β

9. Υδραυλικός γρύλος έχει 40 cm διάμετρο στο μεγάλο έμβολο και 10 cm στο μικρό. Χρησιμοποιείται για την ανύψωση το πολύ 15 KN. Να υπολογισθεί η αναγκαία δύναμη στο μικρό έμβολο και η πίεση που επικρατεί μέσα στο γρύλο.

Απάντηση: F_A = 937 N, P = 11.9 × 10^6 N/m^2



ΚΕΦΑΛΑΙΟ **16**

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

16.1 Γενικά - ορισμοί

16.2 Τρόποι κίνησης των υγρών

16.3 Τέλεια ή ιδανικά υγρά

16.4 Οι νόμοι ροής των ιδανικών υγρών

16.5 Ροή υγρών σε σωλήνες

16.6 Θεώρημα του Torricelli

16.7 Ροή υγρών γύρω από γεωμετρικά σώματα

16.8 Εφαρμογές



Επιδιωκόμενοι στόχοι:

Οι μαθητές:

- Να εξηγούν τη ροή, ως προς ένα σύστημα αναφοράς: το πεδίο ροής και τις ρευματικές γραμμές (ομοιόμορφη και στροβιλώδη ροή).
- Να εξηγούν την ταχύτητα ροής και να δίνουν τον ορισμό της παροχής.
- Να εξηγούν τους νόμους της ροής, τη τριβήν των υγρών σε σωλήνες και την αρχή Torricelli.
- Να αναφέρουν πρακτικές εφαρμογές και να αντιμετωπίζουν πρακτικά προβλήματα, με βάση τις αρχές αυτές.
- Να εξηγούν τη λειτουργία και τη χρήση του μετρητή και του ταχύμετρου.

16.1 ΓΕΝΙΚΑ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Η κίνηση υγρού, ονομάζεται **ροή** ενώ ο χώρος μέσα στον οποίο έχουμε ροή, ονομάζεται **πεδίο ροής**. Για να πραγματοποιηθεί η ροή, δηλαδή για να αρχίσει ένα υγρό σε ηρεμία να κινείται, θα πρέπει τα μόριά του να αποκτήσουν επιτάχυνση. Όπως συμβαίνει σε όλα τα υλικά σώματα, έτσι και στα υγρά, θα πρέπει στη μάζα του υγρού να ασκηθεί δύναμη F, που θα προσδώσει στη μάζα αυτή επιτάχυνση γ, σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής: $F= m\cdot\gamma$

Ο μόνος τρόπος να εφαρμόσουμε δύναμη σε υγρό, είναι να δημιουργήσουμε διαφορά πίεσης, πέραν της οφειλόμενης στην υψομετρική διαφορά. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει, π.χ., με αντλίες ή με το να δώσουμε δίοδο διαφυγής στο υγρό. Κατά τη διάρκεια της ροής, η κατάσταση μέσα στη μάζα του ίδιου του υγρού - είναι αυτονόητο - δεν είναι, όπως όταν το υγρό ηρεμεί γιατί εκτός από την ύπαρξη διατμητικών δυνάμεων, έχουμε και την εμφάνιση τριβής. Η τριβή εμφανίζεται, τόσο μεταξύ των μορίων του ρέοντος υγρού, όσο και μεταξύ του υγρού και των τοιχωμάτων του χώρου, μέσα στον οποίο έχουμε τη ροή. Η τριβή αυτή οφείλεται στο γεγονός, ότι οι

δυνάμεις συνοχής των μορίων των υγρών είναι πολύ μικρότερες, από όσες είναι στα στερεά, και έτσι, κατά την κίνηση των υγρών, τα μόρια κινούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και συγκρούονται μεταξύ τους, χάνοντας έτσι ενέργεια σε αυτές τις κρούσεις.

Αυτή η τριβή είναι χαρακτηριστική ιδιότητα για κάθε ένα υγρό και ονομάζεται **ιξότης** ή **εσωτερική τριβή**. Το ποσοτικό μέτρο αυτής της ιδιότητας, είναι το **ιξώδες*** ή **συντελεστής εσωτερικής τριβής**. Τα παχύρρευστα υγρά έχουν μεγάλο ιξώδες, ενώ τα περισσότερο ρευστά, όπως το νερό, έχουν μικρό ιξώδες.

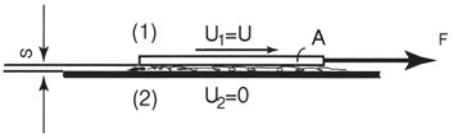
16.2 ΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

Όπως είπαμε, τα μόρια των υγρών κινούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Κάθε μόριο, επομένως, διαγράφει τη δική του **τροχιά**, με τη δική του ταχύτητα. Η τροχιά του μορίου είναι μία γραμμή, σε κάθε σημείο της οποίας η εφαπτομένη της δίνει τη διεύθυνση της ταχύτητας του μορίου αυτού. Για να έχουμε την εικόνα ενός πεδίου ροής, θα πρέπει να γνωρίζουμε και την κατανομή των ταχυτήτων, για κάθε χρονική στιγμή, στο χώρο αυτού του πεδίου. Για το σκοπό αυτό, αφού πρώτα ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς, π.χ. ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων: υπολογίζουμε,λοιπόν, για κάθε σημείο του πεδίου ροής Α (χ, ψ, ζ) και για κάθε χρονική στιγμή t, το άνυσμα της ταχύτητας U(u, v, w). Έχοντας τα στοιχεία αυτά η εικόνα του πεδίου ροής δίνεται:

α) Από τη **γραμμή κίνησης**: Οι γραμμές κίνησης είναι καμπύλες, σε κάθε σημείο των οποίων η εφαπτομένη έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας μορίου, που στη δεδομένη χρονική στιγμή βρίσκεται στο υπόψη σημείο. Οι γραμμές κίνησης δεν συμπίπτουν, στη γενική περίπτωση, με τις τροχιές των μορίων του υγρού. Αυτό συμβαίνει γιατί οι γραμμές κίνησης και οι τροχιές δεν αφορούν στο αυτό μόριο του υγρού.

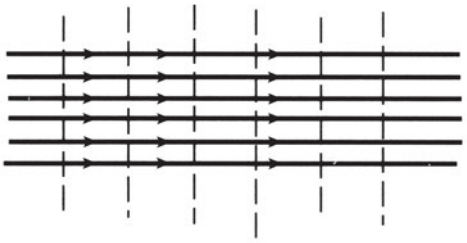
---

* το ιξώδες ορίζεται ως εξής:
Αν η πλάκα (1) έχει εμβαδόν Α, και υπό την επίδραση της δύναμης F, κινείται με ταχύτητα $U_1 = U$, πάνω σε ένα στρώμα υγρού πάχους S, ενώ η πλάκα (2) έχει ταχύτητα $U_2 = 0$, τότε, ισχύει $F = \mu \cdot A \cdot U/S$, όπου μ το ιξώδες του υγρού. Η μονάδα του μ είναι: 1 $\frac{N \cdot s}{m^2}$



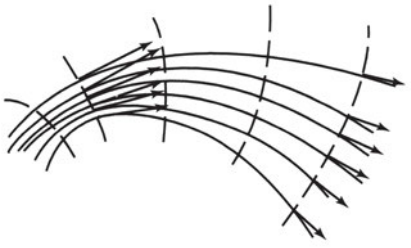
β) Από τις **επιφάνειες σταθεράς ταχύτητας**, από τις οποίες φαίνεται το μέτρο των ταχυτήτων. Από τα παραπάνω, προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

1) Η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από το χρόνο και από τη θέση, δηλαδή είναι σταθερή και η ίδια παντού μέσα στο χώρο του πεδίου ροής. Τότε, έχουμε την **ομοιόμορφη μόνιμη ροή**, όπου οι γραμμές κίνησης και οι τροχιές των μορίων του υγρού συμπίπτουν, είναι ευθείες παράλληλες και, για την εποπτική παράσταση του πεδίου, ισαπέχουσες (σχ. 16. 2. α) και οι **επιφάνειες σταθεράς ταχύτητας**, είναι επίπεδα κάθετα στις τροχιές.



Σχήμα 16.2.α

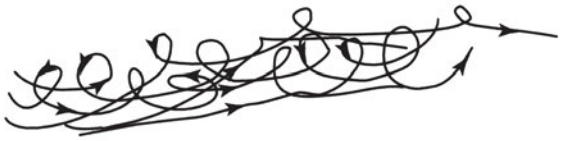
2) Η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από το χρόνο αλλά είναι συνάρτηση της θέσης: δηλαδή, διαφέρει από θέση σε θέση, αλλά σε κάθε θέση παραμένει σταθερή. Τότε, έχουμε την **ανομοιόμορφη μόνιμη ροή** και εδώ οι γραμμές κίνησης συμπίπτουν με τις τροχιές των μορίων, είναι καμπύλες και όχι, κατ' ανάγκη, παράλληλες μεταξύ τους (σχ. 16.2.β) και οι επιφάνειες σταθερής ταχύτητας, είναι ορθογώνιες προς τις γραμμές αυτές.



Σχήμα 16.2.β *Ανομοιόμορφη μόνιμη ροή*

3) Η ταχύτητα είναι συνάρτηση και του χρόνου και της θέσης. Τότε, έχουμε τη μη **μόνιμη ροή**, ενώ οι γραμμές κίνησης **δεν** συμπίπτουν με τη χρονιά των μορίων και είναι ακανόνιστες. Εκεί που η ταχύτητα

είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η κίνηση των μορίων γίνεται με **τάξη** και έχουμε τη λεγόμενη **"στρωτή ροή"**. Στην περίπτωση αυτή, οι γραμμές κίνησης και οι τροχιές των μορίων συμπίπτουν και τότε ονομάζονται **"ρευματικές γραμμές".** Στη μη μόνιμη ροή, δημιουργούνται στροβιλισμοί, εξ αιτίας, βέβαια, της εσωτερικής τριβής και τότε έχουμε τη λεγόμενη **"στροβιλώδη ροή".**



Σχήμα 16.2.γ *Μη μόνιμη ροή*

Στρωτή ροή έχουμε σε χαμηλές ταχύτητες, ενώ σε μεγαλύτερες ταχύτητες, η ροή γίνεται στροβιλώδης.

Ο Osborne Reynolds μας παρέχει ένα εμπειρικό τύπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε, πότε μία ροή μεταπίπτει από στρωτή ,σε στροβιλώδη.

Ο τύπος είναι:

$$R_e=\rho\cdot v\cdot d/\mu \qquad (16.2.\alpha)$$

όπου:

R_e = ο αριθμός του Reynolds (αδιάστατος αριθμός)

ρ = η πυκνότητα του υγρού (σε kp/m^3)

v = η στιγμιαία ταχύτητα ροής (σε m/s)

d = η διάμετρος του αγωγού ροής (σε m)

μ = το ιξώδες του υγρού σε $N \cdot s / m^2$

Έτσι,

για $R_e < 2000$ έχουμε στρωτή ροή,

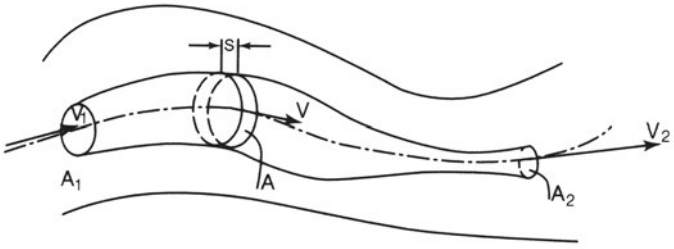
για $R_e > 2800$ έχουμε στροβιλώδη ροή,

για τιμές του R_e μεταξύ 2000 και 2800, η κατάσταση είναι ασαφής.

16.3 ΤΕΛΕΙΑ Ή ΙΔΑΝΙΚΑ ΥΓΡΑ

Επειδή τα προβλήματα που παρουσιάζονται στη ροή είναι πολύπλοκα, για να τα αντιμετωπίσουμε, σε μία πρώτη προσέγγιση, θεωρούμε ότι τα υγρά δεν έχουν εσωτερική τριβή, δηλαδή ισχύει για το ιξώδες τους μ = 0. Αυτά τα φανταστικά υγρά, τα ονομάζουμε **τέλεια** ή **ιδανικά υγρά**.

Συνέπεια αυτής της υπόθεσης είναι, ότι οι μόνες δυνατές τάσεις, είναι οι ορθές θλιπτικές τάσεις, όπως συμβαίνει και στα ηρεμούντα υγρά. Τέτοια υγρά δεν υπάρχουν, βέβαια, στη φύση. Όμως σε υγρά με μικρό ιξώδες, όπως το νερό, είναι δυνατή η μελέτη της κίνησής τους, με πολύ καλή προσέγγιση. Σε ένα τέλειο υγρό, η ροή είναι πάντοτε στρωτή. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας Α, μέσα σε ένα πεδίο ροής ιδανικού ρευστού, (σχ. 16.3α) και από κάθε σημείο του περιγράμματος φέρουμε την αντίστοιχη ρευματική γραμμή, έχουμε, τότε, μία **φλέβα ροής**.



Σχήμα 16.3.α *Φλέβα ροής*

Επειδή οι ταχύτητες των μορίων του υγρού είναι εφαπτόμενες των ρευματικών γραμμών, υγρό ούτε εισρέει ούτε εξέρχεται από τη φλέβα. Δηλαδή, το ρευστό ρέει μέσα στη φλέβα, ως εάν αυτή ήταν ένας σωλήνας. Ονομάζουμε **"παροχή"** της φλέβας, τον όγκο U του υγρού που περνά από μία διατομή της φλέβας, δια του χρόνου t, που χρειάστηκε για τη διέλευση αυτού του όγκου, ή με άλλα λόγια παροχή της φλέβας είναι, ο όγκος του υγρού που περνά από μία διατομή, στη διάρκεια της μονάδας του χρόνου. Αν Q ,η παροχή, τότε:

$$Q = \frac{U}{t} \quad \text{σε} \quad \frac{m^3}{s} \qquad (16.3\alpha)$$

Επειδή θεωρήσαμε το υγρό ιδανικό, τότε, θα είναι και ασυμπίεστο, οπότε (σχ. 16.3.α) από τη διατομή Α της φλέβας περνά όγκος υγρού U = A·S οπότε η παροχή σύμφωνα με τη σχέση 16.3.α, θα είναι Q = A·S/t δηλαδή

$$Q = A \cdot v \qquad (16.3.\beta)$$

Από τη τελευταία αυτή σχέση έχουμε:

$$v = Q/A \qquad (16.3\gamma)$$

(η ταχύτητα v ονομάζεται και μέση ταχύτητα συμβολίζεται δε με το V_m)

16.4 ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΤΩΝ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Για τη ροή των ιδανικών υγρών μέσα σε μία φλέβα ισχύουν οι παρακάτω δύο νόμοι:

Ο νόμος της συνέχειας και ο νόμος του Bernoulli.

α. Ο νόμος της συνέχειας

Η διατύπωσή του έχει ως εξής:

“Η παροχή μίας φλέβας είναι σταθερή, για οποιαδήποτε διατομή αυτής”

Όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο για μία διατομή της φλέβας ισχύει:

$Q = A \cdot v$ (σχέση 16.3.β)

Επειδή το υγρό θεωρείται ιδανικό, άρα και ασυμπίεστο, όσος όγκος περνά από μία διατομή σε κάποιο χρόνο t, θα πρέπει να περάσει στον αυτό χρόνο ο ίδιος όγκος και από τις άλλες διατομές: άρα, μεταξύ δύο διατομών A_1 και A_2 με ταχύτητα v_1 και v_2, αντίστοιχα, θα πρέπει να ισχύει:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (16.3.\delta)$$

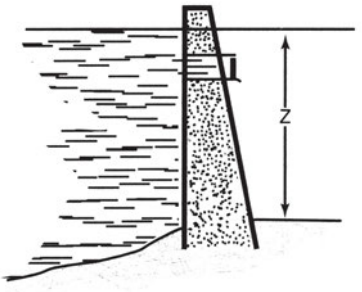
Από τη σχέση αυτή που εκφράζει το νόμο της συνέχειας, έχουμε το συμπέρασμα, ότι σε μικρή διατομή της φλέβας, αντιστοιχεί μεγάλη ταχύτητα και αντίστροφα. Επίσης, εκεί που η ταχύτητα είναι μεγάλη έχουμε και μικρή πίεση, ενώ, όπου η ταχύτητα είναι μικρή, η πίεση είναι μεγάλη. Η παρατήρηση αυτή ισχύει, με πολύ μεγάλη προσέγγιση, και για τα πραγματικά υγρά που έχουν μικρό ιξώδες, όπως το νερό.

Β. Ο νόμος του Bernoulli

Στα υγρά*, είτε αυτά είναι κινούμενα (v≠0), είτε σε ηρεμία (v=0), υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια. Η ενέργεια αυτή είναι τριών ειδών:

i. **Δυναμική ενέργεια**

Η ενέργεια αυτή οφείλεται στη θέση του υγρού. Έστω μάζα υγρού m (σε kg), που βρίσκεται σε ένα ύψος z (σε m) από μία στάθμη αναφοράς, (σχ. 16. 4. α). Τότε, η δυναμική ενέργεια εκφράζεται από τη σχέση:



Σχήμα 16.4.α *Δυναμική ενέργεια υγρού*

$$E_{δυν} = m \cdot g \cdot z \qquad (16.4.α)$$

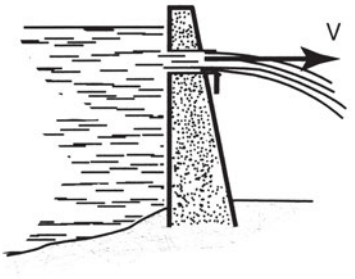
Στη σχέση αυτή, η δυναμική ενέργεια δίνεται σε Nm ή Joule. Πολλές φορές εκφράζουμε την ενέργεια, ανά μονάδα μάζας ή μονάδα βάρους του υγρού, οπότε έχουμε αντίστοιχες εκφράσεις

Ανά μονάδα μάζης: $E_{δυν} = g \cdot z$ σε J/kg

Ανά μονάδα βάρους: $E_{δυν} = z$ σε m

ii. Κινητική ενέργεια

Μάζα M (σε kg) υγρού, κινείται με ταχύτητα υ = 0 (σε m/s) (σχ. 16.4.β). Τότε η κινούμενη μάζα έχει κινητική ενέργεια που εκφράζεται από τη σχέση:



Σχήμα 16.4.β *Κινητική ενεργεια υγρού*

$$E_{κιν} = ½ \, m \cdot v^2 \qquad (16.4.β).$$

Στη σχέση 16.4.β, η κινητική ενέργεια δίνεται σε Nm ή Joule. Αντίστοιχα, οι εκφράσεις της κινητικής ενέργειας, ανά μονάδα μάζης ή βάρους των υγρών, είναι:

* Σε πάρα πολλές και σοβαρές πρακτικές εφαρμογές το υγρό είναι το νερό.

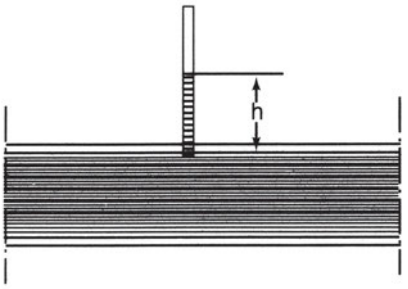
Ανά μονάδα μάζης: $E_{κιν} = v^2/2$ j/kg

Ανά μονάδα βάρους: $E_{κιν} = v^2/2g$ m

iii. Πιεζομετρική ενέργεια

Αν το μανόμετρο δείχνει ύψος h, σε ένα σωλήνα, που τον διαρρέει υγρό, τότε η ενέργεια του υγρού που αντιστοιχεί σ' αυτήν την πίεση και σε ποσότητα M (σε kg), είναι:

$$E_{κιν} = Mgh \qquad (16.4γ)$$



Σχήμα 16.4.γ *Πιεζομετρική ενέργεια υγρού*

Στη σχέση 16.4.γ, η πιεζομετρική ενέργεια δίνεται σε Nm ή Joule.

Επειδή η πίεση p του υγρού, είναι $p = \rho \cdot g \cdot h$ έπεται ότι $p/\rho = gh$ και άρα η 16.4.γ γίνεται $E_{πιεζ} = M\, p/\rho$ (16.4.δ)

αντίστοιχα δε οι εκφράσεις της πιεζομετρικής ενέργειας, ανά μονάδα μάζης ή βάρους υγρού είναι:

Ανά μονάδα μάζης: $E_{πιεζ} = p/\rho$ σε J/kg

Ανά μονάδα βάρους: $E_{πιεζ} = p/w$ σε m

Το άθροισμα της **δυναμικής ενέργειας**, της **κινητικής ενέργειας** και της **πιεζομετρικής ενέργειας**, ονομάζεται **"ολική ενέργεια"** της δοσμένης ποσότητας του υγρού.

Η πρόταση του Bernoulli διατυπώνεται ως εξής:

> **''Η ολική ενέργεια, δοσμένης ποσότητας υγρού, παραμένει σταθερά, καθ' όλο το μήκος της φλέβας''.**

Παρόλο που η πρόταση αυτή, η οποία διατυπώθηκε από τον Daniel Bernoulli το 1783, αναφέρεται στη μόνιμη ροή των ιδανικών υγρών, εντούτοις χρησιμεύει για την ερμηνεία, πολλών φαινομένων της Υδραυλικής, αφού βέβαια, ληφθούν υπόψη, διορθωτικοί συντελεστές, κατά περίπτωση.

Επομένως:

$E_{ολ} = E_{δυν} + E_{κιν} + E_{πιεζ}$ = σταθερό

και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις 16.4.α, 16.4.β, 16.4.γ

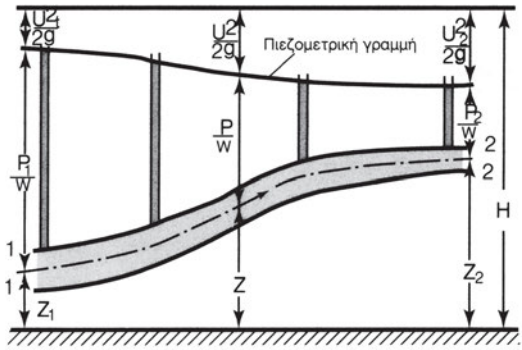
έχουμε $E_{ολ} = Mgz + ½ M \cdot v^2 + M\, p/ρ$ = σταθερό (16.4.δ)

και αντίστοιχα

Ανά μονάδα μάζης $zg + v^2/2 + p/ρ$ = σταθερό (16.4.ε)

Ανά μονάδα βάρους $z + v^2/2g + p/w$ = σταθερό (16.4.στ)

Από την τελευταία αυτή σχέση, μπορούμε να έχουμε και γραφική παράσταση του Νόμου του Bernoulli και τις συμμετοχές των επί μέρους όρων, στο σταθερό σύνολο, κατά τις μεταβολές της ροής στη φλέβα (σχ. 16.4.δ).

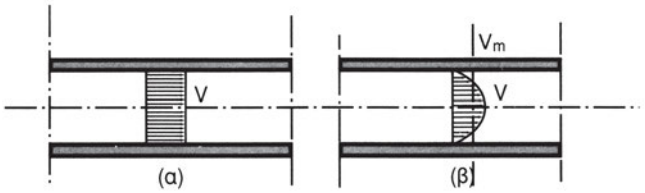


Σχήμα 16.4.δ *Οι μεταβολές των υψών που αντιστοιχούν στις επί μέρους ενέργειες και η συμμετοχή τους στην ολική ενέργεια, κατά τη μόνιμη ροή ιδανικού υγρού και η πιεζομετρική γραμμή (Νόμος Bernoulli)*

Η γραμμή που ενώνει τις κορυφές των υψών z και p/w, δηλαδή αυτή που αντιστοιχεί στη δυναμική και πιεζομετρική ενέργεια, ονομάζεται “πιεζομετρική γραμμή”. Η κλίση αυτής της γραμμής, μας δίνει τις μεταβολές της ταχύτητας ροής.

16.5 ΡΟΗ ΥΓΡΩΝ ΣΕ ΣΩΛΗΝΕΣ

Στο σχήμα 16.5.α, βλέπουμε την κατανομή των ταχυτήτων σε μόνιμη ροή υγρού και πιό συγκεκριμένα:



Σχήμα 16.5.α *Κατανομή ταχυτήτων υγρού, μέσα σε σωλήνα α) ιδανικού υγρού β) πραγματικού υγρού*

(α) στην περίπτωση ροής ιδανικού υγρού

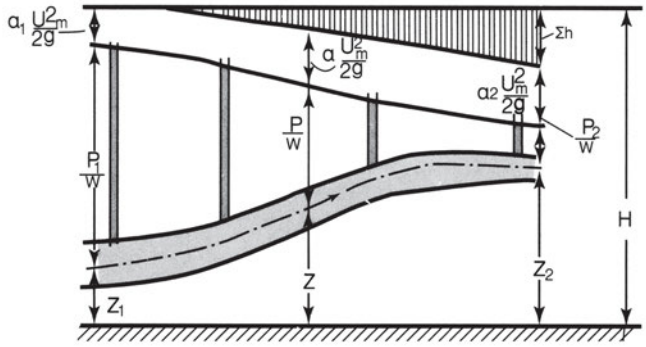
(β) στην περίπτωση ροής πραγματικού υγρού.

Στο πραγματικό υγρό, αυτή η κατανομή, είναι παραβολική, ενώ στο ιδανικό, είναι σταθερή. Αυτή η διαφορά μεταξύ πραγματικού και ιδανικού υγρού, οφείλεται στην υπόθεση που κάνουμε ότι τα ιδανικά υγρά δεν έχουν εσωτερική τριβή. Δεχόμαστε, δηλαδή, ότι για τα ιδανικά υγρά, ισχύει για το ιξώδες μ=0. Στα πραγματικά υγρά όπου είναι μ=0, έχουμε την παραβολική κατατομή και απώλειες, τόσο κατά τη μόνιμη ροή, όσο και στη μη μόνιμη την τυρβώδη, κατά την οποία, οι απώλειες είναι περισσότερες.

Συνέπεια αυτών που είπαμε παραπάνω, είναι ότι, για να εφαρμοσθεί η εξίσωση του Bernoulli (σχέση 16.4.στ) και αντίστοιχα οι άλλες εκφράσεις τους στα πραγματικά υγρά, θα πρέπει να τροποποιηθεί, έτσι ώστε, να ληφθούν υπόψη και οι απώλειες. Η εξίσωση του Bernoulli, λοιπόν, για ροή πραγματικού υγρού μέσα σε ένα σωλήνα μεταξύ δύο διατομών (1) και (2) θα γίνει:

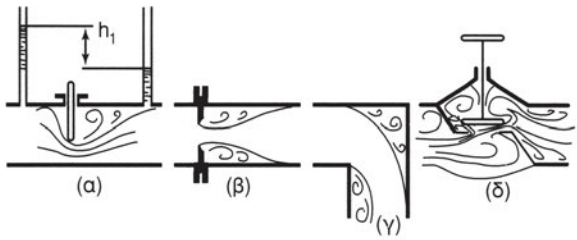
$$z_1 + \alpha_1 \frac{v_{m1}^2}{2g} + \frac{p_1}{w} = z_2 + \alpha_2 \frac{v_{m2}^2}{2g} + \frac{p_2}{w} + \Sigma h \qquad (16.5.\alpha)$$

Σε αυτή την περίπτωση το σχήμα 16.4δ γίνεται όπως δείχνει το σχήμα 16.5.β. Όπου v_m είναι η αντίστοιχη, κάθε διατομής, μέση ταχύτητα και α αδιάστατος συντελεστής εξαρτόμενος από τα στοιχεία της ροής για την περίπτωση της μη μόνιμης ροής, Σh είναι το σύνολο των απωλειών λόγω τριβών. Από όσα λίγα είπαμε, για την εφαρμογή του νόμου Bernoulli, στα ιδανικά και στα πραγματικά υγρά, καταφαίνεται η αξία της μελέτης θεωρητικών ιδανικών καταστάσεων και πως από τα πορίσματα της θεωρίας μεταφερόμαστε στην πράξη.



Σχήμα 16.5.β *Ο νόμος του Bernoulli σε πραγματικά υγρά*

Εκτός από τις απώλειες των πραγματικών υγρών, εξαιτίας του ιξώδους, έχουμε και απώλειες, λόγω των "εμποδίων" που το υγρό συναντά κατά τη ροή του μέσα στο σωλήνα. Τέτοια εμπόδια είναι οι βάννες, οι στροφές, οι συστολές κ.λ.π. Στο σχήμα 16.5γ φαίνονται σχηματικά τέτοια εμπόδια, που τα λέμε **"τοπικές αντιστάσεις"** και όπου φαίνεται καθαρά, ότι οι τοπικές αντιστάσεις δημιουργούν περισσότερους στροβιλισμούς και, επομένως, είναι φυσικό να έχουμε περισσότερες απώλειες.



Σχήμα 16.5.γ *Τοπικές αντιστάσεις*

Στο σχήμα 16.5.γ(α) με δύο μανόμετρα, ένα πριν και ένα μετά από την τοπική αντίσταση, φαίνεται και πειραματικά η απώλεια της ενέργειας. Αποδεικνύεται δηλαδή ότι οι "τοπικές αντιστάσεις" δίνουν πτώση της ενέργειας, ανάλογη προς το τετράγωνο της μέσης ταχύτητας ροής V_m. Είναι δηλαδή,

$$h = \zeta \cdot \frac{v_m^2}{2g} \qquad (16.5.\beta)$$

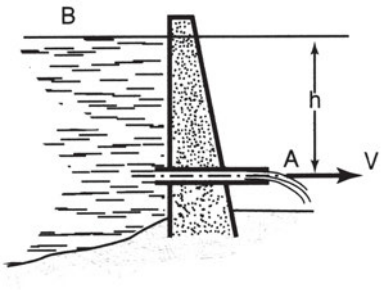
ή για την πτώση της πίεσης

$$p = hw = \zeta \cdot \left(\frac{v_m^2}{2g} \right) \cdot w \qquad (16.5.\gamma)$$

Ο συντελεστής ζ, (συντελεστής απωλειών), εξαρτάται από τη διάμετρο του σωλήνα, το είδος του σωλήνα (σιδερένιος, χάλκινος, πλαστικός κ.λ.π.) και από το είδος της τοπικής αντίστασης (βάννα, διακόπτης, γωνία κ.λ.π.) Οι τιμές των συντελεστών ζ δίνονται από πίνακες, που συντάσσουν οι κατασκευαστές αυτών των ειδών. Η πιεζομετρική γραμμή, εξάλλου, στις θέσεις των τοπικών αντιστάσεων, παρουσιάζει ασυνέχεια.

16.6 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ TORRICELLI

Έστω, σε ένα βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια ενός ταμιευτήρα νερού (σχ. 16.6.α), μία σωλήνα εκροής.
Με την προϋπόθεση ότι το βάθος h παραμένει σταθερό, εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli. Μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας B, του ταμιευτήρα και του στομίου εκροής A, θα έχουμε από τη σχέση 14. 4. στ



Σχήμα 16.6.α *Κίνηση υγρού λόγω της επίδρασης της βαρύτητας (θεώρημα Torricelli)*

$$z_B + \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{w} = z_A + \frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{w}$$

Αλλά είναι: $P_A = P_B = P_{atm}$ (η ατμοσφαιρική πίεση), ενώ

η ταχύτητα ροής, v_B, στην επιφάνεια του ταμιευτήρα, αφού δεν μειώνεται το βάθος h, θα είναι $v_B = 0$. Για τα υψόμετρα, έχουμε :

$z_A = 0$ και $z_B = h$ άρα, η 16.6.α γίνεται:

$$h + \frac{P_{atm}}{w} = \frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{w}$$

ή $h = V_A^2 / 2g$

ή $$V_A = \sqrt{2gh} \qquad (16.6.\beta)$$

Η παραπάνω αυτή σχέση εκφράζει την αρχή ή το θεώρημα του Torricelli, που διατυπώνεται ως εξής:

> **"Υγρό που ρέει, εξ αιτίας της βαρύτητας και μόνο, από διέξοδο που βρίσκεται σε ορισμένο βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια, θα έχει ταχύτητα εκροής ίση προς εκείνη που θα αποκτούσε, εάν έπεφτε ελεύθερα από το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας μέχρι τη θέση της εκροής".**

Στην πράξη, λόγω των απωλειών, περί των οποίων έχουμε κάνει λόγο, η ταχύτητα είναι μικρότερη, ανάλογα με τη μορφή του στομίου εκροής, και ο τύπος 16. 6. β, γίνεται:

$$\upsilon_A = C_v \sqrt{2gh}$$

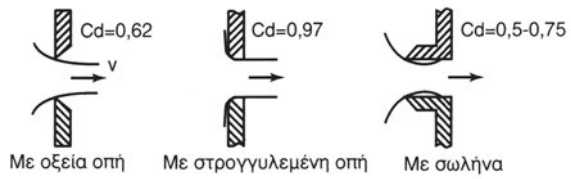
(σχ.16.6.γ) με το συντελεστή C_v να έχει τιμές 0,95 έως 0,99. Θα πρέπει, ακόμη, να αναφέρουμε εδώ, ότι η ροή του πραγματικού υγρού που εκρέει από το στόμιο έχει διατομή μικρότερη από τη διατομή του σωλήνα εκροής και, έτσι, η διατομή της φλέβας, αν S η διατομή του σωλήνα, είναι $C_c \cdot S$, με $C_c<1$. Οπότε, ενώ η θεωρητική παροχή είναι:

$$Q_e = S \sqrt{2gh}$$

η πραγματική θα είναι:

$$Q_\pi = C_v C_c S \sqrt{2gh} \qquad (16.6.\delta)$$

Θέτουμε $C_v \cdot C_c = C_d$ (συντελεστής παροχής). Οι τιμές του C_d για τις πιο συνηθισμένες οπές, είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα 16.6.β



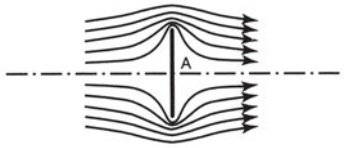
Σχήμα 16.6.β *Οι τιμές του συντελεστή Cd, ανάλογα με το στόμιο εκροής.*

16.7 ΡΟΗ ΥΓΡΩΝ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Επειδή στις υδραυλικές κατασκευές μας χρησιμοποιούμε διάφορα εξαρτήματα για να κατευθύνουμε τη ροή των υγρών, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον η μελέτη της ροής όχι μόνον μέσα στους αγωγούς αλλά και γύρω από διάφορα σώματα. Τα προβλήματα που παρουσιάζονται σε τέτοιες μελέτες είναι πολύπλοκα. Θα περιγράψουμε, εδώ, δύο μόνο απλές περιπτώσεις.

α) Ροή υγρού γύρω από πλάκα κάθετη στη διεύθυνση ροής

Όπως έχουμε παρατηρήσει στη παράγραφο 16.2, την εικόνα της ροής σε ένα πεδίο ροής την δίνουν οι ρευματικές γραμμές. Η εικόνα των ρευματικών γραμμών ροής ιδανικού υγρού γύρω από πλάκα τοποθετημένη κάθετα στη διεύθυνση ροής, είναι αυτή του σχήματος 16.7.α.



Σχήμα 16.7.α *Ροή ιδανικού υγρού γύρω από επίπεδη πλάκα, κάθετη στη διεύθυνση ροής.*

Η μορφή των ρευματικών γραμμών μας δείχνει ότι στα άκρα της πλάκας έχουμε μεγάλη ταχύτητα, ενώ στο σημείο Α (στο κέντρο της πλάκας) έχουμε ταχύτητα μηδέν. Το σημείο αυτό το ονομάζουμε **"σημείο ανακοπής".**

Ας θεωρήσουμε μία στοιχειώδη φλέβα που περνά πολύ κοντά από το σημείο ανακοπής Α. Η εξίσωση του Bernoulli μεταξύ της θέσης Α και μίας πολύ μακρύτερης για τη φλέβα που υποθέσαμε γράφεται:

$$\frac{P_\infty}{w} + \frac{v_\infty^2}{2g} = \frac{P_A}{w} + \frac{v_A^2}{2g}$$

αλλά $v_A = 0$

$$\text{άρα } P_A = P + \frac{U_\infty^2 w}{2g} = P_\infty = P_\infty + \frac{U^2 \rho}{2}$$

όπου ρ η πυκνότητα του υγρού.

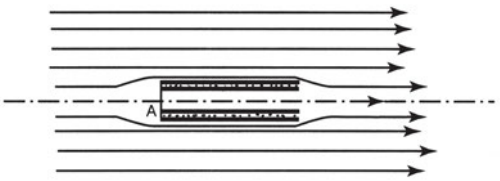
Από αυτή τη σχέση, γίνεται κατανοητό, ότι η πίεση στο σημείο ανακοπής λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή της.

Λόγω της συμμετρίας της ροής, η ίδια εικόνα είναι και από την άλλη πλευρά της πλάκας. Άρα, αυτή η πλάκα, μέσα σε ροή ιδανικού υγρού, δεν παρουσιάζει αντίσταση.

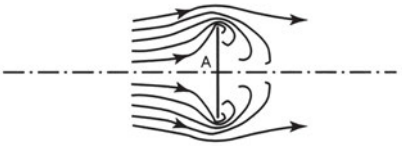
Αν σε ένα μόνιμο πεδίο ροής, βάζουμε ένα σωλήνα με το στόμιο κάθετο στη ροή (σχ.16.7.β), θα σχηματιστεί στο σημείο εισόδου Α, ένα σημείο

ανακοπής και, επομένως, στο σημείο αυτό, η πίεση θα είναι ίση με το άθροισμα της στατικής και τη δυναμική πίεση.

Η εικόνα της ροής γύρω από επίπεδη πλάκα κάθετη στη ροή σε πραγματικό υγρό, διαφέρει από τη θεωρητική εικόνα που είδαμε στο σχήμα (16.7.α)



Σχήμα 16.7.β *Εμφάνιση σημείου ανακοπής στο στόμιο σωλήνα*

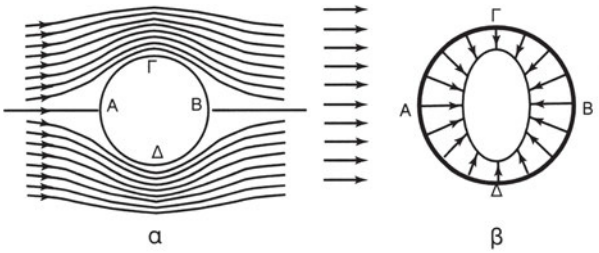


Σχήμα 16.7.γ *Ροή γύρω από πλάκα, πραγματικού υγρού*

Στο σχ.16.7.γ, τώρα, έχουμε ροή πραγματικού υγρού, η οποία στο εμπρόσθιο μέρος της είναι σχεδόν όμοια με τη ροή ιδανικού υγρού. Στο πίσω μέρος, όμως έχουμε τη δημιουργία στροβίλων, δεν υπάρχει, εδώ, σημείο ανακοπής, και αντίθετα από τη περίπτωση του ιδανικού υγρού, παρουσιάζεται μεγάλη αντίσταση στη ροή του υγρού.

β) Ροή υγρού γύρω από σφαίρα

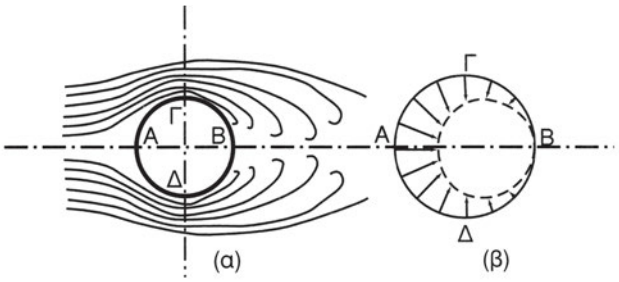
Η ροή ιδανικού υγρού γύρω από σφαίρα, είναι ανάλογη με αυτή της πλάκας (σχ. 16.7.δ.)



Σχήμα 16.7.δ *Ροή ιδανικού υγρού γύρω από σφαίρα*
α) Οι ρευματικές γραμμές β) Η κατανομή των πιέσεων

Εμφανίζονται και εδώ δηλαδή τα σημεία ανακοπής (σημεία Α και Β), ενώ στα σημεία Γ και Δ έχουμε αύξηση της ταχύτητας και φυσικά, αντίστροφα δεδομένα για την πίεση, δηλαδή, μεγαλύτερη τιμή πίεσης στα σημεία ανακοπής Α και Β, και μικρότερη στα Γ και Δ. Όπως συμβαίνει και

στη ροή του ιδανικού υγρού γύρω από την πλάκα, έτσι και εδώ η σφαίρα δεν παρουσιάζει αντίσταση στη ροή.



Σχήμα 16.7.ε *Ροή πραγματικού υγρού γύρω από σφαίρα*
α) Οι ρευματικές γραμμές β) Η κατανομή των πιέσεων

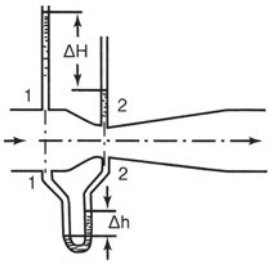
Στο σχ.14.7.ε, έχουμε τη ροή πραγματικού υγρού γύρω από σφαίρα, όπου και εδώ, στο μπροστινό μέρος της, έχουμε εικόνα, όπως και στη ροή ιδανικού υγρού, αλλά στο πίσω, έχουμε στροβίλους επομένως και εδώ πάλι, έχουμε απώλειες.

16.8 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Οι εφαρμογές των πορισμάτων της Υδροδυναμικής και γενικότερα της δυναμικής των ρευστών, είναι πολλές. Έχουμε εφαρμογές στη σχεδίαση πλοίων, αεροπλάνων για τη μείωση της αντίστασης του νερού ή του αέρα, αντίστοιχα στη σχεδίαση δικτύων σωληνώσεων για ύδρευση, αποχέτευση κ.λ.π. στη σχεδίαση μεγάλων αρδευτικών έργων και αλλού επίσης, τα πορίσματά της έχουν εφαρμογή και σε πολλά όργανα και εργαλεία, όπως στους ψεκαστήρες, σε μετρητικά όργανα, κ.λ.π. Στα επόμενα, θα δούμε μερικές απλές εφαρμογές αυτών των πορισμάτων της Υδροδυναμικής

(i) ***Μετρητής Βεντούρι*** (σχ. 16.8.α)

Ο μετρητής Βεντούρι χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της παροχής υγρού ενός σωλήνα. Ο μετρητής αυτός είναι ένας οριζόντιος σωλήνας, που έχει μια στένωση μορφή συγκλίνοντος - αποκλίνοντος ακροφυσίου. Όπως έχουμε αναλύσει και στην παράγραφο 16.4, σε μικρές



σχ. 16.8.α *Μετρητής Βεντούρι*

διατομές έχουμε αύξηση της ταχύτητας και πτώση της πίεσης, ενώ σε μεγαλύτερες διατομές, συμβαίνει το αντίθετο. Μετράμε τη διαφορά πίεσης μεταξύ των διατομών 1 και 2, με δύο απλά μανόμετρα ή με ένα διαφορικό τύπου U. Έχοντας, τώρα, τη διαφορά πίεσης και θεωρώντας ομοιόμορφη την κατανομή των ταχυτήτων, γράφουμε την εξίσωση της ανέχειας και την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των δύο αυτών διατομών. Έστω, λοιπόν, s_1 και s_2 οι διατομές 1 και 2. Επειδή ο σωλήνας είναι οριζόντιος τα ύψη z τα αντιστοιχούντα στη δυναμική ενέργεια απαλείφονται, και έτσι έχουμε τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \cdot S_1 = v_2 S_2 \\ \dfrac{\rho_1}{w}+\dfrac{V_1^2}{2g}=\rho_2 w+\dfrac{V_2^2}{2g} \end{array}\right\} \text{σχέση 16.7.α}$$

Επιλύοντας το σύστημα 14.7.α ως προς v_1 έχουμε:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\rho_1 - \rho_2\right)}{w\left(\dfrac{s_1^2}{s_1^2} - 1\right)}} \qquad (14.7.\beta)$$

όπου στο δεύτερο μέλος αυτής της ισότητας μας είναι όλα γνωστά.

Η διαφορά πίεσης $p_1 - p_2$ έχει μετρηθεί. Οι διατομές s_1 και s_2 του οργάνου είναι σταθερές και πολλαπλασιάζονται με το w, που είναι το ειδικό βάρος του υγρού άρα, ξέρουμε την ταχύτητα v_1, και άρα, η ζητούμενη παροχή είναι:

$$Q = v_1 \cdot S_1 \qquad (14.7.\gamma)$$

Για τα πραγματικά υγρά, στην εξίσωση του Bernoulli, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τις απώλειες, οπότε η έκφραση της v_1, γίνεται πολυπλοκότερη. Θέτοντας, λοιπόν, $(P_1 - P_2)/w = \Delta H$, η σχέση 14. 7. β γίνεται:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\dfrac{s_1^2}{s_2^2} - 1}} \qquad (14.7.\delta)$$

και αντικαθιστώντας το v_1 από την παραπάνω σχέση στην 14. 7. γ έχουμε :

$$Q = S_1 \times \sqrt{\frac{2g}{\dfrac{s_1^2}{s_2^2} - 1}} \times \sqrt{\Delta H} \qquad (14.7.\varepsilon)$$

Δεδομένου δε ότι ο παράγων

$$S_1 \times \sqrt{\frac{2g}{\frac{s_1^2}{s_2^2} - 1}}$$

είναι σταθερός για κάθε συγκεκριμένο όργανο, μπορούμε να θέσουμε και:

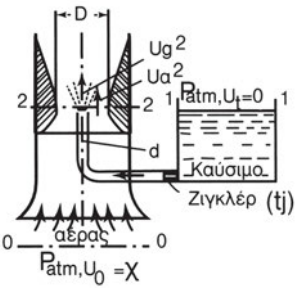
$$C = S_1 \times \sqrt{\frac{2g}{\frac{s_1^2}{s_2^2} - 1}}$$

και άρα: $$Q = C \cdot \sqrt{\Delta H}$$

Εάν, αντί δύο απλών μανομέτρων χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορικό υδραργυρικό, τύπου U, τότε η τιμή ΔΗ θα είναι:

$$\Delta H = \Delta h \times \frac{w_{Hg} - w}{w}$$

ii. *Εξαερωτής* *(carburettors)* (σχ. 16.8.β)



Σχήμα 16.8.β *Εξαερωτής*

Η συσκευή αυτή χρησιμοποιείται στις εμβολοφόρες μηχανές εσωτερικής καύσης, για την παρασκευή του μίγματος αέρα - καυσίμου που χρειάζεται η μηχανή.

Η βασική αρχή λειτουργίας του εξαερωτή έχει ως εξής: Φλέβα αέρα διέρχεται από ένα σωλήνα τύπου Βεντούρι και η πίεσή της πέφτει, σύμφωνα με την εξίσωση του Bernoulli. Η πτώση της πίεσης της φλέβας στο λαιμό του Βεντούρι (διατομή 2), αναγκάζει το καύσιμο να περάσει μέσα στη ροή του αέρα. Στον εξαερωτή μας ενδιαφέρει πολύ η αναλογία βαρών καυσίμου (Gg) - αέρα (Ga).

Έστω, τα γεωμετρικά στοιχεία που εξαερούνται:

α) D διάμετρος του λαιμού του Βεντούρι

β) d διάμετρος του σωλήνα παροχής του καυσίμου

γ) ζ_α συντελεστής απωλειών του Βεντούρι

δ) ζ_ι συντελεστής απωλειών του σωλήνα παροχής και του εκτοξευτήρα (ζιγκλέρ) του καυσίμου. Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για το ρεύμα του αέρα μεταξύ των διατομών ο-ο και 2-2, καθώς και

μεταξύ των διατομών 1-1 και 2-2, στο ρεύμα του καυσίμου, όπου από κατασκευή είναι $z_1 = z_2$, έχουμε:

$$\frac{p_{atm}}{w_\alpha} = \frac{p_2}{w_\alpha} + \frac{V_{\alpha_2}^2}{2g} + \zeta_\alpha \frac{V_{\alpha_2}^2}{2g}$$

$$\frac{p_{atm}}{w_g} = \frac{p_2}{w_g} + \frac{V_{g_2}^2}{2g} + \zeta_f \frac{V_{g_2}^2}{2g}$$

Από αυτές τις δύο εξισώσεις εύκολα έχουμε:

$$w_\alpha \frac{V_{g_2}^2}{2g}\left(1+\zeta_\alpha\right) = w_g \frac{V_{g_2}^2}{2g}\left(1+\zeta_f\right)$$

Για την ποσότητα, τώρα, κατά βάρος του αέρα και του καυσίμου, έχουμε αντίστοιχα:

$$G_\alpha = \frac{\pi D^2}{4} V_{\alpha_2} w_\alpha$$

$$G_g = \frac{\pi d^2}{4} V_{g_2} w_g$$

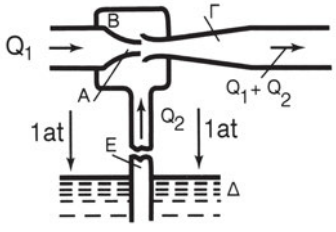
Από τις σχέσεις αυτές, εύκολα καταλήγουμε στη σχέση των βαρών καυσίμου - αέρα, που είναι:

$$\frac{G_g}{G_\alpha} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{W_g\left(1+\zeta_\alpha\right)}{W_\alpha\left(1+\zeta_f\right)}}$$

Συνεπώς από τη σχέση αυτή, είναι προφανές, ότι ρυθμίζοντας το λόγο d/D, μπορούμε να επιτύχουμε την επιθυμητή αναλογία αέρα - καυσίμου.

iii. *Ψεκαστήρας* (σχ. 16.6.γ)

Ο ψεκαστήρας αποτελείται από ένα συγκλίνον ακροφύσιο, το Α, και ένα αποκλίνον, το Γ, τοποθετημένο σε μικρή απόσταση από το Α, μέσα σε ένα χώρο αναρρόφησης Β. Η αύξηση της ταχύτητας του ρεύματος που εξέρχεται από το συγκλίνον ακροφύσιο, έχει ως συνέπεια την πτώση της πίεσης, τόσο στο εξερχόμενο ρεύμα ,όσο και στον περιβάλλοντα χώρο αναρόφησης Β, και μάλιστα η πτώση αυτή είναι σημαντική.

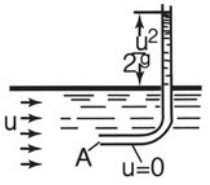


Σχήμα 16.8.γ *Ψεκαστήρας*

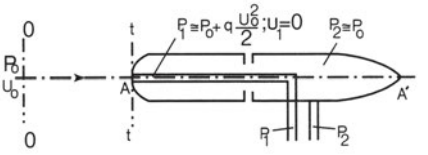
Στο αποκλίνον ακροφύσιο, τώρα, η ταχύτητα μειώνεται και κατ' ακολουθία αυξάνεται η πίεση μέχρι την έξοδο του ρεύματος στην ατμόσφαιρα, οπότε, φυσικά, η πίεση γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική. Μετά απ' αυτά που αναφέραμε παραπάνω, γίνεται φανερό, ότι η πίεση στο χώρο αναρόφησης Β, είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική, έχουμε δηλαδή ένα κενό. Αφού στο χώρο Β υπάρχει κενό, το υγρό που είναι στο δοχείο Δ, υπό πίεση 1 atm, θα ανέβει από τον σωλήνα Ε στο χώρο Β. Εκεί θα αναμιχθεί με το ρεύμα του αέρα από το συγκλίνον ακροφύσιο και ακολουθώντας την πορεία δια μέσου του αποκλίνοντος ακροφυσίου, θα βγει στην ατμόσφαιρα. Από το συγκλίνον ακροφύσιο έχουμε μία ποσότητα αέρα Q_1, από το δοχείο Δ μία ποσότητα υγρών Q_2 άρα, ο ψεκαστήρας θα βγάζει μία ποσότητα αέρα ίση με $Q_1 + Q_2$.

iv *Ταχύμετρο Pitot*

Ο **σωλήνας Pitot** (σχ.16.8.δ) χρησιμοποιείται για τη μέτρηση ροής ενός υγρού. Έστω, ένα υγρό που ρέει σε ανοιχτό κανάλι, με μία ταχύτητα U. Αν βάλουμε ένα κεκαμένο σωλήνα όπως φαίνεται στο σχήμα 16.8.δ, το υγρό, εξ αίτιας της κινητικής ενέργειάς του, θα σηκώσει μέσα στο κάθετο σκέλος του σωλήνα, και πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, μια στήλη υγρού με ύψος, ίσο με αυτό που αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια $U_2/2g$. Από το μετρούμενο ύψος, προκύπτει και η ζητούμενη ταχύτητα. **Το ταχύμετρο Pitot (σχ. 14.8.ε)** χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ταχύτητάς των αεροπλάνων, υπολογισμός ο οποίος στηρίζεται στην ίδια αρχή, με αυτή του σωλήνα Pitot. Στο σχήμα 16.8.ε, παρουσιάζεται, σχηματικά, ένα ταχύμετρο Pitot. Θεωρούμε μία στοιχειώδη φλέβα που ρέει κατά μήκος της κεντρικής γραμμής ΑΑ΄ του οργάνου. Παίρνουμε δύο διατομές στη φλέβα αυτή, τη διατομή ο-ο, αρκετά μακρυά, ώστε η ροή να είναι αδιατάρακτη, και τη διατομή 1-1, σε επαφή με το όργανο. Η ταχύτητα στο σημείο Α είναι μηδέν, γιατί αυτό το σημείο είναι σημείο ανακοπής (παρ. 14.7 σχ. 14.7.β). Η εξίσωση του Bernoulli για τη φλέβα που θεωρήσαμε, μεταξύ των διατομών 1-1 και ο-ο, γράφεται:



Σχήμα 16.8.δ *Σωλήνας Pitot*



Σχήμα 16.8.ε *Ταχύμετρο Pitot*

$$p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} \approx p_1$$

όπου ρ η πυκνότητα του αέρα, και επειδή $p_2=p_0$ έχουμε τελική τιμή για την ταχύτητα

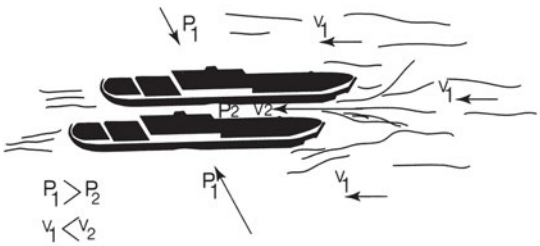
$$v_0 \simeq \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_1 - p_2\right)}$$

V. Φυσικά Φαινόμενα

Πολλά φυσικά φαινόμενα, εύκολα εξηγούνται από τους νόμους της συνέχειας και του Bernoulli. Η κατανόηση των φαινομένων αυτών μας βοηθά για την αποφυγή ατυχημάτων.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Όταν δύο πλοία κινούνται παράλληλα και σχετικά κοντά το ένα στο άλλο, δημιουργούν μεταξύ τους ένα ρεύμα ροής στενότερο από το χώρο που εκτείνεται πέρα από αυτά. Αυτό έχει σαν συνέπεια, την αύξηση της ταχύτητας και την πτώση της πίεσης, (σχ. 16.8.ζ). Το αποτέλεσμα είναι ότι τα πλοία έχοντας από την εξωτερική πλευρά τους τη μεγαλύτερη πίεση p_1 και στο ενδιάμεσο χώρο την μικρότερη p_2, τείνουν να συγκρουσθούν.



Σχήμα 16.8.ζ *Κίνδυνος σύγκρουσης πλοίων*



ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΕΚΑΤΟΥ ΕΚΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- **Πεδίο ροής**, λέγεται, χώρος μέσα στον οποίο **ρέουν** τα υγρά.
- Το πεδίο ροής περιγράφεται από τις **γραμμές κίνησης** και τις **τροχιές** των μορίων των υγρών.

α) **Γραμμές κίνησης**, είναι οι γραμμές στο χώρο του πεδίου ροής, σε κάθε σημείο των οποίων ανά πάσα χρονική στιγμή, η εφαπτόμενη τους δίνει την διεύθυνση της ταχύτητας ροής στο υπόψη σημείο.

β) **Τροχιά**, είναι η όδευση του μορίου του υγρού μέσα στο πεδίο ροής. Όταν συμπίπτουν οι γραμμές κίνησης με τις τροχιές, τις ονομάζουμε **"ρευματικές γραμμές".**

- Η ροή υγρού χαρακτηρίζεται **μόνιμη** ή **στρωτή**, όταν η ταχύτητά του σε κάθε σημείο,είναι ανεξάρτητη του χρόνου άλλως ονομάζεται **μη μόνιμη** ή **στροβιλώδης ροή**.

Η μόνιμη ροή διακρίνεται σε **ομοιόμορφη**, όταν η ταχύτητα είναι και ανεξάρτητη από τη θέση άλλως, ονομάζεται, **ανομοιόμορφη**. Το κριτήριο μετάπτωσης από τη στρωτή ροή στην στροβιλώδη είναι ο αριθμός Reynolds που δίνεται από τη σχέση 16. 2. α,

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}$$

- **Ιδανικά υγρά**, είναι τα υγρά που δεν έχουν εσωτερική τριβή. Δηλαδή, έχουν ιξώδες μ = 0 και είναι απόλυτα ασυμπίεστα. **Πραγματικά υγρά** είναι τα υγρά της φύσης, που βέβαια έχουν μ≠0. Αποτέλεσμα των υποθέσεων αυτών είναι ότι στα ιδανικά υγρά οι μόνες δυνατές τάσεις,είναι οι ορθές θλιπτικές τάσεις.
- **Παροχή** φλέβας ή ενός σωλήνα, είναι η ανά μονάδα χρόνου διερχόμενη ποσότητα από μια διατομή, δηλαδή

$$Q = \frac{V}{t}$$

άλλη έκφραση της οποίας είναι και η

$$Q = AV$$

όπου: Q, η ποσότητα του υγρού

V, η ταχύτητα του υγρού

U, ο όγκος του υγρού και

A, η διατομή της φλέβας του σωλήνα

- Ο νόμος της συνέχειας κατά μήκος μίας φλέβας ή ενός σωλήνα (παράγρ.14.4.α) διατυπώνεται από τη σχέση:

$$A_1V_1 = A_2V_2$$

- Ο νόμος του Bernoulli κατά μήκος μίας φλέβας ή ενός σωλήνα (παράγρ. 14.4.β), διατυπώνεται από τις σχέσεις :

$$E_g = E_{\delta\upsilon\nu} + E_{\kappa\iota\nu} + E_{\pi\iota\epsilon\zeta} = \sigma\tau\alpha\theta$$

- Το θεώρημα του Torricelli (παραγρ. 14.6), διατυπώνεται από τη σχέση:

$$V_A = C\sqrt{2gh}$$

- Οι απώλειες, λόγω εσωτερικής τριβής, κατά μήκος των αγωγών ή σε τοπικές αντιστάσεις, είναι της μορφής:

$$h = \zeta \cdot \frac{V_m^2}{2g}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δεξαμενή περιέχει νερό, στο ίδιο πάντα ύψος. Στο κάτω μέρος της δεξαμενής, σε απόσταση 2,5m από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, υπάρχει κρουνός, με εμβαδόν διατομής $4cm^2$. Ποιά είναι η ταχύτητα εκροής του νερού και ποιά η παροχή του κρουνού.

Απάντηση: v = 7m/s, $Q = 2800cm^3/s$

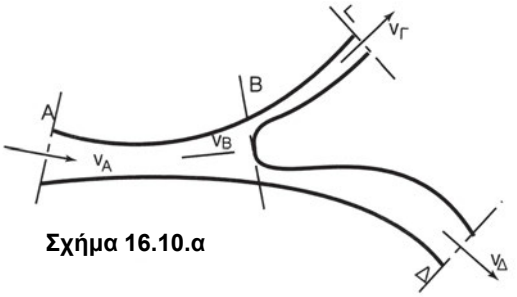
2. Κρουνός με διατομή $A = 15cm^2$ γεμίζει μια κυκλική υδαταποθήκη, διαμέτρου d = 2 m και ωφέλιμου ύψους h=3m σε t=4h 42΄ 54΄΄. Πόση είναι η παροχή Q του κρουνού και πόση η ταχύτητα εκροής του νερού από τον κρουνό.

Απάντηση: $Q=2m^3/h$, v=0,37 m/sec

3. Ένας σωλήνας έχει εμβαδόν διατομής 120 cm^2. Από τον σωλήνα ρέει νερό με ταχύτητα υ = 4Km/h. Πόσο όγκο νερού θα δώσει ο σωλήνας σε μία μέρα;

Απάντηση: υ = 1152m^3

4. Σε ένα κόμβο αγωγών, όπως φαίνεται στο σχήμα κινείται υγρό. Στην είσοδο του κόμβου στη θέση Α η διάμετρος είναι d_A = 450 mm, στη θέση Β είναι d_B = 300mm. Στο Β γίνεται διακλάδωση σε δύο σκέλη. Οι διάμετροι είναι $d_Γ$=150mm και $d_Δ$-225 mm. Μετρήθηκαν οι ταχύτητες του υγρού στις θέσεις Α και Δ και ευρέθησαν V_A = 1.8 m/s και $V_Δ$= 3,6 m/s. Να υπολογισθούν



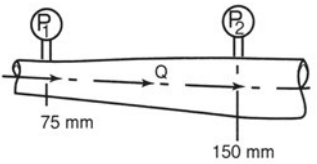
Σχήμα 16.10.α

α) Οι παροχές στις θέσεις Γ και Δ

β) Οι ταχύτητες στις θέσεις Β και Γ

Απάντηση: $Q_Γ$ = 0,143m^3/s, $Q_Δ$= 0,143m^3/s, V_B = 4. 99m/s, $V_Γ$=8,08m/s.

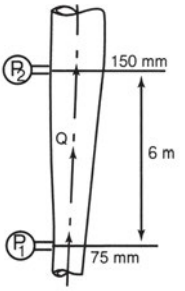
5. Οριζόντιος σωλήνας διευρύνεται ομαλά από μία διάμετρο 75 mm σε 150mm κατά διεύθυνση ροής του νερού. Αν η ροή έχει παροχή Q = 85×$10^3$$cm^3$/s, το μανόμετρο στη διατομή με διάμετρο τα 75 mm δείχνει $p_{1 =}$ 200 $KP_α$. Ποια θα είναι η ένδειξη του μανομέτρου στη διατομή με διάμετρο τα 150 mm.



Σχήμα 16.10.β

Απάντηση: P_2 = 373,5 $KP_α$

6. Εάν ο σωλήνας του προηγούμενου προβλήματος είναι κατακόρυφος, με τη διατομή με τη μικρή διάμετρο προς τα κάτω και τη ροή του νερού προς τα πάνω, ποια θα είναι η ένδειξη του μανομέτρου στη θέση (2) αν η απόσταση των δύο διατομών είναι 6m.

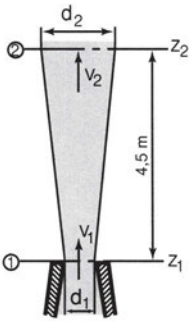


Απάντηση: P_2 = 314$KP_α$

Σχήμα 16.10.γ

7. Από πίδακα διαμέτρου 25mm φεύγει δύναμη νερού με ταχύτητα 12 m/s προς τα πάνω. Να υπολογισθεί η διάμετρος της δέσμης του νερού σε ύψος 4.5 m πάνω από τον πίδακα. (Οι απώλειες να θεωρηθούν αμελητέες).

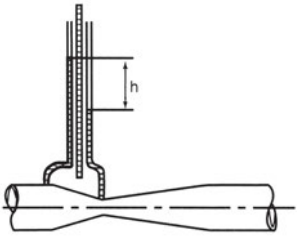
Απάντηση: d_2=32mm



Σχήμα 16.10.δ

8. Ένας μετρητής Βεντούρι έχει διάμετρο εισόδου 150mm και διάμετρο λαιμού 75 mm. Ποιά η ένδειξη του οργάνου, σε, μεταξύ της εισόδου και του λαιμού, αν η ποσότητα του νερού που διέρχεται δια του οργάνου είναι Q = 0,04 m^3/s.

Απάντηση: h= 3,9m



Σχήμα 16.10.ε

9. Να υπολογίσετε τη πτώση πίεσης μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται σε ένα ευθύγραμμο σωλήνα, σε απόσταση μεταξύ τους 800m. Ο σωλήνας έχει διάμετρο 150mm και η παροχή του είναι 0, 0125 m^3/s .

Δίδονται συντελεστής απωλειών ζ = 0,21 N/m, πυκνότητα νερού ρ= 1000 kg/m^3

Απάντηση: Δρ = 41.98 KP_α

10. Να υπολογίσετε την πραγματική παροχή τη πραγματική ταχύτητα εκροής και τη πραγματική διάμετρο της φλέβας νερού που εκρέει, από μία οπή διαμέτρου d = 40mm που είναι στη πλευρά υδαποθήκης η οποία έχει, σταθερά, ύψος νερού 6m.

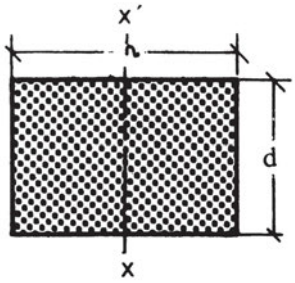
Δίδονται συντελεστής μείωσης ταχύτητας C_v= 0,98 και συντελεστής συστολής C_c= 0,66.

Απάντηση: Q_π=0,00888 m^3/s, V_π=10,6 m/s, d_π=32,7 mm

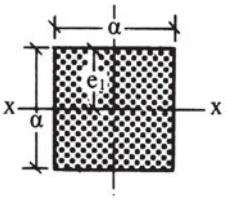
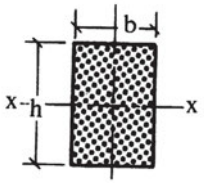
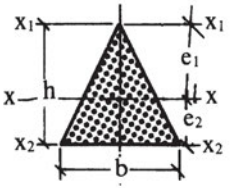
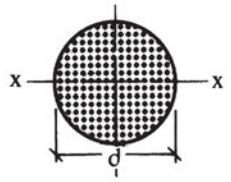
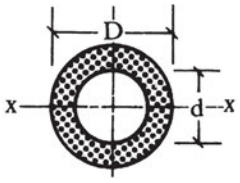
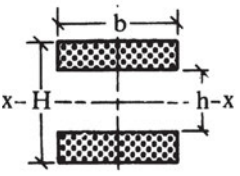
ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1
Εμβαδά και ροπές αντίστασης ορθογωνικής διατομής

Διαστάσεις cm	Εμβαδά cm^2	ροπή αντίστασης W cm^3
8×10	80	133
9×12	108	216
12×16	192	512
14×18	252	756
15×20	300	1000
16×21	336	1176
18×24	432	1728
20×26	520	2253
21×28	588	2744
22×29	638	3084
23×30	690	3450
24×32	768	4096
25×33	825	4537
26×34	884	5010
27×36	972	5832



ΠΙΝΑΚΑΣ 1
Εμβαδά και ροπές αντίστασης ορθογωνικής διατομής

ΜΟΡΦΗ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ I	ΡΟΠΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ W	ΑΚΤΙΝΑ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ i	ΑΚΡΑΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ G
	$I_x=I_y=\frac{\alpha^4}{12}$	$W_x=W_y=\frac{\alpha^3}{6}$	$I_x=I_y \simeq 0,29\alpha$	$e=\frac{\alpha}{2}$
	$I_x=\frac{b\,h^3}{12}$ $I_y=\frac{b^3 h}{12}$	$W_x=\frac{b\,h^2}{6}$ $W_y=\frac{b^2 h}{6}$	$i_x \simeq 0,29h$ $i_y \simeq 0,29b$	$e=\frac{h}{2}$
	$I_x=\frac{b\,h^3}{36}$ $I_y=\frac{b^3 h}{48}$	$W_{x_1}=\frac{b\,h^2}{24}$ $W_{x_2}=\frac{b\,h^2}{12}$	$i_x=0,236h$	$e_1=\frac{2}{3}h$ $e_2=\frac{1}{3}h$
	$i_x=i_y=$ $=\frac{\pi d^4}{64} \simeq \frac{d^4}{20}$	$W_x=W_y=$ $=\frac{\pi d^3}{32} \simeq 0,1\,d^3$	$i_x=i_y=\frac{d}{4}$	$e=\frac{d}{2}$
	$i_x=i_y=$ $=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$W_x=W_y=$ $=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{D^4-d^4}{D}$	$i_x=i_y=\frac{\sqrt{D^2+d^2}}{4}$	$e=\frac{D}{2}$
	$i_x=\frac{b}{12}\cdot(H^3-h^3)$ $i_y=\frac{b^3}{12}\cdot(H-h)$	$W_x=\frac{b}{6H}\cdot(H^3-h^3)$ $W_y=\frac{b^3}{6}\cdot(H-h)$	$i_x=0,29b\sqrt{H^2+h^2+Hh}$ $i_y=0,29b$	$e=\frac{H}{2}$

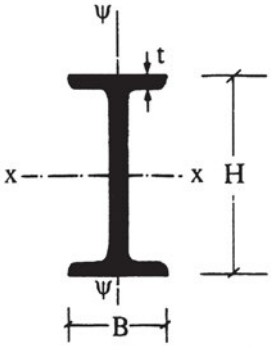
ΠΙΝΑΚΑΣ 3
Ροπές Αδράνειας Επιφανειών $I_x = \frac{bd_0^3}{\mu}$

$\frac{x}{d_0}$ / $\frac{b_0}{b}$	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
0,15	44,6	43,4	42,4	41,7	41,0	40,5	40,0	39,7	39,4	39,2	39,0	38,8	38,7	38,6	38,5	38,5	38,5	38,5	38,5	38,4	38,3
0,16	42,8	41,6	40,7	40,0	39,3	38,8	38,4	38,0	37,7	37,5	37,3	37,1	37,0	36,9	36,8	36,7	36,7	36,7	36,7	36,6	36,6
0,17	41,1	40,1	39,2	38,4	37,8	37,3	36,9	36,5	36,2	36,0	35,8	35,6	35,5	35,3	35,2	35,2	35,2	35,2	35,2	35,1	35,1
0,18	39,7	38,6	37,8	37,0	36,4	35,9	35,5	35,2	34,9	34,7	34,5	34,3	34,2	34,0	33,9	33,8	33,8	33,8	33,8	33,7	33,7
0,19	38,3	37,3	36,5	35,8	35,2	34,7	34,3	34,0	33,7	33,4	33,2	33,0	32,9	32,7	32,6	32,6	32,6	32,5	32,5	32,5	32,5
0,20	37,1	36,1	35,3	34,6	34,1	33,6	33,2	32,9	32,6	32,3	32,1	31,9	31,8	31,6	31,5	31,4	31,4	31,4	31,4	31,4	31,4
0,22	34,9	34,0	33,3	32,6	32,1	31,6	31,2	30,9	30,6	30,4	30,2	30,0	29,9	29,7	29,6	29,5	29,4	29,4	29,4	29,4	29,4
0,24	33,0	32,2	31,5	30,9	30,4	29,9	29,6	29,3	29,0	28,8	28,6	28,4	28,3	28,1	27,9	27,8	27,8	27,7	27,7	27,7	27,7
0,26	31,3	30,6	30,0	29,4	28,9	28,5	28,1	27,8	27,6	27,3	27,1	26,9	26,8	26,6	26,5	26,4	26,3	26,3	26,3	26,3	26,3
0,28	29,9	29,2	28,6	28,1	27,6	27,2	26,9	26,6	26,3	26,1	25,9	25,7	25,6	25,4	25,2	25,1	25,1	25,1	25,1	25,1	25,0
0,30	28,6	27,9	27,3	26,9	26,5	26,2	25,7	25,4	25,2	25,0	24,8	24,6	24,5	24,3	24,2	24,1	24,0	24,0	24,0	24,0	23,9
0,32	27,4	26,8	26,3	25,8	25,4	25,1	24,7	24,5	24,3	24,1	23,9	23,7	23,6	23,3	23,2	23,1	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0
0,34	26,3	25,7	25,3	24,8	24,5	24,1	23,8	23,6	23,4	23,2	23,0	22,8	22,7	22,5	22,4	22,3	22,2	22,1	22,1	22,1	22,1
0,36	25,3	24,8	24,3	24,0	23,6	23,3	23,0	22,8	22,6	22,4	22,2	22,0	21,9	21,7	21,6	21,5	21,4	21,3	21,3	21,3	21,3
0,38	24,4	23,9	23,5	23,1	22,8	22,5	22,3	22,0	21,8	21,6	21,5	21,4	21,3	21,1	20,9	20,8	20,7	20,6	20,6	20,6	20,6
0,40	23,6	23,1	22,7	22,4	22,1	21,8	21,6	21,4	21,2	21,0	20,9	20,8	20,6	20,4	20,3	20,2	20,1	20,0	20,0	20,0	20,0
0,42	22,8	22,4	22,0	21,7	21,4	21,2	20,9	20,7	20,6	20,4	20,3	20,2	20,0	19,8	19,7	19,6	19,5	19,4	19,4	19,4	19,4
0,44	22,1	21,7	21,4	21,1	20,8	20,6	20,4	20,2	20,0	19,8	19,7	19,6	19,5	19,3	19,2	19,1	19,0	18,9	18,9	18,9	18,9
0,46	21,4	21,1	20,8	20,5	20,2	20,0	19,8	19,6	19,5	19,3	19,2	19,1	19,0	18,8	18,7	18,5	18,4	18,4	18,4	18,4	18,4
0,48	20,8	20,5	20,2	19,9	19,7	19,5	19,3	19,1	19,0	18,8	18,7	18,6	18,5	18,3	18,2	18,1	18,0	17,9	17,9	17,9	17,9
0,50	20,2	19,9	19,6	19,4	19,2	19,0	18,8	18,6	18,5	18,4	18,3	18,2	18,1	17,9	17,8	17,7	17,6	17,5	17,5	17,5	17,5

ΠΙΝΑΚΑΣ 4
(Υψίκορμοι) Στενές δοκοί Ι με εσωτερικά κεκλιμένα πέλματα Σειρά Ι.
Μήκος γενικά 4 έως 15 m.
Υλικό: Χάλυβας

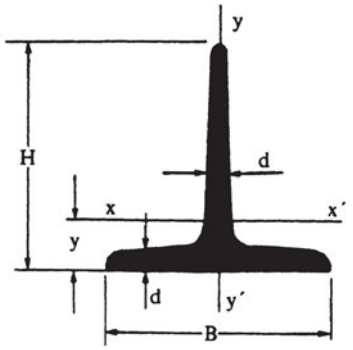
Τύπος ↦	Διαστάσεις				Διατομή	Βάρος	Για τον άξονα κάμψεως x—x			για τον άξονα κάμψεως y—y		
	H mm	B mm	d mm	t mm	A cm^2	G kg/m	I_x cm^4	W_x cm^2	Z_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	I_y cm
8	80	42	3,9	5,9	7,57	5,94	77,7	19,4	3,20	6,28	2,99	0,91
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,34	170	34,1	4	12,1	4,86	1,07
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,1	327	54,5	4,80	21,4	7,38	1,23
14	140	66	5,7	8,6	18,2	14,3	572	81,8	5,60	35,1	10,6	1,39
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,9	934	117	6,40	54,6	14,8	1,55
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,9	1444	161	7,20	81,2	19,8	1,71
20	200	90	7,5	11,3	33,4	26,2	2138	214	8	116	25,9	1,87
22	220	98	8,1	12,2	39,5	31	3055	278	8,79	162	33,1	2,03
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,2	4239	353	9,59	220	41,5	2,19
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39	4958	397	9,99	255	46,4	2,27
26	260	113	9,4	14,1	53,3	41,9	5735	441	10,4	287	50,9	2,32
28	280	119	10,1	15,2	61	47,9	7575	541	11,1	363	61	2,44
30	300	125	10,8	16,2	69	54,2	9785	652	11,9	450	71,9	2,55
32	320	131	11,5	17,3	77,7	61	12490	781	12,7	554	84,6	2,67
34	340	137	12,2	18,3	86,7	68	15670	922	13,4	672	98,1	2,78
36	360	143	13,0	19,5	97	76,1	19580	1087	14,2	816	114	2,90
38	380	149	13,7	20,5	107	84	23980	1262	15	973	131	3,02
40	400	155	14,4	21,6	118	92,5	29210	1461	15,7	1158	149	3,13
42,5	425	163	15,3	23,0	132	104	36930	1738	16,7	1434	176	3,29
45	450	170	16,2	24,3	147	115	45790	2035	17,7	1722	203	3,42
47,5	475	178	17,1	25,6	163	128	56410	2375	18,6	2084	234	3,58
50	500	185	18,0	27,0	179	141	68650	2746	19,6	2474	268	3,71
55	550	200	19,0	30,0	212	166	98950	3598	21,6	3481	348	4,05
60	600	215	21,6	32,4	254	199	38800	4626	23,4	4679	435	4,29

ΠΙΝΑΚΑΣ 5
Σειρά IPB Πλατύπελμοι δοκοί Ι με παράλληλες επιφάνειες των πελμάτων. Υλικό: Χάλυβας



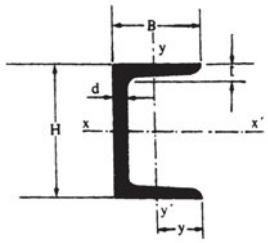
Τύπος IPB	Διαστάσεις				Διατομή	Βάρος	Για τους άξονες			
							x—x		y—y	
	H mm	*B* mm	*t* mm	*d* mm	*A* cm^2	*G* kg/m	I_x cm^4	W_x cm^2	I_y cm^2	W_y cm^2
12	120	120	11	6,5	33,81	26,54	860	143	317	53
14	140	140	12	8	44,12	34,63	1522	217	550	79
15	150	150	12	8	47,32	37,15	1897	253	676	90
16	160	160	14	9	58,36	45,81	2634	339	958	120
18	180	180	14	9	65,76	51,62	3833	426	1363	151
20	200	200	16	10	82,73	64,94	5952	595	2136	214
22	220	220	16	10	91,13	71,54	8052	732	2843	248
24	240	240	18	11	111,32	87,39	11686	974	4152	346
25	250	250	18	11	116,02	91,08	13298	1064	4692	375
26	260	260	18	11	120,72	94,77	15050	1158	5278	406
28	280	280	20	12	143,58	112,71	20722	1480	7324	523
30	300	300	20	12	153,98	120,87	25759	1717	9007	600

ΠΙΝΑΚΑΣ 6
Τ με στρογγυλευμένες ακμές. Υλικό: Χάλυβας (B = H)



Τύπος ⊥	Διαστάσεις			Διατομή	Βάρος	απόσ-ταση	Για τον άξονα κάμψεως x—x			Για τον άξονα κάμψεως y—y		
	B mm	H mm	d mm	A cm^2	G kg/m	y_0 cm	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y
20	20	20	3	1,1	0,88	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42
25	25	25	3,5	1,6	1,3	0,72	0,87	0,50	0,73	0,43	0,34	0,52
30	30	30	4	2,3	1,8	0,85	1,72	0,80	0,87	0,88	0,58	0,62
35	35	35	4,5	3	2,3	0,10	3,10	1,23	1,02	1,53	0,90	0,72
40	40	40	5	3,8	3	1,12	5,20	1,83	1,17	2,57	1,28	0,82
45	45	45	5,5	4,7	3,7	1,26	8,10	2,51	1,31	4,01	1,80	0,93
50	50	50	6	5,7	4,5	1,40	12,1	3,35	1,46	6,06	2,4	1,03
60	60	60	7	8	6,2	1,66	24,3	5,62	1,75	12,1	4	1,23
70	70	70	8	10,6	8,3	1,93	44,5	8,78	2,05	22,1	6,37	1,44
80	80	80	9	13,6	10,7	2,20	74,9	12,9	2,34	37	9,25	1,64
90	90	90	10	17	13,3	2,47	118	18,3	2,64	58,5	13	1,85
100	100	100	11	21	16,4	2,74	179	24,6	2,93	88	17,7	2,05

ΠΙΝΑΚΑΣ 7
Δοκοί [με στρογγυλευμένες ακμές. Υλικό: Χάλυβας



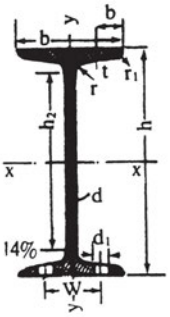
Τύπος [	Διαστάσεις				Διατομή	Βάρος	Από-στα-ση	Για τον άξονα κάμψεως x—x			Για τον άξονα κάμψεως y—y		
	H mm	B mm	d mm	t mm	A cm^3	G kg/cm	y cm	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^3	W_y cm	i_y cm
30	30	33	5	7	5,44	4,2	2	6,4	4,3	1,08	5,1	2,6	0,96
40	40	35	5	7	6,21	4,9	1,17	14,1	7,1	1,5	6,7	3,1	1,1
50	50	38	5	7	7,12	5,6	2,43	26,5	10,6	1,9	9,1	3,7	1,1
65	65	42	5,5	7,5	9,03	7,1	2,78	37,5	17,7	2,5	14	5,1	1,25
80	80	45	6	8	11	8,65	3	106	26,5	3,1	19	6,3	1,3
100	100	50	6	8,5	13,5	10,6	3,45	205	41,1	4	29	8,4	1,5
120	120	55	7	9	17	13,3	3,9	364	60,7	4,6	43	11	1,6
140	140	60	7	10	20,4	16	4,25	605	86,4	5,45	63	14,8	1,75
160	160	65	7,5	10,5	24	19	4,7	925	116	6,2	85	18,2	1,9
180	180	70	8	11	28	22	5,1	1354	150	7	114	22,4	2
200	200	75	8,5	11,5	32,2	25,3	5,5	1911	191	7,7	148	27,0	2,14
300	300	100	10	16	58,8	46,1	7,3	8028	535	11,7	493	67,6	2,90

ΠΙΝΑΚΑΣ 8

Ανισοσκελή γωνιακά ελάσματα L μήκος γενικά 3 έως 12m από χάλυβα

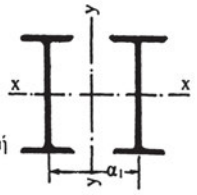
Τύπος L	Διαστάσεις			Διατομή	Βάρος	αποστάσεις από τους άξονες		εφα	Για τον άξονα κάμψεως y - y′			Για τον άξονα κάμψεως x - x			Για τον άξονα m - m		Για τον άξονα n - n	
	i mm	L mm	d mm	A cm^3	G kg/m	β_y mm	β_x mm		I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_x cm^4	W_x cm^4	i_x cm	I_m cm^4	i_m cm	I_n cm^3	i_n cm
20/30	20	30	3	1,42	1,11	9,9	5,0	0,431	0,44	0,29	0,56	1,25	0,62	0,94	1,43	1	0,25	0,44
			4	1,85	1,45	10,3	5,4	0,423	0,55	0,38	0,55	1,60	0,81	0,93	1,81	0,99	0,33	0,42
30/45	30	45	4	2,87	2,25	14,8	7,4	0,436	2,05	0,91	0,85	3,77	1,91	1,42	6,65	1,52	1,18	0,64
			5	3,53	2,77	15,2	7,8	0,430	2,47	1,11	0,84	6,99	2,35	1,41	8,02	1,50	1,44	0,64
40/50	40	60	5	4,79	3,76	19,5	9,7	0,437	6,2	2,05	1,13	17,3	4,27	1,89	19,8	2,03	3,66	0,87
			7	6,55	5,14	20,4	10,5	0,433	8	2,71	1,11	23	5,81	1,87	26,3	2	4,63	0,84
50/75	50	75	7	10,5	8,24	25,6	13,2	0,427	20,2	5,49	1,38	57,2	11,6	2,33	65,4	2,50	11,90	1,06
			9	11,2	8,77	32,3	15,1	0,419	37,6	7,54	1,84	113	16,6	3,17	128	3,39	21,6	1,39
65/100	65	100	9	14,2	11,15	33,1	15,9	0,415	46	9,37	1,82	141	21,1	3,15	160	3,36	26,8	1,37
			11	17,1	13,42	34	16,7	0,410	55,1	11,4	1,80	167	25,3	3,13	189	3,32	32,9	1,38
			8	15,5	12,2	38,3	18,7	0,441	80,8	13,2	2,29	226	27,6	3,82	261	4,10	45,8	1,72
80/100	80	120	10	19,1	14,99	39,2	19,5	0,438	98	16,2	2,27	276	34,1	3,80	317	4,07	56,8	1,72
			12	22,7	17,8	40	20,2	0,433	115	19,2	2,25	323	40,4	3,77	370	4,04	67,5	1,72
100/150	100	150	12	28,7	22,53	48,9	24,2	0,439	232	30,6	2,84	649	64	4,76	747	5,10	134	2,16
			14	33,2	26,06	49,7	25	0,435	264	35,2	2,82	743	74,1	4,73	854	5,07	153	2,15

ΠΙΝΑΚΑΣ 9



1) Διατομή διπλού ταυ **I**.

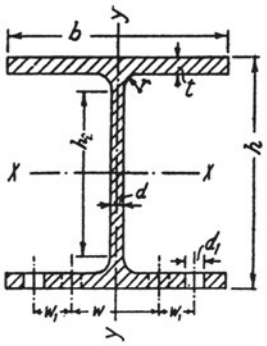
Κανονικό μήκος = 4 έως 15 m.



α_1 = Αξονική απόσταση δύο I, για την οποία η ροπή αδράνειας ως προς αμφοτέρους τους κύριους άξονες είναι η αυτή και ίση με 2 I_x

Τύπος	mm						F	G	Για τον άξονα						a_1	Για τις οπές ποδός κατά DIN 996	
									x — x			y — y					
	h	b	d=r	t	r_1	b_2	cm^2	kg/m	J_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	J_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	mm	d_1 mm	w mm
I	I DIN 1025, Φύλλο 1																
8	80	42	3,9	5,9	2,3	60	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	62	—	22
10	100	50	4,5	6,8	2,7	75	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	78	—	26
12	120	58	5,1	7,7	3,1	90	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	94	—	30
14	140	66	5,7	8,6	3,4	100	18,3	14,4	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	108	11	34
16	160	74	6,3	9,5	3,8	120	22,8	17,9	935	17	6,40	54,7	14,8	1,55	124	14	38
18	180	82	6,9	10,4	4,1	140	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	140	14	44
20	200	90	7,5	11,3	4,5	160	33,5	26,8	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	156	17	46
22	220	98	8,1	12,2	4,9	170	39,6	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	172	17	52
24	240	106	8,7	13,1	5,2	190	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	188	17	56
26	260	113	9,4	14,1	5,6	200	53,4	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	202	20	58
28	280	119	10,1	15,2	6,1	220	61,1	48,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	218	20	62
30	300	125	10,8	16,2	6,5	240	69,1	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	234	20	64
32	320	131	11,5	17,3	6,9	250	77,8	61,1	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	248	20	70
34	340	137	12,2	18,3	7,3	270	86,8	68,1	15700	923	13,5	674	98,4	2,80	264	20	74
36	360	143	13,0	19,5	7,8	290	97,1	76,2	19610	1090	14,2	818	114	2,90	278	23	74
38	380	149	13,7	20,5	8,2	300	107	84,0	24010	1260	15,0	975	131	3,02	294	23	80
40	400	155	14,4	21,6	8,6	320	118	92,6	29210	1460	15,7	1160	149	3,13	308	23	84
42½	425	163	15,3	23,0	9,2	340	132	104	36970	1740	16,7	1440	176	3,30	328	26	86
45	450	170	16,2	24,3	9,7	360	147	115	45850	2040	17,7	1730	203	3,43	348	26	92
47½	475	178	17,1	25,6	10,3	380	163	128	56480	2380	18,6	2090	235	3,60	366	26	96
50	500	185	18,0	27,0	10,8	400	180	141	68740	2750	19,6	2480	268	3,72	384	26	100
55	550	200	19,0	30,0	11,9	410	213	167	99180	3610	21,4	3490	349	4,02	424	26	110
60	600	215	21,6	32,4	13,0	480	254	199	139000	4630	23,4	4670	434	4,30	460	26	120

ΠΙΝΑΚΑΣ 10



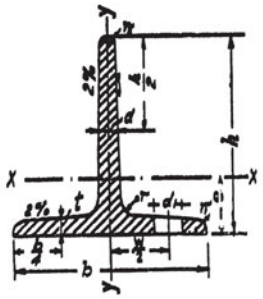
2) Πλατύπελμα και παραλληλόπελμα διπλά ταυ I P

Κανονικά μήκη = 4 έως 15 m

b = h, για διατομή ≤ I P 30
b = 300 mm, για διατομή ≥ I P 30

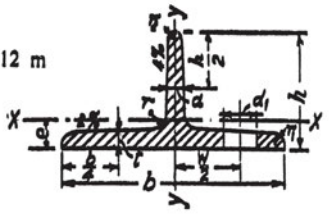
Τύπος	Διαστάσεις mm						F	G	για άξονα						Για τις οπές των πελμάτων κατά DIN 997		
									x — x			y — y					
	h	b	d	t	r	h_2	cm^2	kg/m	J_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	J_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	d_1 mm	w mm	w_1 mm
I P	Πλατύπελμα και παραλληλόπελμα I R DIN 1025, φύλλο 2																
14	140	140	8	12	12	85	44,1	34,6	1520	217	5,87	550	78,6	3,53	20	80	—
16	160	160	9	14	14	100	58,4	45,8	2630	329	6,72	958	120	4,05	23	90	—
18	180	180	9	14	14	120	65,8	51,6	3830	426	7,63	1360	131	4,55	26	100	—
20	200	200	10	16	15	140	82,7	64,9	5950	595	8,48	2140	214	5,08	26	110	—
22	220	220	10	16	15	160	91,1	71,5	8050	732	9,37	2840	258	5,59	26	120	—
24	240	240	11	18	17	170	111	87,4	11690	974	10,5	4150	346	6,11	26	90	35
26	260	260	11	18	17	190	121	94,8	15050	1160	11,2	5280	406	6,61	26	100	40
28	280	280	12	20	18	200	144	113	20720	1480	12,0	7320	523	7,14	26	110	45
30	300	300	12	20	18	220	154	121	25760	1720	12,9	9010	600	7,65	26	120	50
32	320	300	13	22	20	230	171	135	32250	2020	13,7	9910	661	7,60	26	120	50
34	340	300	13	22	20	250	174	137	36940	2170	14,5	9910	661	7,55	26	120	50
36	360	300	14	24	21	270	192	150	45120	2510	15,3	10810	721	7,51	26	120	50
38	380	300	14	24	21	290	194	153	50950	2680	16,2	10810	721	7,46	26	120	50
40	400	300	14	26	21	300	209	164	60640	3030	17,0	11710	781	7,49	26	120	50
42½	425	300	14	26	21	330	212	166	69480	3270	18,1	11710	781	7,43	26	120	50
45	450	300	15	28	23	350	232	182	84220	3740	19,0	12620	841	7,38	26	120	50
47½	475	300	15	28	23	370	235	185	95120	4010	20,1	12620	841	7,32	26	120	50
50	500	300	16	30	24	390	255	200	113200	4530	21,0	13530	902	7,28	26	120	50
55	550	300	16	30	24	440	263	207	140300	5100	23,1	13530	902	7,17	26	120	50
60	600	300	17	32	26	480	289	227	180800	6030	25,0	14440	962	7,07	26	120	50
65	650	300	17	32	26	530	297	234	216800	6670	27,0	14440	962	6,97	26	120	50
70	700	300	18	34	27	580	324	254	270300	7720	28,9	15350	1020	6,88	26	120	50
75	750	300	18	34	27	630	333	261	316300	8430	30,8	15350	1020	6,79	26	120	50
80	800	300	18	34	27	680	342	268	366400	9160	32,7	15350	1020	6,70	26	120	50
95	850	300	19	36	30	720	372	292	443900	10440	34,6	16270	1080	6,61	26	120	50
90	900	300	19	36	30	770	381	299	506000	11250	36,4	16270	1080	6,53	26	120	50
95	950	300	19	36	30	820	391	307	573000	12060	38,3	16270	1080	6,45	26	120	50
100	1000	300	19	36	30	870	400	311	644700	12900	40,1	16280	1080	6,37	26	120	50

ΠΙΝΑΚΑΣ 11



3) Απλά ταυ T

Κανονικά μήκη = 3 έως 12 m



e = Απόστασις του κεντροβαρικού άξονα x-x

Τύπος ⊥	Διαστάσεις mm					F	G	e	Για τον άξονα						Για τις οπές των πελμάτων κατά DIN 997	
									x — x			y — y				
	b	h	d=t=r	r_1	r_2	cm^2	kg/m	cm	J_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	J_y cm^4	W_y cm^3	i_y mm	d_1 mm	w mm
α) Υψίκορμα ⊥ κατά DIN 1024₁																
1½	15	15	3	1,5	1	0,82	0,65	0,46	0,15	0,14	0,43	0,08	0,11	0,32	—	—
2	20	20	3	1,5	1	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42	—	—
2½	25	25	3,5	2	1	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51	—	—
3	30	30	4	2	1	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62	—	—
3½	35	35	4,5	2,5	1	2,97	2,33	0,99	3,10	1,28	1,04	1,57	0,90	0,73	—	—
4	40	40	5	2,5	1	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83	6,5	24
4½	45	45	5,5	3	1,5	4,67	3,67	1,26	8,13	2,51	1,32	4,01	1,78	0,93	6,5	26
5	50	50	6	3	1,5	5,66	4,44	1,39	12,1	3,35	1,46	6,06	2,42	1,03	6,5	30
6	60	60	7	3,5	2	7,94	6,23	1,66	23,8	5,48	1,73	12,2	4,07	1,24	8,5	34
7	70	70	8	4	2	10,6	8,32	1,94	44,5	8,79	2,05	22,1	6,32	1,44	11	40
8	80	80	9	4,5	2	13,6	10,7	2,22	78,7	12,8	2,33	37,0	9,25	1,65	11	50
9	90	90	10	5	2,5	17,1	13,4	2,48	119	18,2	2,64	56,5	13,0	1,85	14	50
10	100	100	11	5,5	3	20,9	16,4	2,74	179	24,6	2,92	86,3	17,7	2,05	14	60
12	120	120	13	6,5	3	29,6	23,2	3,28	366	42,0	3,51	178	29,7	2,45	17	70
14	140	140	15	7,5	4	39,9	31,3	3,80	660	64,7	4,07	330	47,2	2,88	20	80
16	160	160	15	7,5	4	45,8	35,9	4,20	1010	85,5	4,68	490	61,3	3,27	23	90
18	180	180	18	9	4,5	61,7	48,5	4,80	1720	130	5,27	857	95,2	3,73	26	100
β) Πλατύπελμα ⊥ κατά DIN 1024																
6.3	60	80	5,5	3	1,5	4,64	3,64	0,67	2,58	1,11	0,75	8,62	2,87	1,36	6,5	34
7.3 ½	70	35	6	3	1,5	5,94	4,66	0,77	4,49	1,65	0,87	15,1	4,31	1,59	11	40
8.4	80	40	7	3,5	2	7,91	6,21	0,88	7,81	2,50	0,99	28,5	7,13	1,90	11	50
9.4 ½	90	45	8	4	2	10,2	8,01	1,00	12,7	3,63	1,11	46,1	10,2	2,12	14	50
10.5	100	50	8,5	4,5	2	12,0	9,42	1,09	18,7	4,78	1,25	67,7	13,5	2,38	14	60
12.6	120	60	10	5	2,5	17,0	13,4	1,30	38,0	8,09	1,49	137	22,8	2,84	17	70
14.7	140	70	11,5	6	3	22,8	17,9	1,51	68,9	12,6	1,74	258	36,9	3,36	20	80
16.8	160	80	13	6,5	3,5	29,5	23,2	1,72	117	18,6	1,99	422	52,8	3,78	23	90
18.9	180	90	14,5	7,5	3,5	37,0	29,1	1,93	185	26,2	2,24	670	74,4	4,25	26	100
20.10	200	100	16	8	4	45,4	35,6	2,14	277	35,2	2,47	1000	100	4,69	26	110

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.	Μ.Κ. ΚΩΒΑΙΟΣ	ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΑΘΗΝΑ 1964
2.	Π.Σ. ΘΕΟΧΑΡΗ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΑΘΗΝΑ 1970
3.	W.A. NASH	STRENTH OF MATERIALS Mc GRAW HILL 1977
4.	Κ.Χ. ΓΕΩΡΓΙΚΟΠΟΥΛΟΥ	ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΑΘΗΝΑ 1963
5.	Μ.Κ. ΚΩΒΑΙΟΣ	ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΑΘΗΝΑ 1975

6. N.H BELYAEV	STRENTH OF MATERIALS MOSCOW 1979
7. M.M. POPOVICI	REZISTENTA MATERIALELOR BOUKOURESTI 1979
8. Π.Γ. ΧΑΡΩΝΗ	ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ) ΑΘΗΝΑ 1983
9. Γ. ΠΑΓΚΑΚΗ	ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΑΘΗΝΑ
10. Μ.Ι.ΚΟΙΜΤΖΗ	ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1978
11. Γ.Ρ. ΓΚΡΟΣ	ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΙΔΡ. ΕΥΓΕΝΙΔΗ 1983
12. Γ.Ρ. ΓΚΡΟΣ	ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΔΡ. ΕΥΓΕΝΙΔΗ 1983
13. G.B.PUNZI	MECCANICA GENERALE ED. APPLICATA HOEPLI MILANO 1974
14. G.E DRABBLE	APPLIED MECHANICS LONDON 1980
15. TIMOSHENKO – YOUNG	MECCANICA APPLICATA EINAUDI 1957
16. Κ.Κ. ΧΑΡΑΚΗ	ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Υ.Π. ΚΥΠΡΟΥ
17. Ν.Ι. ΘΕΟΦΑΝΟΠΟΥΛΟΣ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΩΝ ΑΘΗΝΑ 1960
18. Λ.Ε. ΛΑΖΑΡΙΔΗ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΩΝ ΙΔΡ. ΕΥΓΕΝΙΔΗ 1983
19. M.SPELUZZI – M.TESSAROTO	DISEGNO DIMACCHINE HOEPLI – MILANO
20. G. POGGIALI – G.BIGI	DISEGNO DIMACCHINE ZANICHELLI
21. O.BELUZZI	SCIENZA DELLE COSTRUZIONI ZANICHELLI
22. Μ. ΠΑΡΤΑΣΙΔΟΥ	ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ Υ.Π. ΚΥΠΡΟΥ
23. E. LOTTI – E. SCHIAPPA	LABORATORIO TECNOLOGICO CEDAM – PADOVA
24. S. GAGGIA	TECNICA PROFESSIONALE DEL BIANCO
25. Α.Δ. ΚΩΣΤΕΑ	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΑΘΗΝΑ 1959

26.	BAUMEISTER – MARKS	MECHANICAL ENGINEERS' HANDBOOK 6 th edition 1958
27.	G. CONTI	MANUALE DEI CUSCINETTI RIV
28.	G. COLOMBO	MANUALE DELL INGEGNERE 80a ED. HOEPLI
29.	Θ. ΚΟΥΖΕΛΗ	ΜΗΧΑΝΗΜΑΤΑ ΑΝΥΨΩΣΕΩΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΣ ΥΛΙΚΩΝ ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΗ 1981
30.	Α. ΛΕΓΑΚΗ	ΔΟΜΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΗ 1983
31.	Σ. ΛΟΥΚΑ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΗΣ ΙΔΡ. ΕΥΓΕΝΙΔΗ 1981
32.	TIERI – POLARA	TESTO DI FISICA SPERIMENTALE PERELLA – ROMA
33.	Π. ΔΙΑΜΑΝΤΙΔΟΥ	ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΕΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑ ΑΘΗΝΑ 1978
34.		INGNERIA MECCANICA (ΜΗΝΙΑΙΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ)
35.		ΠΡΟΤΥΠΑ ΕΛΟΤ
36.		ΠΡΟΤΥΠΑ ISO
37.	Δ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ – Ν. ΡΟΖΑΚΟΣ – Π. ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ	ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΟΕΔΒ 1987
38.	M.MOVMIN – A. IZRAYELIT	THEORITICAL MECHANICS MIR MOSCOW 1974
39.	Π.ΝΕΟΚΛΕΟΥΣ	ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Υ.Π. ΚΥΠΡΟΥ 1981
40.	Π.ΝΕΟΚΛΕΟΥΣ	ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Υ.Π. ΚΥΠΡΟΥ 1987
41.	P. ABBOT	MECHANICS TEACH YOURSELF BOOKS 1981
42.	J.D WALKER	APPLIED MECHANICS HODDER AND STOVCHTON 1997
43.	ΤΑΣΣΙΟΥ	ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ
44.	ΚΑΡΑΜΑΝΟΥ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑΣ τ. Β ΑΘΗΝΑ 1954
45.	NEKRASOV	HYDRAULICS PEACE PUBLISHERS MOSCOW
46.	Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ	ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ τ.Α ΑΘΗΝΑ 1960

47. Α. ΜΑΥΡΟΜΜΑΤΑΚΟΥ ΦΥΣΙΚΗ
ΙΔ. ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1994
48. Α.ΔΕΛΟΥΚΑ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ
ΑΘΗΝΑ 1966
49. V. GILES FLUID MECHANICS AND HYDRAULICS
SCHAUM'S 1962

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Κωδικός βιβλίου: 0-24-0026

ISBN 978-960-06-2815-9

