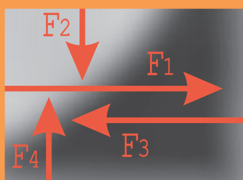
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Φυσική



Α΄ ΕΠΑ.Λ.

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΦΥΣΙΚΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

Γαροφαλάκης Ιωάννης, Msc Φυσικός Καθηγητής ΤΕΙ Πειραιά

Παγώνης Κων/νος, Δρ. Φυσικός, Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Σπυροπούλου Δήμητρα, Δρ. Φυσικός, Καθηγήτρια Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ:

Γαροφαλάκης Ιωάννης, Msc Φυσικός, Καθηγητής ΤΕΙ Πειραιά

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ:

Ραγιαδάκος Χρήστος, Δρ. Φυσικός Πάρεδρος στο Π.Ι.

Κούτσικος Ηλίας, Δρ. Φυσικός, Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Χρονόπουλος Χρήστος, Φυσικός Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Αναγνωστοπούλου Ασημίνα, Φιλόλογος, Καθηγήτρια Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΕΙΜΕΝΩΝ

Κυμπάρη Ελευθερία

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γαροφαλάκης Γιάννης Παγώνης Κώστας

Σπυροπούλου Δήμητρα

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΦΥΣΙΚΗ

Α΄ ΕΠΑ.Λ.
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο: ΡΕΥΣΤΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Συχνά χαρακτηρίζεται ως τόλμημα ή ως πρόκληση η συγγραφή βιβλίου σε αναγειρόμενη βαθμίδα εκπαίδευσης. Για τα βιβλία των μαθημάτων γενικής παιδείας σε σχολεία τεχνικής ή τεχνολογικής εκπαίδευσης οι παραπάνω χαρακτηρισμοί ακούγονται με μεγαλύτερη έμφαση.

Τα Τ.Ε.Ε. βρίσκονται στην αφετηρία τους και αναζητούν στηρίγματα. Είναι η **άλλη λύση** για τη νεολαία, διαφορετική από εκείνην του Ενιαίου Λυκείου. Διαφορετική. Ούτε κατώτερη, ούτε ανώτερη η μια από την άλλη. Κάθε λύση έχει τις δικές της προοπτικές και τα δικά της κίνητρα. Κοινό γνώρισμά τους πρέπει να είναι ο συντονισμός ανάμεσα στον πομπό και το δέκτη. Το διδάσκοντα και το διδασκόμενο.

Η Φυσική είναι μάθημα που έχει χρεωθεί, από τη γέννησή της, την ευθύνη του ορθολογισμού. Μας βοηθά να σκεφτόμαστε απλά, επαγωγικά και στηρίζει τα περισσότερα μαθήματα ειδικότητας. Απευθύνεται σε μαθητές των Τ.Ε.Ε. που οι συγκυρίες θα τους επιτρέψουν να φτάσουν μέχρι και το Β΄ κύκλο σπουδών. Αλλά και σ' αυτούς που θα επιλέξουν να βιώσουν την τεχνολογική διαδρομή ως την τριτοβάθμια μορφή της.

Για όλους η φύση είναι πηγή έμπνευσης και μίμησης και οι εικόνες της ερμηνεύονται, στέλνουν μηνύματα και ζητούν αξιοποίηση. Χρήσιμο για όλους τους μαθητές είναι να πειστούν πως οι φυσικοί νόμοι επιβάλλουν κάποια νομοτέλεια και τάξη. Κάποια πράγματα μπορούμε να τα προβλέψουμε, άλλα να τα προλάβουμε και κάποια άλλα να τα αξιοποιήσουμε.

Για να βοηθήσει η Φυσική σε όλα αυτά δεν μετατρέπει τα μέσα που διαθέτει σε αυτοσκοπό. Οι ορισμοί των φυσικών μεγεθών δεν πέφτουν σα μετεωρίτες στη θεωρία και τα Μαθηματικά δεν προπορεύονται σε σχέση με τη φυσική σκέψη. Τα βοηθήματα έρχονται όταν τα χρειαζόμαστε και στο βαθμό που απαιτείται. Η θεωρία ακολουθεί τη διαδικασία: παρατήρηση, περιγραφή, αναζήτηση των μεγεθών που αφορούν το φαινόμενο, μελέτη του ρόλου και της σχέσης που τα συνδέει. Η παρεμβολή εφαρμογών και ερωτημάτων που καταξιώνουν το φαινόμενο πρέπει να γίνεται με κριτήριο τη διευκόλυνση της κατανόησής του. Προέχει, η ευελιξία τους και όχι η τήρηση κάποιου τυπικού πρωτόκολλου.

Πιστεύουμε στον καθοριστικό ρόλο του συνάδελφου της μάχιμης εκπαίδευσης. Του ανθρώπου που θα παραλάβει το άψυχο κείμενο και θα του δώσει ζωή και ζωντάνια. Μεγάλος συγγραφέας-φιλόλογος που έζησε, σαν σχολικός επιθεωρητής, τη διδασκαλία κειμένων του από μερακλή καθηγητή του δήλωσε συγκινημένος: «Κύριε συνάδελφε αναδείξατε μια πλευρά της γραφής μου, που ούτε είχα διανοηθεί». Η δημιουργία και έμπνευση ποικίλων απόψεων στον αναγνώστη είναι η επιβράβευση κάθε κειμένου. Καλύτερο από το να δίνεις απαντήσεις είναι να εμπνέεις ερωτήματα στον ακροατή ή στον αναγνώστη σου και να τον βοηθάς διακριτικά στο να αναζητά απαντήσεις. Κριτής πάντων χρόνος...

Ευχαριστούμε θερμά όλους όσους μας βοήθησαν στην προσπάθειά μας:

- Τους υπεύθυνους και την επιτροπή κρίσης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για την άψογη συνεργασία μας.

- Τους ανθρώπους της «Βιβλιοσυνεργατικής» και τους συνεργάτες τους για τις διευκολύνσεις που μας παραχωρούσαν.

- Τις οικογένειές μας που όχι μόνο έδειχναν ανοχή, μα διευκόλυναν κιόλας μια πολύμηνη κατάσταση του «ωσεί παρών» για κάποιο μέλος τους, ανάμεσα σε σκόρπια βιβλία και χαρτιά και με το PC σε υπερωρίες...

Η πιο αποδοτική μορφή συνεργασίας είναι η αλληλεπίδραση. Αυτή θα μας δείξει, αν και κατά πόσο προσεγγίσαμε τους στόχους μας...

(Επισήμανση: οι ενότητες με αστερίσκο (*) δεν περιλαμβάνονται στην υποχρεωτική διδασκαλία)

Οι συγγραφείς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Με τι ασχολείται η Φυσική

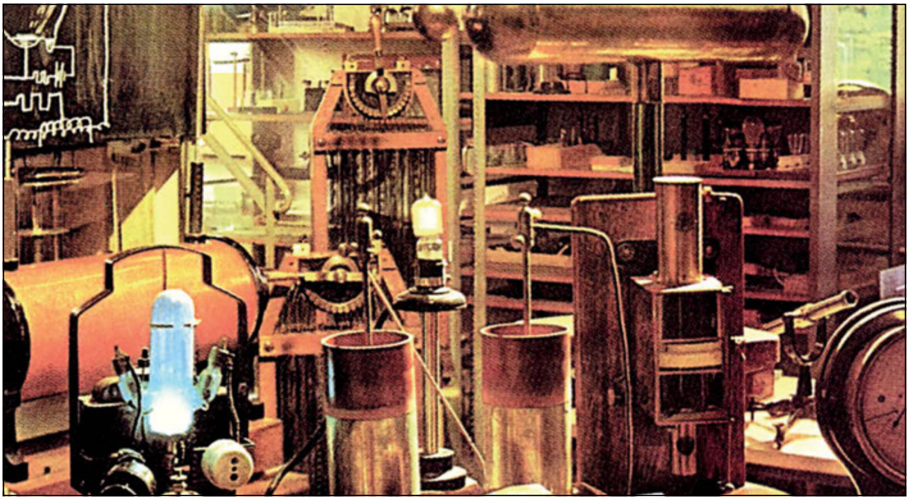
Ο άνθρωπος από τα πολύ παλιά χρόνια προσπάθησε να ερμηνεύσει και να τιθασεύσει τη φύση. Στην προσπάθειά του αυτή διατύπωσε έννοιες και συλλογισμούς χρησιμοποιώντας στην αρχή την παρατήρηση και τη λογική και στη συνέχεια το πείραμα και τους μαθηματικούς υπολογισμούς. Οι σχέσεις που προέκυψαν από τις παραπάνω διαδικασίες αποτέλεσαν τους φυσικούς νόμους και αργότερα τις θεωρίες, με τις οποίες ερμηνεύεται ο φυσικός κόσμος. Αυτές μπορούν να βρουν εφαρμογή σε διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Εικόνα 1.1
Αντικείμενο της Φυσικής είναι η έρευνα της Φύσης και των φαινομένων της.

Σύμφωνα με τον **Einstein** (Αϊνστάιν) η επιστήμη δεν είναι συλλογή νόμων ούτε κατάλογος γεγονότων άσχετων μεταξύ τους αλλά δημιουργία του ανθρώπινου πνεύματος, το οποίο επινοεί **ιδέες και έννοιες**. Οι θεωρίες της Φυσικής προσπαθούν να σχηματίσουν **μια εικόνα της πραγματικότητας** και να τη συνδέσουν με τον ευρύτερο κόσμο **των αισθητηριακών εντυπώσεων**. Στο σημείο αυτό είναι αναγκαίο να επισημανθούν τα παρακάτω δύο στοιχεία: **οι αισθητηριακές εντυπώσεις** που έχουμε όλοι μας από τις εμπειρίες της καθημερινής ζωής και οι **επιστημονικές απόψεις** που διδάσκονται στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Η εκπαίδευση, μέσα από το επίσημο σχολικό πρόγραμμα καλείται να **“γεφυρώσει”** τις ιδέες και τις αντιλήψεις που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για το φυσικό κόσμο, πριν έρθουν στο σχολείο, με τις επιστημονικές απόψεις που διδάσκονται σε αυτό. Με τη διδασκαλία της Φυσικής επιδιώκεται η μελέτη και η εφαρμογή στην καθημερινή ζωή των φυσικών νόμων και των θεωριών, καθώς επίσης και η εξοικείωση των μαθητών με τον τρόπο με τον οποίο αναπτύχθηκαν οι επιστημονικές γνώσεις, δηλαδή με τη μεθοδολογία των Φυσικών Επιστημών.

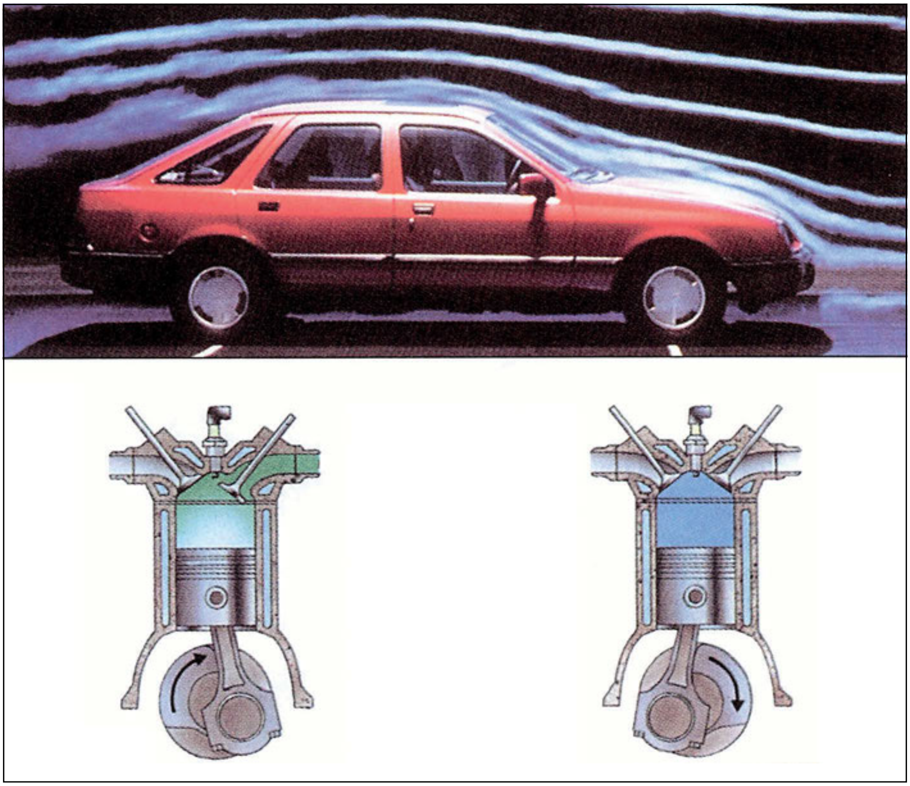
Η μεθοδολογία της Φυσικής περιλαμβάνει κατά σειρά τις παρακάτω διαδικασίες: **παρατήρηση, ταξινόμηση, διατύπωση υποθέσεων και προβλέψεων, πειραματικές ασκήσεις, εξαγωγή συμπερασμάτων** κ.ά. Συμβάλλει στη δημιουργία ελεύθερων και υπεύθυνων ατόμων μέσα από ατομικές και συλλογικές δραστηριότητες στα πλαίσια της διδασκαλίας. Για το λόγο αυτό αντικείμενο της διδασκαλίας της Φυσικής δεν είναι μόνο οι επιστημονικές γνώσεις αλλά και η μεθοδολογία της.



**Εικόνα 1.2 Το πείραμα είναι η ψυχή της Φυσικής.
Στη φωτογραφία φαίνεται ένα τμήμα του εργαστηρίου Φυσικής
του Πολυτεχνείου της Ζυρίχης την εποχή που φοιτούσε σε αυτό ο Αϊνστάιν.**

Με τις αισθήσεις μας διαπιστώνουμε ότι στη φύση υπάρχουν τα υλικά σώματα με διαφορετικές ιδιότητες, σχήματα και διαστάσεις, τα οποία προκαλούν στον καθένα μας διαφορετική εντύπωση. Διαπιστώνουμε, επίσης, ότι στη φύση συμβαίνουν πολλές μεταβολές με διαφορετική συχνότητα εμφάνισης και έκτασης.

Φυσικά φαινόμενα ονομάζουμε τις μεταβολές εκείνες κατά τις οποίες η ουσία (σύσταση) των σωμάτων δεν αλλάζει ριζικά και τα σώματα είναι σε θέση να επανέλθουν στην αρχική κατάσταση τους, όπως είναι π.χ. η αλλαγή της θέσης ή της κατάστασης ενός σώματος από στερεό σε υγρό ή αέριο, οι σεισμοί κ.ά. Αντίθετα, **χημικά φαινόμενα** ονομάζουμε τις μεταβολές στις οποίες η ουσία των σωμάτων αλλάζει ριζικά και τα σώματα δεν μπορούν να επιστρέψουν στην αρχική τους σύσταση, όπως είναι π.χ. η καύση ενός σώματος, το κιτρίνισμα των φύλλων, η μετατροπή του κρασιού σε ξίδι κ.ά.



Εικόνα 1.3
Η κίνηση του αυτοκινήτου είναι φυσικό φαινόμενο.
Η καύση της βενζίνης είναι χημικό φαινόμενο.

Στο μάθημα της Φυσικής μελετώνται τα φυσικά φαινόμενα και οι ιδιότητες των διάφορων σωμάτων, ορατών και μη, σε μια προσπάθεια να βρεθούν οι αιτίες που τα προκαλούν. Για το σκοπό αυτό αρχίζουμε τη μελέτη με την παρατήρηση και το πείραμα. Με το πείραμα απομονώνεται συνήθως ένα συμβάν του πραγματικού κόσμου στο εργαστήριο και εξετάζονται οι προϋποθέσεις και οι μεταβλητές, οι οποίες ρυθμίζουν το φυσικό φαινόμενο, αλλά και τα νέα φαινόμενα που εμφανίζονται ή τα φαινόμενα που δεν υποπίπτουν στις αισθήσεις μας.

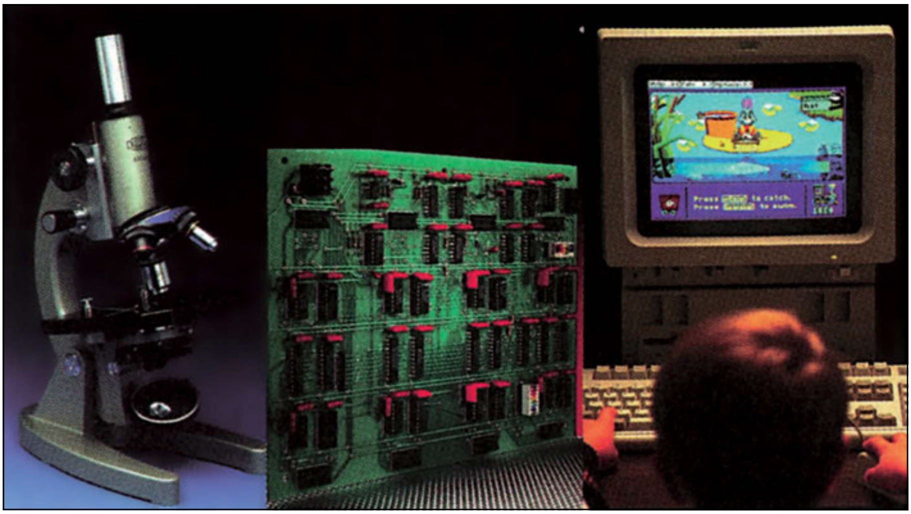
Στη Φυσική, βέβαια, δε γίνεται μόνο απλή περιγραφή των φυσικών φαινομένων, αλλά και ακριβείς μετρήσεις των διάφορων μεγεθών που έχουν σχέση με τα φαινόμενα που εξετάζονται. Ύστερα από πολλές εμπειρίες διαπιστώθηκε ότι οι φυσικές διαδικασίες ακολουθούν κάποιους κανόνες με τους οποίους μπορούν να περιγραφούν τα φυσικά φαινόμενα. Στη συνέχεια, από τη μελέτη των φαινομένων και των διαδικασιών, κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται ένα φαινόμενο, προκύπτουν σχέσεις, οι οποίες συνδέουν τα μεγέθη μεταξύ τους. Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται **φυσικοί νόμοι** και γενικεύουν τα συμπεράσματα των πειραματικών δεδομένων και των μετρήσεων.

1.2 Η Φυσική και η Τεχνολογία

Η Φυσική ασχολείται με τη μελέτη τόσο των μακροσκοπικών όσο και των μικροσκοπικών φαινομένων. Χρησιμοποιώντας μόνο βασικούς νόμους η Φυσική έχει καταφέρει έως σήμερα να περιγράψει μικροσκοπικά και μακροσκοπικά φαινόμενα. Οι φυσικοί προσπαθούν να ενοποιήσουν αυτούς τους νόμους σε έναν γενικό.

Εικόνα 1.4
Το ερευνητικό πεδίο της Φυσικής ξεκινάει από το εσωτερικό ατόμων και φτάνει μέχρι τους γαλαξίες.

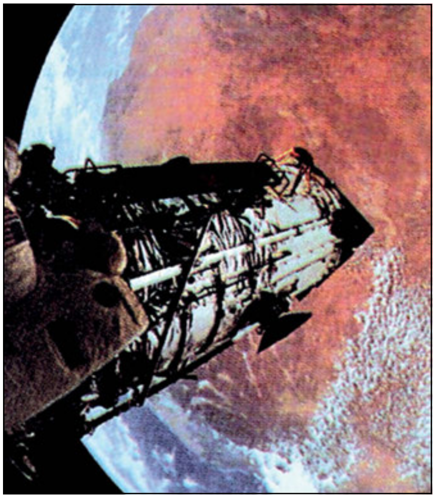
Οι φυσικοί νόμοι είναι τα θεμέλια της Τεχνολογίας, δηλαδή των έργων υποδομής και των κατασκευών, της μηχανολογίας, της ηλεκτρολογίας, της ηλεκτρονικής, της εφαρμοσμένης Ιατρικής κ.ά.



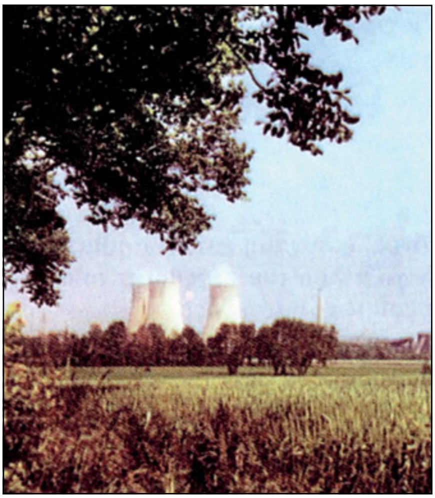
Εικόνα 1.5
Τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης Φυσικής και Τεχνολογίας

Η **Τεχνολογία** είναι η εφαρμογή των επιστημονικών γνώσεων. Η εξέλιξη των Φυσικών Επιστημών συνέβαλε στην εξέλιξη της Τεχνολογίας και στην κατασκευή μηχανισμών και μέσων, τα οποία επηρεάζουν πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής, όπως τη διατροφή, την υγεία, τις μετακινήσεις, τις κατασκευές κ.ά.

Η Φυσική και η Τεχνολογία διαφέρουν ως προς το προϊόν που παράγουν. Το τελικό προϊόν της Τεχνολογίας είναι συσκευές και διατάξεις χρήσιμες για τον άνθρωπο και μέχρι ενός σημαντικού βαθμού για το περιβάλλον. Η Τεχνολογία χρησιμοποίησε και εξακολουθεί να χρησιμοποιεί πολλά στοιχεία των επιστημονικών γνώσεων, αλλά και η εξέλιξη των Φυσικών Επιστημών οφείλει πολλά στην Τεχνολογία. Οι ανάγκες της καθημερινής ζωής ζητούσαν και ζητούν λύσεις, οι οποίες δίνονται από την αλληλεπίδραση Επιστήμης και Τεχνολογίας. Σε αρκετές περιπτώσεις, όμως, οι επιστημονικές γνώσεις χρησιμοποιούνται σε βάρος τόσο της ανθρωπότητας όσο και του περιβάλλοντος. Πρόσφατα παραδείγματα είναι οι ρυπογόνες βιομηχανίες, τα πυρηνικά όπλα κτλ.



Εικόνα 1.6 Δορυφόρος σε τροχιά



Εικόνα 1.7
Η ρύπανση του περιβάλλοντος

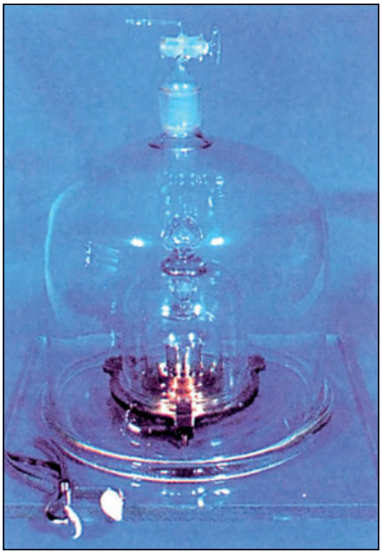
Εικόνα 1.8
Έκρηξη ατομικής βόμβας

1.3 Φυσικά μεγέθη

Η μελέτη των φυσικών φαινομένων έδειξε ότι τα **φυσικά μεγέθη** που εμφανίζονται σε κάθε φαινόμενο συνδέονται μεταξύ τους με ορισμένες σχέσεις. Η έρευνα των φυσικών φαινομένων αξιολογείται, όταν μετρώνται τα φυσικά μεγέθη. Σε ένα φυσικό φαινόμενο τα φυσικά μεγέθη είναι ουσιαστικά οι **μετρήσιμες ιδιότητες των σωμάτων,** π.χ. το μήκος ενός σώματος, ο όγκος, η πυκνότητα κ.ά.

Η **μέτρηση** των φυσικών μεγεθών είναι μια διαδικασία σύγκρισης του μεγέθους με μια μονάδα μέτρησής του, όπως για παράδειγμα η απόσταση μεταξύ δύο πόλεων με τη μονάδα μέτρησης των μεγάλων αποστάσεων, που είναι το χιλιόμετρο ή το μίλι, η σύγκριση της μάζας που έχει ένα σώμα με τη μονάδα μέτρησής της, που είναι το χιλιόγραμμο. Οι πρότυπες μονάδες προέκυψαν ύστερα από συμφωνία των επιστημόνων και αντιπροσωπεύονται από πρότυπα αντικείμενα.

Το πρότυπο χιλιόγραμμο μάζας, για παράδειγμα, είναι ένας κύλινδρος από κράμα πλατίνας και ιριδίου, διαμέτρου 39 mm και ύψους 39 mm, όπως φαίνεται στην εικόνα 1.9, και φυλάσσεται στο Μουσείο Μέτρων και Σταθμών στις Σέβρες της Γαλλίας.



Εικόνα 1.9
Το πρότυπο χιλιόγραμμο

Από τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους προκύπτει ένας αριθμός που δείχνει πόσες φορές η μονάδα μέτρησης περιέχεται στο μέγεθος που εξετάζεται. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **αριθμητική τιμή** του μεγέθους και συνοδεύεται πάντοτε από τη **μονάδα μέτρησης**, π.χ. η απόσταση μεταξύ της πόλης Α και της πόλης Β είναι 56 km. Το 56 είναι η αριθμητική τιμή του μεγέθους, ενώ το km είναι η μονάδα μέτρησης.

Άλλα φυσικά μεγέθη είναι η μάζα, η επιφάνεια, ο όγκος, η ταχύτητα, ο χρόνος, η δύναμη κ.ά. **Η αριθμητική τιμή και η μονάδα μέτρησης αποτελούν το μέτρο του μεγέθους, το οποίο προσδιορίζει πλήρως ένα μονόμετρο (ή βαθμωτό) μέγεθος.**

Τα φυσικά μεγέθη ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο τα εισάγουμε διακρίνονται σε: **θεμελιώδη και παράγωγα.**

Θεμελιώδη μεγέθη είναι το μήκος, η μάζα, ο χρόνος, η θερμοκρασία, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, η ένταση φωτεινής πηγής (Πίνακας 1.1).

Πίνακας 1.1 Τα θεμελιώδη μεγέθη και οι μονάδες μέτρησής τους στο S. I

Θεμελιώδες μέγεθος	**Σύμβολο**	**Μονάδα μέτρησης**	**Σύμβολο μονάδων**
Μήκος	ℓ	Μέτρο	m
Μάζα	m	Χιλιόγραμμο	kg
Χρόνος	t	Δευτερόλεπτο	s
Θερμοκρασία	θ, T	Βαθμός Κελσίου ή Κέλβιν	ºC, K
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	i	Ampere	A
Ένταση φωτεινής πηγής	J	Candela	cd

Παράγωγα μεγέθη είναι το εμβαδόν, ο όγκος, η ταχύτητα, η πυκνότητα κ.ά., τα οποία ορίζονται από τις μαθηματικές σχέσεις που τα συνδέουν με τα θεμελιώδη μεγέθη (Πίνακας 1.2).

Πίνακας 1.2 Τα παράγωγα μεγέθη και οι μονάδες μέτρησής τους στο S. I

Παράγωγο μέγεθος	**Σύμβολο**	**Σχέση**	**Μονάδα μέτρησης**	**Σύμβολο μονάδων**
Εμβαδόν	**A**	$A = \alpha.\ \beta$	Τετραγωνικό μέτρο	m^2
Όγκος	**V**	$V = \alpha.\ \beta.\ \gamma$	Κυβικό μέτρο	m^3
Ταχύτητα	**υ**	$\upsilon = \frac{s}{t}$	Μέτρο ανά δευτερόλεπτο	m / s
Πυκνότητα	**ρ**	$\rho = \frac{m}{V}$	Χιλιόγραμμο ανά κυβικό μέτρο	kg / m^3

Πολλά από τα μεγέθη αυτά, ανάλογα με την τάξη μεγέθους, χρησιμοποιούνται με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των παραπάνω μονάδων φαίνονται στον πίνακα 1.3 που ακολουθεί.

Πίνακας 1.3 Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια μονάδων

Μέγεθος	Μονάδα μέτρησης	Πολλαπλάσια	Υποπολλαπλάσια	
Μήκος	1m	1km = 1000m 1mi = 1852 m	δεκατόμετρο εκατοστόμετρο χιλιοστόμετρο γιάρδα πόδι ίντσα	1dm = 1/10m 1cm = 1/100m 1mm = 1/1000m 1yd = 91,44cm 1ft=30,48cm 1in = 2,54 cm
Εμβαδόν	$1m^2$	1 στρέμμα = $1000m^2$	τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2) $1dm^2 = 10^{-2}\ m^2$ τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2) $1cm^2 = 10^{-4}\ m^2$ τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (mm^2) $1mm^2 = 10^{-6}\ m^2$	
Όγκος	$1m^3$		λίτρο ή κυβικό δεκατόμετρο (lt) $1lt = 1dm^3 = 10^{-3}m^3$ κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) $1cm^3 = 10^{-6}m^3$ κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) $1mm^3 = 10^{-9}\ m^3$	

Ας προσέξουμε

$$2\ dm^2 = 2\ (10cm)^2 = 2\ 10^2\ cm^2 = 200\ cm^2$$

$$2\ dm^2 = 2\left(\frac{1}{10}m\right)^2 = 2\frac{1}{10^2}m^2 = 2\ 10^{-2}m^2 = 0{,}02\,m^2$$

1.4 Μονόμετρα και διανυσματικά μεγέθη

Τα φυσικά μεγέθη τα οποία καθορίζονται πλήρως από την αριθμητική τιμή και από τη μονάδα μέτρησής τους ονομάζονται **μονόμετρα ή βαθμωτά μεγέθη**. Είναι αρκετό να πούμε ότι το θρανίο έχει μήκος 3 μέτρα και ότι μία διδακτική ώρα έχει χρονική διάρκεια 45 λεπτά. Δεν είναι όμως αρκετό να πούμε ότι ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 80 χιλιόμετρα την ώρα, διότι είναι άγνωστη η διεύθυνση και η φορά κατά την οποία κινείται το αυτοκίνητο. Η ταχύτητα, επομένως, για να οριστεί πλήρως, χρειάζεται, εκτός από το μέτρο της, τη διεύθυνση και τη φορά, που μαζί ονομάζονται κατεύθυνση της ταχύτητας.

Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται **διανυσματικά μεγέθη**. Άλλα διανυσματικά μεγέθη είναι η επιτάχυνση, η δύναμη, η ορμή κ.ά.

Επομένως, για να καθοριστούν πλήρως τα διανυσματικά μεγέθη, απαιτούνται:

• **Το μέτρο τους** (αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης).

• **Ο φορέας ή η διεύθυνση**, δηλαδή η ευθεία γραμμή πάνω στη οποία π.χ. θα κινηθεί ένα κινητό ή θα εφαρμοστεί μια δύναμη.

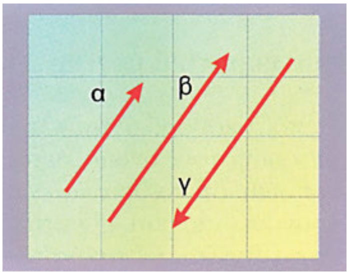
• **Η φορά** προς την οποία π.χ. θα κινηθεί το κινητό ή θα ασκηθεί μια δύναμη. Η διεύθυνση μαζί με τη φορά εκφράζονται με τον όρο **κατεύθυνση**.

• **Το σημείο εφαρμογής**, δηλαδή σε ποιο σημείο του σώματος π.χ. θα εφαρμοστεί η δύναμη.

Εικόνα 1.10
Πώς σχετίζεται η εικόνα αυτή με το γεγονός ότι πρέπει να υπάρχουν διανυσματικά μεγέθη;

Για τα μονόμετρα μεγέθη ισχύει ο **αλγεβρικός λογισμός**. Δηλαδή, η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο ομοειδών μονόμετρων μεγεθών γίνεται όπως και με τους αριθμούς. Αν, π.χ, ένα αυτοκίνητο κινηθεί αρχικά για χρόνο t_1=5s και στη συνέχεια για άλλα t_2=7s, ο συνολικός χρόνος της κίνησης υπολογίζεται από τη σχέση: $t_{ολ} = t_1 + t_2 = 5s + 7s = 12s$.

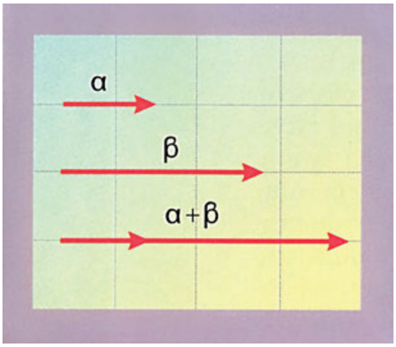
Για τα διανυσματικά, όμως, μεγέθη ακολουθείται ο **διανυσματικός λογισμός**, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο προστίθενται και αφαιρούνται τα διανύσματα. Για το λόγο αυτό πρέπει να γνωρίζει κανείς αν τα διανυσματικά ομοειδή μεγέθη είναι συγγραμμικά, ομόρροπα ή αντίρροπα, ή αν οι φορείς τους σχηματίζουν γωνία.



Εικόνα 1.11
Συγγραμμικά διανύσματα

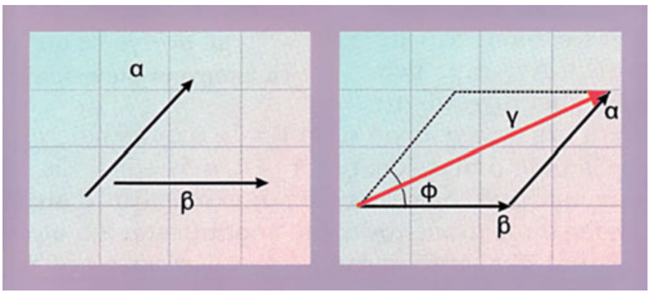
Δύο ή περισσότερα διανύσματα ονομάζονται συγγραμμικά, αν οι φορείς τους είναι παράλληλοι. Τα τρία διανύσματα στο σχήμα 1.11 είναι συγγραμμικά.

Τα διανύσματα α και β έχουν επιπλέον και ένα άλλο κοινό χαρακτηριστικό: έχουν την ίδια φορά και λέγονται **ομόρροπα**. Το διάνυσμα γ έχει αντίθετη φορά από τα άλλα δύο. Τα διανύσματα αυτά, που έχουν παράλληλους φορείς αλλά αντίθετη φορά, λέγονται **αντίρροπα**. Για να συνθέσουμε δύο διανυσματικά



Εικόνα 1.12
Σύνθεση ομόρροπων διανυσμάτων

μεγέθη εφαρμόζουμε τη διαδικασία εκείνη με την οποία τα διανύσματα γίνονται διαδοχικά. Στα ομόρροπα διανύσματα η διαδικασία είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.12. Το τέλος του πρώτου διανύσματος γίνεται αρχή του δεύτερου.



Εικόνα 1.13
Σύνθεση δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων

Όταν τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά, το πρώτο βήμα είναι να γίνουν διαδοχικά με τη διαδικασία που φαίνεται στο σχήμα 1.12, η οποία ονομάζεται **κανόνας του παραλληλογράμμου**. Με τη βοήθεια των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου η διαγώνιος $\vec{\gamma}$ είναι η σύνθεση ή **συνισταμένη** των δύο διανυσμάτων, το διάνυσμα δηλαδή που μπορεί να αντικαταστήσει τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τα οποία λέγονται **συνιστώσες**.

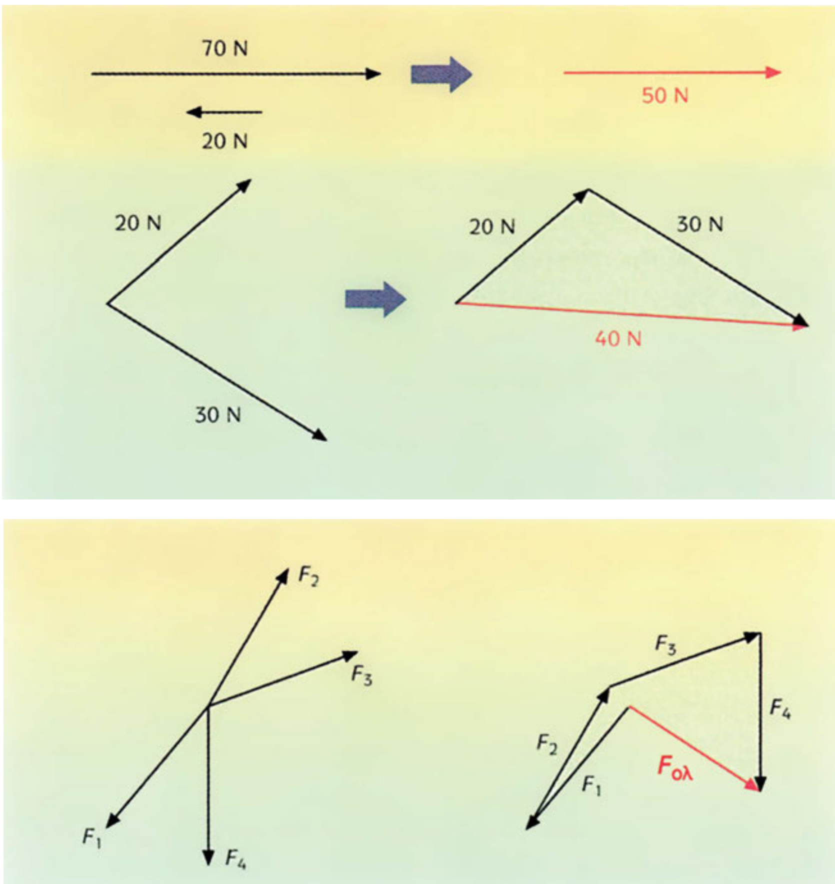
Η σύνθεση των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, η οποία είναι γεωμετρικό άθροισμα, γράφεται ως εξής: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Όμως το μέτρο της συνισταμένης γ των δύο διανυσμάτων δε βρίσκεται από τη σχέση $\gamma = \alpha + \beta$ αλλά από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

(φ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα α, β).

Περισσότερα για την εύρεση της συνισταμένης δύο ή περισσότερων διανυσματικών μεγεθών φαίνονται στην εικόνα 1.14.

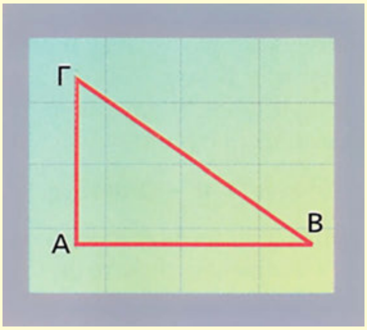


Εικόνα 1.14
Σύνθεση διανυσματικών μεγεθών

Ας θυμηθούμε

Βασικά στοιχεία Τριγωνομετρίας

Για να υπολογιστεί το μέτρο αλλά και η κατεύθυνση της συνισταμένης δύο μη συγγραμμικών διανυσματικών μεγεθών, είναι απαραίτητα κάποια στοιχεία από την Τριγωνομετρία, όπως είναι το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη μιας γωνίας. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες Β και Γ είναι οξείες γωνίες.

● Το **ημίτονο της γωνίας Β** είναι το πηλίκο του μήκους της απέναντι κάθετης πλευράς ΑΓ προς το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ και το συμβολίζουμε:

$$\text{ημ}B = \frac{\text{μήκος πλευράς ΑΓ}}{\text{μήκος υποτείνουσας ΒΓ}} \quad \text{ή} \quad \text{ημ}B = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

● Το **συνημίτονο της γωνίας Β** είναι το πηλίκο του μήκους της προσκείμενης πλευράς ΑΒ προς το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ και το συμβολίζουμε:

$$\text{συν}B = \frac{\text{μήκος πλευράς ΑΒ}}{\text{μήκος υποτείνουσας ΒΓ}} \quad \text{ή} \quad \text{συν}B = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

● Η **εφαπτομένη της γωνίας Β** είναι το πηλίκο του μήκους της απέναντι κάθετης πλευράς ΑΓ προς το μήκος της προσκείμενης πλευράς ΑΒ και τη συμβολίζουμε:

$$\text{εφ}B = \frac{\text{μήκος πλευράς ΑΓ}}{\text{μήκος πλευράς ΑΒ}} \quad \text{ή} \quad \text{εφ}B = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

◗ Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών

1. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας φ συνδέονται μεταξύ τους με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{ημ}^2\varphi + \text{συν}^2\varphi = 1 \qquad \text{εφ}\varphi = \frac{\text{ημ}\varphi}{\text{συν}\varphi}$$

Αν δύο γωνίες φ και ω είναι συμπληρωματικές (φ +ω = 90»), τότε ισχύει:

ημφ = συνω **και** **συνφ = ημω**

Αν οι δυο γωνίες φ και ω είναι παραπληρωματικές (φ + ω = 180°), τότε ισχύει:

ημφ = ημω **και** **συνφ = -συνω**

Στον πίνακα που ακολουθεί υπάρχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των πιο συνηθισμένων γωνιών, που θα χρειαστείτε στη συνέχεια.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί μερικών χαρακτηριστικών γωνιών

Γωνία	ημφ	συνφ	εφφ
0º	0	1	0
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90º	1	0	-
180º	0	-1	0

($\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866,\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0,577,\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707,\ \sqrt{3} \cong 1,73$)

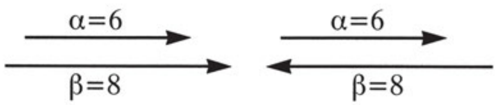
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ -ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

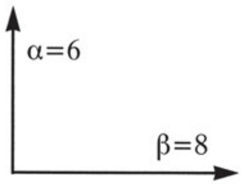
1.1 Η τιμή του συνημιτόνου μιας οξείας γωνίας φ είναι 0,6. Να υπολογιστούν:
α. το ημίτονο της γωνίας φ (ημφ)
β. η εφαπτομένη της γωνίας φ (εφφ).

1.2 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(Α=90ο) η κάθετη πλευρά ΑΓ=β είναι ίση με 0,5 cm και ταυτόχρονα το μισό της υποτείνουσας. Να υπολογιστούν:
α. το ημΒ
β. το συνΒ
γ. η εφΒ.

1.3 Με τη βοήθεια ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° και 60ο.

1.4 Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τη συνισταμένη των δύο διανυσματικών μεγεθών στις παρακάτω περιπτώσεις:





Τι παρατηρείτε και πώς το εξηγείτε;

1.5 Να αντιστοιχίσετε τα φυσικά μεγέθη της αριστερής στήλης με τις μονάδες της δεξιάς στήλης.

Φυσικό μέγεθος	Μονάδα μέτρησης
Απόσταση	s
Μήκος	kg
Μάζα	cm
Χρόνος	min
Πυκνότητα	m
	kg/m^3

1.6 Για τον προσδιορισμό ενός μονόμετρου μεγέθους χρειάζεται να ξέρουμε:
α. το μέτρο του
β. την αριθμητική τιμή του
γ. το μέτρο και τη μονάδα μέτρησής του
δ. το μέτρο του και τη διεύθυνσή του.

1.7 Για τον προσδιορισμό ενός διανυσματικού μεγέθους χρειάζεται να ξέρουμε:

α. το μέτρο του
β. την αριθμητική τιμή και τη διεύθυνσή του
γ. το μέτρο και τη μονάδα μέτρησής του
δ. κάτι άλλο ....

1.8 Να δώσετε δύο παραδείγματα μονόμετρων μεγεθών και δύο διανυσματικών μεγεθών και να εξηγήσετε τη διαφορά μεταξύ μονόμετρου και διανυσματικού μεγέθους.

1.9 Να συμπληρωθούν τα κενά των παρακάτω προτάσεων:

α. Τα 1525 m είναι .... km.
β. Τα 200 cm είναι .... m.
γ. Τα 88 gr είναι .... kg.
δ. Τα $36cm^2$ είναι .... m^2.
ε. Τα 250 mm^3 είναι .... m^3 και .... cm^3.
στ. Οι δυόμισι ώρες είναι .... λεπτά και .... s.

1.10 Να χαρακτηρίσετε με Σ τις παρακάτω προτάσεις, αν είναι σωστές, και με Λ, αν είναι λανθασμένες, και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας:

α. Με τη διδασκαλία της Φυσικής στο σχολείο επιδιώκεται μόνο η μελέτη της φύσης.
β. Η Φυσική και η Τεχνολογία αναπτύσσονται παράλληλα.
γ. Η Τεχνολογία ασχολείται με την εφαρμογή των επιστημονικών γνώσεων.
δ. Ο βρασμός είναι χημικό φαινόμενο.
ε. Η αστραπή είναι χημικό φαινόμενο.

1.11 Με ποια κριτήρια νομίζετε ότι διαχωρίζονται τα μεγέθη σε θεμελιώδη και σε παράγωγα; Να αναφέρετε δύο θεμελιώδη και δύο παράγωγα μεγέθη.

1.12 Η πυκνότητα ρ ορίζεται ως το πηλίκο της μάζας ενός σώματος προς τον όγκο του. Ποια σχέση συνδέει τις μονάδες πυκνότητας: $1g/cm^3$ και $1kg/m^3$;

1.13 Πόση είναι η μάζα του αέρα σε ένα δωμάτιο, αν οι διαστάσεις του δωματίου είναι 10m x 5m x 2m και η πυκνότητα του αέρα 1,3 kg/m^3;

1.14 Η πυκνότητα του χρυσού είναι 19 g/cm^3

α. Πόση είναι η μάζα του χρυσού σε ένα δακτυλίδι που έχει όγκο 1,2 cm^3;
β. Πόσο όγκο (σε m^3) έχει μια πλάκα χρυσού που ζυγίζει 190 kg;

1.15 Μια πισίνα που έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις 6m x 10m x 5m. Η πισίνα είναι γεμάτη με νερό που έχει πυκνότητα 1,08 gr/cm^3.
Πόση είναι η μάζα του νερού της πισίνας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

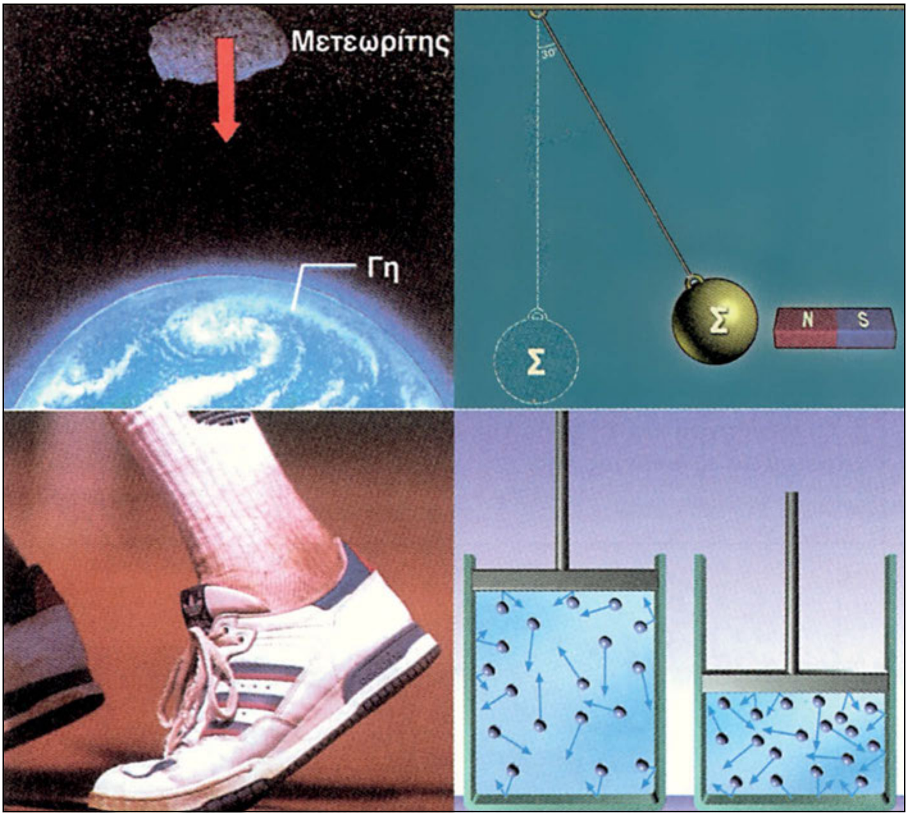
2.1 Η έννοια της δύναμης

Από τις καθημερινές εμπειρίες μας γνωρίζουμε πώς να περπατάμε, πώς να κολυμπάμε ή πώς να χορεύουμε, πώς να παίζουμε ποδόσφαιρο, μπάσκετ ή βόλεϊ, πώς να ισορροπούμε, όταν βρισκόμαστε μέσα σε κινούμενο όχημα, και ο οδηγός πατάει φρένο.

Έπειτα, στο σχολείο μαθαίνουμε ότι:

- η γη έλκει όλα τα σώματα.
- δύο μαγνήτες έλκονται ή απωθούνται.
- μπορούμε να παραμορφώσουμε ένα σώμα.
- μπορούμε να συμπιέσουμε ένα αέριο μέχρι ενός σημείου.

(Δηλαδή αυτά που μαθαίνουμε στο σχολείο εξηγούν τις καθημερινές εμπειρίες μας).



Εικόνα 2.1
Η παρουσία της δύναμης μέσα από τα αποτελέσματά της

Σε όλες αυτές τις παρατηρήσεις κυριαρχεί ένα πρωταρχικό φυσικό μέγεθος. Το μέγεθος αυτό είναι η **δύναμη**.

Αντίθετα με τη μάζα, με το μήκος ή με τον όγκο, **η δύναμη είναι κάτι που δεν προϋπάρχει σε ένα σώμα. Η δύναμη είναι μια αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων,** π.χ. του δρόμου και των ποδιών μας, του νερού και των χεριών μας, της μπάλας και των χεριών ή των ποδιών μας.

Με άλλα λόγια, ένα σώμα μπορεί να ασκήσει μια δύναμη σε ένα άλλο, αλλά δεν μπορεί να κατέχει μια δύναμη ως κάτι ξεχωριστό. Τη δύναμη τη συναντάμε με διάφορες ονομασίες όπως βάρος, έλξη, άπωση, αντίσταση, τριβή κ.ά.

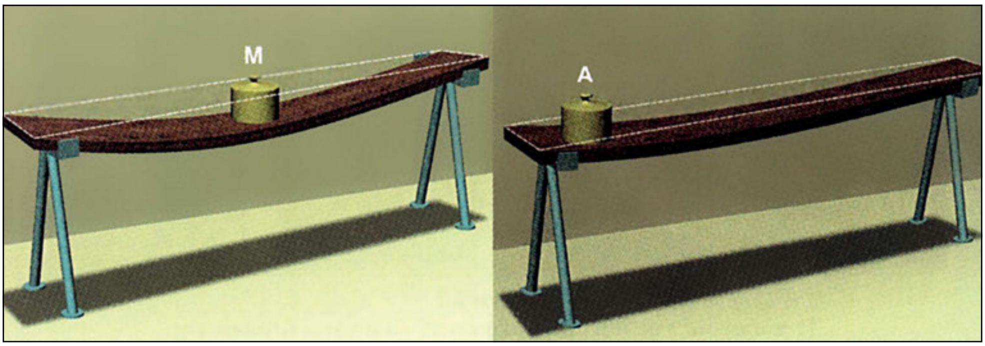
Οι δυνάμεις, γενικά:
- σπρώχνουν ή τραβούν τα σώματα
- μετακινούν ή σταματούν τα σώματα
- περιστρέφουν τα σώματα
- παραμορφώνουν ή αλλάζουν τα σχήματα των σωμάτων.

Τέλος, τη δύναμη δεν τη “βλέπουμε”, βλέπουμε όμως τα αποτελέσματά της και αυτά μελετάμε, για να εξηγήσουμε την κίνηση των ζωντανών οργανισμών αλλά και των υλικών σωμάτων πάνω στη γη, μέσα στη θάλασσα, στον αέρα ή στο διάστημα. Από αυτές τις μελέτες προέκυψαν τα σύγχρονα μηχανήματα και πλήθος διάφορων κατασκευών, τα οποία κάνουν τη ζωή μας άνετη.

2.2 Τα χαρακτηριστικά της δύναμης

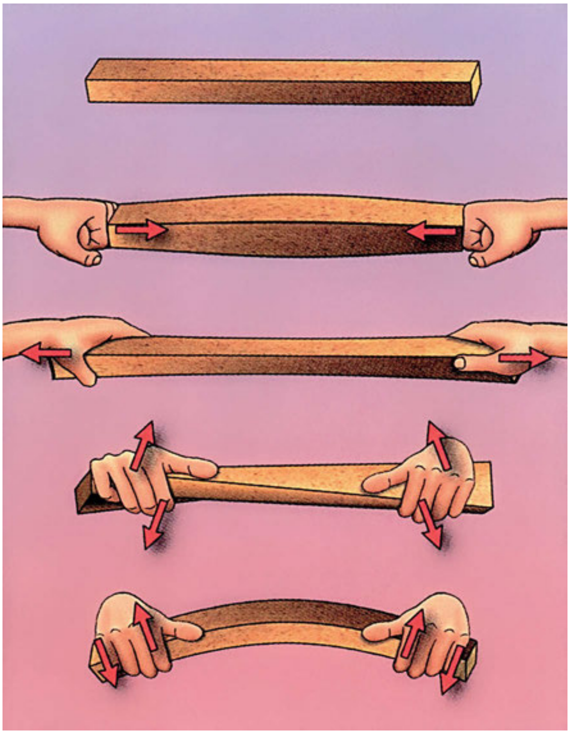
Για να καθορίσουμε τη δύναμη που δέχεται ένα σώμα ή τη δύναμη που ασκεί ένα σώμα σε ένα άλλο, χρειάζεται να γνωρίζουμε τρία στοιχεία:

α. το μέτρο της δύναμης (αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης)
β. τη διεύθυνση και τη φορά της δύναμης
γ το σημείο εφαρμογής της.



Εικόνα 2.2
Αποτελέσματα μιας δύναμης ανάλογα με το σημείο εφαρμογής της

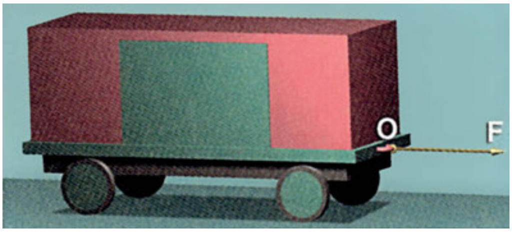
Τα παραπάνω στοιχεία, που αφορούν τη δύναμη, είναι απαραίτητα, αφού άλλα θα είναι τα αποτελέσματα της δύναμης, όταν αυτή ασκηθεί στο σημείο Α ή Μ (εικόνα 2.2), και άλλα, όταν οι δυνάμεις ασκηθούν όπως δείχνει η εικόνα 2.3.



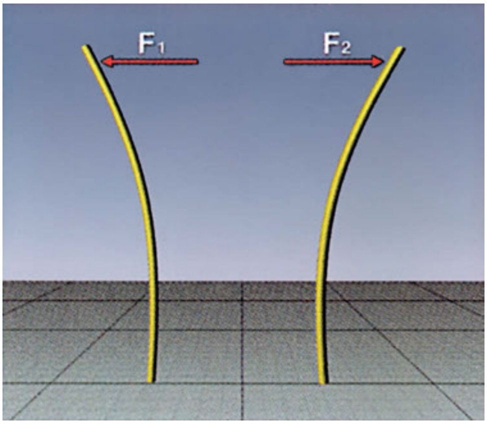
Εικόνα 2.3
Αποτελέσματα δυνάμεων
ανάλογα με τη διεύθυνση και με τη φορά τους

Είναι, επομένως, φανερό ότι **η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος.**

Στην παρακάτω εικόνα 2.4 η δύναμη ασκείται στο σημείο Ο του βαγονιού. Το σημείο Ο δείχνει το σημείο εφαρμογής της δύναμης, ενώ το διάνυσμα δείχνει τη διεύθυνση και τη φορά της δύναμης.



Εικόνα 2.4
Δύναμη η οποία ασκείται σε βαγόνι

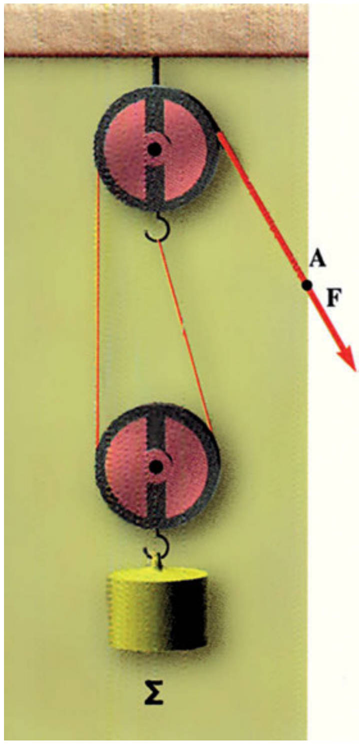


Εικόνα 2.5
Αποτελέσματα δύναμης στο σημείο που ασκείται

Ας παρατηρήσουμε όμως κάποια διαφορά ως προς τα αποτελέσματα της επίδρασης μιας δύναμης στις εικόνες 2.5 και 2.6.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες μια δύναμη μπορεί να μεταφερθεί από το σημείο που ασκείται σε ένα άλλο σημείο, στο οποίο θέλουμε να επιδράσουμε (π.χ. η εξάσκηση δύναμης με τη βοήθεια ενός σχοινιού).

Τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στην εικόνα 2.6, όπου η επίδραση της δύναμης F μεταφέρεται από το σημείο Α στο σώμα Σ.



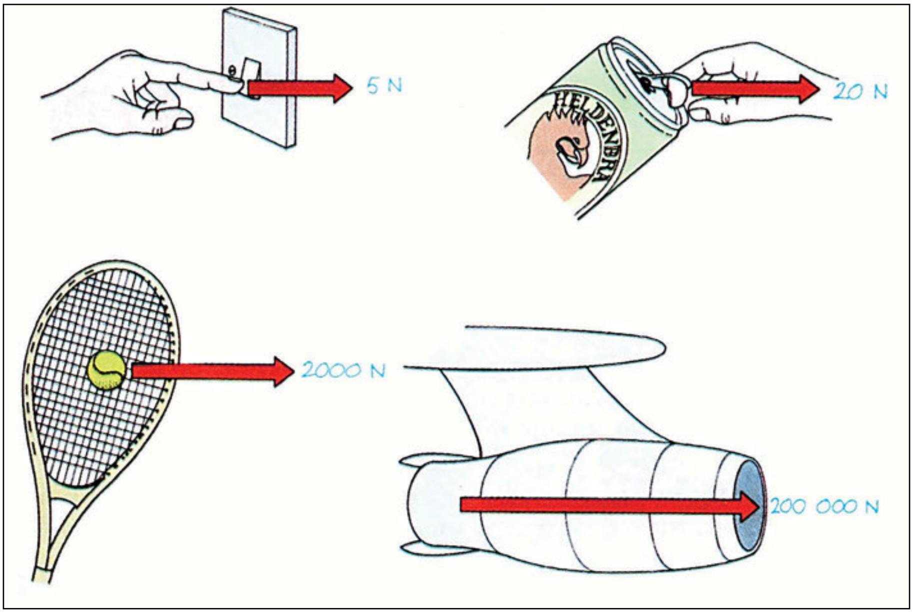
Εικόνα 2.6
Έμμεσα αποτελέσματα δύναμης

Ας προσέξουμε
Μονάδες δύναμης
Η μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το 1Newton ή 1N.
Άλλες μονάδες μέτρησης της δύναμης είναι το 1p, το 1kp και το 1Mp.
Σχέσεις που συνδέουν τις μονάδες δύναμης:

$1\ kp = 9{,}81\ N$
$1\ kp = 1000\ p$
$1\ Mp = 1000\ kp.$

Για να έχουμε μια ιδέα για την τάξη μεγέθους της μονάδας 1N, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί το σώμα μας στο πάτωμα. Αν, π.χ, κάποιος είναι 56 κιλά, τότε -αν είναι όρθιος και δεν κρατάει κάτι- το σώμα του ασκεί στο πάτωμα δύναμη περίπου 560N, αν είναι 60 κιλά, ασκεί δύναμη

600N, αν είναι 90 κιλά, ασκεί δύναμη 900N. Στην εικόνα 2.7 μπορούμε να δούμε το ενδεικτικό μέγεθος των δυνάμεων που αναπτύσσονται σε κάποιες καθημερινές δραστηριότητες, σε αθλήματα και σε τεχνολογικές εφαρμογές.



Εικόνα 2.7
Ενδεικτική τιμή διάφορων δυνάμεων

2.3 Δυνάμεις επαφής και δυνάμεις από απόσταση

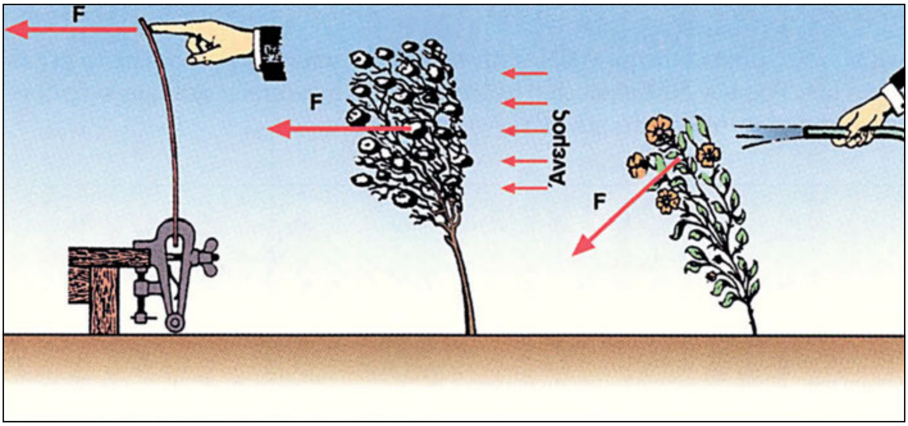
Σε μια αίθουσα διδασκαλίας ο καθηγητής ζητά από τους μαθητές να γράψουν σε ένα χαρτί πέντε προτάσεις, που να περιέχουν τη λέξη “δύναμη”. Μερικές από τις προτάσεις αυτές γράφτηκαν στον πίνακα και είναι οι εξής:

1. *Ο τερματοφύλακας έδιωξε τη μπάλα με δύναμη.*
2. *Το βιβλίο πέφτει στο πάτωμα, επειδή άσκησε η γη μια δύναμη πάνω του.*
3. *Το αυτοκίνητο σταμάτησε, όταν ο οδηγός πάτησε φρένο και άρχισε να επιδρά η δύναμη της τριβής.*
4. *Τέντωσε με δύναμη το τόξο και το βέλος έφυγε μακριά.*

Στο τέλος οι μαθητές κατέληξαν με τη βοήθεια του καθηγητή στα παρακάτω συμπεράσματα:

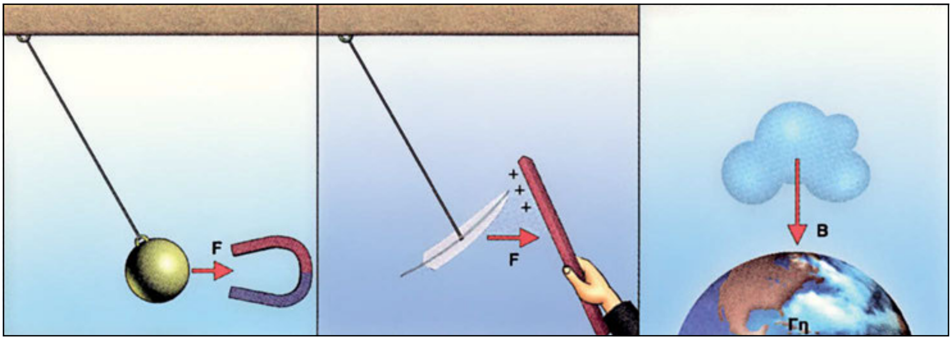
● Στο πρώτο, τρίτο και τέταρτο από τα παραπάνω παραδείγματα **οι δυνάμεις ασκούνται από το ένα σώμα στο άλλο, επειδή τα σώματα έρχονται σε άμεση επαφή.** Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται **δυνάμεις επαφής.**

Παραδείγματα δυνάμεων επαφής έχουμε στην εικόνα 2.8



Εικόνα 2.8
Δυνάμεις επαφής

● Στο δεύτερο από τα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ότι το ένα σώμα (η Γη) ασκεί στο άλλο (στο βιβλίο) δύναμη από απόσταση. Οι δυνάμεις αυτές οφείλονται σε κάποια ιδιότητα των σωμάτων και εμφανίζονται, όταν βρεθούν σε κατάλληλο χώρο, ο οποίος ονομάζεται **πεδίο**. Συγκεκριμένα, εξαιτίας της **μάζας** που έχει ένα σώμα δέχεται **βαρυτικές δυνάμεις** στο πεδίο βαρύτητας· εξαιτίας του **φορτίου ή των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων** που μπορεί να έχουν κάποια σώματα δέχονται **ηλεκτροστατικές ή ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις** από τα αντίστοιχα πεδία. Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων έχουμε στην εικόνα 2.9.



Εικόνα 2.9
Δυνάμεις πεδίου

Ας συμπεράνουμε

1ο Οι δυνάμεις ασκούνται στα σώματα είτε εξ επαφής είτε από απόσταση.
2ο Οι δυνάμεις ασκούνται είτε από έμψυχα είτε από άψυχα σώματα.
3ο Ένα σώμα δέχεται τόσες δυνάμεις όσα είναι τα σώματα με τα οποία έρχεται σε επαφή, και επιπλέον τόσες δυνάμεις όσα είναι τα πεδία μέσα στα οποία βρίσκεται.

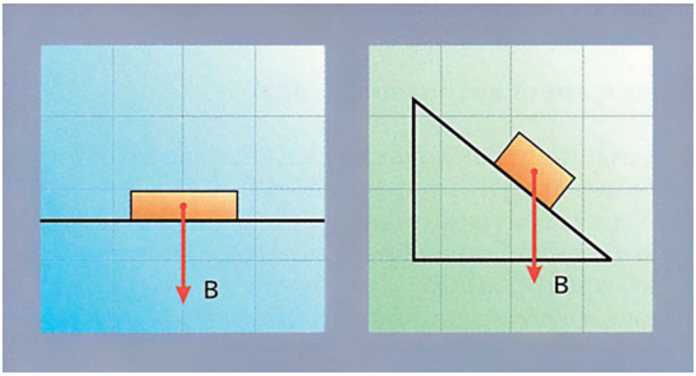
Ας σχεδιάσουμε δυνάμεις

Για να μη σχεδιάζουμε τις δυνάμεις όπως τα βέλη των Ινδιάνων κυνηγών, θα πρέπει να έχουμε υπόψη τα παρακάτω:

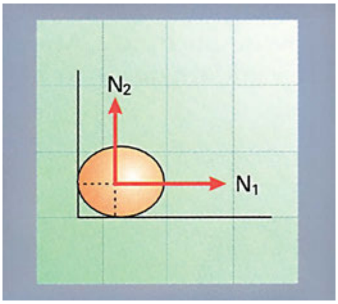
● Πριν αρχίσουμε να σχεδιάζουμε κάθε δύναμη σ' ένα σώμα, πρέπει να βρούμε από πού προέρχεται κάθε δύναμη η οποία ασκείται πάνω σε αυτό.

● Θεωρούμε ότι τα σώματα που θα εξετάσουμε είναι ομογενή και το βάρος τους ασκείται στο γεωμετρικό κέντρο τους (θα μάθουμε ότι το σημείο αυτό λέγεται κέντρο βάρους).

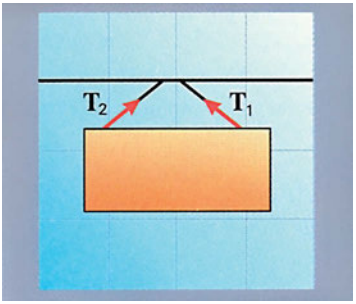
● Σχεδιάζουμε το βάρος του σώματος πάντοτε κατακόρυφα.



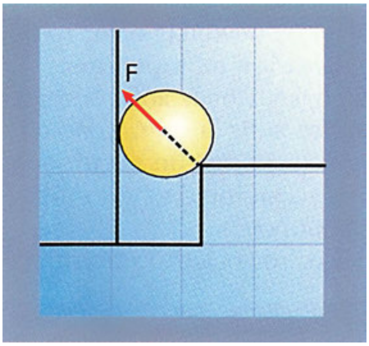
● Οι δυνάμεις που ασκούνται από τοιχώματα είναι κάθετες σε αυτά, όταν δεν υπάρχουν τριβές.



● Οι δυνάμεις που ασκούνται από νήματα (σχοινιά) είναι πάνω στη διεύθυνση των νημάτων με φορά από το σώμα προς το σχοινί.



● Οι δυνάμεις που ασκούνται από οξεία αιχμή είναι κάθετες στην επιφάνεια του σώματος στο σημείο επαφής.



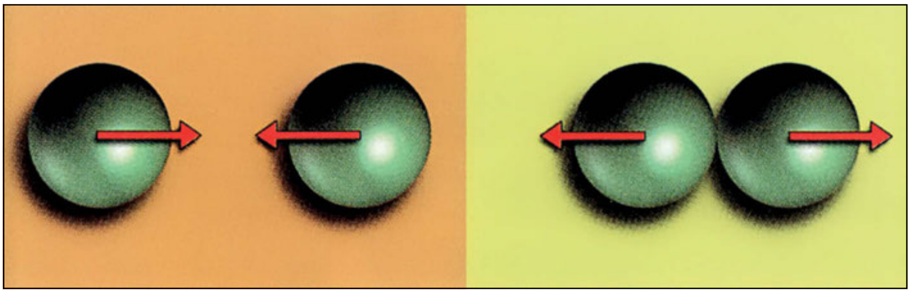
2.4 Η δύναμη και οι καταστάσεις της ύλης

Τα υλικά σώματα που συναντάμε γύρω μας εμφανίζονται σε τρεις κυρίως καταστάσεις: **στερεή - υγρή - αέρια**.

Τα υγρά και τα αέρια σώματα ονομάζονται και **ρευστά**.

Σήμερα είναι γνωστό ότι υπάρχουν και άλλες καταστάσεις της ύλης, όπως π.χ. **το πλάσμα** (βλ. κεφ. 7).

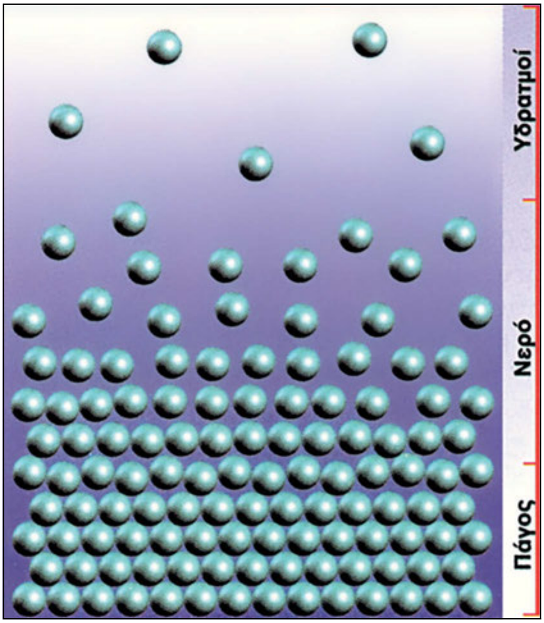
Για να ερμηνεύουν τις καταστάσεις των σωμάτων, οι επιστήμονες επινόησαν το εξής μοντέλο: Θεώρησαν ότι τα άτομα και τα μόρια, από τα οποία αποτελούνται τα υλικά σώματα, μοιάζουν με μικρές σφαιρικές μπάλες. Μεταξύ των μορίων ή των ατόμων ασκούνται δυνάμεις πεδίου. Εξαιτίας αυτών των δυνάμεων τα μόρια και τα άτομα έρχονται κοντά το ένα στο άλλο. Όταν όμως τα μόρια ή τα άτομα πλησιάσουν σε κάποια απόσταση, οι δυνάμεις αυτές γίνονται απωστικές. Με την επίδραση λοιπόν των αρχικών ελκτικών δυνάμεων και στη συνέχεια των αποδοτικών μελετώνται οι καταστάσεις της ύλης.



Εικόνα 2.10
Ελκτικές και απωστικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων

(Είναι προφανές ότι οι παραπάνω εικόνες αποτελούν μεγεθυσμένη αναπαράσταση των δύο ατόμων).

Οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων ή των ατόμων ονομάζονται **δυνάμεις συνοχής,** όταν ασκούνται σε **μόρια ή άτομα του ίδιου σώματος,** π.χ. μεταξύ των μορίων του πάγου. Οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ **μορίων ή ατόμων διαφορετικών σωμάτων** ονομάζονται **δυνάμεις συνάφειας,** π.χ. του πίνακα και της κιμωλίας, όταν γράφουμε στον πίνακα. Οι δυνάμεις συνάφειας εξαρτώνται από το ζεύγος των σωμάτων μεταξύ των οποίων ασκούνται.

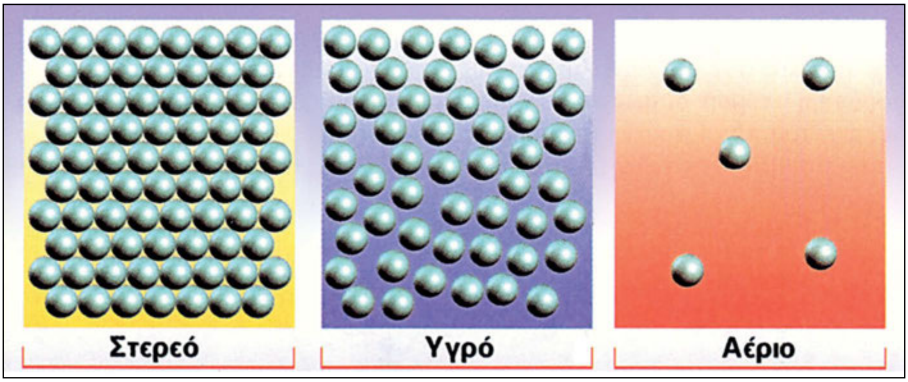


Εικόνα 2.11
Διάταξη των μορίων του H_2O στον πάγο (κάτω τμήμα της εικόνας), στο νερό (μεσαίο τμήμα) και στους υδρατμούς (άνω τμήμα)

Το μέγεθος των δυνάμεων συνοχής για κάθε σώμα μεταβάλλεται, όταν αυτό μεταβαίνει από τη μια κατάσταση στην άλλη.

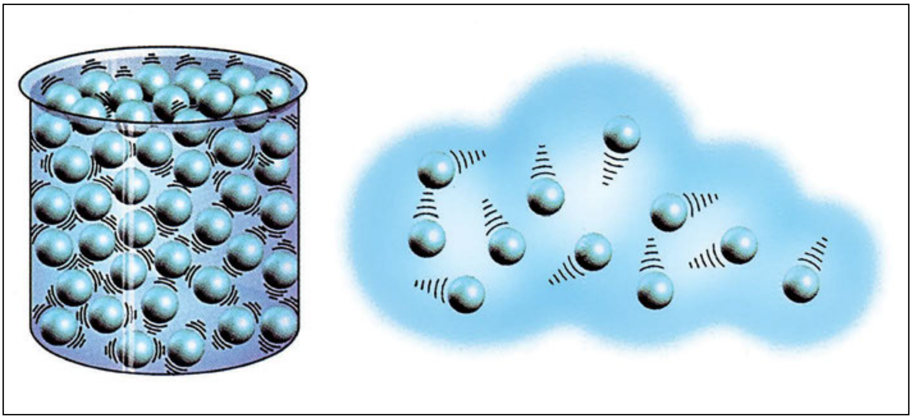
Συγκεκριμένα, σε ένα κομμάτι πάγου οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μεγάλες και αυτό το διαπιστώνει κανείς, όταν προσπαθεί να σπάσει ένα παγάκι. Οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μικρότερες, όταν το παγάκι λιώσει, αλλά ουσιαστικά συνεχίζουν να υπάρχουν, αφού τα μόρια του νερού βρίσκονται πάλι το ένα κοντά στο άλλο. Όταν το νερό εξατμιστεί και δημιουργηθούν οι υδρατμοί, αυτοί κατευθύνονται σε όλο το χώρο, επειδή οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων τους είναι μηδαμινές.

Εξαιτίας του διαφορετικού μεγέθους των δυνάμεων συνοχής τα μόρια των στερεών σωμάτων έχουν συγκεκριμένες θέσεις, αν και ταλαντώνονται γύρω από αυτές, ενώ τα μόρια των υγρών και των αερίων σωμάτων (ρευστών) κινούνται εύκολα το ένα σε σχέση με το άλλο.



Εικόνα 2.12
Η διάταξη των μορίων στις τρεις καταστάσεις της ύλης

Για το λόγο αυτό **τα στερεά** θεωρούνται σώματα που έχουν **δομή και συγκεκριμένο σχήμα,** ενώ **τα ρευστά θεωρούνται σώματα με ακανόνιστη δομή**. Τα υγρά έχουν κάποια υποτυπώδη δομή, γι' αυτό έχουν συγκεκριμένο όγκο αλλά όχι σχήμα, αφού παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει. Τα αέρια έχουν τέλεια έλλειψη δομής και γι' αυτό ο όγκος τους εξαρτάται από το χώρο που τους διατίθεται.



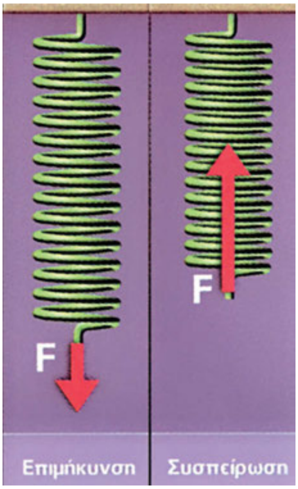
Εικόνα 2.13
Κινήσεις των μορίων στα ρευστά: (α) σε υγρό, (β) σε αέριο

Η συμπεριφορά των υλικών σωμάτων, η δομή, η αντοχή και το σχήμα τους, ανάλογα με την επίδραση διάφορων δυνάμεων, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Στα θέματα αυτά θα γίνει αναφορά στο κεφάλαιο 7 και σε αντίστοιχα κεφάλαια των μαθημάτων ειδικότητας.

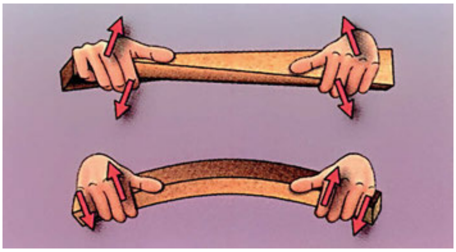
2.5 Η δύναμη ως αιτία παραμόρφωσης - Νόμος Hooke

Γύρω μας υπάρχουν διάφορα σώματα, τα οποία με την επίδραση δυνάμεων μπορούν να επιμηκυνθούν, να συσπειρωθούν ή γενικότερα να παραμορφωθούν. Σε ορισμένα από αυτά τα στερεά σώματα οι παραμορφώσεις εξαφανίζονται, όταν παύσουν οι δυνάμεις που τις προκάλεσαν. Τα σώματα αυτά χαρακτηρίζονται ως **ελαστικά σώματα,** ενώ αντίστοιχα οι παραμορφώσεις που υφίστανται εξαιτίας των δυνάμεων ονομάζονται **ελαστικές παραμορφώσεις.**

Αντίθετα, τα σώματα τα οποία δεν ξαναπαίρνουν το αρχικό σχήμα τους, αφού παραμορφωθούν από την επίδραση μιας δύναμης, ονομάζονται **πλαστικά (μη ελαστικά) σώματα.** Ένα παράδειγμα μη ελαστικού σώματος είναι η πλαστελίνη ή οι ράβδοι από μόλυβδο. Πράγματι, αν ασκηθεί μια δύναμη σε μια μολύβδινη ράβδο, η ράβδος θα παραμορφωθεί και το αποτέλεσμα αυτό θα παραμείνει και μετά την παύση της δύναμης. Ελαστικές παραμορφώσεις είναι η επιμήκυνση ή η συσπείρωση ενός ελατηρίου από χαλύβδινο σύρμα (εικόνα 2.14), η στρέψη ενός σύρματος ή, τέλος, η κάμψη μιας ράβδου από χάλυβα ή από καουτσούκ (εικόνα 2.15).



Εικόνα 2.14
Η επιμήκυνση και η συσπείρωση ενός ελατηρίου



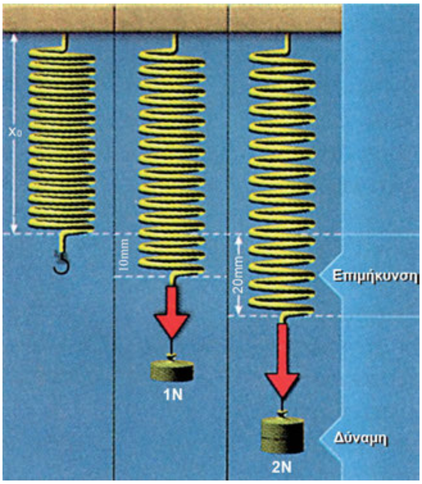
Εικόνα 2.15
Η στρέψη και η κάμψη μιας ράβδου

Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι παροδικές, όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα δεν υπερβαίνουν ένα ορισμένο όριο, το οποίο ονομάζεται **όριο ελαστικότητας.**

Διαπιστώνεται πειραματικά ότι για τα ελαστικά σώματα ισχύει **ο νόμος του Hooke (Χουκ),** σύμφωνα με τον οποίο:

Οι ελαστικές παραμορφώσεις των στερεών σωμάτων είναι ανάλογες με τις αιτίες που τις προκαλούν.

Ο Άγγλος φυσικός **Robert Hooke** (1635-1703) κατέληξε στον παραπάνω νόμο ύστερα από πειραματικές διαδικασίες. Διαπίστωσε, λοιπόν, ότι μεταξύ της δύναμης που ασκείται σε ένα ελατήριο και της επιμήκυνσης ή της συσπείρωσης που παθαίνει το ελατήριο εξαιτίας της δύναμης αυτής ισχύει μια σχέση αναλογίας, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.16. Συζητήστε την!



Εικόνα 2.16
Στις ελαστικές παραμορφώσεις των σωμάτων η επιμήκυνση είναι ανάλογη με τη δύναμη που την προκαλεί.

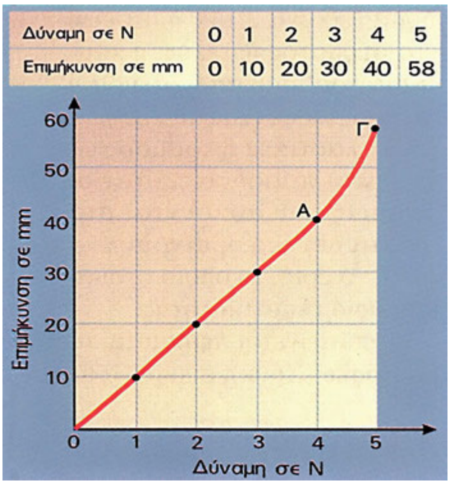
Η σχέση αυτή της αναλογίας μεταξύ δύναμης και παραμόρφωσης μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$\boxed{F = k \cdot x} \qquad (2.1)$$

όπου **F** είναι η δύναμη που ασκήθηκε στο ελατήριο και τη μετράμε με τη μονάδα μέτρησης της δύναμης το 1N, **x** είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου, που τη μετράμε σε m, cm, mm, ενώ ο παράγοντας **k** ονομάζεται **σταθερά του ελατηρίου.** Όπως προκύπτει από τη σχέση:

$$k = \frac{F}{x}$$

η μονάδα της στο S.I. είναι N/m.



Εικόνα 2.17
Χαρακτηριστική ελατηρίου

Η σταθερά του ελατηρίου, η οποία είναι γνωστή και ως **σκληρότητα του ελατηρίου,** εξαρτάται από τη φύση του σύρματος από το οποίο είναι κατασκευασμένο το ελατήριο και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του (αντιστρόφως ανάλογη με το αρχικό ή φυσικό μήκος του ελατηρίου και ανάλογη με το εμβαδόν διατομής A του σύρματος).

Αν σε ένα σύστημα αξόνων xOy τοποθετήσουμε στο x-άξονα τις τιμές της δύναμης F που ασκούμε σε ένα ελατήριο, ενώ τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις x που υφίσταται το ελατήριο τις τοποθετήσουμε στο y-άξονα, τότε προκύπτει ένα διάγραμμα, το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστική** (καμπύλη) του ελατηρίου (εικόνα 2.17).

Η κλίση λ του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ σχετίζεται με το μέτρο της σταθεράς του ελατηρίου k, διότι

$$\boxed{\lambda = \frac{x}{F} = \frac{1}{k}}$$

Η φυσική σημασία της κλίσης της χαρακτηριστικής του ελατηρίου είναι ότι εκφράζει το πόσο σκληρό ή μαλακό είναι ένα ελατήριο.

Συγκεκριμένα, **μεγάλη κλίση** λ σημαίνει **μαλακό** ελατήριο και αντίστροφα (γιατί;).

Όταν η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο εξακολουθεί να αυξάνεται, διαπιστώνουμε ότι από κάποια τιμή δύναμης F_A και πάνω η επιμήκυνση παύει να είναι ανάλογη με τη δύναμη. Η χαρακτηριστική του ελατηρίου από ευθεία μετατρέπεται σε καμπύλη (τμήμα ΑΓ του διαγράμματος 2.17). Το χαρακτηριστικό αυτό ζεύγος τιμών (F_A, x_A) για κάθε ελατήριο ονομάζεται **όριο ελαστικότητας.** Μετά το όριο ελαστικότητας η επιμήκυνση ονομάζεται **πλαστική** και μπορεί να οδηγήσει σε **θραύση.**

Ας ασκήσουμε σε ένα ελατήριο με εμβαδόν διατομής A μια δύναμη F τέτοια, ώστε το ελατήριο να κοπεί. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, για να κοπεί το σύρμα ενός άλλου ελατηρίου από το ίδιο υλικό αλλά με διπλάσια διατομή (2A), θα πρέπει να ασκήσουμε διπλάσια δύναμη (2F). Αυτό δείχνει ότι το εμβαδόν διατομής του σύρματος είναι χαρακτηριστική παράμετρος της θραύσης του.

Το σταθερό πηλίκο της δύναμης που ασκείται σε ένα ελαστικό υλικό, π.χ. σε ένα σύρμα, για να κοπεί, προς τη διατομή του λέγεται **όριο θραύσης** του υλικού. Μερικά παραδείγματα υλικών και τα αντίστοιχα όρια θραύσης αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1 Όριο θραύσης για γνωστά υλικά

Υλικό	**Όριο θραύσης (kp/cm^2)**
Καουτσούκ	200
Μόλυβδος	200
Χαλκός	3000
Χάλυβας	5000
Χάλυβας άριστης ποιότητας	25000

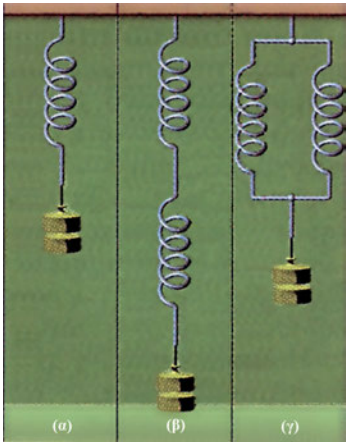
Ας ερευνήσουμε

Ένα ελατήριο* με την επίδραση μιας δύναμης 100p (δύο βάρη των 50p) επιμηκύνεται κατά x cm (εικόνα 2.18α). Βρείτε πόση είναι αυτή η επιμήκυνση; Πόσο θα επιμηκυνθεί το ελατήριο, αν η δύναμη των 100 p ασκηθεί:

α) στο τέλος ενός δεύτερου όμοιου ελατηρίου, που συνδέεται με το πρώτο όπως φαίνεται στην εικόνα 2.18β,

β) στο σύστημα ελατηρίων που φαίνεται στην εικόνα 2.18γ;

Σε ποια συμπεράσματα καταλήγετε;



Εικόνα 2.18
Σύστημα ελατηρίων

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

1ο Παράδειγμα

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τις επιμηκύνσεις που παθαίνει ένα ελατήριο και τις αντίστοιχες δυνάμεις που τις προκάλεσαν:

Δύναμη σε N	1	2	3	4
Επιμήκυνση σε cm	4	8	12	16

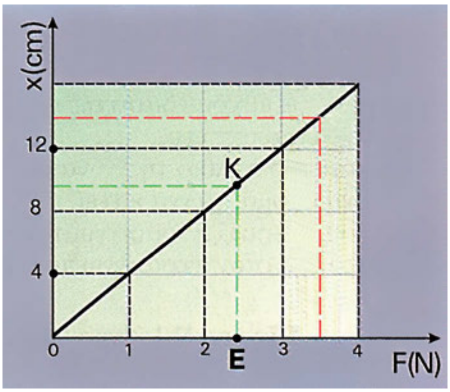
α. Να παρασταθεί γραφικά η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο σε συνάρτηση με την επιμήκυνσή του.

β. Με τη βοήθεια του διαγράμματος που θα κατασκευάσουμε να βρεθεί:

● Η επιμήκυνση που προκαλεί στο ελατήριο δύναμη F=2,5N.

● Η δύναμη που προκάλεσε επιμήκυνση 14cm.

γ. Πόση είναι η σταθερά του ελατηρίου;



Εικόνα 2.19
Διάγραμμα επιμήκυνσης - δύναμης σε ελατήριο.

Από τα δεδομένα του πίνακα κατασκευάζουμε το διάγραμμα F-x της εικόνας 2.19.

Με τη βοήθεια ενός βαθμολογημένου χάρακα χωρίζουμε τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα σε ίσα μέρη, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

* Αντί ελατηρίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα κομμάτι λάστιχου.

Επιλέγουμε π.χ. ως κλίμακα 1,5 cm/ 1N για τον οριζόντιο άξονα Οx και 1cm/1cm για τον κατακόρυφο άξονα Oy.

Αν από το σημείο Ε (2,5Ν, 0cm) του διαγράμματος υψώσουμε κάθετη, αυτή θα συναντήσει τη χαρακτηριστική του ελατηρίου στο σημείο Κ. Από το σημείο Κ φέρουμε παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσει τον Oy. Η τιμή 10 cm, που διαβάζουμε στον άξονα Oy, είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου με την επίδραση της δύναμης των 2,5N.

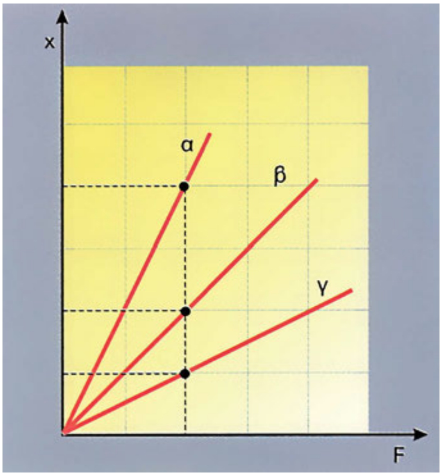
Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η επιμήκυνση των 14 cm προκύπτει από δύναμη 3,5Ν.

Για να βρούμε τη σταθερά του ελατηρίου, επιλέγουμε ένα ζευγάρι τιμών από τον πίνακα, π.χ. 4Ν, 16cm, και αντικαθιστούμε στον τύπο 2.1,

F=k. x ή k=0,25N/cm.

2ο Παράδειγμα

Στο διπλανό διάγραμμα οι χαρακτηριστικές α, β, γ έχουν προκύψει από τρία διαφορετικά ελατήρια. Ποιο ελατήριο είναι το πιο σκληρό και ποιο το πιο μαλακό; Πώς θα το διαπιστώσουμε;



Για να χαρακτηρίσουμε ένα ελατήριο πιο μαλακό σε σχέση με ένα άλλο, αρκεί να διαπιστώσουμε πιο από τα δύο ελατήρια επιμηκύνεται περισσότερο με την επίδραση της ίδιας δύναμης. Το ελατήριο με τη μεγαλύτερη επιμήκυνση χαρακτηρίζεται ως μαλακό, ενώ το άλλο ως σκληρό. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω διαπιστώνεται ότι η σειρά σκληρότητας των ελατηρίων είναι: γ, β, α. (Γιατί;)

2.6 Μέτρηση δυνάμεων με το δυναμόμετρο

Ο νόμος του Hooke γρήγορα αξιοποιήθηκε στην καθημερινή πρακτική, διότι από τις ελαστικές παραμορφώσεις που προκαλούν οι δυνάμεις σε ένα στερεό ήταν εύκολο να οδηγηθούν οι επιστήμονες σε μετρήσεις των δυνάμεων αυτών με ειδικά όργανα, που ονομάζονται δυναμόμετρα.

Τα δυναμόμετρα αποτελούνται από ελατήρια ή από ελάσματα, συνήθως από χάλυβα, τα οποία υφίστανται ελαστικές παραμορφώσεις από την επίδραση δυνάμεων.

Το συνηθισμένο δυναμόμετρο (κανταράκι) αποτελείται από ένα σπειροειδές ελατήριο, που μπορεί να επιμηκύνεται (εικόνα 2.20). Για σχετικά μεγάλες δυνάμεις χρησιμοποιούνται δυναμόμετρα με ελάσματα.

Η δύναμη που ασκείται προκαλεί επιμήκυνση στο ελατήριο ή κάμψη στο έλασμα.

Τα δυναμόμετρα είναι εφοδιασμένα με μια κλίμακα χαρακτηριστική για το καθένα. Σε όλα τα δυναμόμετρα η παραμόρφωση συνοδεύεται με τη μετακίνηση ενός δείκτη πάνω στην κλίμακα, η οποία είναι βαθμονομημένη ανάλογα με την ευαισθησία ή με την αντοχή του ελατηρίου ή του ελάσματος. Τα δυναμόμετρα είναι εύχρηστα όργανα μέτρησης δυνάμεων, αλλά δεν έχουν μεγάλη ακρίβεια.

Εικόνα 2.20
Το δυναμόμετρο

2.7 Σφάλματα μετρήσεων

Κατά τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, π.χ. της δύναμης, τα αποτελέσματα, ακόμη και διαδοχικών μετρήσεων κάτω από τις ίδιες συνθήκες, διαφέρουν μεταξύ τους πάντοτε, έστω και ελάχιστα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Με τον όρο **ακρίβεια** εννοούμε την απόκλιση της τιμής που προέκυψε από τη μέτρηση, από την “πραγματική” τιμή του μεγέθους που μετράμε.

Βέβαια, κανείς δε γνωρίζει την πραγματική τιμή ενός μεγέθους, επειδή η μέτρηση είναι διαδικασία που έχει σχέση με τον παρατηρητή, με το όργανο και με τη μέθοδο μέτρησης που χρησιμοποιείται αλλά και με άλλους εξωτερικούς παράγοντες. Αυτό που επιδιώκεται σε κάθε μέτρηση είναι η εύρεση μιας τιμής, η οποία να είναι όσο το δυνατόν απαλλαγμένη από σφάλματα, ώστε να προσεγγίζει την άγνωστη τιμή του μεγέθους που μετριέται.

Η διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής και του αποτελέσματος μιας μέτρησης ονομάζεται **σφάλμα της μέτρησης.** Η σημασία της λέξης “σφάλμα” δεν ταυτίζεται με αυτήν του “λάθους”, απλώς δηλώνει ότι δεν υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα για την ακρίβεια του αποτελέσματος της μέτρησης.

Τα σφάλματα ανάλογα με την προέλευσή τους τα διακρίνουμε σε **τυχαία σφάλματα και σε μόνιμα ή συστηματικά σφάλματα.**

Τα **τυχαία σφάλματα** οφείλονται συνήθως σε τρεις παράγοντες:

- ♦ στον παρατηρητή, ο οποίος κατά τη στιγμή της μέτρησης λόγω έλλειψης συγκέντρωσης, ψυχολογικής κατάστασης ή ακατάλληλης θέσης κ.τ.λ. εκτελεί εσφαλμένους χειρισμούς
- ♦ στην ευαισθησία του οργάνου μέτρησης,
- ♦ σε άλλους εξωτερικούς παράγοντες, π.χ. θερμοκρασία, υγρασία κτλ.

Τα **μόνιμα ή συστηματικά σφάλματα** εμφανίζονται πάντα κατά τη διαδικασία μέτρησης. Επηρεάζουν όμως το αποτέλεσμα των μετρήσεων κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο το επηρεάζει και η απόκλιση του οργάνου.

Για παράδειγμα, αν σε μια ζυγαριά η αρχική ένδειξη δεν είναι μηδέν, τότε όλες οι μετρήσεις θα απέχουν της πραγματικής τιμής. Ένας επίσης εξωτερικός παράγοντας, π.χ. η υγρασία ή η ανεπιθύμητη παρουσία ενός μαγνήτη, μπορεί να προκαλέσει συστηματικό σφάλμα.

Για να περιοριστούν όλες οι πιθανότητες συστηματικού σφάλματος, θα πρέπει να δίνεται προσοχή στην επιλογή του οργάνου, στην ορθή χρήση του και στις συνθήκες που επικρατούν στον περιβάλλοντα χώρο.

Προκειμένου να περιορίσουμε τις πιθανότητες εμφάνισης ενός τυχαίου σφάλματος, καταφεύγουμε στην επανάληψη των μετρήσεων και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή του μεγέθους από τη σχέση:

$$\bar{M} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + ... + M_N}{N} \qquad 2.I$$

όπου M_1, M_2, M_3, …, M_N είναι οι διαδοχικές μετρήσεις του μεγέθους, και N το πλήθος τους.

Από το αποτέλεσμα, λοιπόν, μιας σειράς μετρήσεων υπολογίζεται η μέση τιμή, η οποία προσεγγίζει την πραγματική τιμή του μεγέθους, την οποία φυσικά δε γνωρίζουμε. Για το λόγο αυτό η μέση τιμή $\bar{M}$ ονομάζεται και **πιθανότερη τιμή** του μεγέθους. Για να προσεγγίσουμε περισσότερο την πραγματική τιμή, χρειάζεται το απόλυτο σφάλμα (δM) της μέσης τιμής.

Το **απόλυτο σφάλμα δM της μέσης τιμής** N διαδοχικών μετρήσεων υπολογίζεται με τη βοήθεια κατάλληλης μαθηματικής σχέσης, η οποία προκύπτει, αφού πρώτα βρεθούν οι διαφορές (αποκλίσεις) των M_1, M_2, ... από τη μέση τιμή:

$$\delta M = \pm\sqrt{\frac{\left(M_1 - \bar{M}\right)^2 + \left(M_2 - \bar{M}\right)^2 + ... + \left(M_N - \bar{M}\right)^2}{N\left(N-1\right)}} \qquad 2.II$$

Συνεπώς η άγνωστη (πραγματική) τιμή X* του μετρούμενου μεγέθους θα βρίσκεται στην περιοχή:

$$\bar{M} \pm \delta M \qquad 2.III$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί το εξής: τόσο η μέση τιμή όσο και το σφάλμα μέτρησης πρέπει:

1ο Να έχουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

2ο Να συνοδεύονται από ίδιες μονάδες μέτρησης.

Ας δούμε ένα παράδειγμα

Οι N=10 διαδοχικές μετρήσεις της μάζας m (g) μιας βίδας είναι οι εξής:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	9,5	9,7	9,1	10,1	10,3	9,4	9,6	9,5	10,0	9,9

Θέλουμε να προσεγγίσουμε την πραγματική τιμή της μάζας της βίδας. Εργαζόμαστε ως εξής:

♦ Βρίσκουμε τη μέση τιμή των μετρήσεων με τη βοήθεια της σχέσης 2.1:

$$\bar{M} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + ... + M_N}{N} \text{ ή}$$

$$\bar{M} = \frac{9,5+9,7+9,1+10,1+10,3+9,4+9,6+9,5+10,0+9,9}{10} = \frac{97,1}{10} = 9,7\,g$$

♦ Βρίσκουμε το απόλυτο σφάλμα (δΜ) από τη σχέση 2.ΙΙ:
Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση 2.ΙΙΙ η ζητούμενη τιμή της μάζας της

$$\delta M = \pm\sqrt{\frac{\left(M_1 - \bar{M}\right)^2 + \left(M_2 - \bar{M}\right)^2 + ... + \left(M_N - \bar{M}\right)^2}{N\left(N-1\right)}}$$

$$\delta M = \pm\sqrt{\frac{(9,5-9,7)^2 + (9,7-9,7)^2 + (9,1-9,7)^2 .... + (9,9-9,7)^2}{10(10-1)}} = \pm 0,1\,g$$

βίδας θα είναι μεταξύ (9,7-0,1)g και (9,7+0,1)g, δηλαδή στην περιοχή [9,6-9,8]g. Επίσημα λέμε ότι η ζητούμενη τιμή βρίσκεται κατά μεγάλη πιθανότητα στην περιοχή: (9,7± 0,1) g.

Συχνά είναι πρακτικό να φτιάχνουμε και να συμπληρώνουμε τον εξής πίνακα:

N	**m(g)**	**$\bar{M}$ - m (g)**	**($\bar{M}$ - m)^2 (g^2)**
1	**9,5**	9,7-9,5 = **0,2**	0,04
2	**9,7**	9,7-9,7 = **0,0**	0,00
3	**9,1**	9,7-9,1 = **0,6**	0,36
4	**10,1**	9,7-10,1 = **-0,4**	0,16
5	**10,3**	9,7-10,3 = **-0,6**	0,36
6	**9,4**	9,7-9,4 = **0,3**	0,09
7	**9,6**	9,7-9,6 = **0,1**	0,01
8	**9,5**	9,7-9,5 = **0,2**	0,04
9	**10,0**	9,7-10,0 = **-0,3**	0,09
10	**9,9**	9,7-9,9 = **-0,2**	0,04

Αθροίσματα	**97,1 g**		**1,19 g**
Μέση τιμή	**9,7 g**		
Σφάλμα			**±0,1g**
Ζητούμενη τιμή		**9,7 ± 0,1**	

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1 Ποια παραμόρφωση χαρακτηρίζεται ως ελαστική και ποια ως πλαστική;

2.2 Ένα ελατήριο με την επίδραση δυνάμεως F επιμηκύνεται κατά διάστημα x. Αν στο ελατήριο ασκηθεί διπλάσια δύναμη, πόση θα γίνει η επιμήκυνσή του;

2.3 Να χαρακτηρίσετε με Σ τις παρακάτω προτάσεις, αν είναι σωστές, και με Λ, αν είναι λανθασμένες, και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

α. Η συσπείρωση ενός ελατηρίου από χάλυβα είναι ελαστική.
β. Η επιμήκυνση μιας μολύβδινης ράβδου είναι πλαστική.
γ. Μια χάλκινη ράβδος είναι πιο ελαστική από μια ράβδο των ίδιων διαστάσεων από καουτσούκ.

2.4 Το σύρμα ενός ελατηρίου από χάλυβα έχει διπλάσια διάμετρο από το σύρμα ενός άλλου ελατηρίου του ίδιου υλικού και με το ίδιο μήκος. Τότε:

α. Το πρώτο είναι πιο σκληρό από το δεύτερο.
β. Έχουν τη ίδια σκληρότητα.

2.5 Πώς θα χαρακτηρίζατε ένα ελατήριο που η χαρακτηριστική του έχει μικρή κλίση;

α. Σκληρό.
β. Μαλακό.

2.6 Να αναφέρετε και να σχολιάσετε δύο παραδείγματα από την καθημερινή εμπειρία σας:

α. Ελαστικών παραμορφώσεων.
β. Πλαστικών παραμορφώσεων.

2.7 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Εάν ένα υλικό υπακούει στο νόμο του Hooke, οι .... του είναι ανάλογες με .... που ....
β. Ένα σύρμα, το οποίο υπακούει στο νόμο του Hooke, παραμορφώνεται μόνιμα, όταν μια δύναμη που ασκείται σ' αυτό ξεπεράσει το .... και θραύεται, όταν μια δύναμη ξεπεράσει το ....
γ. Η σταθερά k ενός ελατηρίου είναι 0,1 N/mm. Αυτό σημαίνει ότι
....

2.8 Δύο ελατήρια έχουν σταθερές k, = 20N/m και k2 = 2N/cm. Ποιο από τα δύο είναι το πιο σκληρό;

2.9 Ένα ελατήριο έχει μήκος 10 cm. Με την επίδραση μιας δύναμης 10N το μήκος του γίνεται 12,5 cm. Ποια δύναμη θα χρειαστεί, για να αποκτήσει το ελατήριο μήκος 13,5 cm;

2.10 Ένα ελατήριο επιμηκύνεται με την επίδραση μιας δύναμης. Εάν η επιμήκυνση είναι 50mm και η σταθερά του ελατηρίου είναι 100 N/m, πόση είναι η δύναμη που προκάλεσε την επιμήκυνση αυτή; Τι θα συμβεί στο ελατήριο, αν ασκηθεί σ' αυτό δύναμη 10N;

2.11 Σε ένα ελατήριο ασκείται μια δύναμη 8N, οπότε το ελατήριο επιμηκύνεται από το αρχικό μήκος του των 18cm σε τελικό μήκος 20,4cm.

α. Να βρείτε τη σταθερά του ελατηρίου.
β. Να σχεδιάσετε τη χαρακτηριστική του ελατηρίου.
γ. Να βρείτε από το διάγραμμα την επιμήκυνση του ελατηρίου, όταν σε αυτό ασκείται δύναμη 10N.
6. Πόση δύναμη απαιτείται, για να επιμηκυνθεί το ελατήριο μέχρι τα 25 cm.

2.12 Στον παρακάτω πίνακα γράφτηκαν τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

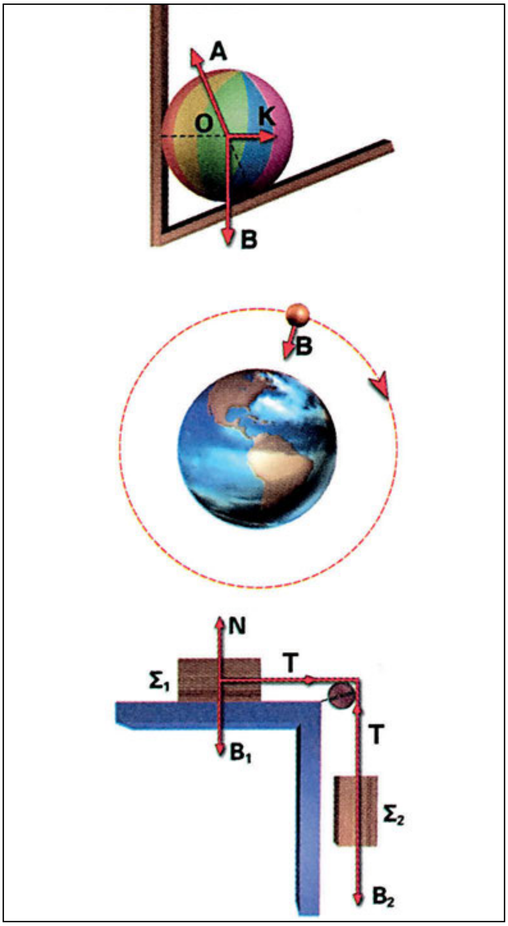
Δύναμη (N)	0	1	2	3	4	5	6
Μήκος του ελατηρίου (cm)	40	49	58	67	76	88	110
Επιμήκυνση του ελατηρίου (cm)							

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.
β. Να γίνει το διάγραμμα επιμήκυνσης-δύναμης.
γ. Ποιο φαίνεται να είναι το όριο ελαστικότητας του ελατηρίου;
δ. Τι θα συμβεί στο ελατήριο, αν ασκηθεί σε αυτό δύναμη μεγαλύτερη του ορίου ελαστικότητάς του;

2.8 Σύνθεση δυνάμεων

Από πολλές περιπτώσεις της καθημερινής ζωής διαπιστώνουμε ότι τα διάφορα σώματα δέχονται μία ή περισσότερες δυνάμεις, είτε διότι έρχονται σε επαφή με άλλα σώματα είτε διότι βρίσκονται μέσα σε πεδία και επομένως δέχονται δυνάμεις από απόσταση.

Ας παρατηρήσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:



Μια μπάλα έχει σφηνώσει ανάμεσα σε δυο λεία δοκάρια. Στην μπάλα ασκούνται:

α. το βάρος Β από τη Γη,

β. η δύναμη Κ από το ένα δοκάρι, και

γ. η δύναμη Α από το άλλο δοκάρι.

Στο δορυφόρο, που κινείται γύρω από τη Γη, ασκείται μόνο το βάρος Β. Δεν ασκείται καμία άλλη δύναμη, επειδή αυτός δεν έρχεται σε επαφή με κανένα άλλο σώμα.

Στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται το βάρος του $Β_1$, η δύναμη Ν από το οριζόντιο επίπεδο και η τάση Τ από το σκοινί.

Στο σώμα $Σ_2$ ασκούνται το βάρος $Β_2$ και η δύναμη Τ από το σκοινί.

Σε πολλές περιπτώσεις μελέτης της κίνησης ή της ισορροπίας ενός σώματος απαιτείται η αντικατάσταση των δυνάμεων που δέχεται το σώμα από **μία δύναμη,** που μπορεί να προκαλέσει τα ίδια αποτελέσματα με εκείνα που θα προκαλούσαν όλες οι άλλες δυνάμεις μαζί. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **σύνθεση δυνάμεων** και έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές.

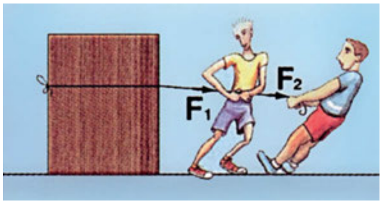
Ας προσέξουμε

● Τις τάσεις που ασκεί ένα σκοινί σε δύο σώματα, τα οποία είναι δεμένα στις άκρες του, θα τις θεωρούμε ίσες.

Ας προβληματιστούμε

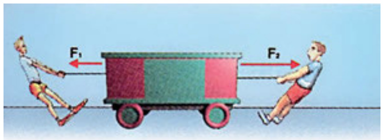
Τι θα συμβεί σε ένα σώμα, π.χ.

- στο κιβώτιο που σέρνουν τα δυο παιδιά, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.21;



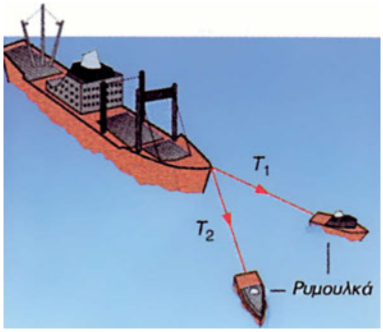
Εικόνα 2.21
Μετακίνηση κιβωτίου

- στο παιχνίδι που το διεκδικούν δύο φίλοι, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.22;



Εικόνα 2.22
Ποιο παιδί θα κερδίσει;

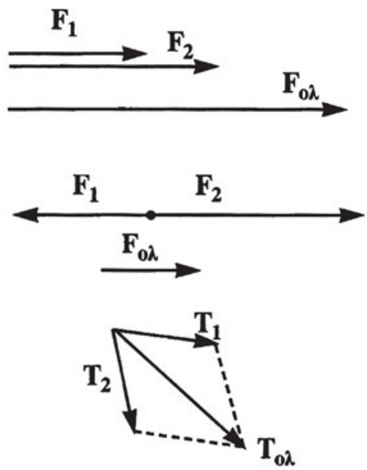
- στο πλοίο που πάει για ρυμούλκηση με τη βοήθεια των δύο ρυμουλκών, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.23;



Εικόνα 2.23
Ρυμούλκηση πλοίου

Το κιβώτιο με την επίδραση των δύο δυνάμεων F_1 και F_2, που ασκούν τα δύο παιδιά, κινείται προς την κατεύθυνση των δύο δυνάμεων. Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε, αν αντί των παιδιών ένας άνδρας ασκούσε μια δύναμη F ίση με το άθροισμα των δύο δυνάμεων $F_1 + F_2$.

Το παιχνίδι που διεκδικούν τα δύο παιδιά με την επίδραση των δυνάμεων F_1 και F_2 θα το κερδίσει εκείνο το παιδί που ασκεί τη μεγαλύτερη δύναμη F_2.



Όσο για το πλοίο που ρυμουλκείται θα κινηθεί προς μια κατεύθυνση, η οποία θα βρίσκεται ανάμεσα στις κατευθύνσεις των δυνάμεων T_1 και T_2, που ασκούν τα δύο ρυμουλκά.

Το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο ή περισσότερων δυνάμεων ονομάζεται **συνισταμένη των δυνάμεων.** Οι δυνάμεις που αντικαθίστανται από τη συνισταμένη ονομάζονται **συνιστώσες.**

Αν προσεγγίσουμε το θέμα με απλά Μαθηματικά, θα λέγαμε ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος και ισχύουν όσα αναφέραμε για τα διανυσματικά μεγέθη στην εισαγωγή.

Στο πρώτο παράδειγμα οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι συγγραμμικές και ομόρροπες και προστίθενται αριθμητικά. Επομένως, η συνισταμένη τους Fολ θα έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τις δυνάμεις F_1 και F_2, και το μέτρο της θα προκύπτει από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = F_1 + F_2}} \qquad (2.2)$$

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις είναι περισσότερες από δύο αλλά όλες συγγραμμικές και ομόρροπες ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots}} \qquad (2.3)$$

Στο δεύτερο παράδειγμα, όπου οι δυνάμεις F_1, και F_2 είναι συγγραμμικές και αντίρροπες και η δύναμη F_2 είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη F_1, η συνισταμένη τους έχει την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες και φορά τη φορά της μεγαλύτερης δύναμης F_2. Το μέτρο της συνισταμένης προκύπτει από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = F_2 - F_1}} \qquad (2.4)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, όταν δύο αντίρροπες δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα, η συνισταμένη τους είναι μηδέν.

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις είναι περισσότερες από δύο αθροίζονται οι ομόρροπες και οι αντίρροπες χωριστά, και τέλος βρίσκεται η διαφορά τους, η οποία είναι και η τελική συνισταμένη της σύνθεσης των δυνάμεων:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots) - (F_1' + F_2' + F_3' + \ldots)}} \qquad (2.5)$$

Τα πράγματα όμως δεν είναι τόσο απλά για την εύρεση της συνισταμένης δυνάμεων που δεν είναι συγγραμμικές, όπως στο παραπάνω παράδειγμα της ρυμούλκησης του πλοίου. Για το λόγο αυτό ας προσπαθήσουμε να κάνουμε το παρακάτω πείραμα:

Ας ερευνήσουμε

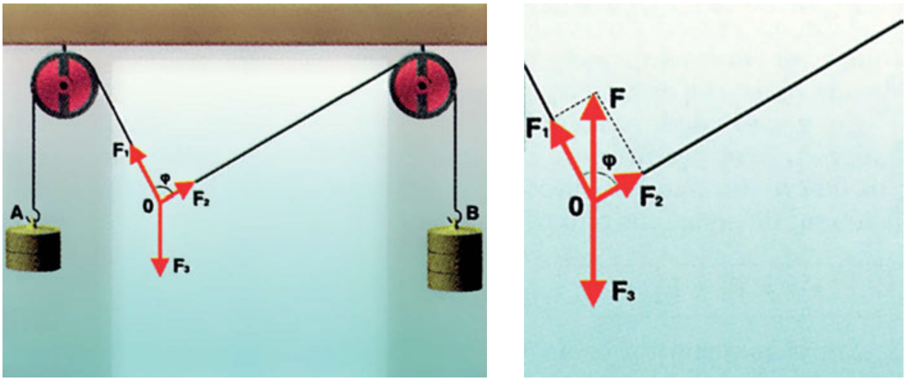
Φτιάχνουμε τη διάταξη του σχήματος 2.24.

Στην άκρη Α του νήματος τοποθετούμε δύο βάρη των 50p το καθένα. Στην άλλη άκρη Β του νήματος κρεμάμε τρία βάρη των 50p. Τι παρατηρούμε;

Στη συνέχεια προσθέτουμε τόσα βάρη των 50p στο σημείο Ο του νήματος, ώστε να μην κινείται τίποτα. Τι παρατηρούμε; Πώς το ερμηνεύουμε;

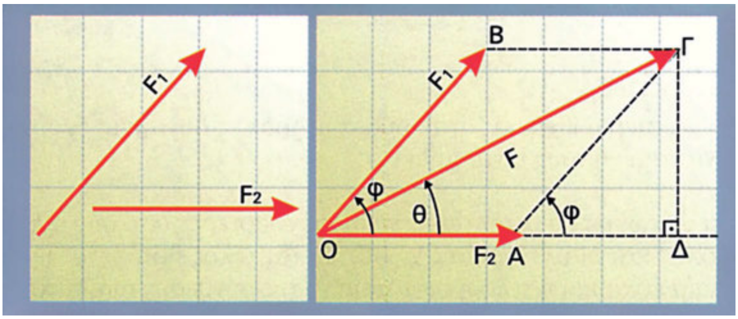
Μετράμε τη γωνία φ, που σχηματίζουν τα δύο νήματα.

Μεταβάλλουμε τη γωνία των δύο νημάτων και βρίσκουμε με πόσα βάρη μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Σε ποια συμπεράσματα καταλήγουμε;



Εικόνα 2.24
Πείραμα με νήμα και με βάρη.

Στην περίπτωση που οι διευθύνσεις των δυνάμεων σχηματίζουν γωνία φ, τότε η συνισταμένη έχει τη διεύθυνση και τη φορά της διαγωνίου του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τις δύο συνιστώσες.



Εικόνα 2.25
Δυνάμεις που σχηματίζουν γωνία

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 συνφ}} \qquad (2.6)$$

και η κατεύθυνσή της από την εφαπτομένης της γωνίας θ, που σχηματίζει η συνισταμένη δύναμη με τη μία συνιστώσα, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.25.

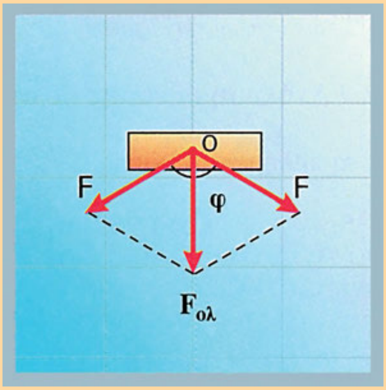
$$\boxed{\mathbf{εφθ = \frac{F_1\, ημφ}{F_2 + F_1 συνφ}}} \qquad (2.7)$$

(Η απόδειξη της σχέσης 2.7 είναι προαιρετική)

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

Παράδειγμα

Σε ένα σώμα ασκούνται δυο ίσες κατά μέτρο δυνάμεις, που σχηματίζουν γωνία φ = 120°. Πόση είναι η συνισταμένη των δυο δυνάμεων;



Για να βρούμε το μέτρο της συνισταμένης των δύο δυνάμεων, θα εφαρμόσουμε τη σχέση 2.6:

$F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1\,F_2\,συνφ$ ή

$F_{ολ}^2 = F^2 + F^2 + 2\,F\,Fσυν120°$ ή

$F_{ολ}^2 = F^2 + F^2 + 2\,F^2συν120°$ ή

$F_{ολ}^2 = 2F^2 + 2\,F^2\,συν120°$ ή

$F_{ολ}^2 = 2F^2\,(1 + συν120°)$ ή

$F_{ολ}^2 = 2F^2\,(1 - \frac{1}{2})$ και τελικά $\mathbf{F_{ολ} = F}$.

Η διεύθυνση και η φορά της συνισταμένης προκύπτει από τη σχέση 2.7:

$$εφθ = \frac{F_1\ ημφ}{F_2 + F_1 συνφ} \quad ή \quad εφθ = \frac{F\,ημφ}{F + F συνφ} \quad ή$$

$$εφθ = \frac{F\,ημ120^o}{F + F συν120^o} \quad ή$$

ή (επειδή ημ120°=ημ60° και συν120°= - συν60°)

$$εφθ = \frac{F\,ημ60^o}{F - F συν60^o} \quad \text{και τελικά}$$

$$εφθ = \frac{F\,ημ60^o}{F\left(1 - συν60^o\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},\ \text{άρα}\ \widehat{θ} = \mathbf{60^o}.$$

Ο τρόπος αυτός επίλυσης της άσκησης αφορά την εύρεση της συνισταμένης δύο δυνάμεων που σχηματίζουν γωνία. Για τη συγκεκριμένη όμως άσκηση υπάρχει και άλλος απλούστερος τρόπος, ο οποίος απαιτεί απλές γνώσεις Γεωμετρίας. Ας συζητηθεί!

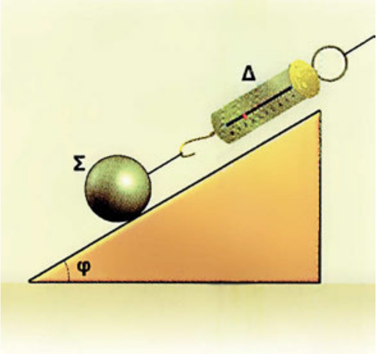
Ας ερευνήσουμε

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω για γωνίες: 30º, 45° και 90°.
Σε ποια συμπεράσματα καταλήγουμε;

2.9 Ανάλυση δύναμης σε συνιστώσες

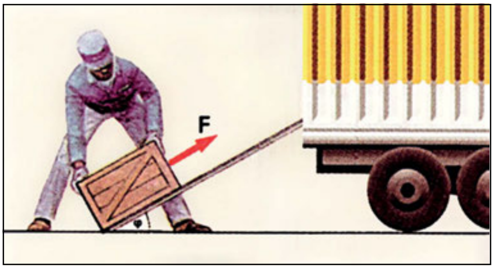
Ας προβληματιστούμε:

● Ζυγίζουμε μια σφαίρα με ένα δυναμόμετρο. Στη συνέχεια βάζουμε τη σφαίρα να ισορροπήσει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.26. Είναι οι ενδείξεις των δύο περιπτώσεων ίσες; Αν όχι, πώς το εξηγούμε;



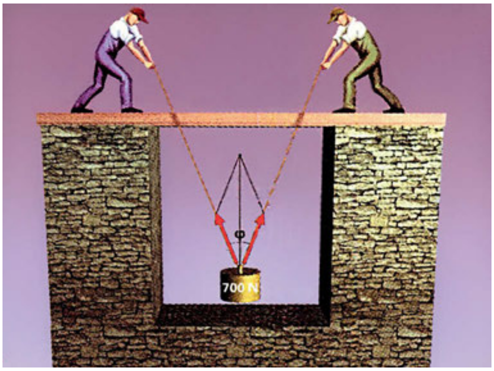
Εικόνα 2.26
Ισορροπία σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο

● Ένα κιβώτιο βάρους 1000N φορτώνεται από το δρόμο σε ένα φορτηγό με τη βοήθεια μιας λείας σανίδας, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.27. Ένας εργάτης σπρώχνει το κιβώτιο. Η δύναμη του εργάτη είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από τα 1000N;



Εικόνα 2.27
Κιβώτιο φορτώνεται σε φορτηγό.

● Ένα σώμα πρέπει να ανυψωθεί με σχοινί, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.28, και η δύναμη που απαιτείται γι' αυτό είναι 700N. Επειδή όμως ένας άνθρωπος δεν είναι ικανός να το σηκώσει, η ανύψωση γίνεται από δύο ανθρώπους με δύο σχοινιά, που σχηματίζουν γωνία φ μεταξύ τους. Πόση δύναμη πρέπει να ασκηθεί από τον καθένα;



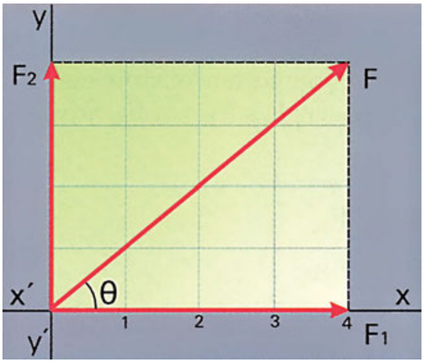
Εικόνα 2.28
Ανύψωση σώματος

Και στις τρεις περιπτώσεις η Φυσική δίνει απαντήσεις με τη βοήθεια της **ανάλυσης δύναμης σε δύο συνιστώσες.**

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η ανάλυση δύναμης σε δυο κάθετες συνιστώσες. Για το λόγο αυτό:

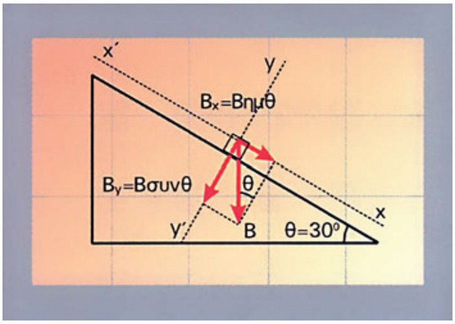
1° Επιλέγονται δύο άξονες κάθετοι μεταξύ τους και με προσανατολισμό ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος. Συνήθως τον άξονα πάνω στον οποίο ισορροπεί ή κινείται το σώμα τον ονομάζουμε xx΄, και τον άξονα που είναι κάθετος στον xx΄ τον ονομάζουμε yy΄.

2° Βρίσκουμε τις προβολές της δύναμης F πάνω στους άξονες xx΄ και yy΄. Οι υπολογισμοί των μέτρων των δύο δυνάμεων F_1 και F_2 είναι εύκολοι σ' αυτή την περίπτωση: $F_1 = F$συνθ, $F_2 = F$ημθ.



Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

Ένα σώμα βρίσκεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.29. Το βάρος του σώματος είναι 100N. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες, ώστε η μία να είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο και η άλλη να έχει τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου. Επιλέγουμε τον άξονα xx΄ παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο και τον yy΄ κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο.Σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαγώνιο το βάρος B του σώματος και πλευρές τις B_x και B_y, που είναι οι προβολές του B στους άξονες xx΄ και yy΄.



Εικόνα 2.29
Ισορροπία σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Οι πλευρές B_x και B_y είναι οι συνιστώσες του βάρους Β, και τα μέτρα τους βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$B_x = B\,ημθ \quad ή \quad B_x = B\,ημ30^o \quad ή \quad B_x = 100 \cdot \frac{1}{2} \quad ή\ B_x = 50N$$

$$B_y = B\,συνθ \quad ή \quad B_y = Bσυν30^\circ \quad ή \quad B_y = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ή\ B_y = 86{,}6N.$$

Το βάρος, λοιπόν, του σώματος αναλύθηκε σε δύο συνιστώσες, από τις οποίες η μία, B_x=50N, είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και η άλλη, B_y=86,6N, κάθετη σ’ αυτό.

Ας επεκτείνουμε

Όταν οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα είναι περισσότερες από δύο, π.χ. F_1, F_2 και F_3, και θέλουμε να βρούμε τη συνισταμένη τους, αναλύουμε την κάθε δύναμη πάνω στους άξονες και συνθέτουμε τις συνιστώσες τους. Το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} πάνω στον άξονα xx΄ και των συνιστωσών F_{1y}, F_{2y} και F_{3y} πάνω στον άξονα των yy΄ είναι αντίστοιχα:

$$\boxed{\begin{aligned} ΣF_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ ΣF_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \end{aligned}} \qquad (2.10)$$

Αν συνθέσουμε τα διανύσματα $Σ\vec{F}_x$ και $Σ\vec{F}_y$, θα βρούμε τη συνισταμένη $F_{ολ}$ (ή ΣF) των δυνάμεων F_1, F_2 και F_3:

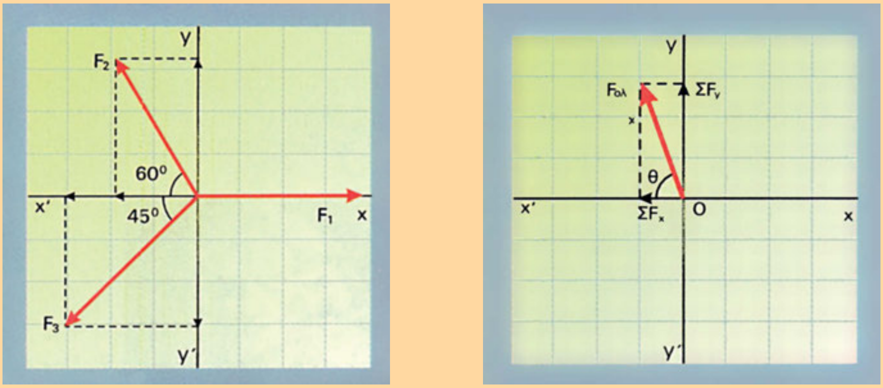
$$\boxed{F_{ολ}^2 = ΣF_x^2 + ΣF_y^2} \qquad (2.11)$$

Η οξεία γωνία θ, που σχηματίζει η συνισταμένη με τον άξονα των xx΄, δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{εφθ = \frac{ΣF_y}{ΣF_x}} \qquad (2.12)$$

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

Στον πάσσαλο ενός χωραφιού είναι δεμένα τρία σχοινιά, που τα τραβούν τρία άλογα με δυνάμεις F_1 =100N, F_2 =100N, F_3=75N, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.30. Να βρεθεί η συνισταμένη των τριών δυνάμεων.



Εικόνα 2.30
Συνισταμένη τριών δυνάμεων.

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες πάνω στους άξονες xx΄ και yy΄.

Η δύναμη F_1: $F_{1x} = F_1 = 100N$
$F_{1y} = 0$

Η δύναμη F_2: $F_{2x} = -F_2\,συν60^o = -100 \cdot 0{,}5 = -50N$
$F_{2y} = F_2 ημ60° = 100 \cdot 0{,}866 = 86{,}6N$

Η δύναμη F_3: $F_{3x} = F_3\,συν45° = -75 \cdot 0{,}707 = -53{,}02N$
$F_{3y} = F_3\,ημ45° = -75 \cdot 0{,}707 = -53{,}02N.$

Έτσι, η $\mathbf{ΣF_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 100N - 50N - 53{,}02N = -3{,}02N}$
και η $\mathbf{ΣF_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 86{,}6\ N - 53{,}02\ N = 33{,}58\ N.}$

Η συνισταμένη θα έχει μέτρο:
$F_{ολ}^{\ 2} = (ΣF_x)^2 + (ΣF_y)^2 = (-3{,}02N)^2 + (33{,}58N)^2$ ή $F^2_{ολ} = 1136{,}74\ N^2$

και τελικά $\mathbf{F_{ολ} = 33{,}72N.}$

Η γωνία θ, που σχηματίζει η συνισταμένη με τον ημιάξονα των οx΄, είναι:

$$εφθ = \frac{ΣF_y}{ΣF_x} \text{ ή } εφθ = \frac{33{,}58}{3{,}02} = 11{,}12$$

Από πίνακες των Μαθηματικών προκύπτει ότι η γωνία της οποίας η εφαπτομένη ισούται με 11,12 είναι η γωνία $\widehat{θ} = 85°$.

2.10 Δράση - Αντίδραση - 3ος νόμος του Νεύτωνα

Οι περισσότερες μελέτες που αφορούν τις διαδικασίες διερεύνησης των φυσικών φαινομένων στον τομέα της Μηχανικής, και κυρίως η ισορροπία και η κίνηση των σωμάτων, βασίζονται σε τρία αξιώματα/νόμους, που διατύπωσε ο Νεύτωνας στο βιβλίο του με τίτλο “Οι μαθηματικές αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας (Philosophical Naturalis Principia Mathematica).

ΝΕΥΤΩΝ (1643-1727)
Άγγλος μαθηματικός, φυσικός και φιλόσοφος, καθηγητής του Πανεπιστημίου Cambridge. Εισήγαγε στη Φυσική τον «απειροστικό λογισμό» και θεμελίωσε την κλασική και ουράνια Μηχανική.

Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα, ή αλλιώς το τρίτο αξίωμα του Νεύτωνα, βοηθά στο να κατανοήσει κανείς την έννοια “δύναμη”, γι’ αυτό και τον εξετάζουμε πριν από τους άλλους δύο νόμους. Ο 3ος νόμος βοηθά στο να διαπιστώσουμε ότι μεταξύ δύο σωμάτων που αλληλεπιδρούν το ένα σώμα ασκεί τόση δύναμη στο άλλο σώμα όση δύναμη δέχεται από αυτό. Οι δύο αυτές δυνάμεις έχουν ίσο μέτρο αλλά αντίθετη κατεύθυνση. Εκείνο το οποίο δεν πρέπει να μας διαφεύγει είναι ότι: **οι δύο αυτές δυνάμεις ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.**

Με άλλα λόγια, οι δυνάμεις στη φύση παρουσιάζονται κατά ζεύγη, τα οποία συνηθίζεται να αποκαλούνται ως ζεύγη **δράσης-αντίδρασης.**

Στην εικόνα 2.31 φαίνονται τα αποτελέσματα της δράσης και της αντίδρασης μεταξύ του στύλου και του αυτοκινήτου, όταν ο οδηγός έχασε τον έλεγχο και οδήγησε το αυτοκίνητο πάνω στο στύλο.

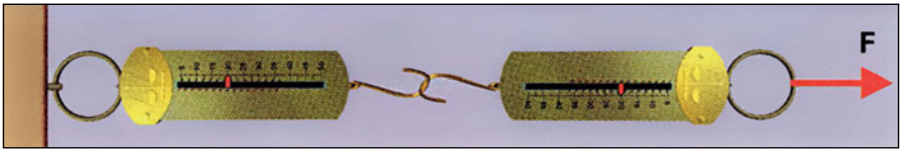
Εικόνα 2.31
Ακραία αποτελέσματα του ζεύγους δράση - αντίδραση

Άλλα παραδείγματα του ζεύγους δράση και αντίδραση (που όλοι τα έχουμε βιώσει) είναι το κοκκίνισμα του χεριού ή η αίσθηση του πόνου, όταν χτυπάμε το χέρι μας, π.χ., στο θρανίο (αποτέλεσμα της αντίδρασης του θρανίου) και ο θόρυβος που προέρχεται από το θρανίο (αποτέλεσμα της δράσης μας σε αυτό).

Ας ερευνήσουμε

Πάρτε δύο δυναμόμετρα.

Τοποθετήστε τα δυναμόμετρα όπως φαίνεται στην εικόνα 2.32.



Εικόνα 2.32
Το ζεύγος δράση - αντίδραση.

Ασκήστε μια δύναμη στο άκρο του δεύτερου δυναμόμετρου.

Ποια είναι η ένδειξη του πρώτου δυναμόμετρου;

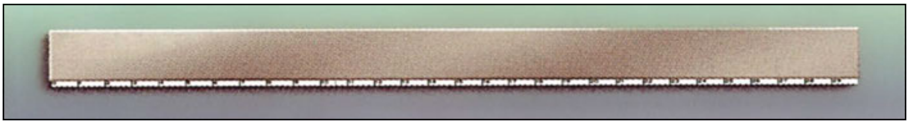
Σχεδιάστε τις δυνάμεις στα δύο δυναμόμετρα.

Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε;

Για να κατανοήσει αρχικά κάποιος τον 3ο νόμο του Νεύτωνα και στη συνέχεια να τον εφαρμόσει, θα πρέπει πρώτα από όλα να ξαναθυμηθεί τον τρόπο σχεδιασμού των δυνάμεων.

Ας προβληματιστούμε

Λυγίστε έναν ελαστικό χάρακα ασκώντας δυνάμεις στα δύο άκρα του (εικόνα 2.33). Στη συνέχεια σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκήσατε στο χάρακα. Τέλος, σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχτηκαν τα δάκτυλά σας από αυτόν. Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε;

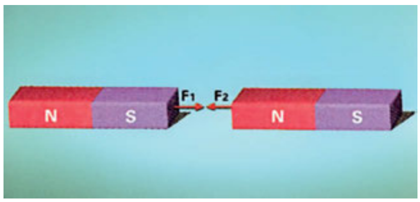


Εικόνα 2.33

Τι παρατηρείτε, αν χρησιμοποιήσατε τους δύο αντίχειρες και τους δύο δείκτες των χεριών σας; Πόσες δυνάμεις ασκήσατε στο χάρακα και πόσες δεχθήκατε από αυτόν;

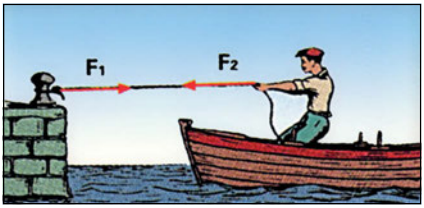
Ας εξετάσουμε μερικά **παραδείγματα,** για να κατανοήσουμε καλύτερα το αξίωμα δράσης-αντίδρασης.

Ο βόρειος πόλος ενός μαγνήτη ασκεί μια δύναμη (δράση) F_1 πάνω στον νότιο πόλο του δεύτερου μαγνήτη. Ο νότιος πόλος του δεύτερου μαγνήτη ασκεί επίσης μια δύναμη (αντίδραση) F_2 πάνω στο βόρειο πόλο του πρώτου μαγνήτη. Οι δύο μαγνήτες με την επίδραση των δυνάμεων έλκονται και κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, εικόνα 2.34.



Εικόνα 2.34
Δράση-αντίδραση σε μαγνήτες

Ο βαρκάρης εξασκεί, μέσω του σχοινιού, μια δύναμη (δράση) F_1 πάνω στη δέστρα της προκυμαίας, εικόνα 2.35. Η δέστρα είναι καλά στερεωμένη και φυσικά μένει ακίνητη. Η βάρκα αρχίζει να κινείται με την επίδραση της δύναμης (αντίδραση) F_2 που δέχτηκε ο βαρκάρης από τη δέστρα.



Εικόνα 2.35
Το ζεύγος δράση - αντίδραση σε σύστημα βάρκας - δέστρας

Το μήλο πέφτει κάτω από τη μηλιά!

Η Γη ασκεί μια δύναμη (δράση) F_1 πάνω στο μήλο, εικόνα 2.36. Η δύναμη αυτή έχει διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς το κέντρο Ο της Γης. Ομοίως το μήλο ασκεί μια δύναμη (αντίδραση) F_2 πάνω στη Γη. Από τα δύο σώματα κινείται μόνο το μήλο. Γιατί δεν κινείται η Γη;

Σύμφωνα με το νόμο δράσης - αντίδρασης για κάθε τέτοιο ζεύγος δυνάμεων $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ θα ισχύει:

$$\boxed{\vec{F_1} = -\vec{F_2}} \qquad (2.13)$$

Εικόνα 2.36
Δράση - αντίδραση σε Γη και μήλο

Οι δυνάμεις δράσης-αντίδρασης έχουν:
- ♦ Διαφορετικά σημεία εφαρμογής, αφού ασκούνται σε διαφορετικά σώματα
- ♦ Ίσα μέτρα
- ♦ Ίδια διεύθυνση
- ♦ Αντίθετη φορά.

Ας προσέξουμε

Μετά την επισήμανση ότι η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε διαφορετικά σώματα **δεν έχει νόημα η φράση:**
“η συνισταμένη των δυνάμεων δράσης - αντίδρασης είναι ίση με μηδέν”.

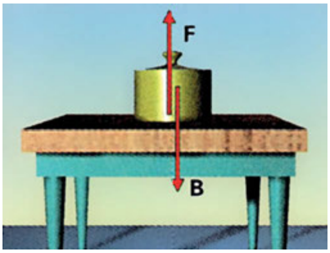
2.11 Ισορροπία σώματος με την επίδραση ομοεπίπεδων δυνάμεων

Για να μελετήσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα στερεό σώμα ισορροπεί, θα αρχίσουμε με την απλή περίπτωση ενός σώματος που βρίσκεται ακίνητο επάνω στο γραφείο και μιας μπάλας που είναι ακίνητη πάνω στο πάτωμα.

Στην περίπτωση του ακίνητου σώματος εξετάζουμε πόσες και ποιες δυνάμεις δέχεται το σώμα.

Στο σώμα της εικόνας 2.37 ασκούνται δύο δυνάμεις:

- το βάρος B, που οφείλεται στην έλξη της γης στο σώμα,
- η δύναμη F, την οποία ασκεί το γραφείο, που είναι σε επαφή με το σώμα.

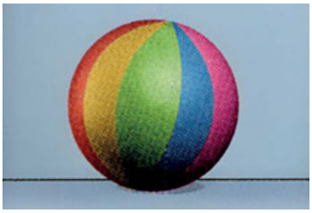


Εικόνα 2.37
Σώμα σε τραπέζι

Επειδή το σώμα ισορροπεί, θα πρέπει η συνισταμένη των δύο δυνάμεων να είναι μηδέν. Επομένως,

$F_{ολ} = B - F = 0$, οπότε $B = F$.

Οι δυνάμεις B και F, οι οποίες έχουν ίσα μέτρα, ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, ονομάζονται στη Φυσική αντίθετες δυνάμεις.



Εικόνα 2.38
Μπάλα σε πάτωμα

Συμπέρασμα: Όταν σε ένα σώμα ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις, το σώμα ισορροπεί.

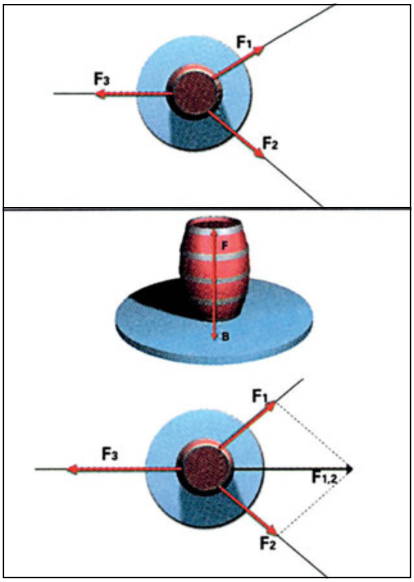
Σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται η μπάλα στην εικόνα 2.38 και καταλήξτε σε κάποιο συμπέρασμα.

Ας μελετήσουμε τώρα μια πιο σύνθετη περίπτωση, όπου ένα σώμα δέχεται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις και ισορροπεί.

Στο βαρέλι της εικόνας 2.39 ασκούνται από τρεις τεχνίτες οι δυνάμεις F_1, F_2 και F_3, ενώ το βαρέλι μένει ακίνητο, δηλαδή ισορροπεί. Ας δούμε πόσες δυνάμεις δέχεται το βαρέλι.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, στο βαρέλι ασκούνται οι δύο -γνωστές πλέον- κατακόρυφες δυνάμεις:

- το βάρος B από τη Γη,
- η δύναμη F από το δάπεδο.



Εικόνα 2.39
Ισορροπία σώματος
με την επίδραση πολλών δυνάμεων

Για τις δύο δυνάμεις αυτές, που έχουν την ίδια διεύθυνση, ισχύει: Β= F, αφού το βαρέλι ισορροπεί ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση.

Στο βαρέλι ασκούνται επίσης οι τρεις οριζόντιες δυνάμεις F_1, F_2 και F_3 από τα σχοινιά. Οι δυνάμεις F_1 και F_2 μπορούν να αντικατασταθούν από τη συνισταμένη τους δύναμη $F_{1,2}$, οπότε στο βαρέλι ασκούνται τώρα οι δυνάμεις $F_{1,2}$ και η F_3. Για να ισορροπεί όμως το βαρέλι, κάτω από την επίδραση των δυνάμεων αυτών, θα πρέπει οι δυνάμεις $F_{1,2}$ και F_3 να είναι αντίθετες.

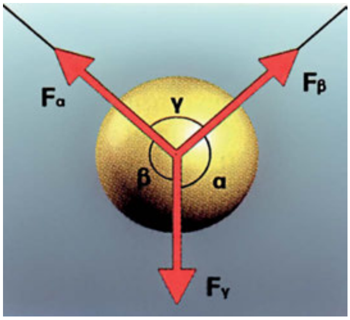
Συμπεράσματα:

1^{ο} Για να ισορροπεί ένα σώμα με την επίδραση τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων, θα πρέπει η συνισταμένη των δύο δυνάμεων να είναι αντίθετη με την τρίτη δύναμη.

2^{ο} Η τελική συνισταμένη των τριών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.

Ας προσέξουμε

Αποδεικνύεται ότι, όταν ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων (εικόνα 2.40), τότε ισχύει η σχέση 2.12 (γνωστή ως **νόμος ημιτόνων**), την οποία μπορείτε να χρησιμοποιείτε σε ανάλογες περιπτώσεις λύσης ασκήσεων.



Εικόνα 2.40
Ισορροπία τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων

$$\boxed{\frac{F_α}{ημα} = \frac{F_β}{ημβ} = \frac{F_γ}{ημγ}} \qquad (2.12)$$

Ας γενικεύσουμε

Σε άλλες περιπτώσεις ισορροπίας σωμάτων με την επίδραση πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων μπορούμε να πούμε ότι:

Αν σε ένα σώμα ασκούνται περισσότερες από τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις και το σώμα ισορροπεί, τότε η συνισταμένη όλων αυτών των δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.

Η συνθήκη αυτή γράφεται:

$$\boxed{\begin{array}{ll} F_{ολ} = 0 & ή \\ Σ\,F = 0 & ή \\ ΣF_x = 0 \text{ και } ΣF_y = 0 & \end{array}} \qquad (2.13)$$

Πώς λύνουμε ασκήσεις ισορροπίας σωμάτων

Για να επιλυθεί ένα πρόβλημα ισορροπίας:

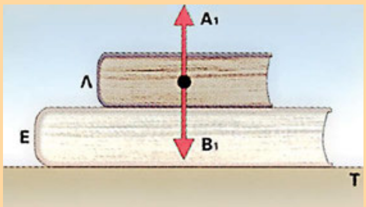
1. Σχεδιάζονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα του οποίου μελετάμε την ισορροπία.
2. Επιλέγουμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, πάνω στους οποίους θα αναλύσουμε τις δυνάμεις, αν χρειαστεί.
3. Γράφουμε τις σχέσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της συνθήκης ισορροπίας $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.
4. Γράφουμε τις σχέσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του 3ου νόμου του Νεύτωνα.
5. Γράφουμε τις σχέσεις που απορρέουν από τα δεδομένα του προβλήματος που μελετάμε.
6. Αντικαθιστούμε τα σύμβολα των εξισώσεων που προέκυψαν με αριθμούς και λύνουμε τις εξισώσεις ως προς τον άγνωστο ή τους αγνώστους που απαιτούνται από το πρόβλημα.

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

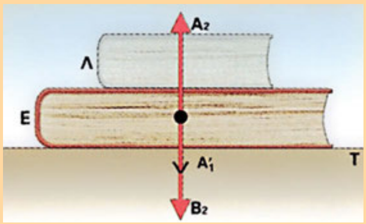
1ο Παράδειγμα

Σε γραφείο υπάρχουν δύο βιβλία, ένα λεξικό Λ και μια εγκυκλοπαίδεια Ε, όπως φαίνεται στην εικόνα.

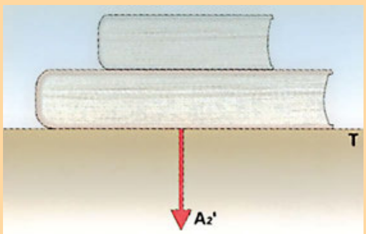
Στο λεξικό Λ ασκούνται:
α. Το βάρος του B_1.
β. Η δύναμη A_1 από την εγκυκλοπαίδεια Ε.
Ισχύει $A_1 - B_1 = 0$ ή $A_1 = B_1$.



Στην εγκυκλοπαίδεια Ε ασκούνται:
α. Το βάρος της B_2.
β. Η δύναμη A_2, που ασκείται από το γραφείο με το οποίο έρχεται σε επαφή.
γ. Η δύναμη A_1', που ασκείται από το λεξικό ως αντίδραση της A_1 (δράση).
Ισχύει $A_2 - A_1' - B_2 = 0$ ή $A_2 = A_1' + B_2$ και, επειδή $A_1 = A_1'$ (ως ζεύγος δράσης - αντίδρασης) και $A_1 = B_1$ (λόγω της ισορροπίας του λεξικού), θα έχουμε τελικά ότι $A_2 = B_1 + B_2$.

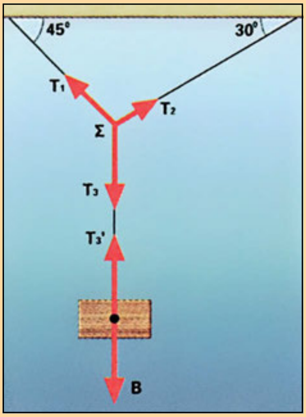


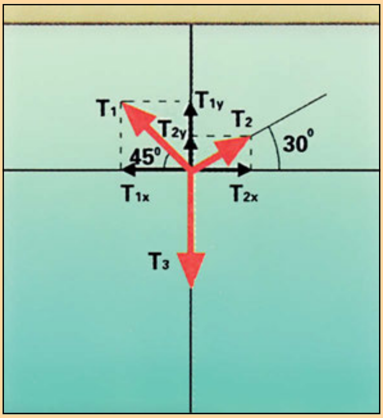
Στο γραφείο ασκείται η δύναμη A_2' από την εγκυκλοπαίδεια ως αντίδραση της A_2.
Ισχύει $A_2 = A_2'$ ή $A_2' = B_1 + B_2$.



2ο Παράδειγμα

Ένα σώμα κρέμεται από το ταβάνι με δυο σχοινιά, που σχηματίζουν αντίστοιχα γωνίες 45° και 30°, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το βάρος του σώματος είναι 100N. Να βρεθούν οι τάσεις T_1, T_2 και T_3.





Στο σημείο Σ, στο οποίο συναντώνται τα τρία νήματα, ασκούνται:

α. Η δύναμη T_3 από το νήμα ως αντίδραση της T_3', που ασκείται στο σώμα.

Η δύναμη T_3 είναι ίση με το βάρος του σώματος διότι το σώμα ισορροπεί, δηλαδή ΣF = 0. Άρα T_3'-B = 0 ή T_3' = B. Όμως $T_3 = T_3'$ (ως ζεύγος δράσης- αντίδρασης), και επομένως $\mathbf{T_3 = B}$.

β. Η τάση του ενός νήματος T_1

γ. Η τάση του άλλου νήματος T_2

Αναλύουμε τις T_1 και T_2 σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, του οποίου η αρχή O ταυτίζεται με το σημείο Σ:

$T_{1x} = T_1$συν45° και $T_{1y} = T_1$ημ45°

$T_{2x} = T_2$συν30° και $T_{2y} = T_2$ημ30°.

Αφού το σώμα ισορροπεί, ισχύουν:

$\Sigma F_x = 0$ ή $T_{1x} = T_{2x}$ ή $T_1\, 0{,}707 = T_2\, 0{,}866$ (1)

$\Sigma F_y = 0$ ή $T_{1y} + T_{2y} = B$ ή $T_1\, 0{,}707 + T_2\, 0{,}5 = 100$ (2).

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων (1) και (2) με όποια μέθοδο θέλουμε.

Εδώ ας αφαιρέσουμε τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη, οπότε προκύπτει:

$T_2 \cdot 0{,}5 + T_2 \cdot 0{,}866 = 100$ ή

$T_2 \cdot 1{,}366 = 100$ ή

$\mathbf{T_2 = 73{,}206\ N}$ και, αν αντικαταστήσουμε την τιμή αυτή στην (1), προκύπτει ότι $\mathbf{T_1 = 89{,}669N}$.

Συνεπώς, οι τάσεις στα σχοινιά είναι T_1 = 89,669 N, T_2 = 73,206 N και T_3=100N.

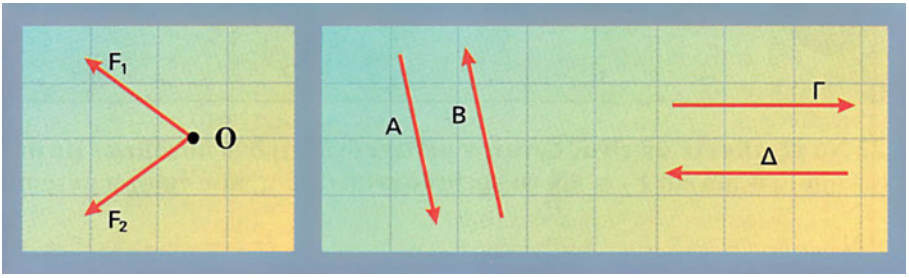
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.13 Γιατί κατά τη γνώμη σας η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος; Να αναφέρετε δύο παραδείγματα που να υποστηρίζουν αυτή την άποψη.

2.14 Ποια κατά τη γνώμη σας είναι τα χαρακτηριστικά μιας δύναμης;

2.15 Τι ονομάζουμε:
α. σύνθεση δυνάμεων
β. συνισταμένη δυνάμεων
γ. συνιστώσες δυνάμεις;
Δώστε παραδείγματα για τις περιπτώσεις β και γ.

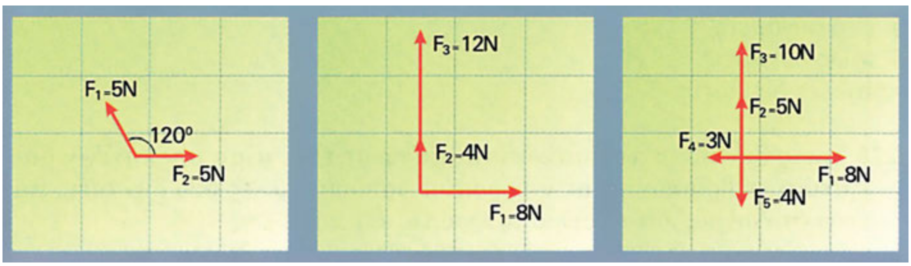
2.16 Στο σχήμα που ακολουθεί υπάρχουν δύο δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο Ο. Ποιο από τα διανύσματα Α, Β, Γ, Δ είναι η συνισταμένη των δύο δυνάμεων;



2.17 Ποια διαδικασία ακολουθείται, για να προσδιοριστεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα; Αριθμήστε και περιγράψτε βήμα βήμα τα διάφορα στάδια.

2.18 Να βρεθεί η συνισταμένη δύο δυνάμεων, οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής, μέτρα 3Ν και 4Ν αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία:
α. 0ο β. 60ο γ. 90ο δ. 180°

2.19 Να βρεθεί η συνισταμένη (μέτρο και διεύθυνση) των παρακάτω δυνάμεων:



2.20 Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

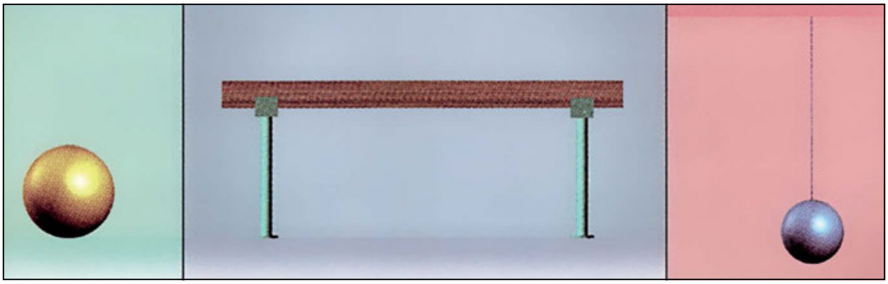
α. Οι δυνάμεις είναι διανυσματικά μεγέθη, διότι έχουν .... και .... και προστίθενται ....

β. Συνισταμένη δυο ή περισσότερων δυνάμεων είναι η δύναμη που προκαλεί ....

γ. Ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων, όταν ....

δ. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα οι δυνάμεις εμφανίζονται .... και έχουν .... μέτρα, ... διεύθυνση, ... φορά, ... σημείο εφαρμογής.

2.21 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα παρακάτω σώματα:



2.22 Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν με τη σύνθεση δύο δυνάμεων με μέτρα $F_1 = 3N$ και $F_2 = 4N$ να βρεθεί συνισταμένη, που να έχει μέτρο:

α. 1N

β. 5N

γ. 12N

δ. 7N

ε. 0,5N

Επίσης, να σχεδιάσετε τις δυνάμεις σε κάθε περίπτωση.

2.23 Τι ονομάζουμε ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες και σε ποιες περιπτώσεις χρειάζεται η ανάλυση μιας δύναμης;

2.24 Να αναλυθεί μια δύναμη 12N σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες, έτσι ώστε η μία από αυτές να σχηματίζει γωνία 30° με τη δύναμη.

2.25 Ποια είναι η συνθήκη ισορροπίας ενός σώματος, όταν δέχεται:

α. δύο δυνάμεις

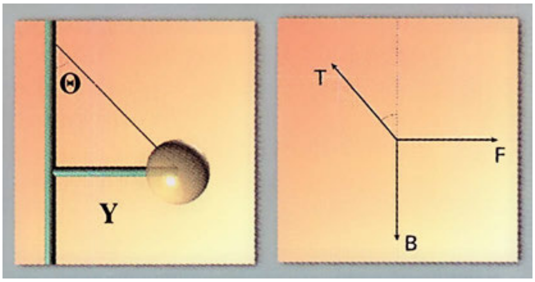
β. τρεις δυνάμεις

γ. πολλές δυνάμεις;

2.26 Τρεις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε ένα σώμα αμελητέων διαστάσεων βρίσκονται σε ισορροπία. Ασκούμε άλλες δύο δυνάμεις πάνω στο σώμα, και το σώμα ισορροπεί και πάλι.

Τι μπορείτε να πείτε για τις δύο επιπρόσθετες αυτές δυνάμεις;

2.27 Η μεταλλική σφαίρα ισορροπεί και υποστηρίζεται με ένα μεταλλικό βραχίονα Υ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το διάγραμμα δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα. Ποια (ή ποιες) από τις ακόλουθες σχέσεις ισχύουν;

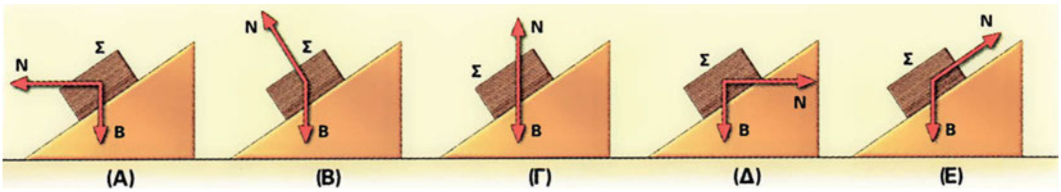


α) $T^2 = B^2 + F^2$ β) $B = Tημθ$ γ) $F = Tσυνθ$ δ) $B = Fεφθ$ ε) $B + F + T = 0$

2.28 Δύο δυνάμεις F1 και F_2 σχηματίζουν γωνία 60^o. Το μέτρο της συνισταμένης τους είναι:

α. Ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων: $F = F_1 + F_2$.
β. Μεγαλύτερο από το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων: $F > F_1 + F_2$.
γ. Μικρότερο από το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων: $F < F_1 + F_2$.
Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστή;

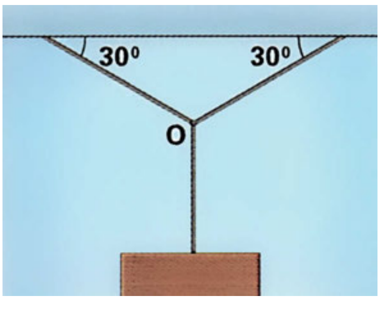
2.29 Ένα σώμα ισορροπεί πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα δείχνει σωστά τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα;



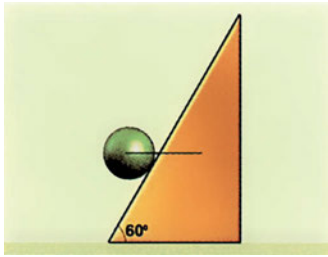
2.30 Το βάρος ενός ανθρώπου είναι 660N. Πόση δύναμη ασκεί ο άνθρωπος πάνω στη γη, όταν στέκεται σε οριζόντιο έδαφος;

2.31 Τρεις δυνάμεις έχουν μέτρα 10N, 20N και 30N και σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^o.
Να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη.

2.32 Ένα σώμα βάρους B = 10N συγκρατείται με τη βοήθεια τριών νημάτων όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα νήματα σχηματίζουν γωνίες 30° με την οροφή. Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο Ο και στο σώμα και να υπολογιστούν τα μέτρα τους.



2.33 Η σφαίρα στο διπλανό σχήμα έχει βάρος Β = 18Ν. Η σφαίρα ισορροπεί με τη βοήθεια ενός νήματος. Πόση είναι η τάση του οριζόντιου νήματος και πόση δύναμη ασκεί το επίπεδο στη σφαίρα; Τριβές δεν υπάρχουν.

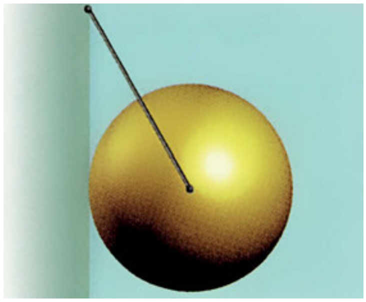


2.34 Μια μπάλα βάρους Β = 120Ν και διαμέτρου δ = 6 cm είναι δεμένη με νήμα μήκους 6 cm όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Η μπάλα ισορροπεί:

α. Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στην μπάλα.

β. Να υπολογιστεί η αντίδραση του τοίχου στο σημείο επαφής με την μπάλα.

γ. Να υπολογιστεί η τάση του νήματος. Τριβές δεν υπάρχουν.

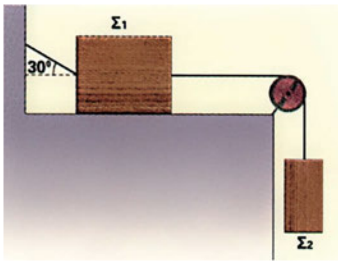


2.35. Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με βάρη αντίστοιχα $Β_1$=36Ν και $Β_2$=12Ν ισορροπούν σε λείο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα.

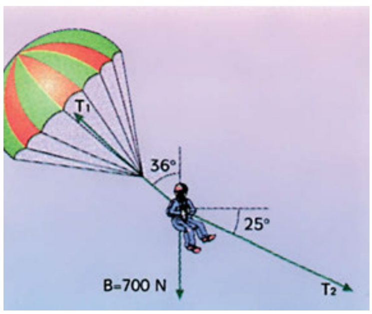
β. Να γράψετε τις εξισώσεις ισορροπίας των σωμάτων.

γ. Να υπολογίσετε όλες τις άγνωστες δυνάμεις.



2.36 Ο αλεξιπτωτιστής του παρακάτω σχήματος ισορροπεί κάποια στιγμή όπως φαίνεται στο σχήμα με την επίδραση τριών δυνάμεων: του βάρους του Β=700Ν, της τάσης του νήματος $Τ_1$, που δέχεται από το αλεξίπτωτο, και της τάσης $Τ_2$, που δέχεται από ένα άλλο σχοινί.

Να υπολογίσετε τις τάσεις $Τ_1$ και $Τ_2$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°
ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

3.1 Η έννοια της ροπής και τα αποτελέσματά της

Ας προβληματιστούμε

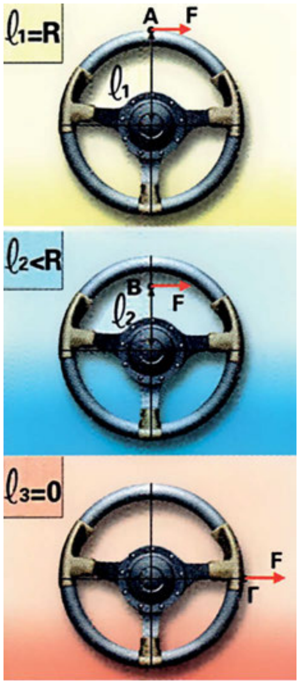
Δοκιμάστε να ανοίξετε την πόρτα της αίθουσας εφαρμόζοντας την ίδια δύναμη σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Γ, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1.

- Τι παρατηρείτε;
- Τι συμπεραίνετε;

Εικόνα 3.1
Προσπαθούμε να ανοίξουμε την πόρτα.

Όλοι γνωρίζουμε ότι, αν εφαρμόσουμε μια δύναμη στο τιμόνι του αυτοκινήτου, το τιμόνι περιστρέφεται γύρω από μια νοητή γραμμή, η οποία θεωρούμε ότι διέρχεται από το σημείο Ο κέντρο του τιμονιού και ονομάζεται **άξονας περιστροφής.**

Ας εφαρμόσουμε μια δύναμη σε τρία διαφορετικά σημεία του τιμονιού της εικόνας 3.2: στο σημείο Α, στο σημείο Β και, τέλος, στο σημείο Γ.



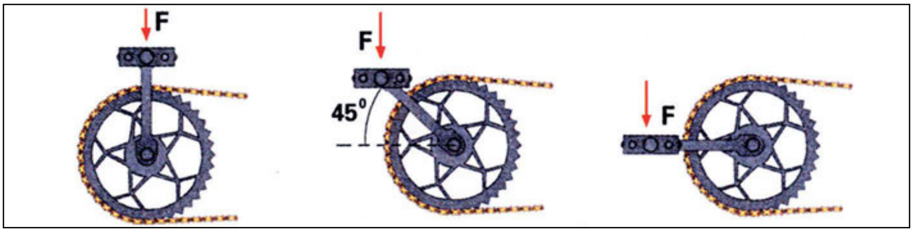
Εικόνα 3.2
Δυνάμεις σε τιμόνι

Θα παρατηρήσουμε τότε ότι το τιμόνι στρέφεται σχετικά εύκολα στην πρώτη περίπτωση, με δυσκολία στη δεύτερη περίπτωση, ενώ μένει ακίνητο στην τρίτη περίπτωση. Μπορούμε επίσης, να παρατηρήσουμε ότι η απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο περιστροφής (Ο) ή αλλιώς από έναν άξονα περιστροφής είναι $\ell_1 = R$ στην πρώτη περίπτωση, $\ell_2 < R$ στη δεύτερη περίπτωση και $\ell_3 = 0$ στην τρίτη περίπτωση (όπου R η ακτίνα του τιμονιού).

Για να στραφεί, επομένως, εύκολα το τιμόνι, δεν αρκεί να ασκήσουμε σ' αυτό μια δύναμη, αλλά πρέπει η απόσταση του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής να μην είναι μηδέν. Άρα η περιστροφή δεν εξαρτάται μόνο από τη δύναμη αλλά και από την απόστασή της από τον άξονα περιστροφής, την οποία ονομάζουμε **μοχλοβραχίονα.**

Ο νοητός άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται ένα σώμα είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του τιμονιού ο άξονας περιστροφής είναι η νοητή γραμμή που είναι κάθετη στο επίπεδο του τιμονιού και διέρχεται από το σημείο Ο (κέντρο του τιμονιού).

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο ποδήλατό μας



Εικόνα 3.3
Δύναμη στο πεντάλ ποδηλάτου

Στρέφεται ο τροχός και στα τρία στιγμιότυπα της εικόνας 3.3;

Για να μελετηθούν και να ερμηνευτούν τα θέματα περιστροφής των διάφορων σωμάτων, υπάρχει ανάγκη εισαγωγής ενός νέου μεγέθους, με το οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη περιστροφή των σωμάτων.

Ας ερευνήσουμε

1. Κρεμάμε δύο βάρη των 50p στα άκρα Α και Β μιας ράβδου, που μπορεί να περιστρέφεται όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τι θα συμβεί, αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο;

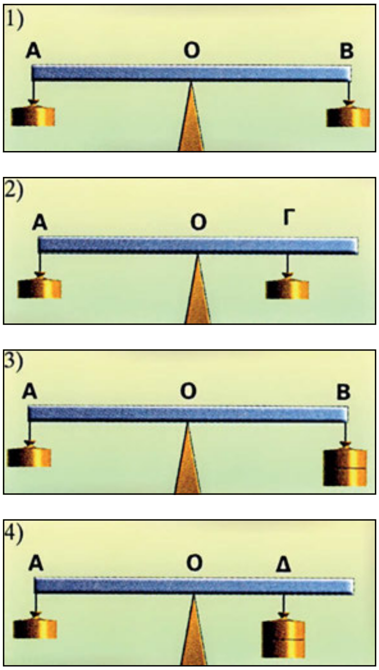
2. Μετακινούμε το ένα βάρος από το άκρο Β στη θέση Γ, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.4 (2).

Τι παρατηρούμε;

3. Κρεμάμε τα δύο βάρη όπως στην πρώτη περίπτωση, στα άκρα Α και Β της ράβδου. Στη συνέχεια προσθέτουμε άλλο ένα βάρος 50p στο άκρο Β της ράβδου.

Τι παρατηρούμε;

4. Μετακινούμε τα δύο βάρη του άκρου Β μέχρι εκείνου του σημείου Δ, ώστε η ράβδος να ισορροπήσει και πάλι.



Εικόνα 3.4
Πείραμα για περιστροφή ράβδου

Με ένα χάρακα μετράμε την απόσταση ΑΟ και την απόσταση ΟΔ.

Τι παρατηρούμε;

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

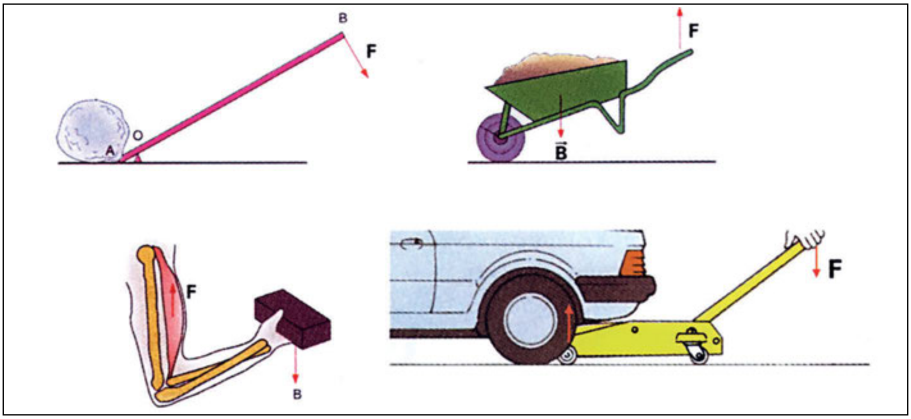
1ο. Μια δύναμη που ασκείται αρχικά σε ένα ακίνητο σώμα μπορεί να προκαλέσει την περιστροφή του σώματος κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

2ο. Τα αποτελέσματα της επίδρασης μιας δύναμης σε σώμα που μπορεί να περιστρέφεται εξαρτώνται:

● από το μέτρο της δύναμης

● από την απόσταση μεταξύ του φορέα της δύναμης και ενός σημείου, το οποίο συνηθίζουμε να ονομάζουμε σημείο περιστροφής, ή ενός άξονα, ο οποίος ονομάζεται άξονας περιστροφής.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα



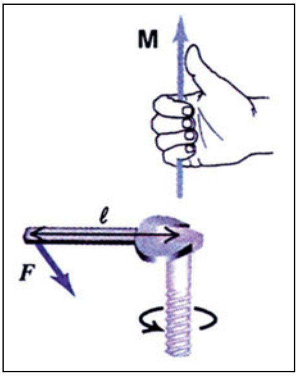
Εικόνα 3.5
Παραδείγματα περιστροφής σωμάτων

Το νέο μέγεθος που μπορεί να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα της επίδρασης μιας δύναμης σε ένα σώμα, το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σημείο ή άξονα, ονομάζεται **ροπή δύναμης** και έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του φορέα της από το σημείο ή από τον άξονα περιστροφής.

Διεθνώς η ροπή συμβολίζεται με το γράμμα Μ. Έτσι, ο τύπος της ροπής γράφεται:

$$\boxed{M = F \cdot \ell} \qquad (3.1)$$

Η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη F και από την απόσταση ℓ και με φορά τη φορά ενός δεξιόστροφου κοχλία (βίδα), που στρέφεται όπως στρέφεται το σώμα με την επίδραση της ροπής.



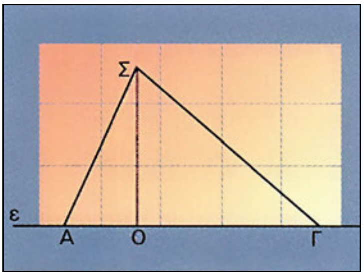
Εικόνα 3.6
Ο εμπειρικός κανόνας του «δεξιού χεριού» για τον καθορισμό της φοράς της ροπής

Η μονάδα της ροπής στο S.I. είναι το 1N·m, και προκύπτει από την παραπάνω σχέση, αν στη θέση της δύναμης F βάλουμε τη μονάδα 1N και στη θέση της απόστασης ℓ βάλουμε τη μονάδα 1m.

Ας προσέξουμε

1^{ο} Την έννοια της απόστασης, όπως τη γνωρίσαμε στα Μαθηματικά.

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο Σ και μια ευθεία ε. Η συντομότερη διαδρομή από το σημείο Σ στην ευθεία ε είναι το κάθετο τμήμα ΣΟ, το οποίο ονομάζουμε απόσταση σημείου Σ από την ευθεία.



2^{ο} Η ροπή μπορεί να περιστρέψει ένα σώμα είτε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού είτε αντίθετα.

Αν το σώμα με την επίδραση μιας δύναμης περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, η ροπή της δύναμης χαρακτηρίζεται ως **αρνητική,** ενώ αν περιστρέφεται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, χαρακτηρίζεται ως **θετική.**

Το πρόσημο μιας ροπής είναι μια "σύμβαση", η οποία βοηθάει στη μαθηματική μελέτη των ροπών των δυνάμεων και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων τους στην καθημερινή ζωή.

3.2 Το θεώρημα των ροπών για ομοεπίπεδες δυνάμεις

Θεωρούμε έναν **τροχό** που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα.

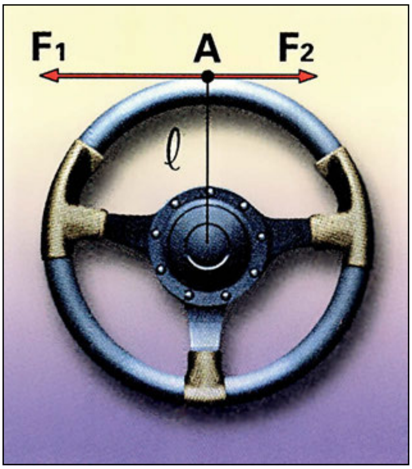
Στο σημείο Α της περιφέρειας του τροχού ασκούμε δύο δυνάμεις F1 και F2 όπως φαίνεται στην εικόνα 3.7.

Η δύναμη F_1 είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη F_2.

Το ερώτημα που τίθεται είναι προς τα πού θα περιστραφεί ο τροχός.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε τις ροπές των δύο δυνάμεων:

$M_1 = F_1 \cdot \ell$ (θετική, επειδή περιστρέφει το σώμα αντίθετα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού),



Εικόνα 3.7
Περιστρεφόμενος τροχός

$M_2 = -F_2 \cdot \ell$ (αρνητική, επειδή περιστρέφει το σώμα σύμφωνα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού),

όπου ℓ η απόσταση των δυνάμεων F_1 και F_2 από τον άξονα περιστροφής.

Η συνισταμένη ροπή θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δύο δυνάμεων:

$M_{ολ} = M_1 + M_2$

ή $M_{ολ} = F_1 \cdot \ell - F_2 \cdot \ell$

ή $M_{ολ} = (F_1 - F_2) \cdot \ell$.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά $F_1 - F_2$ είναι η συνισταμένη $F_{ολ}$ των δύο συγγραμμικών και αντίρροπων δυνάμεων F_1 και F_2. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$M_{ολ} = F_{ολ} \cdot \ell$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι η συνισταμένη ροπή είναι ίση με τη ροπή που προκαλεί η συνισταμένη $F_{ολ}$ των δυνάμεων.

Αν αντί για δύο θεωρήσουμε περισσότερες ομοεπίπεδες δυνάμεις F_1, F_2, F_3,.... να ασκούνται σε ένα στερεό σώμα, καθώς και έναν οποιοδήποτε άξονα περιστροφής του σώματος, αποδεικνύεται ότι:

Η συνισταμένη $M_{ολ}$ των ροπών M_1, M_2, M_3,.... όλων των δυνάμεων F_1, F_2, F_3,.... είναι ίση με τη ροπή που προκαλεί η συνισταμένη όλων των δυνάμεων.

$$\boxed{M_{ολ} = F_{ολ} \cdot \ell} \qquad (3.2)$$

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **θεώρημα των ροπών,** το οποίο έχει πολλές εφαρμογές.

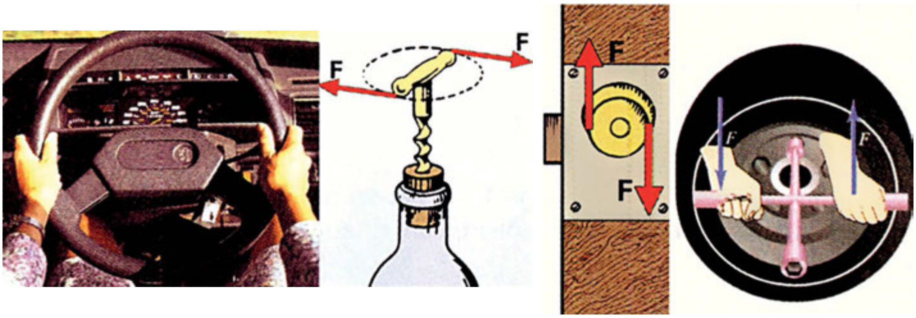
Το θεώρημα των ροπών, επίσης, διατυπώνεται και ως εξής:

Η ροπή $M_{ολ}$ της συνισταμένης πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων F_1, F_2, F_3,... ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα αυτό.

$$\boxed{M_{ολ} = M_1 + M_2 + M_3 + ...} \qquad (3.3)$$

3.3 Ζεύγος δυνάμεων

Από την καθημερινή ζωή γνωστά και οικεία σε όλους μας είναι το βίδωμα ή το ξεβίδωμα, η αλλαγή λάστιχου στο αυτοκίνητο, η χρήση του εκπωματιστήρα (τιρμπουσόν), για να βγει ο φελλός από ένα μπουκάλι, η κίνηση του τιμονιού σε μια στροφή του δρόμου, εικόνα 3.8.



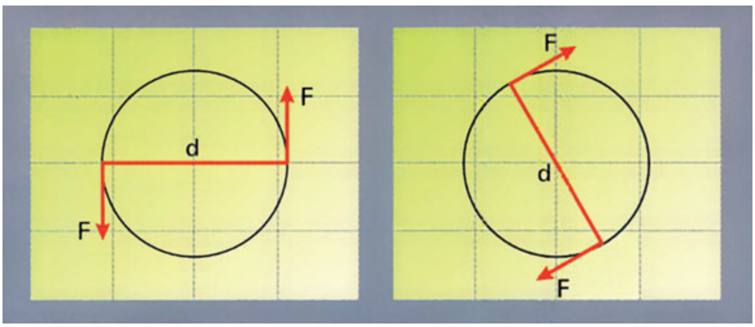
Εικόνα 3.8
Περιστροφή σωμάτων με επίδραση ζεύγους δυνάμεων

Τι κοινό νομίζετε ότι έχουν όλες οι παραπάνω περιπτώσεις;

Για να πετύχουμε την περιστροφή στα παραπάνω παραδείγματα, εφαρμόζουμε δυο δυνάμεις όπως φαίνεται και στην εικόνα, οι οποίες έχουν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

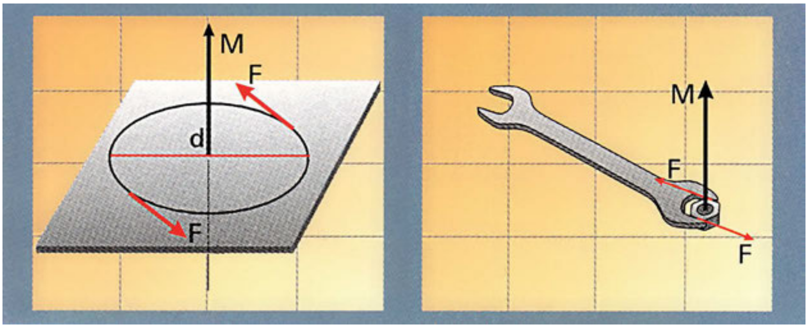
- **έχουν το ίδιο μέτρο**
- **είναι παράλληλες**
- **έχουν αντίθετη φορά.**

Το σύστημα των δύο δυνάμεων με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την περιστροφή ενός σώματος γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδό τους, ονομάζεται **ζεύγος δυνάμεων,** εικόνα 3.9. Η απόσταση d των δύο παράλληλων φορέων των δυνάμεων του ζεύγους λέγεται **βραχίονας του ζεύγους.**



Εικόνα 3.9
Ζεύγος δυνάμεων

Θεωρούμε έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους. Κάθε δύναμη του ζεύγους τείνει να περιστρέψει το σώμα γύρω από τον άξονα.



Εικόνα 3.10
Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Ορίζουμε ως ροπή ζεύγους το μέγεθος:

$$\boxed{\mathbf{M = F \cdot d}} \qquad (3.4)$$

Η ροπή του ζεύγους είναι διανυσματικό μέγεθος, όπως και η ροπή δύναμης, και έχει τα ίδια διανυσματικά χαρακτηριστικά με αυτήν, δηλαδή:

- **Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F μιας εκ των δυνάμεων του ζεύγους επί το βραχίονα d του ζεύγους.**
- **Φορέα τον άξονα περιστροφής του σώματος.**
- **Φορά θετική ή αρνητική ανάλογα με τη φορά περιστροφής του σώματος με την επίδραση του ζεύγους.**

Ας προσέξουμε

1ο Οι δύο δυνάμεις του ζεύγους δεν μπορούν να αντικατασταθούν από μία δύναμη (δεν έχει νόημα η εύρεση συνισταμένης).

2ο Η ροπή του ζεύγους μπορεί να αντικατασταθεί από τη ροπή κάποιας δύναμης.

3.4 Ισορροπία στερεού σώματος που μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα

Το θέμα που θα διαπραγματευθούμε στη συνέχεια είναι η ισορροπία ενός στερεού σώματος, στο οποίο ασκούνται δύο δυνάμεις οι οποίες τείνουν να το περιστρέψουν.

Το ερώτημα που τίθεται στην περίπτωση αυτή είναι:

Είναι δυνατόν να ισορροπήσει;

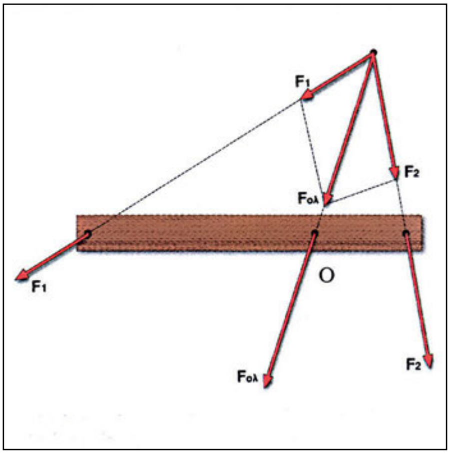
Ας πάρουμε ως παράδειγμα μια σανίδα. Θεωρούμε τη σανίδα αβαρή (δηλαδή στερεό σώμα με αμελητέο βάρος), εικόνα 3.11. Πάνω στη σανίδα ασκούνται δύο δυνάμεις F_1 και F_2, οι οποίες δεν είναι παράλληλες.

Από ποιο σημείο μπορεί να κρεμαστεί η σανίδα, ώστε να ισορροπήσει;

Η πρώτη κίνηση είναι να βρεθεί η συνισταμένη των δύο δυνάμεων. Για το λόγο αυτό προεκτείνουμε τους φορείς των δυνάμεων μέχρι να συναντηθούν.

Στη συνέχεια μεταφέρουμε τις δύο δυνάμεις πάνω στους φορείς τους και με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου βρίσκουμε τη συνισταμένη τους.

Κατόπιν προεκτείνουμε το φορέα της συνισταμένης, ώσπου να τμήσει τη σανίδα στο σημείο Ο.



Εικόνα 3.11
Ισορροπία στερεού
με την επίδραση δύο δυνάμεων

Αν τώρα κρεμάσουμε τη σανίδα από το σημείο Ο, θα παρατηρήσουμε ότι η σανίδα θα ισορροπήσει. Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα δέχεται από το καρφί μια δύναμη αντίθετη της συνισταμένης των δύο δυνάμεων.

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση κατά την οποία στη σανίδα ασκούνται δύο παράλληλες δυνάμεις;

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο;

Η απάντηση είναι όχι, διότι όσο και να προεκτείνουμε δύο παράλληλες ευθείες αυτές δεν τέμνονται, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου, ο οποίος έδωσε λύση στον προηγούμενο προβληματισμό.

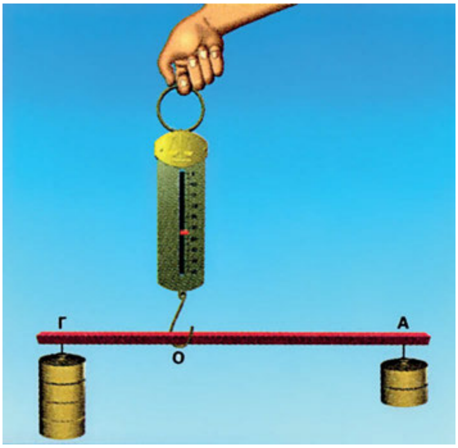
Για να απαντήσουμε στον προβληματισμό αυτό, θα πρέπει να βρούμε πάλι τη συνισταμένη των δύο δυνάμεων, δηλαδή να υπολογίσουμε:

- το μέτρο της
- το φορέα της
- τη φορά της και
- το σημείο εφαρμογής της.

Ας ερευνήσουμε

Κρεμάμε στις άκρες της αλουμινένιας ράβδου μήκους ℓ του σχολικού εργαστηρίου δύο βάρη (50p το καθένα) στην μια άκρη και τέσσερα βάρη στην άλλη άκρη. Πόση δύναμη ασκείται συνολικά στη ράβδο;

Στη συνέχεια παίρνουμε ένα δυναμόμετρο και προσπαθούμε να το μετακινήσουμε σε διάφορες θέσεις, ώστε να ισορροπήσει σε ένα σημείο, έστω Ο, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.12.



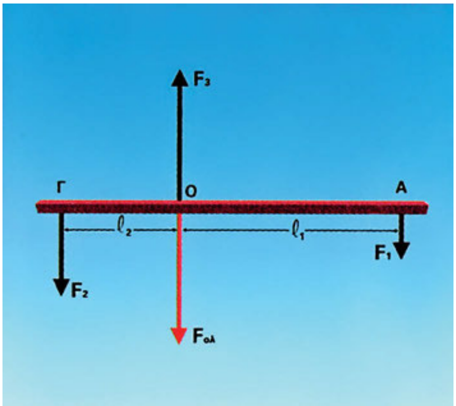
Εικόνα 3.12
Πείραμα για τον προσδιορισμό της συνισταμένης δυο παράλληλων δυνάμεων

Ποια είναι τότε η ένδειξη του δυναμομέτρου;

Κατόπιν παίρνουμε ένα χάρακα και με τη βοήθεια ενός φίλου μετράμε τις αποστάσεις του σημείου Ο από τις άκρες της ράβδου.

Τι παρατηρούμε;

Από το πείραμα που κάναμε διαπιστώνουμε ότι η δύναμη F_3, που ισορροπεί το σύστημα, έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της συνισταμένης των δύο ομοεπίπεδων, παραλλήλων και ομόρροπων δυνάμεων, δηλαδή



$F_3 = F_{ολ} = F_1 + F_2$, ίδια διεύθυνση με αυτές και φορά αντίθετη με αυτήν της συνισταμένης τους.

Για να βρεθεί, τέλος, το σημείο εφαρμογής (Ο) της δύναμης $F_{ολ}$, θα πρέπει να εφαρμοστεί το θεώρημα των ροπών στο σημείο Ο, σύμφωνα με το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση προκύπτει:

ροπή της δύναμης F_1 + ροπή της δύναμης F_2 = ροπή της δύναμης $F_{ολ}$,

δηλαδή $- F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 = F_{ολ} \cdot 0$

ή $F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2$ ή $\dfrac{\ell_2}{\ell_1} = \dfrac{F_1}{F_2}$,

και, αν προσθέσουμε στους παρονομαστές τους αριθμητές (θυμηθείτε λίγο τις ιδιότητες των αναλογιών από τα Μαθηματικά...), προκύπτει ότι:

$$\frac{\ell_2}{\ell_1+\ell_2}=\frac{F_1}{F_1+F_2}, \text{ όπου } \ell_1+\ell_2=\ell. \text{ Άρα}$$

$$\ell_2=\ell\frac{F_1}{F_1+F_2} \quad \text{και} \quad \ell_1=\ell\frac{F_2}{F_1+F_2}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε την απόσταση της δύναμης $F_{ολ}$ από τις άκρες της ράβδου, δηλαδή προσδιορίζουμε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δύο δυνάμεων.

Το σημείο αυτό είναι εκείνο από το οποίο μπορούμε να κρεμάσουμε τη ράβδο, ώστε να ισορροπήσει.

Αν, τέλος, στη σανίδα της εικόνας 3.13 ασκούνται δύο δυνάμεις ομοεπίπεδες αλλά αντίρροπες, με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση $F_{ολ} = F_2 - F_1$ όταν η δύναμη F_2 είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη F_1.

Η διεύθυνση της $F_{ολ}$ είναι ίδια με τη διεύθυνση των δύο δυνάμεων, και η φορά της είναι ίδια με τη φορά της μεγαλύτερης δύναμης.

Για να βρούμε όμως το σημείο εφαρμογής της Ο, εφαρμόζουμε και πάλι το θεώρημα των ροπών ως προς το σημείο Ο (σημείο εφαρμογής της συνισταμένης):

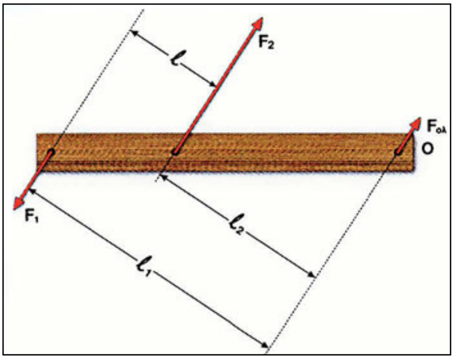
$$F_1\cdot\ell_1 - F_2\cdot\ell_2 = F_{ολ}\cdot 0,$$

$$\text{οπότε } \frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{F_2}{F_1} \quad \text{και} \quad \ell_1-\ell_2=\ell.$$

Όπως και πιο πάνω:

$$\frac{\ell_1-\ell_2}{\ell_2}=\frac{F_2-F_1}{F_1} \quad \text{ή}$$

$$\ell_2=\ell\frac{F_1}{F_2-F_1} \quad \text{και} \quad \ell_1=\ell\frac{F_2}{F_2-F_1}.$$



Εικόνα 3.13
Συνισταμένη δύο παράλληλων και αντίρροπων δυνάμεων

Η συνισταμένη δύναμη βρίσκεται προς την πλευρά της μεγαλύτερης δύναμης, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.13.

Γραφική μέθοδος *για να εντοπίζουμε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης παράλληλων δυνάμεων (ομόρροπων ή αντίρροπων):*

- *Προεκτείνουμε τη μικρότερη δύναμη, ώστε να γίνει ίση με τη μεγαλύτερη.*
- *Με αντίθετη φορά από αυτήν της μεγαλύτερης δύναμης φέρνουμε ένα τμήμα ίσο με τη μικρότερη δύναμη.*

- *Η ευθεία που ενώνει τα άκρα των τμημάτων που κατασκευάσαμε τέμνει τη ράβδο σε ένα σημείο Ο, που είναι και το ζητούμενο.*

Ας δοκιμάσουμε...........

Ας προσέξουμε

Για να ισορροπήσει ένα σώμα με την επίδραση πολλών δυνάμεων που τείνουν να το περιστρέψουν, πρέπει το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που τείνουν να στρέψουν το σώμα αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού να είναι ίσο με το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που τείνουν να στρέψουν το σώμα σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

$$\boxed{\mathbf{M\,(+)\nearrow = M(-)\searrow}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{\Sigma M=0}} \qquad (3.5)$$

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

1ο Παράδειγμα

Δύο εργάτες μεταφέρουν ένα σώμα βάρους 500N κρεμασμένο σε μια αβαρή ράβδο, που ακουμπά με τις άκρες της στους ώμους των δύο εργατών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το μήκος της ράβδου είναι 2 m, σε ποιο σημείο της ράβδου πρέπει να κρεμαστεί το σώμα, ώστε ο ένας εργάτης να κουβαλά βάρος 200N;

Έστω ότι το σώμα κρέμεται από το σημείο Ο.

Το σώμα βάρους 500N, μεταφέρεται από τους δύο εργάτες. Εφόσον ο ένας εργάτης θα μεταφέρει τα 200N, ο άλλος θα μεταφέρει το υπόλοιπο, δηλαδή τα 300N.

Αν η απόσταση του βάρους $B_1 = 300N$ από το σημείο Ο είναι $\ell_1 = x$, τότε η απόσταση του βάρους B_2 θα είναι 2-x.

Το βάρος B=500N βρίσκεται πάνω στο σημείο Ο, επομένως η ροπή του ως προς αυτό είναι ίση με μηδέν.

Θεωρούμε τις ροπές των βαρών B_1 και B_2 ως προς το σημείο Ο, στο οποίο κρέμασαν το βάρος:

Η ροπή του βάρους που μεταφέρει ο ένας εργάτης τείνει να περιστρέψει τη ράβδο αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και είναι:

$B_1 \cdot \ell_1 = 300x$ (N · m).

Η ροπή του βάρους που μεταφέρει ο άλλος εργάτης τείνει να περιστρέψει τη ράβδο σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και είναι:

$B_2 \cdot \ell_2 = 200(2\text{-}x)$ (N · m).

Σύμφωνα όμως με το θεώρημα των ροπών για την ισορροπία των στερεών σωμάτων ισχύει:

$300x = 200\ (2\text{-}x)$

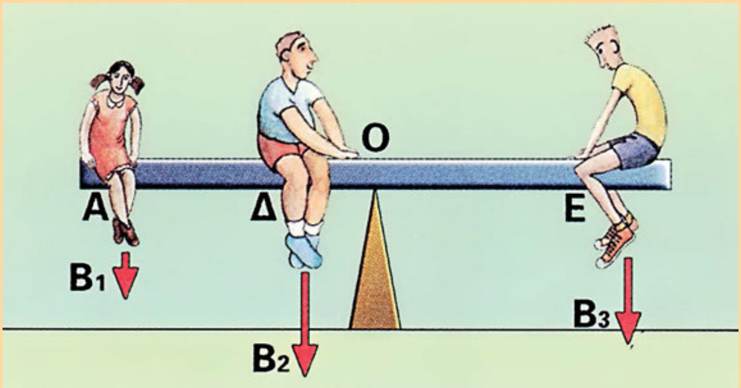
$$\text{ή τελικά: } x = \frac{400}{500} = 0{,}8\,\text{m}.$$

Επομένως, το βάρος πρέπει να κρεμαστεί σε απόσταση 0,8 m από τον εργάτη, που μεταφέρει το βάρος των 300N.

2ο Παράδειγμα

Στην τραμπάλα, που ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, η Δόμνα έχει βάρος B_1=320N και είναι στη θέση A, ο Νότης έχει βάρος B_2=540N και είναι στη θέση Δ, και ο Αλέξανδρος που έχει βάρος B_3 είναι στη θέση Ε. Πόσο βάρος έχει ο Αλέξανδρος;

Δίνονται ΑΟ = ℓ_1 = 3m, ΔΟ = ℓ_2 = 1m, και ΟΕ = ℓ_3 = 3m.



Θεωρούμε τις ροπές ως προς το σημείο Ο:

Οι ροπές που τείνουν να περιστρέψουν την τραμπάλα αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού είναι:

$B_1 \cdot \ell_1 + B_2 \cdot \ell_2 = 320\text{N} \cdot 3\text{m} + 540\ \text{N} \cdot 1\text{m} = 1500\text{N}\cdot\text{m}$.

Η ροπή που τείνει να περιστρέψει την τραμπάλα σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού είναι:

$$B_3 \cdot \ell_3 = B_3 \cdot 3\text{m}.$$

Σύμφωνα όμως με το θεώρημα των ροπών για την ισορροπία των στερεών σωμάτων ισχύει:

$B_3 \cdot 3\text{m} = 1500\ \text{N} \cdot \text{m}$

ή $$B_3 = \frac{1500\,\text{N}\cdot\text{m}}{3\,\text{m}} = 500\,\text{N}.$$

Επομένως, το βάρος του Αλέξανδρου είναι 500N.

3.5 Κέντρο βάρους - Είδη ισορροπίας

Κάθε στερεό σώμα αποτελείται από στοιχειώδη σωματίδια. Καθένα από αυτά έχει μάζα και δέχεται μια ελκτική δύναμη από τη Γη. Η δύναμη αυτή ονομάζεται **βάρος** και θεωρούμε ότι έχει κατακόρυφη διεύθυνση.

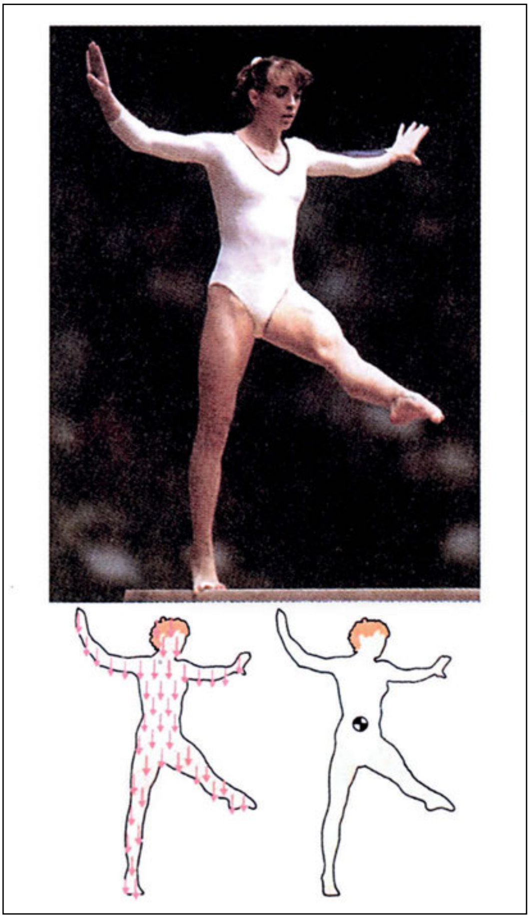
Σύμφωνα με την παραπάνω παραδοχή το βάρος κάθε σώματος είναι το αποτέλεσμα της αναζήτησης της συνισταμένης όλων αυτών των στοιχειωδών βαρών των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται το σώμα, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.14.

Τα στοιχειώδη βάρη είναι παράλληλες δυνάμεις και η εύρεση του βάρους ενός σώματος είναι η σύνθεση όλων αυτών των παράλληλων και κατακόρυφων συνιστωσών.

Η συνισταμένη όλων αυτών των στοιχειωδών βαρών περνά από ένα χαρακτηριστικό σημείο, που ονομάζεται **κέντρο βάρους** του σώματος.

Στο κέντρο βάρους μεταφέρουμε συνήθως και όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα, όταν μελετάμε την ισορροπία αλλά και την κίνησή του κατά τις μετατοπίσεις.

Το πλεονέκτημα αυτού του σημείου είναι ότι, ακόμη και αν στραφεί το σώμα, χωρίς όμως να αλλάξει το σχήμα του, το σημείο αυτό παραμένει το ίδιο.



Εικόνα 3.14
Το βάρος σώματος ως συνισταμένη των στοιχειωδών βαρών των σωματιδίων του

Υπάρχουν περιπτώσεις μελέτης κινήσεων κατά τις οποίες τα σώματα θεωρούνται σημειακά αντικείμενα και τότε η μάζα τους είναι συγκεντρωμένη στο κ.β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα σχεδιάζονται με σημείο εφαρμογής το κ.β. τους.

Ας προβληματιστούμε

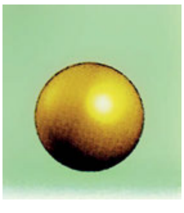
Ισορροπήστε ένα χάρακα με το δάκτυλό σας. Σημειώστε τις δυνάμεις που δέχεται ο χάρακας και προσπαθήστε να ερμηνεύσετε την ισορροπία του. Στη συνέχεια, τοποθετήστε πάνω στο χάρακα μια γομολάστιχα. Προσπαθήστε πάλι να ισορροπήσετε το σύστημα χάρακας -γομολάστιχα. Τι παρατηρείτε;

Ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους ενός σώματος είναι, όπως καταλαβαίνουμε, πολυσύνθετη διαδικασία. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

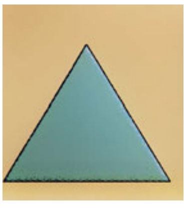
Συνήθως το κέντρο βάρους ενός ομογενούς σώματος είναι το κέντρο συμμετρίας του ή βρίσκεται πάνω σε έναν άξονα συμμετρίας του *(Ομογενές λέγεται ένα σώμα, όταν η πυκνότητά του είναι σταθερή σε όλη του την έκταση).*

Ας προβληματιστούμε

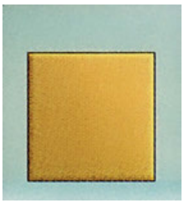
Βρείτε το κέντρο βάρος των παρακάτω ομογενών σωμάτων:



σφαίρα



ισόπλευρη τριγωνική πλάκα



τετραγωνική πλάκα

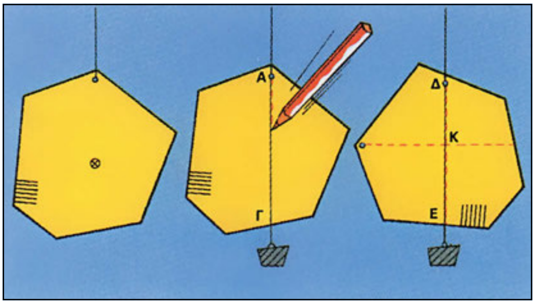
πλάκα σχήματος ορθογώνιου

Εύρεση του κέντρου βάρους ενός σώματος

Ας ερευνήσουμε

Πειραματικά το κέντρο βάρους μιας κατηγορίας σωμάτων, τα οποία όμως έχουν δυο διαστάσεις, π.χ. μιας πλάκας ακανόνιστου σχήματος, βρίσκεται με τη **μέθοδο της διπλής ανάρτησης.**

Φτιάξτε με ένα χαρτόνι μια επιφάνεια ακανόνιστου σχήματος όπως φαίνεται στην εικόνα 3.15.



Εικόνα 3.15
Πρακτικός προσδιορισμός κέντρου βάρους

Πάρτε ένα σχοινί και στη μια άκρη του δέστε ένα μικρό βάρος.

Κρεμάστε την επιφάνεια του χαρτονιού από ένα σημείο Α, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.15.

Από το ίδιο σημείο αναρτήστε το σχοινί με το βάρος και σημειώστε πάνω στη χάρτινη επιφάνεια τη διεύθυνση ΑΓ του σχοινιού.

Στη συνέχεια κρεμάστε την επιφάνεια του χαρτονιού από ένα άλλο σημείο Δ και επαναλάβετε την ίδια διαδικασία.

Σημειώστε και πάλι τη διεύθυνση ΔΕ, η οποία τέμνει την προηγούμενη διεύθυνση ΑΓ στο σημείο Κ.

Στερεώστε τη χάρτινη επιφάνεια στο σημείο Κ και στρέψτε την.

Τι παρατηρείτε;

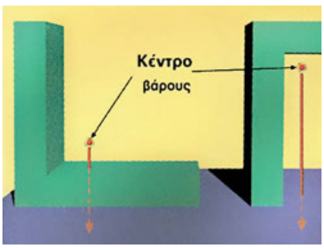
Πώς το εξηγείτε;

Το σημείο Κ είναι το κέντρο βάρους της χάρτινης επιφάνειας.

Μπορεί η μέθοδος της διπλής ανάρτησης να χρησιμοποιηθεί σε μη ομογενή σώματα;

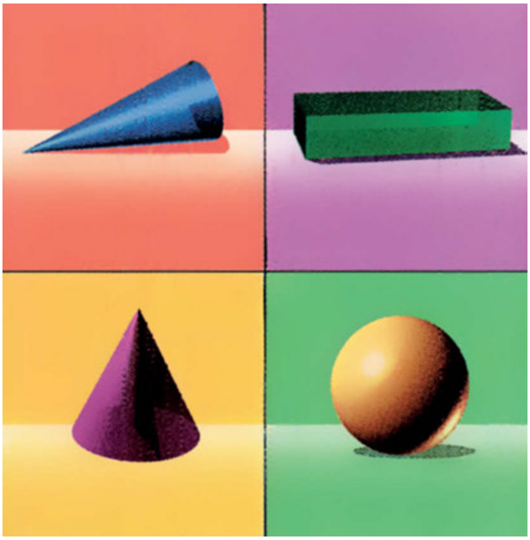
Ας προσέξουμε

Το κέντρο βάρους των σωμάτων μπορεί να βρίσκεται μέσα ή έξω από τα σώματα, όπως φαίνεται στις εικόνες.



3.6 Κέντρο βάρους και ισορροπία ενός σώματος

Ένα στερεό σώμα μπορεί να ισορροπεί, όταν στηρίζεται σε ένα ή σε περισσότερα σημεία πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.16.



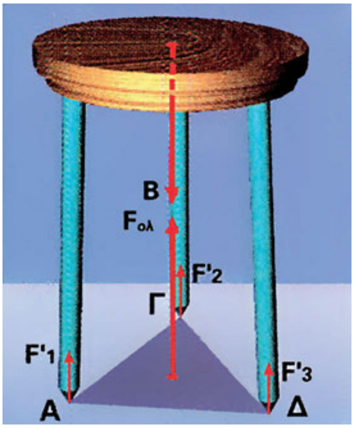
Εικόνα 3.16
Ισορροπία διάφορων στερεών

Αν τώρα θεωρήσουμε ένα τρίποδο σκαμνί και ενώσουμε τα σημεία επαφής του, που βρίσκονται στο οριζόντιο και λείο δάπεδο, προκύπτει ένα τρίγωνο, το οποίο ονομάζεται **βάση στήριξης**, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.17.

Το επίπεδο ασκεί στα τρία σημεία επαφής του σώματος με το δάπεδο Α, Γ, Δ αντιδράσεις (δυνάμεις από επαφή), οι οποίες είναι κατακόρυφες.

Αν προσπαθήσουμε να μελετήσουμε την ισορροπία του σκαμνιού, θα διαπιστώσουμε ότι το βάρος του Β και η συνισταμένη των τριών αντιδράσεων πρέπει να είναι δυνάμεις ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης.

Για να συμβεί αυτό, η συνισταμένη δύναμη των τριών αντιδράσεων πρέπει να βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το βάρος, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.17.



Εικόνα 3.17
Ισορροπία στερεού με τρία σημεία στήριξης

Δεν είναι δύσκολο να καταλήξει κανείς στο παρακάτω συμπέρασμα:

Στερεό σώμα, το οποίο στηρίζεται πάνω σε ένα λείο και οριζόντιο επίπεδο, ισορροπεί, όταν η κατακόρυφος που περνά από το κέντρο βάρους του σώματος τέμνει τη βάση στήριξής του.

Ας παρατηρήσουμε ένα περιστέρι καθώς περπατάει. Σε κάθε βήμα το περιστέρι τινάζει κεφάλι και λαιμό πίσω και εμπρός, έτσι ώστε να κρατάει το κέντρο βάρος του πάνω στην ευθεία που περνάει από το πόδι στο οποίο στηρίζεται.

Εικόνα 3.18
Το περιστέρι όταν περπατάει, βρίσκει τρόπο να ισορροπεί.

Ας επεκτείνουμε

Παίρνουμε μια σφαίρα.

Προσπαθούμε να ισορροπήσουμε τη σφαίρα στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Πάνω σε μια μπάλα.

β. Πάνω στο θρανίο.

γ. Μέσα σε μια κούπα.

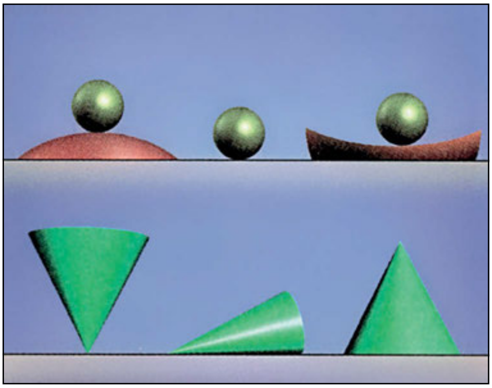
Κάνουμε το ίδιο με έναν κώνο, στηρίζοντάς τον στο έδαφος:

α. Με την κορυφή.

β. Με την παράπλευρη επιφάνεια.

γ. Με τη βάση του.

Τι παρατηρούμε;



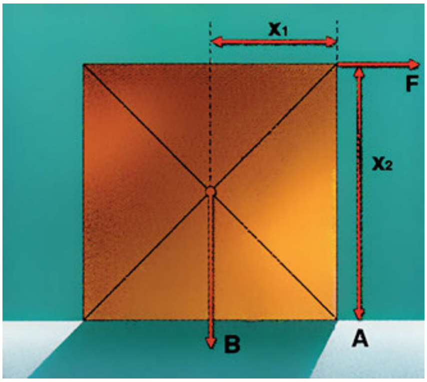
Εικόνα 3.19
Διάφορες περιπτώσεις ισορροπίας σφαίρας και κώνου.

Στην πρώτη περίπτωση η σφαίρα ή ο κώνος ισορροπούν στο οριζόντιο επίπεδο με **ελάχιστα σημεία επαφής.** Αν η σφαίρα ή ο κώνος απομακρυνθούν ελάχιστα από τη θέση ισορροπίας, δεν ξαναγυρίζουν στην αρχική θέση τους. Σ’ αυτή την περίπτωση η ισορροπία των σωμάτων ονομάζεται **ασταθής.**

Στη δεύτερη περίπτωση, αν η σφαίρα ή ο κώνος εκτραπούν από τη θέση της αρχικής ισορροπίας τους, ισορροπούν σε μια νέα θέση. Σ’ αυτή την περίπτωση η ισορροπία των σωμάτων ονομάζεται **ουδέτερη ή αδιάφορη.**

Τέλος, στην τρίτη περίπτωση, αν η σφαίρα ή ο κώνος απομακρυνθούν λίγο από τη θέση ισορροπίας, ξαναγυρίζουν στην αρχική θέση τους. Σ’ αυτή την περίπτωση η ισορροπία των σωμάτων ονομάζεται **ευσταθής.**

Ο βαθμός ευστάθειας ενός σώματος μετριέται με τη γωνία κατά την οποία στρέφεται το σώμα, ώστε να ανατραπεί. Η γωνία αυτή είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο χαμηλότερα είναι το κέντρο βάρους του σώματος και φυσικά όσο μεγαλύτερη είναι η βάση στήριξης.



Εικόνα 3.20
Ισορροπία κιβωτίου

Τέλος, ας θεωρήσουμε το κιβώτιο της εικόνας 3.20 και ένα σημείο ανατροπής Α.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο όταν αρχίζει η ανατροπή είναι η αντίδραση F_A στο σημείο Α, το βάρος του Β και η δύναμη F, που ασκούμε, ώστε να ανατρέψουμε το κιβώτιο. Οι ροπές των δυνάμεων αυτών ως προς στο σημείο Α είναι αντίστοιχα:

$M_1 = B \cdot x_1$
$M_2 = F \cdot x_2$
$M_3 = F_A \cdot 0$

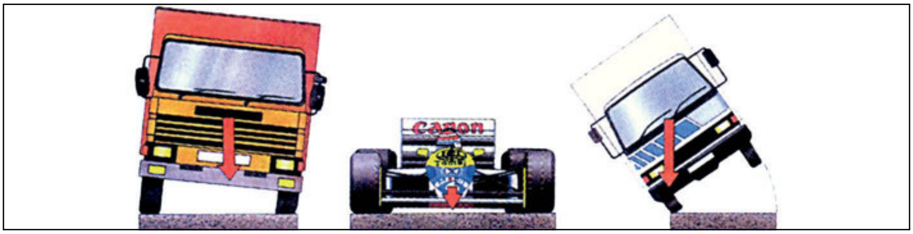
Το πηλίκο των ροπών $$\boxed{\beta = \frac{M_1}{M_2}} \qquad (3.6)$$

ορίζει το **βαθμό ασφάλειας,** προκειμένου το κιβώτιο ή γενικότερα ένα στερεό σώμα να μην ανατραπεί.

Σε μια ευσταθή ισορροπία το πηλίκο αυτό είναι μεγαλύτερο της μονάδας, διότι τότε η ροπή του βάρους είναι μεγαλύτερη από τη ροπή της δύναμης η οποία τείνει να ανατρέψει ένα σώμα. Με την επίδραση της ροπής του βάρους μπορεί το κιβώτιο να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας.

Ύστερα από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι η ισορροπία ενός σώματος είναι περισσότερο ευσταθής, όσο μεγαλύτερη είναι η βάση στήριξής του και επιπλέον όσο πιο χαμηλά είναι το κέντρο βάρους.

Συζητήστε τις παρακάτω περιπτώσεις της εικόνας 3.21.

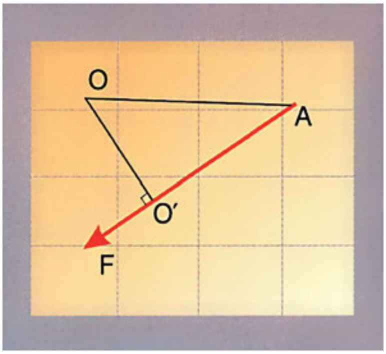


Εικόνα 3.21

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ- ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1 Το μέτρο της ροπής της δύναμης F ως προς το σημείο O είναι:

α. M = F. (OA)
β. M = - F. (OA)
γ. M = F(OO΄)
δ. M = -F(OO΄)
Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι η σωστή;



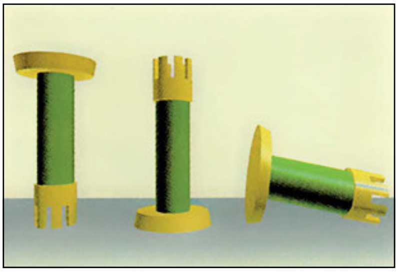
3.2 Στην πόρτα του δωματίου σου ασκείται δύναμη F, και η πόρτα δεν περιστρέφεται. Αυτό συμβαίνει διότι:

α. Η δύναμη τέμνει τον άξονα περιστροφής.
β. Η δύναμη ασκείται σε μεγάλη απόσταση από τον άξονα περιστροφής.
γ. Η δύναμη είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής
Ποιες από τις προτάσεις είναι λανθασμένες.

3.3 Απομακρύνουμε ένα σώμα από τη θέση ισορροπίας του. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα της αριστερής στήλης με τα είδη της ισορροπίας στη δεξιά στήλη:

Αποτελέσματα	**Είδη ισορροπίας**
α. Το σώμα επανέρχεται στην αρχική θέση του.	Ασταθής ισορροπία
β. Το σώμα απομακρύνεται χωρίς επιστροφή.	Ευσταθής ισορροπία
γ. Το σώμα παραμένει ακίνητο στη νέα θέση.	Ουδέτερη ισορροπία

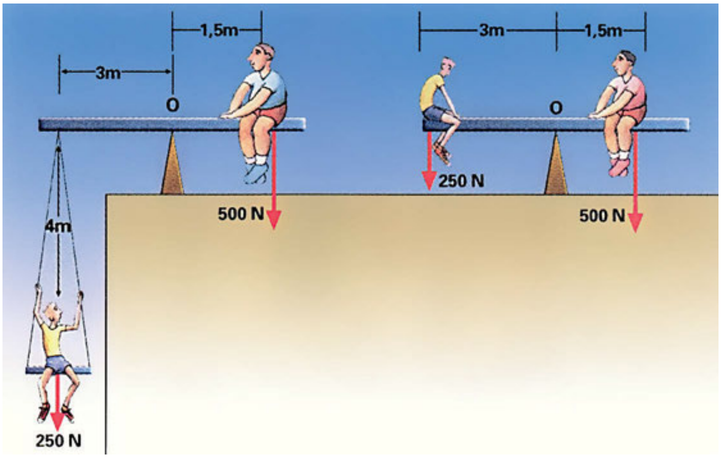
3.4 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι τρεις θέσεις ενός πύργου από σκάκι. Σημειώστε σε ποια θέση ο πύργος έχει:



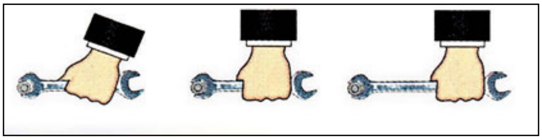
α. Αδιάφορη ισορροπία
β. Ευσταθή ισορροπία
γ. Ασταθή ισορροπία.
Αιτιολογήστε τις επιλογές σας.

3.5 Πώς θα βρείτε το κέντρο βάρους ακανόνιστης πλάκας; Να περιγράψετε τα στάδια που θα ακολουθήσετε.

3.6 Μελετήστε τις δύο περιπτώσεις ισορροπίας, όπως φαίνονται στην παρακάτω εικόνα. Είναι δυνατόν να ισορροπούν οι δύο μπόμπιρες και στις δύο περιπτώσεις;

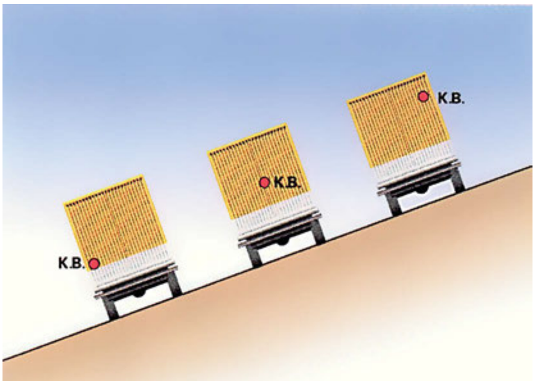


3.7 Ελέγξετε γιατί στα τρία διπλανά στιγμιότυπα οι ροπές διαφέρουν;

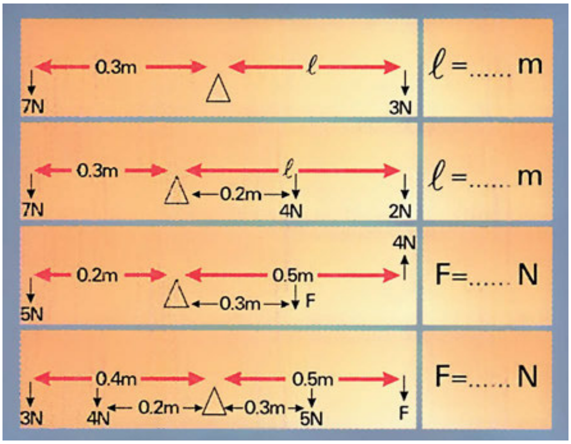


3.8 Γιατί τα λεωφορεία και τα φορτηγά έχουν μεγάλα τιμόνια;

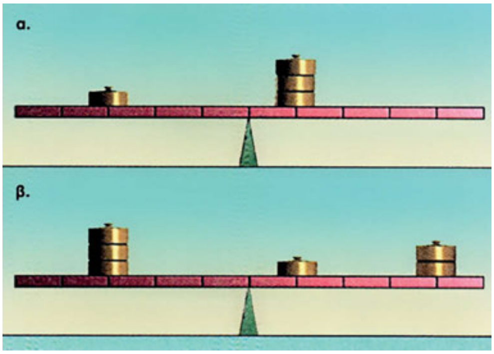
3.9 Τρία φορτηγά αυτοκίνητα έχουν παρκάρει σε έναν ανηφορικό δρόμο. Το κέντρο βάρους των αυτοκινήτων έχει σημειωθεί στις εικόνες. Θα ανατραπεί κάποιο από τα αυτοκίνητα και ποιο/α θα είναι αυτό/α;



3.10 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω περιπτώσεις ισορροπίας ενός δοκαριού αμελητέου βάρους:



3.11 Στο διπλανό σχήμα ο χάρακας έχει μήκος 50cm και είναι βαθμολογημένος κατά διαστήματα 5cm. Μεταλλικοί δίσκοι έχουν τοποθετηθεί όπως φαίνεται στις περιπτώσεις α και β. Και στις δύο περιπτώσεις ο χάρακας ισορροπεί. Αποδείξτε τον παραπάνω ισχυρισμό με μαθηματικές σχέσεις.

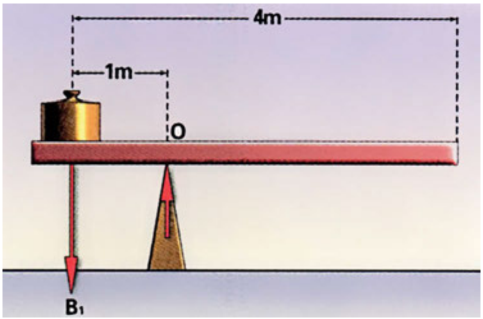


3.12 Η εικόνα 3.3 (σελ. 62) δείχνει τρεις διαφορετικές θέσεις του πεντάλ ενός ποδηλάτου. Εάν το σημείο εφαρμογής της δύναμης στο πεντάλ απέχει από το κέντρο του οδοντωτού δίσκου κατά 20cm και η δύναμη που εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση είναι 25N, πόση είναι η ροπή της δύναμης σε κάθε περίπτωση;

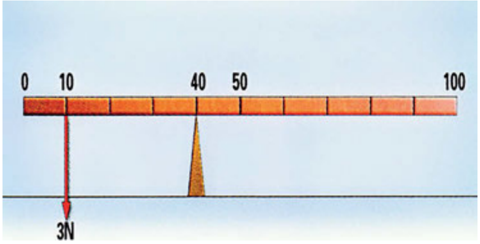
3.13 Το βάρος μιας ομογενούς δοκού είναι 100N. Με την επίδραση του βάρους B_1 ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α. Πόση είναι η ροπή του βάρους B_1;

β. Πόσο είναι το μέτρο του B_1;

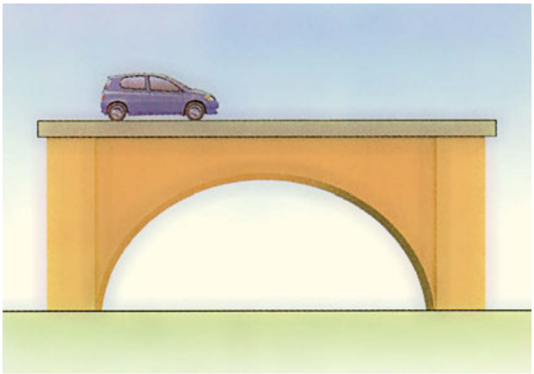


3.14 **Στη διπλανή εικόνα ο χάρακας έχει βάρος 10N και είναι βαθμολογημένος σε εκατοστά. Αν κρεμάσετε ένα βάρος των 3N και στηρίξετε το χάρακα όπως φαίνεται στην εικόνα, τι θα συμβεί;**

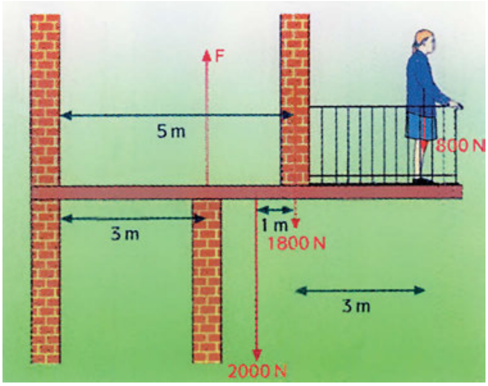


3.15 **Μια κοπέλα κουβαλάει χώμα για τον κήπο της με το καροτσάκι, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Να υπολογίσετε τη δύναμη με την οποία η κοπέλα σηκώνει το καροτσάκι.**

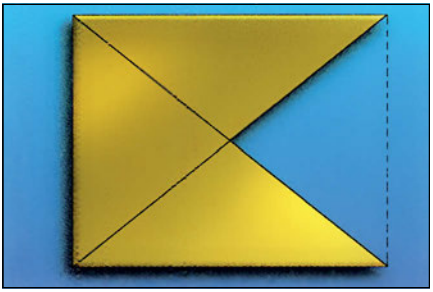
3.16 **Μια γέφυρα έχει βάρος 20.000N, μήκος ℓ και στηρίζεται σε δύο στύλους, όπως φαίνεται στην εικόνα. Στη γέφυρα σταμάτησε ένα αυτοκίνητο Α βάρους 10000N σε απόσταση $\frac{\ell}{4}$ από το αριστερό άκρο. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που δέχονται οι δυο στύλοι. (Η γέφυρα θεωρείται ομογενής).**



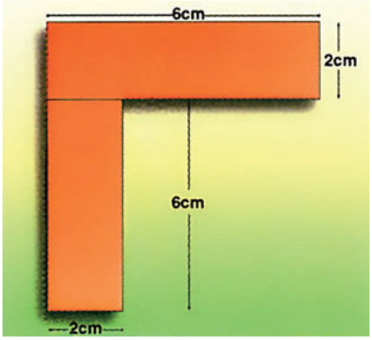
3.17 **Υπολογίστε τη δύναμη F που δέχεται η δοκός (υποστήριγμα) στην εικόνα που ακολουθεί.**



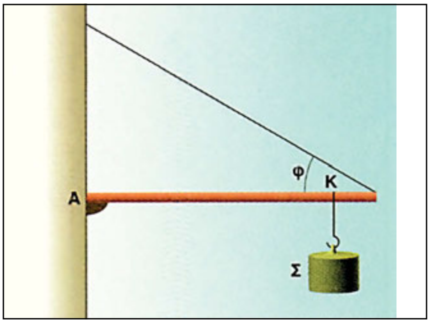
3.18 **Από μια τετράγωνη πλάκα πλευράς 10cm αφαιρείται ένα από τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζουν οι διαγώνιοί της. Να βρείτε τη θέση του κέντρου βάρους της πλάκας που απέμεινε.**



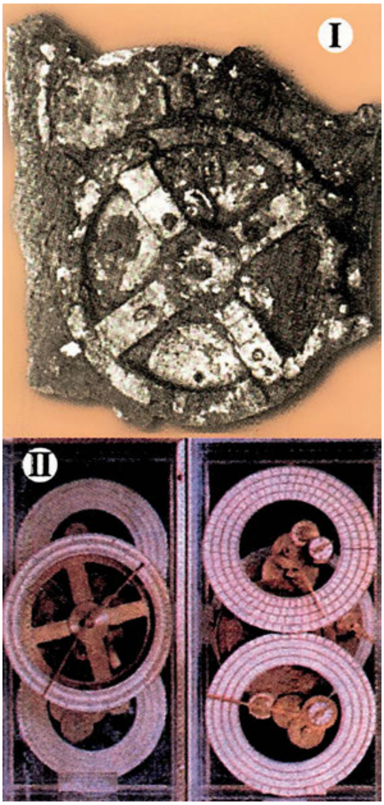
3.19 **Μια ομογενής επιφάνεια σε σχήμα Γ έχει τις διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Να βρείτε το κέντρο βάρους της επιφάνειας.**



3.20 **Ομογενής ράβδος βάρους B=50N ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια ενός σχοινιού, όπως δείχνει η εικόνα. Στο σημείο Κ κρέμεται σώμα Σ βάρους B_1=10N. Αν το μήκος της ράβδου είναι L=4m, η απόσταση ΑΚ=3m και η γωνία φ=30°, ζητούνται: α) η τάση Τ του νήματος, β) η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη ράβδο στο σημείο Α.**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°
ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΗ

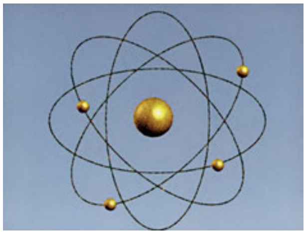


Στην Αρχαία Ελλάδα παράλληλα με τον υψηλό πνευματικό πολιτισμό (Φιλοσοφικές σχολές, Θέατρα, Ολυμπιακή Ιδέα, Επιστήμες, Τέχνες και τόσα άλλα) φαίνεται ότι είχε αναπτυχθεί και μια μορφή Τεχνολογίας για την οποία ελάχιστα πράγματα γνωρίζουμε σήμερα.
Ενδεικτικό αυτής της τεχνολογίας είναι το εύρημα από ένα αρχαίο ναυάγιο (εικόνα Ι), που φυλάσσεται στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο. Ανασύρθηκε από ψαράδες στα ανοιχτά των Αντικυθήρων στις αρχές του αιώνα μας.
Αποτελείται από ένα εξαιρετικά πολύπλοκο σύστημα οδοντωτών τροχών και διαφορικών γραναζιών. Επίσημα έχει καταγραφεί με την ονομασία «Αστρολάβος», επειδή μάλλον πρόκειται για υψηλής ακρίβειας αστρονομικό όργανο. Διαπρεπείς Έλληνες και ξένοι επιστήμονες έχουν μελετήσει το παράξενο αυτό εύρημα και έχουν προσπαθήσει πολλές φορές με τη βοήθεια της σύγχρονης Τεχνολογίας να το ανακατασκευάσουν. Για την ανακατασκευή του (εικόνα ΙΙ) χρειάστηκε να ακτινογραφηθεί σε ειδικά εργαστήρια.

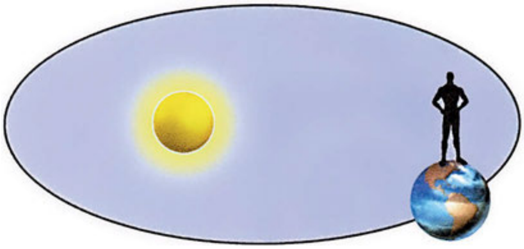
4.1 Το αίνιγμα της κίνησης

Ο κόσμος γύρω μας είναι ένας κόσμος κίνησης...

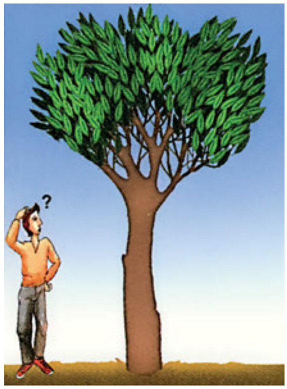
Οι αθλητές τρέχουν στους στίβους, τα αυτοκίνητα κινούνται στους δρόμους, τα αεροπλάνα διασχίζουν τον ουρανό, τα ηλεκτρόνια στροβιλίζονται γύρω από τον πυρήνα του ατόμου, τώρα που διαβάζεις αυτό το βιβλίο κινείσαι μαζί με τη Γη συμμετέχοντας στο αέναο ταξίδι της γύρω από τον Ήλιο. Η κίνηση φαίνεται να είναι στο σύμπαν μια απαραβίαστη αρχή.



Εικόνα 4.1
Αναπαράσταση ατόμου της ύλης



Εικόνα 4.2
...ταξιδεύοντας γύρω από τον ήλιο



Εικόνα 4.3
Ένα "ακίνητο" δέντρο εκτελεί πολλές κινήσεις (ποιες;)

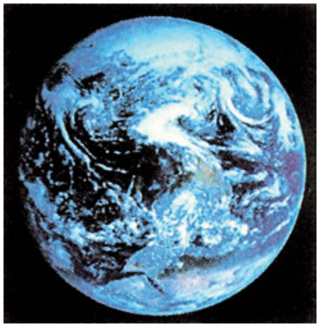
Εικόνα 4.4
Κάποιες από τις κινήσεις που συμβαίνουν γύρω μας

Τι ακριβώς σημαίνει, όμως, το γεγονός ότι ένα σώμα κινείται;

4.1.1 Σύστημα αναφοράς - Θέση

Προκειμένου να μελετήσουμε τη θέση και τις κινήσεις των διάφορων σωμάτων, πρέπει να διαλέξουμε αυθαίρετα έναν παρατηρητή, ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι ακίνητος, και μελετάμε ως προς αυτόν τη θέση και τις κινήσεις των διάφορων σωμάτων. Ο παρατηρητής αυτός συνδέεται με ένα **σύστημα**

αναφοράς που παριστάνεται με σύστημα αξόνων xyz. Αν θέλουμε, για παράδειγμα, να μελετήσουμε τις κινήσεις που συμβαίνουν στην επιφάνεια της Γης ή κοντά σ' αυτή, τότε παίρνουμε ως σύστημα αναφοράς τη Γη. Θεωρούμε δηλαδή ότι η Γη είναι ακίνητη και ότι ο παρατηρητής στέκεται ακίνητος στη Γη. Αν θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση της ίδιας της Γης, επιλέγουμε ως σύστημα αναφοράς π.χ. τον Ήλιο. Επειδή κανένα σώμα στο σύμπαν δεν είναι ακίνητο, όλα τα συστήματα αναφοράς είναι σχετικά. Η επιλογή του συστήματος αναφοράς καθορίζεται μόνο από την άποψη της απλότητας των εξισώσεων που θα προκύψουν από τη μελέτη της κίνησης των σωμάτων. Επιλέγουμε, δηλαδή, εκείνο το σύστημα αναφοράς, το οποίο θα απλοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερο τις εξισώσεις που θα προκύψουν.



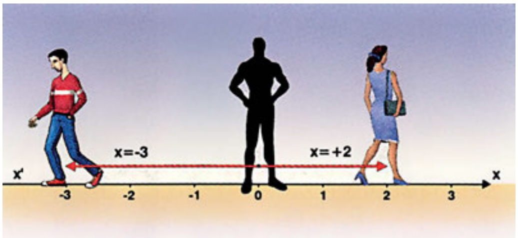
Εικόνα 4.5
Η Γη σε φωτογραφία από δορυφόρο

Για παράδειγμα, η κίνηση του σκύλου στην εικόνα 4.6 είναι αρκετά πιο απλό να μελετηθεί από τον παρατηρητή που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι παρά από εκείνον που στέκεται στο δρόμο (γιατί;).

Εικόνα 4.6
Η επιλογή του κατάλληλου συστήματος αναφοράς απλοποιεί τα προβλήματα κίνησης

Η θέση ενός σώματος καθορίζεται από το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}$. Διάνυσμα θέσης είναι εκείνο το διάνυσμα το οποίο συνδέει το σώμα που εξετάζουμε με ένα σύστημα αναφοράς (και ειδικά με την αρχή των συντεταγμένων του). Προκειμένου να εντοπίσουμε τη θέση ενός αντικειμένου σε μια **ευθεία,** χρειαζόμαστε μόνον **έναν αριθμό.** Ο αριθμός αυτός είναι η αλγεβρική τιμή του διανύσματος θέσης στον άξονα x΄x. Η απόλυτη τιμή του αριθμού αυτού εκφράζει την **απόσταση** του αντικειμένου από την αρχή των αξόνων, ενώ το πρόσημό του καθορίζει αν θα βρίσκεται δεξιά της αρχής των αξόνων (θετικός ημιάξονας) ή αριστερά αυτής (αρνητικός ημιάξονας).

Στην εικόνα 4.7 η θέση της γυναίκας είναι η x= +2, γεγονός που σημαίνει ότι η απόστασή της από την αρχή των αξόνων είναι 2 μονάδες μήκους (π.χ. μέτρα), ενώ το θετικό πρόσημο δείχνει ότι βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα (δεξιά της αρχής).

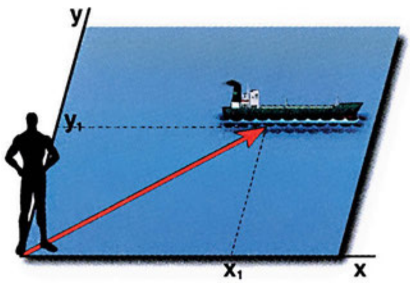


Εικόνα 4.7
Η θέση ενός σώματος σε μια ευθεία καθορίζεται από μια συντεταγμένη x.

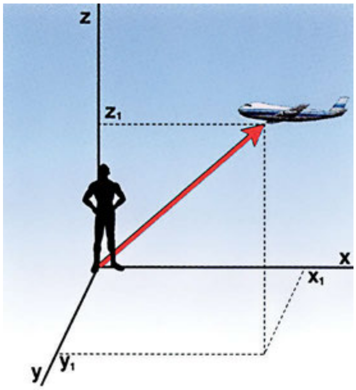
Ομοίως η θέση x = –3 του αγοριού σημαίνει ότι η απόστασή του είναι 3 μονάδες μήκους και βρίσκεται αριστερά της αρχής (αρνητικός ημιάξονας). Η θέση στο επίπεδο καθορίζεται από δυο αριθμούς x_1,y_1 οι οποίοι ομοίως εκφράζουν τις αλγεβρικές τιμές των συνιστωσών του διανύσματος θέσης στους άξονες x΄x και y΄y. Στην εικόνα 4.8 η θέση του πλοίου είναι καθορισμένη, αν γνωρίζουμε τις τιμές x_1 και y_1.

Στο **χώρο** απαιτείται η γνώση τριών αριθμών x_1, y_1, z_1, όπως εύκολα διαπιστώνουμε από την εικόνα 4.9.

(Όπως είναι γνωστό από τα Μαθηματικά, οι αριθμοί x, y, z, ονομάζονται **Καρτεσιανές συντεταγμένες).**

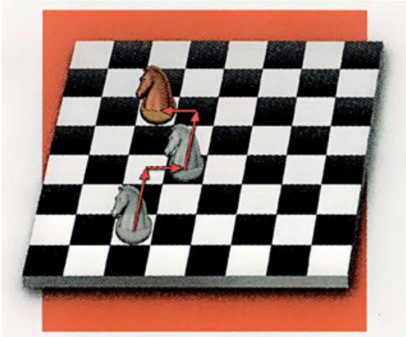


Εικόνα 4.8
Η θέση του πλοίου καθορίζεται από δύο συντεταγμένες x_1, y_1.



Εικόνα 4.9
Η θέση του αεροσκάφους καθορίζεται από τρεις συντεταγμένες x_1, y_1, z_1.

4.1.2 Κίνηση και ηρεμία



Εικόνα 4.10
Στο σύστημα αναφοράς της σκακιέρας το πιόνι-άλογο κινείται, διότι η θέση του αλλάζει.

Ένα σώμα κινείται, όταν η θέση του αλλάζει χρονικά ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Η αλλαγή της θέσης επιφέρει και ταυτόχρονη αλλαγή στις συντεταγμένες που την καθορίζουν.

Στο παράδειγμα της σκακιέρας το πιόνι-άλογο **κινείται** σχετικά με την σκακιέρα, διότι η **θέση του αλλάζει** διαδοχικά.

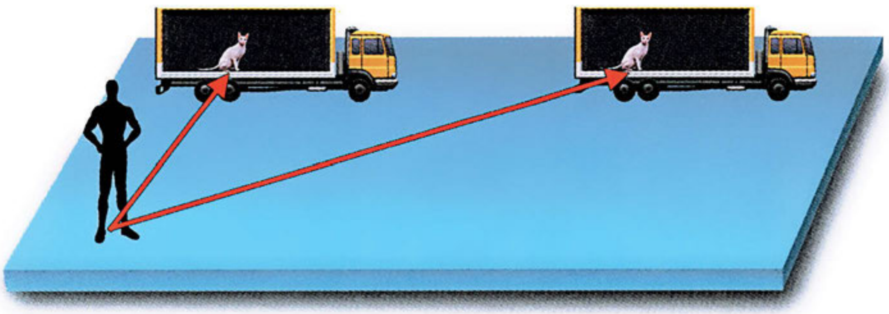
Η έννοια της ηρεμίας συνδέεται με το αμετάβλητο της θέσης ενός σώματος ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Έτσι, θα λέμε ότι ένα σώμα ηρεμεί ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, όταν η θέση του παραμένει χρονικά σταθερή.

ΚΙΝΗΣΗ: αλλαγή θέσης	*(ως προς ένα σύστημα αναφοράς)*
ΗΡΕΜΙΑ: σταθερότητα θέσης	*(ως προς ένα σύστημα αναφοράς)*

Θα πρέπει ιδιαίτερα να τονιστεί ότι ένα συγκεκριμένο σώμα είναι δυνατόν να φαίνεται κινούμενο ή ακίνητο ανάλογα με το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιούμε.

Στο παράδειγμα της εικόνας 4.11 ο γάτος είναι ακίνητος σχετικά με τον οδηγό του οχήματος, διότι η μεταξύ τους απόσταση παραμένει αμετάβλητη.

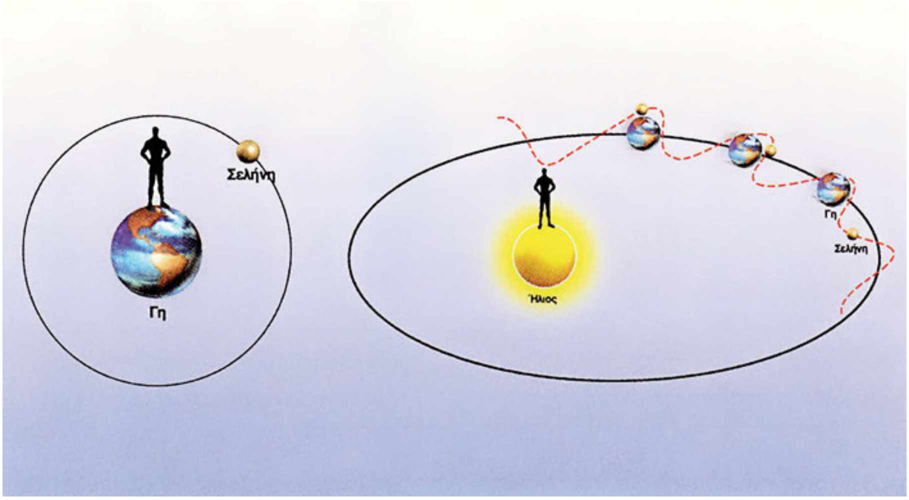
Ο άνθρωπος όμως που στέκεται στο πεζοδρόμιο αντιλαμβάνεται το γάτο να κινείται, διότι η μεταξύ τους απόσταση αλλάζει. **Το ερώτημα** “τι κάνει στην πραγματικότητα ο γάτος;” δεν έχει νόημα, διότι η κίνηση και η ηρεμία είναι έννοιες σχετικές και πάντοτε θα πρέπει να συνδέονται με κάποιο σύστημα αναφοράς.



Εικόνα 4.11
Ανάλογα με τον παρατηρητή ο γάτος φαίνεται να κινείται ή να είναι ακίνητος.

4.1.3 Τροχιά

Αν ενώσουμε με μια γραμμή το σύνολο των θέσεων από τις οποίες διέρχεται το κινητό, τότε η γραμμή αυτή που θα προκύψει ονομάζεται **τροχιά.** Ανάλογα με το είδος της τροχιάς οι κινήσεις διακρίνονται σε **ευθύγραμμες** και σε **καμπυλόγραμμες,** ενώ ειδική περίπτωση καμπυλόγραμμης κίνησης είναι η κυκλική, στην οποία η τροχιά του κινητού είναι η περιφέρεια ενός κύκλου.



Εικόνα 4.12
Η μορφή της τροχιάς εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.
Η τροχιά της Σελήνης με σύστημα αναφοράς τη Γη είναι σχεδόν κυκλική, ενώ με σύστημα αναφοράς τον Ήλιο είναι ελικοειδής.

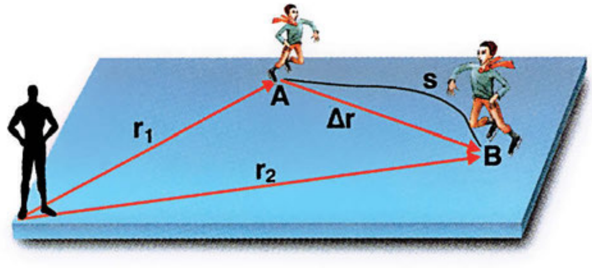
Οι έννοιες: **θέση, κίνηση, ηρεμία, τροχιά,** είναι σχετικές. Δηλαδή, πάντα θα εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς το οποίο χρησιμοποιούμε για τη μελέτη τους.

4.1.4 Μετατόπιση - Διάστημα

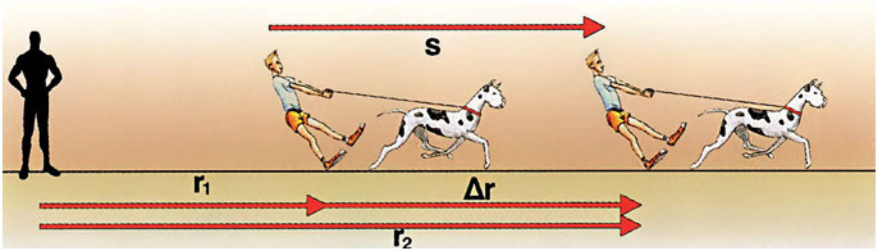
Στην εικόνα 4.13 ο παγοδρόμος διαγράφει μια καμπύλη τροχιά μεταξύ των θέσεων Α και Β, οι οποίες καθορίζονται από τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$. Η μεταβολή της θέσης του παγοδρόμου καθορίζεται από το διάνυσμα $\Delta\vec{r}$ (δηλαδή από τη διανυσματική διαφορά τους), το οποίο λέγεται **μετατόπιση.** Προφανώς το διάνυσμα της μετατόπισης θα συνδέει πάντα την αρχική και την τελική θέση του κινητού, και θα ισχύει: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Το συνολικό μήκος της τροχιάς του παγοδρόμου ονομάζεται **διάστημα s** και γενικά δεν ταυτίζεται με το μέτρο της μετατόπισης.

Στις ευθύγραμμες μόνο κινήσεις και όταν η φορά της κίνησης δεν αλλάζει, τότε το μέτρο της μετατόπισης και το διάστημα αριθμητικά ταυτίζονται, όπως βλέπουμε στο παράδειγμα της εικόνας 4.14.

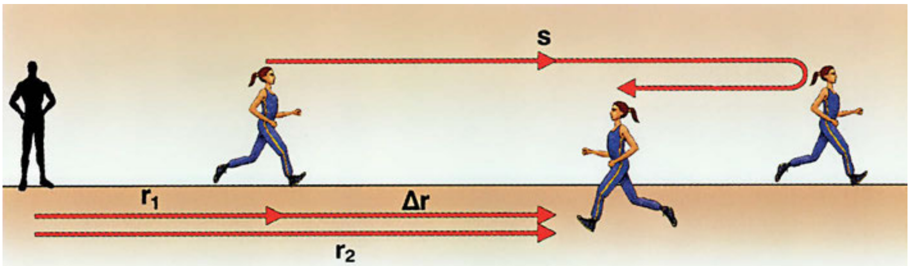


Εικόνα 4.13
Το διάστημα s και η μετατόπιση Δr είναι δύο διαφορετικά μεγέθη.



Εικόνα 4.14
Στις ευθύγραμμες κινήσεις το μέτρο της μετατόπισης και το διάστημα ταυτίζονται. Εκτός αν...

Το αγόρι της εικόνας 4.14, που έχει βγάλει το σκύλο του περίπατο, κινείται ευθύγραμμα. Το διάστημα s που διανύει είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$.



Εικόνα 4.15
... όταν η φορά της κίνησης αντιστρέφεται, το διάστημα s είναι μεγαλύτερο από τη μετατόπιση.

Για το κορίτσι όμως της εικόνας 4.15, επειδή η φορά της κίνησής του αντιστρέφεται, το διάστημα και η μετατόπιση δεν ταυτίζονται. Στις περιπτώσεις αυτές το διάστημα είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της μετατόπισης.

Σύντομα……

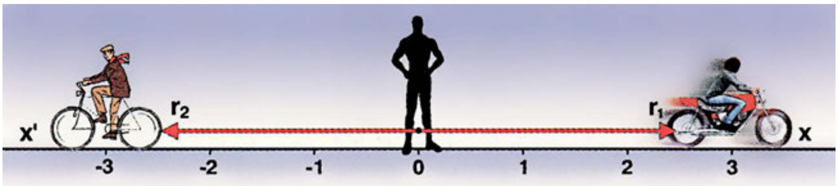
Μετατόπιση	**Διάστημα**
Διανυσματικό μέγεθος	Μονόμετρο μέγεθος
Εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση και όχι από τις ενδιάμεσες θέσεις.	Εξαρτάται και από τις ενδιάμεσες θέσεις.
Στις ευθύγραμμες κινήσεις η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης στον άξονα κίνησης μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός.	Είναι πάντα θετικός αριθμός.

Ας εφαρμόσουμε

▼ Καθορισμός της θέσης

1. Η θέση του ποδηλάτη της εικόνας 4.16 καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης του $\vec{r}_2$. Επειδή η κίνησή του γίνεται σε μια διάσταση (άξονας x΄x), το διάνυσμα θέσης θα έχει συνιστώσα μόνο κατά τον x άξονα. Η αλγεβρική τιμή του διανύσματος θέσης είναι η x = –3 και καθορίζει τη **θέση του ποδηλάτη.** Το μέτρο του διανύσματος θέσης είναι ίσο με 3 μονάδες μήκους και εκφράζει την **απόστασή** του από την αρχή των αξόνων.

Σκεπτόμενοι κατά ανάλογο τρόπο καθορίζουμε τη θέση του μοτοσικλετιστή και βρίσκουμε την απόσταση μεταξύ των δύο κινητών.



Εικόνα 4.16
Καθορισμός της θέσης ποδηλάτη

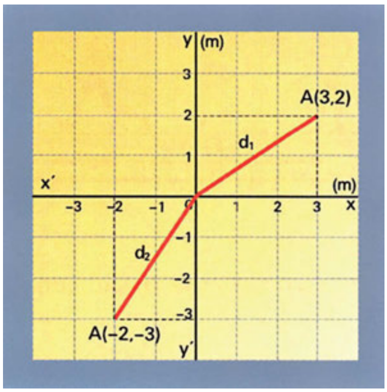
2. Στο διάγραμμα της εικόνας 4.17 τα σημεία Α και Β απέχουν ίση απόσταση από την αρχή των αξόνων, βρίσκονται όμως σε διαφορετικές θέσεις.

Πράγματι, το σημείο Α καθορίζεται από τις τιμές x=3m, y=2m και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση

$\mathbf{d_1 = \sqrt{3^2+2^2} \cong 3,6m}$, ενώ το σημείο Β βρίσκεται στη θέση x = –2m, y = –3m και επίσης απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση

$$\mathbf{d_2 = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} \cong 3,6m}\ .$$

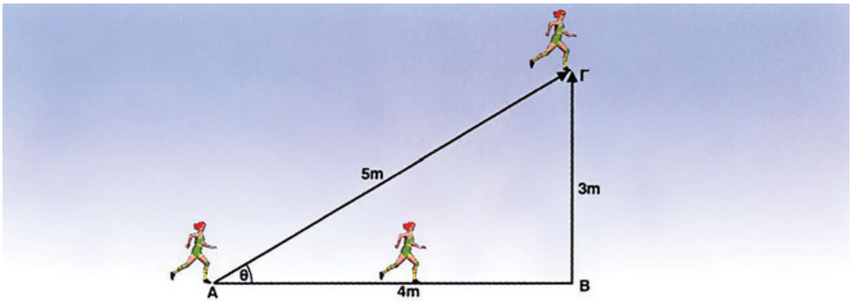
Υπάρχουν κι άλλα τέτοια σημεία;



Εικόνα 4.17
Καθορισμός θέσης σε Καρτεσιανό σύστημα

▼ Μετατόπιση - Διάστημα

1. Η αθλήτρια στην εικόνα 4.18 ακολουθεί τη διαδρομή ΑΒΓ.



Εικόνα 4.18
Διαδρομή αθλήτριας

Το διάστημα που διανύει είναι: ΑΒ + ΒΓ = 4m + 3m = 7m, ενώ η μετατόπισή της καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{ΑΓ}$, το οποίο έχει μέτρο 5m και σχηματίζει γωνία θ με την ΑΒ τέτοια, ώστε: εφθ=3/4 δηλαδή $\widehat{θ} \cong 41°$.

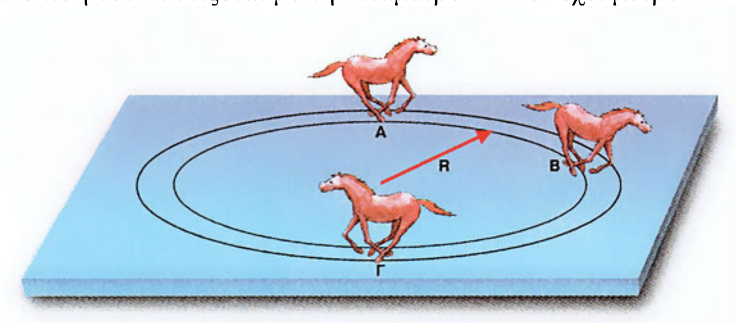
Ας προσέξουμε ότι ο διανυσματικός χαρακτήρας της μετατόπισης επιβάλλει και τον καθορισμό της διεύθυνσής της. Βρίσκουμε, δηλαδή, μια γωνία ή έναν τριγωνομετρικό αριθμό της (συνήθως την εφαπτομένη), που σχηματίζει το διάνυσμα με μια γνωστή από τα δεδομένα μας διεύθυνση.

2. Το άλογο στην εικόνα 4.19 διαγράφει την ημιπεριφέρεια ΑΒΓ ακτίνας R=2m.

Το διάστημα που διατρέχει προφανώς θα ισούται με το ήμισυ του μήκους της περιφέρειας:

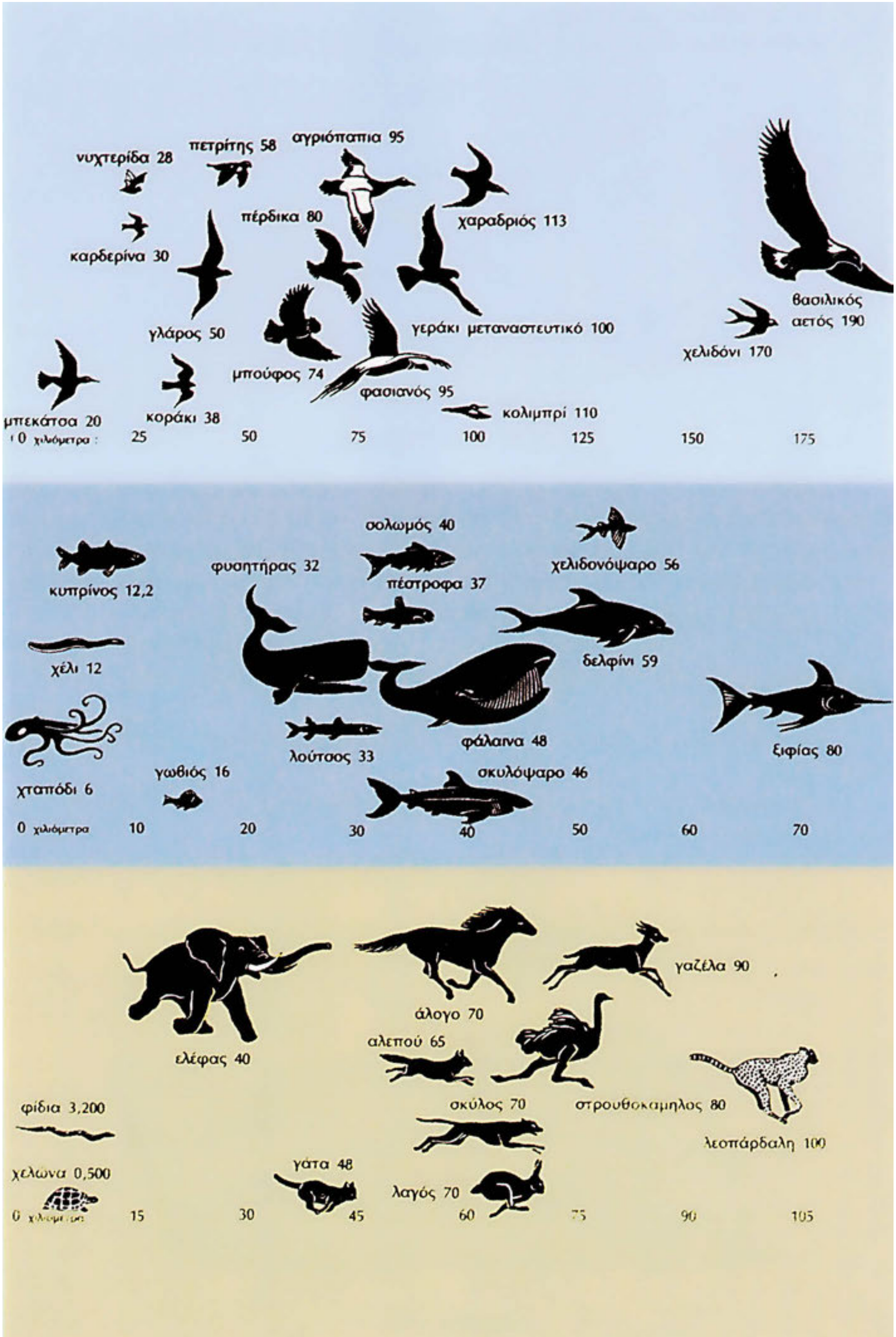
$$s= \frac{1}{2} 2πR = πR=3{,}14 .\ 2m = 6{,}28m, \text{ ενώ η}$$

μετατόπισή του ταυτίζεται με την διάμετρο ΑΓ και έχει μέτρο 2R=4m.



Εικόνα 4.19
Κυκλική κίνηση αλόγου

Αν το άλογο είχε διαγράψει όλη την περιφέρεια, μπορούμε να βρούμε το διάστημα και τη μετατόπιση;



Μέγιστες ταχύτητες στο ζωϊκό Βασίλειο (σε km/h)

4.1.5 Ταχύτητα

Ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η θέση των διάφορων κινητών σε σχέση με το χρόνο είναι διαφορετικός. Ένας άνθρωπος που βαδίζει και ένας άλλος που τρέχει (εικόνα 4.20) διέρχονται από θέση σε θέση με διαφορετικό ρυθμό. Χρειαζόμαστε, επομένως, ένα φυσικό μέγεθος που να είναι ικανό να περιγράφει με ακρίβεια την αλλαγή της θέσης των κινητών.

Εικόνα 4.20
... το “πόσο γρήγορα” αλλάζει η θέση διαφέρει από κινητό σε κινητό.

Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θέσης $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ ονομάζεται ταχύτητα και συμβολίζεται με $\vec{\upsilon}$.

Η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, διότι, εκτός από το **πόσο γρήγορα** αλλάζει θέση ένα σώμα (μέτρο ταχύτητας), πρέπει να γνωρίζουμε και προς τα πού κινείται (διεύθυνση και φορά).

Στο SI μονάδα μέτρησης της ταχύτητας είναι το 1m/s, ενώ πρακτική μονάδα της είναι το 1km/h (1 m/s = 3,6km/h).

Μόνο για ανάγνωση...

* 4.1.6 Μέση ταχύτητα

Στην καθημερινή ζωή η μέση ταχύτητα εκφράζει αριθμητικά το διάστημα s που διανύει ένα κινητό στη μονάδα του χρόνου, και είναι βαθμωτό μέγεθος. Αν, για παράδειγμα, ένα αυτοκίνητο ξεκινήσει από την Αθήνα με προορισμό τη Θεσσαλονίκη, που απέχει από αυτήν 500km, και καλύψει τη διαδρομή σε χρόνο t=5h, τότε η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι:

$$\boxed{\upsilon_M = \frac{s}{t}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_M = \frac{500\,\text{km}}{5\,\text{h}} = 100\,\text{km/h}$$

Στα πλαίσια της Φυσικής, όμως, η μέση ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως εξής:

Μέση ταχύτητα $\vec{\upsilon}_M$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα στον άξονα x΄x είναι το πηλίκο της μετατόπισής του προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt, στον οποίο έγινε η μετατόπιση. Δηλαδή:

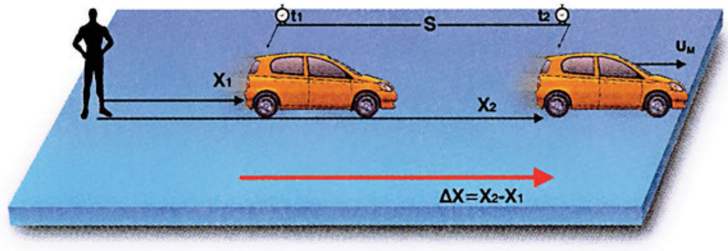
$$\boxed{\vec{\upsilon}_M = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}} \qquad (4.1)$$

Το διάνυσμα της μέσης ταχύτητας έχει:

- κατεύθυνση που ταυτίζεται με την κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης,
- σημείο εφαρμογής το κινητό,
- μέτρο: $\upsilon_M = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Επειδή, όπως μάθαμε, στις ευθύγραμμες κινήσεις το μέτρο της μετατόπισης Δx ισούται με το διάστημα s, μπορούμε για το μέτρο της μέσης ταχύτητας να γράψουμε:

$$\boxed{\upsilon_M = \frac{s}{t}} \qquad (4.2)$$



Εικόνα 4.21
Η μέση ταχύτητα ορίζεται μεταξύ δύο θέσεων x_1 και x_2.

* 4.1.7 Στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\upsilon}$

Η μέση ταχύτητα μας δίνει μόνο μια **γενική εικόνα της κίνησης** μεταξύ δύο τυχαίων σημείων της τροχιάς του κινητού. Δε μας πληροφορεί για το τι συμβαίνει σε κάθε ενδιάμεσο τροχιακό σημείο.

Στο προηγούμενο παράδειγμα (§4.1.6) του αυτοκινήτου που ταξιδεύει για τη Θεσσαλονίκη **η γνώση της μέσης ταχύτητας δεν αρκεί,** για να ξέρουμε ποια είναι η ταχύτητά του, π.χ., τη στιγμή ακριβώς που περνάει από τα Τέμπη.

Δημιουργείται, επομένως, η ανάγκη να ορίσουμε ένα άλλο φυσικό μέγεθος, που να εκφράζει την ταχύτητα του κινητού σε **κάθε σημείο της τροχιάς του.**

Το μέγεθος αυτό λέγεται **στιγμιαία ταχύτητα.**

Στιγμιαία ταχύτητα είναι η ένδειξη του «κοντέρ» ενός αυτοκινήτου ή μιας μοτοσικλέτας σε κάθε χρονική στιγμή μιας διαδρομής.

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι **διανυσματικό μέγεθος** και στις ευθύγραμμες κινήσεις έχει κάθε στιγμή την ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση της κίνησης.

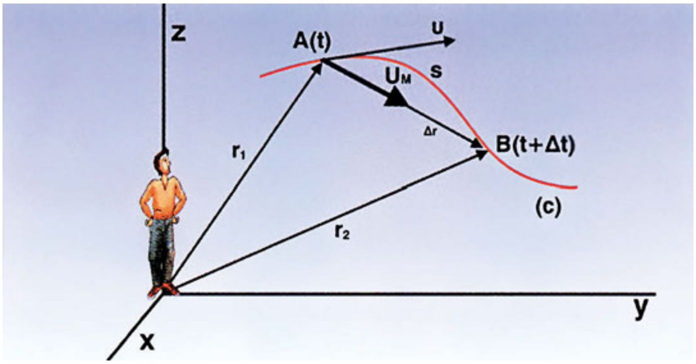
Το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας είναι ίσο με το μέτρο της μέσης ταχύτητας, όταν το Δt γίνει πολύ μικρό.

Φανταστείτε, δηλαδή, ότι οι δυο θέσεις x_1 και x_2, που παίρνουμε για να βρούμε τη μέση ταχύτητα $υ_M$, γίνονται ολοένα και πιο κοντινές μεταξύ τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το Δt και το Δx επίσης να μικραίνουν.

Η τιμή του κλάσματος $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, όταν το Δt «τείνει» προς το μηδέν ονομάζεται μέτρο της **στιγμιαίας ταχύτητας**.

(Ο αυστηρός ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας είναι έξω από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου).

Μαθηματικός προβληματισμός



Στο σχήμα της εικόνας μελετάμε την κίνηση ενός σώματος, το οποίο διαγράφει την τροχιά C μεταξύ δύο θέσεων Α και Β, οι οποίες καθορίζονται από τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ αντίστοιχα. Το κινητό σε χρόνο Δt μετατοπίζεται κατά το διάνυσμα $\Delta\vec{r}$, το οποίο, όπως γνωρίζουμε συνδέει την αρχική με την τελική θέση του.
*Ορίζουμε ως **μέση ταχύτητα** $\vec{υ}_M$ ένα νέο διάνυσμα, που έχει φορά και διεύθυνση τη φορά και τη διεύθυνση της μετατόπισης και μέτρο*

$υ_M = \frac{\Delta r}{\Delta t}$. *Η γνώση της $υ_M$, όμως, δεν αρκεί, για να ξέρουμε τι συμβαίνει σε κάθε σημείο.*

Έτσι, οι φυσικοί σκέφτηκαν το εξής «τέχνασμα»: θεώρησαν ότι το χρονικό διάστημα Δt γίνεται τόσο μικρό, ώστε το σημείο Β σχεδόν να συμπίπτει με το Α. Έτσι, η μετατόπιση Δr από τέμνουσα της τροχιάς, που ήταν στα σημεία Α και Β, μετατρέπεται σε εφαπτομένη αυτής στο σημείο Α. Ταυτόχρονα το πηλίκο Δr/Δt παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή υ, που ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα και είναι ένα διάνυσμα εφαπτομένο της τροχιάς.

Το μέτρο του για κάθε σημείο δίνεται από τη σχέση: $υ = \frac{ds}{dt}$

(ds είναι το απειροελάχιστο τμήμα της τροχιάς που διαγράφεται στον απειροελάχιστο χρόνο dt).

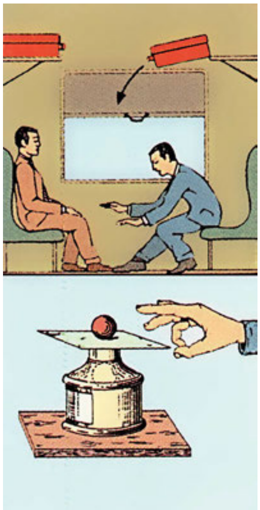
Ας προσέξουμε

● *Η μέση ταχύτητα ορίζεται μεταξύ δύο διαφορετικών θέσεων της τροχιάς του κινητού.*

● *Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται σε μία θέση της τροχιάς, η οποία όμως αποτελείται από δύο απείρως γειτονικά σημεία (... το τέχνασμα που λέγαμε).*

4.2 Αδράνεια - 1ος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση

Ένα λεωφορείο φρενάρει απότομα... Οι επιβάτες του αναγκάζονται να κρατηθούν, για να μη χάσουν την ισορροπία τους και πέσουν μπροστά. Οι ζώνες ασφαλείας των αυτοκινήτων συγκρατούν τους οδηγούς σε περίπτωση ατυχήματος...... Στο γνωστό πείραμα με το νόμισμα, το χαρτόνι και το μπουκάλι, το νόμισμα τελικά καταλήγει μέσα στο μπουκάλι.



Εικόνα 4.22 Αποτελέσματα της αδράνειας της ύλης

Φαίνεται, λοιπόν, ότι τα υλικά σώματα **"προβάλλουν μια δυσκολία"**, όταν εμείς επιχειρούμε να τους αλλάξουμε την κινητική κατάστασή τους, ενώ ταυτόχρονα **επιμένουν** να διατηρούν την κινητική κατάσταση στην οποία βρίσκονται.

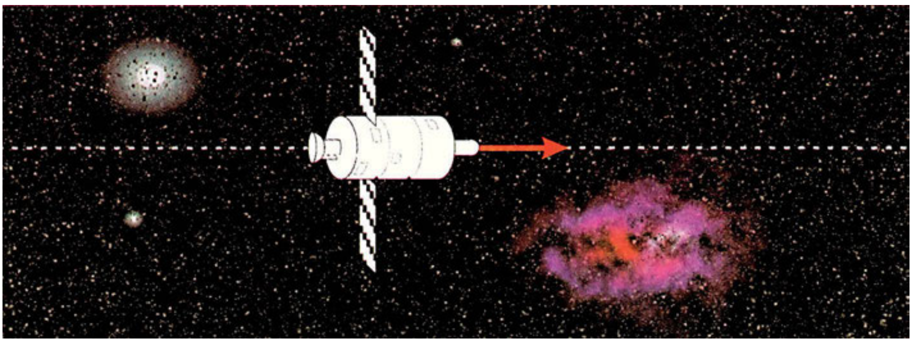
Θεμελιώδης ιδιότητα κάθε υλικού σώματος είναι η **εμμονή** του στο να διατηρεί αμετάβλητη την κινητική κατάστασή του. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αδράνεια.**

Ο βαθμός αδράνειας της ύλης εκφράζεται με τη **μάζα.** Με άλλα λόγια, η μάζα είναι το μέτρο της αδράνειας και σχετίζεται με την ποσότητα της ύλης από την οποία αποτελείται το σώμα.

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση (ή αξίωμα της αδράνειας) προήλθε από τις παραπάνω διαπιστώσεις και διατυπώνεται ως εξής:

"Όταν σε ένα σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις ή, αν ασκούνται και έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε το σώμα ή θα ηρεμεί ή θα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα".

Σύντομα: Αν $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$, τότε $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{0}$ ($\vec{\upsilon} = \vec{0}$ ή $\vec{\upsilon}$ = σταθερή)



Εικόνα 4.23 ***Κίνηση στο χάος...***
Η κίνηση ενός διαστημικού οχήματος στο μεσοαστρικό χώρο μπορεί να θεωρηθεί ως κίνηση χωρίς την επίδραση δυνάμεων. Σε μια τέτοια περίπτωση το διαστημικό όχημα θα κινείται αιωνίως ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα εξαιτίας της αδράνειάς του.

Ιστορικό σημείωμα

Το αξίωμα της αδράνειας διατυπώθηκε πρώτα από τον Αριστοτέλη (στην πραγματεία του η “Φυσική ακρόασις”, Δ8 215, α) ως εξής:

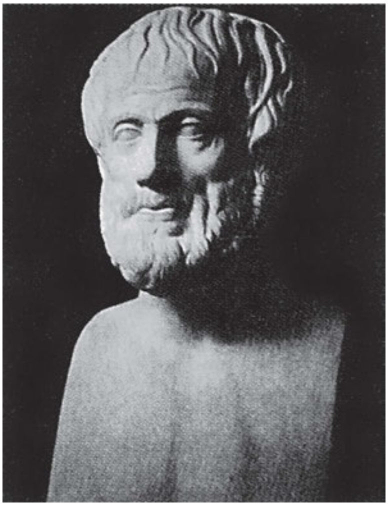
...ΕΤΙ ΟΥΔΕΙΣ ΕΧΟΙ ΕΙΠΕΙΝ ΔΙΑΤΙ ΚΙΝΗΘΕΝ ΣΤΗΣΕΤΑΙ ΠΟΥ ΑΝ ΤΙ ΓΑΡ ΜΑΛΛΟΝ ΕΝΤΑΥΘΑ Η ΕΝΤΑΥΘΑ ΩΣΤΕ Η ΗΡΕΜΗΣΕΙ Η ΕΙΣ ΑΠΕΙΡΟΝ ΑΝΑΓΚΗ ΦΕΡΕΣΘΑΙ...

και σε ελεύθερη απόδοση: “.... επιπλέον κανένας δε θα μπορούσε να πει γιατί ένα κινητό θα σταματήσει κάπου ή γιατί να σταματήσει εδώ κι όχι εκεί, ώστε ή θα ηρεμήσει ή αναγκαστικά θα κινείται επ’ άπειρον.... ”

Επίσης, στην πραγματεία του “Περί ουρανού” διαβάζουμε...

...ΕΙ ΔΕ ΜΗ ΕΣΤΙ ΜΗΤΕ ΦΥΣΕΙ ΜΗΤΕ ΒΙΑ ΟΛΩΣ ΟΥΔΕΝ ΚΙΝΗΘΗΣΕΤΑΙ...

δηλαδή “... αν δεν υπάρχει αιτία για την κίνηση ενός σώματος, είτε εκ φύσεως (όπως, π.χ., λόγω της βαρύτητας) είτε εξαιτίας της επίδρασης δύναμης, τότε αυτό δε θα είναι δυνατόν να κινηθεί.... ”



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ
Μεταξύ των πολλών άλλων έθεσε και τα επιστημονικά θεμέλια για την κίνηση των σωμάτων. Στο έργο του έχει στηριχθεί ολόκληρος ο δυτικός πολιτισμός.

4.3 Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Ο πίνακας μετρήσεων 4.1 αφορά την κίνηση του αυτοκινήτου της εικόνας 4.24.

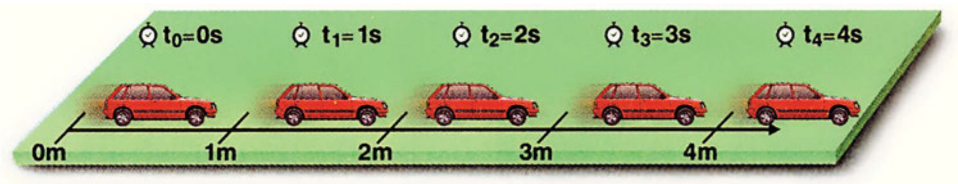
Ο υπολογισμός της ταχύτητάς του σε κάθε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1s$ δίνει την ίδια σταθερή τιμή $\upsilon = 1m/s$.

Η κίνηση, λοιπόν, στην οποία το κινητό διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά και η ταχύτητά του παραμένει χρονικά σταθερή ονομάζεται **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.**

Αναγκαία προϋπόθεση για να εκτελεί ένα σώμα ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα, είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να ισούται με μηδέν.

Πίνακας 4.1 Ομαλή κίνηση

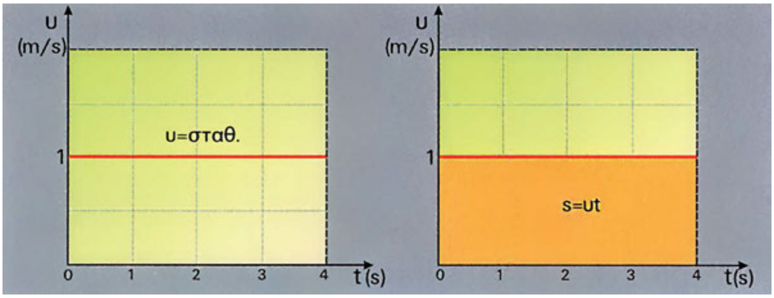
α/α	t (s)	s (m)	$\upsilon = \Delta s/\Delta t$ (m/s)
1	0	0	
2	1	1	1
3	2	2	1
4	3	3	1
5	4	4	1
6	5	5	1
7	6	6	1
8	7	7	1
9	8	8	1
10	9	9	1



Εικόνα 4.24
Το αυτοκίνητο σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα.

4.3.1 Μελέτη της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης

Η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι η απλούστερη μορφή κίνησης που μπορεί να εκτελέσει κάποιο κινητό, επειδή το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά της ταχύτητας παραμένουν χρονικά αμετάβλητα. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $\upsilon = f(t)$ είναι σταθερή και η γραφική παράστασή της θα είναι μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα t (εικόνα 4.25).

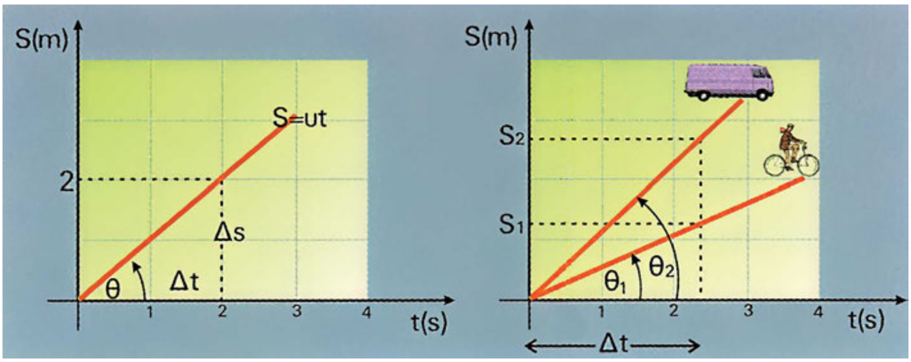


Εικόνα 4.25
Διαγράμματα υ=f(t) στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Το εμβαδόν του διαγράμματος για κάθε χρονικό διάστημα Δt θα ισούται με το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στο χρόνο αυτό, και θα ισχύει ότι

$$\boxed{s = \upsilon t}$$

Το διάστημα που διατρέχει το κινητό είναι ανάλογο του χρόνου κίνησης, και η συνάρτηση s=f(t) είναι μια ευθεία (εικόνα 4.26) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (είναι δηλαδή της γνωστής μορφής y=αχ).



Εικόνα 4.26
Διαγράμματα s=f(t) στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Η κλίση λ της ευθείας εκφράζει αριθμητικά την ταχύτητα υ του κινητού.

Πράγματι, $\lambda = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \upsilon$.

Όσο αυξάνεται η ταχύτητα, τόσο θα αυξάνεται και η κλίση της ευθείας.

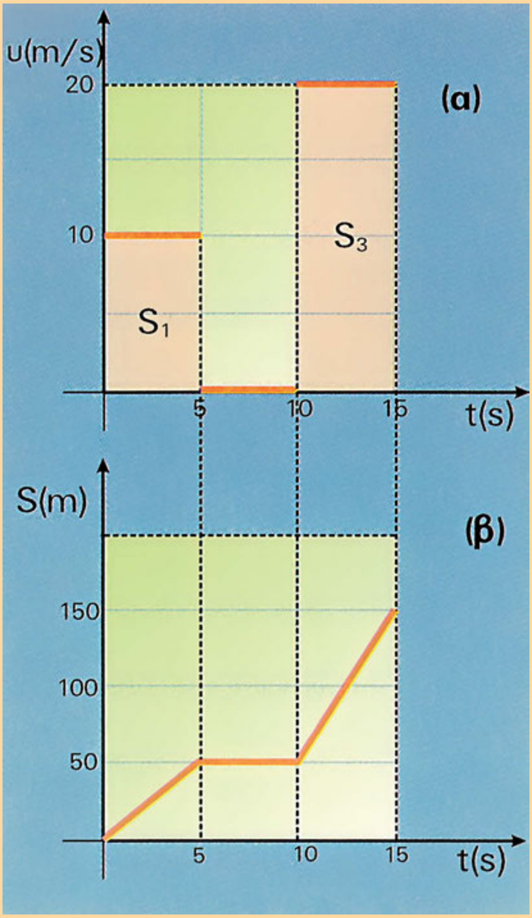
Στην εικόνα 4.26 η ταχύτητα του ποδηλάτου είναι $\lambda_1 = \dfrac{\Delta s_1}{\Delta t} = \dfrac{s_1}{\Delta t}$,

ενώ του αυτοκίνητου είναι $\lambda_2 = \dfrac{\Delta s_2}{\Delta t} = \dfrac{s_2}{\Delta t}$ και προφανώς $\upsilon_1 < \upsilon_2$.

- **Από το διάγραμμα (υ-t) με το εμβαδόν βρίσκουμε το διάστημα.**
- **Από το διάγραμμα (s-t) με την κλίση της ευθείας βρίσκουμε την ταχύτητα.**

Παραδείγματα

1. Ένα υποθετικό κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση. Κατά τα 5 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_1$=10m/s. Στη συνέχεια επί 5s είναι ακίνητο και στα επόμενα 5s κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_2$=20m/s ίδιας φοράς με τη $υ_1$. Θέλουμε να παραστήσουμε γραφικά α) την ταχύτητα του κινητού με το χρόνο, και β) το διάστημα που διανύει το κινητό με το χρόνο.



Λύση

α) Για το χρονικό διάστημα 0-5s η ταχύτητα του κινητού είναι σταθερή και ίση με 10m/s. Το διάγραμμα θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τον άξονα t.
Στα επόμενα 5s, χρονικό διάστημα 5-10s, η ταχύτητα είναι μηδέν, οπότε το διάγραμμα της ταχύτητας θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα t. Ομοίως από 10-15s η ταχύτητα παριστάνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα t, με τιμή 20m/s.

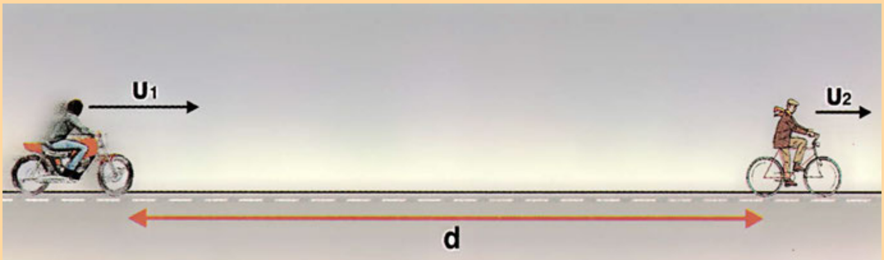
β) Τα διαστήματα που διανύει τα κινητό τα βρίσκουμε με εμβαδομέτρηση του διαγράμματος της ταχύτητας. Έχουμε:

από 0-5s: s_1=5s·10m/s=50m
(το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε και με τον τύπο του διαστήματος s=υt),

από 5-10s: s_2=5s·0m/s=0m. Προσθέτουμε στα 50m άλλα 0m, για να βρούμε το διάστημα έως τη στιγμή t=10s,

από 10-15s: s_3=5s ·20m/s =100m, οπότε για t=15s το διάστημα θα είναι 150m.

2. Ποδηλάτης κινούμενος ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $υ_2$=10m/s προηγείται ενός μοτοσικλετιστή κατά 100m. Αν ο μοτοσικλετιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_1$=15m/s, σε πόσο χρόνο θα προλάβει τον ποδηλάτη; Να παρασταθούν γραφικά τα διαστήματα των κινητών με το χρόνο στο ίδιο σύστημα αξόνων και να σχολιαστούν.



Λύση

Υποθέτουμε ότι η συνάντηση των δύο κινητών θα γίνει στο σημείο Σ ύστερα από χρόνο t. Ο μοτοσικλετιστής φτάνει στο Σ, αφού διανύσει διάστημα $s_1=υ_1t$, ενώ ο ποδηλάτης, αφού διανύσει διάστημα $s_2=υ_2t$.

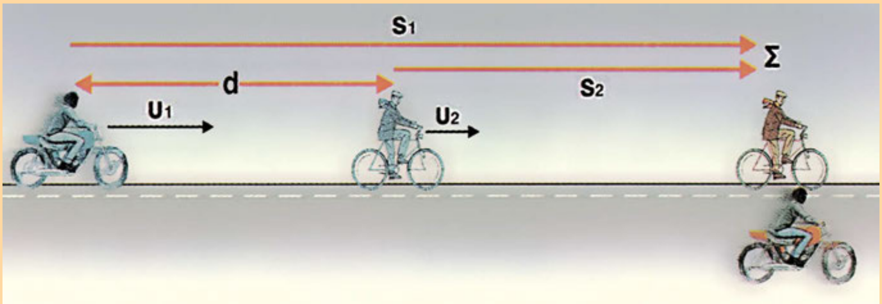
Παρατηρούμε όμως από το σχήμα ότι η διαφορά των διαστημάτων που διανύουν τα κινητά μέχρι να φτάσουν στο σημείο συνάντησης είναι ίση με d. Άρα:

$s_1 - s_2 = d$ ή $υ_1t - υ_2t = d$ ή $t(υ_1 - υ_2) = d$ ή $t = \dfrac{d}{υ_1 - υ_2}$

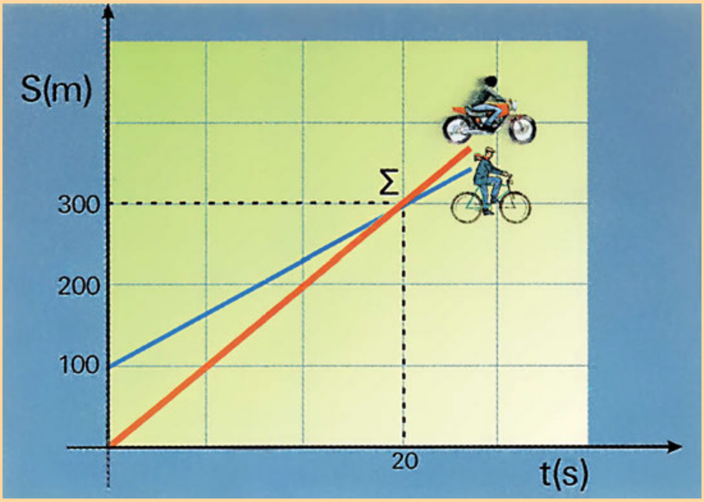
(μετά τις αντικαταστάσεις και πράξεις): t =20s.

Το διάστημα που διανύει ο καθένας τους είναι:

s_1=15m/s20s=300m και s_2=10m/s20s=200m.



Αν πάρουμε ως αρχή μέτρησης των διαστημάτων το σημείο που βρίσκεται ο μοτοσικλετιστής τη χρονική στιγμή t=0s, τότε ο ποδηλάτης θα βρίσκεται στη θέση s_0=d=100m. Το σημείο συνάντησης Σ θα είναι εκείνο στο οποίο οι ευθείες των γραφικών παραστάσεων των διαστημάτων των δύο κινητών τέμνονται. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι στο σημείο Σ τα δύο κινητά θα απέχουν την ίδια απόσταση από την αρχή μέτρησης των διαστημάτων, τα διαστήματα όμως που θα έχουν διανύσει θα είναι διαφορετικά.



4.4 Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση - Επιτάχυνση

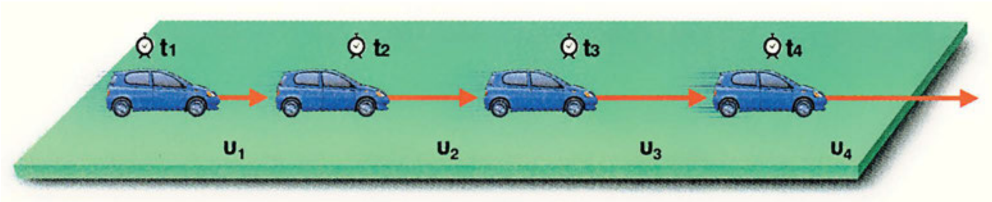
Ο πίνακας μετρήσεων 4.2 αφορά την κίνηση του οχήματος στην εικόνα που ακολουθεί. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του οχήματος διαρκώς αυξάνεται αλλά με τέτοιο τρόπο, ώστε σε ίσα χρονικά διαστήματα Δt να παρουσιάζει την ίδια αύξηση Δυ. Δηλαδή, σε κάθε 2s έχουμε αύξηση στην ταχύτητα κατά 10m/s. Η κίνηση αυτή του οχήματος ονομάζεται ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη.

Πίνακας 4.2 Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

α/α	**t (s)**	**υ (m/s)**	**$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ (m/s)**	**$\Delta t = t_2 - t_1$ (s)**	**Δυ/Δt (m/s^2)**
1	0	0			
2	2	10	10	2	**5**
3	4	20	10	2	**5**
4	6	30	10	2	**5**
5	8	40	10	2	**5**
6	10	50	10	2	**5**
7	12	60	10	2	**5**
8	14	70	10	2	**5**
9	16	80	10	2	**5**
10	18	90	10	2	**5**

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ονομάζεται η κίνηση στην οποία:

- η τροχιά του κινητού είναι μια ευθεία γραμμή
- η ταχύτητα του κινητού μεταβάλλεται κατά το ίδιο ποσό ανά μονάδα χρόνου.



Εικόνα 4.27
Η ταχύτητα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 10 m/s κάθε 2s.

4.4.1 Η έννοια της επιτάχυνσης

Είδαμε από τον πίνακα μετρήσεων ότι η ταχύτητα του κινητού κάθε 2s αυξάνεται κατά 10m/s. Η ταχύτητα κάποιου άλλου κινητού, όμως, μπορεί να μεταβάλλεται με διαφορετικό τρόπο, π.χ. να μειώνεται κατά 10m/s κάθε 2s.

Για παράδειγμα, ο οδηγός ενός οχήματος "πατάει γκάζι", προκειμένου να **αυξήσει** την ταχύτητά του, ενώ, όταν αντιληφθεί κάποιο εμπόδιο, "πατάει φρένο", προκειμένου να την **ελαττώσει.** Και στις δύο περιπτώσεις η ταχύτητα του οχήματος μεταβάλλεται αλλά με διαφορετικό τρόπο. Δημιουργείται, επομένως, η ανάγκη ενός νέου φυσικού μεγέθους, το οποίο να εκφράζει τον τρόπο μεταβολής της ταχύτητας. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται **επιτάχυνση.**

Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ ενός κινητού ονομάζουμε το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητάς του $\Delta\vec{\upsilon}$ προς το χρόνο Δt που χρειάστηκε για τη μεταβολή αυτή.

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1}} \qquad (4.3)$$

Η επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος με φορά και διεύθυνση τη φορά και τη διεύθυνση του $\Delta\vec{\upsilon}$ και με σημείο εφαρμογής το κινητό.

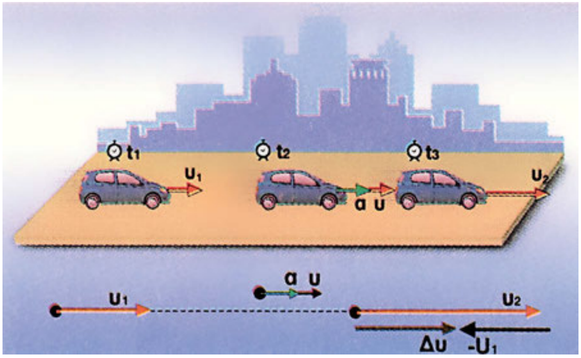
Μονάδα επιτάχυνσης στο SI είναι το $1m/s^2$. Επιτάχυνση π.χ. $\alpha = 5m/s^2$ σημαίνει ότι σε κάθε 1s το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται κατά 5m/s.

Στην τελευταία στήλη του πίνακα μετρήσεων έχει υπολογιστεί η επιτάχυνση του οχήματος. Παρατηρούμε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή έχει σταθερή τιμή $\alpha = 5m/s^2$. Επομένως, **στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση η επιτάχυνση είναι σταθερή.**

Κίνηση ομαλά μεταβαλλόμενη *σημαίνει:* υπάρχει σταθερή επιτάχυνση. Σταθερή επιτάχυνση *σημαίνει:* η ταχύτητα αλλάζει με σταθερό ρυθμό.

1^{η} παρατήρηση:

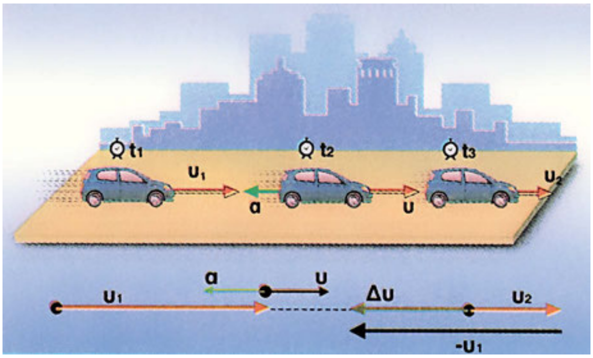
Όταν η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται, τότε η κίνηση ονομάζεται **επιταχυνόμενη,** η επιτάχυνση είναι θετικός αριθμός και το διάνυσμά της είναι ομόρροπο με την ταχύτητα.



Εικόνα 4.28
Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν την ίδια φορά.

2^{η} παρατήρηση:

Αντίθετα, όταν η ταχύτητα του κινητού ελαττώνεται, τότε η κίνηση ονομάζεται **επιβραδυνόμενη,** η επιτάχυνση είναι αρνητικός αριθμός (λέγεται και **επιβράδυνση**) και το διάνυσμά της είναι αντίρροπο της ταχύτητας.



Εικόνα 4.29
Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν αντίθετη φορά.

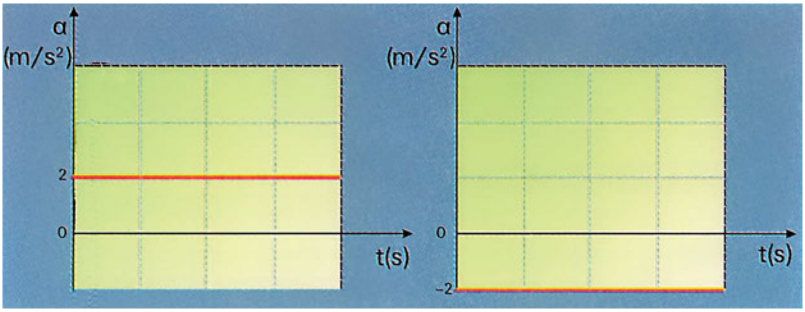
Στις μη ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις, ορίζονται τα μεγέθη μέση και στιγμιαία επιτάχυνση σε αναλογία με τα μεγέθη μέση και στιγμιαία ταχύτητα.

4.4.2 Εξισώσεις κίνησης - Διαγράμματα

1. Επιτάχυνση

Το γεγονός ότι η επιτάχυνση παραμένει χρονικά σταθερή σημαίνει ότι το γράφημα της συνάρτησης a = f(t) θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τον άξονα του χρόνου.

Για παράδειγμα, μια επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\alpha = 2\text{m/s}^2$ και μια επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\alpha = -2\text{m/s}^2$ απεικονίζονται γραφικά όπως στο παρακάτω σχήμα της εικόνας 4.30.



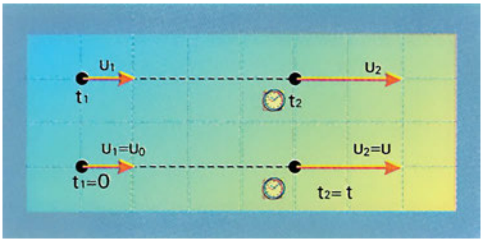
Εικόνα 4.30
Διαγράμματα α = f(t) σε ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις

2. Ταχύτητα

Εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε σε μια γενική εξίσωση της ταχύτητας, για τις ευθύγραμμες ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις, αν τροποποιήσουμε κατάλληλα την εξίσωση 4.3 του ορισμού της επιτάχυνσης:

Πράγματι, από την εξίσωση

$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1},$$



Εικόνα 4.31

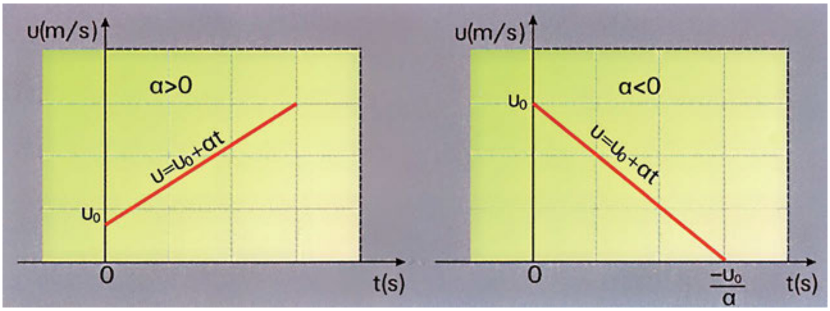
θεωρούμε ότι η χρονική στιγμή t_1, συμπίπτει με την αρχή μέτρησης του χρόνου, δηλαδή $t_1=0$. Επίσης, θεωρούμε ότι για $t_1 = 0$ η ταχύτητα του κινητού υ_1 ισούται με υ_0. Κατά την τυχαία χρονική στιγμή $t_2 = t$ το κινητό έχει μια τυχαία τιμή ταχύτητας $\upsilon_2 = \upsilon$ (εικόνα 4.31).

Με τους συμβολισμούς αυτούς η εξίσωση (4.3) γράφεται:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t} \quad \text{(νόμος της ταχύτητας)} \qquad (4.4)$$

Η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή που αρχίζουμε να μελετάμε την κίνησή του ονομάζεται **αρχική ταχύτητα υ_0.**

Προφανώς, η συνάρτηση της ταχύτητας υ = f(t) είναι της γνωστής μορφής y = αx + β και η γραφική παράστασή της για επιταχυνόμενη (α>0) και επιβραδυνόμενη κίνηση (α<0) φαίνεται στα διαγράμματα της εικόνας 4.32 που ακολουθούν:



Εικόνα 4.32
Διαγράμματα υ = f(t) στις ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις

Ας προσέξουμε

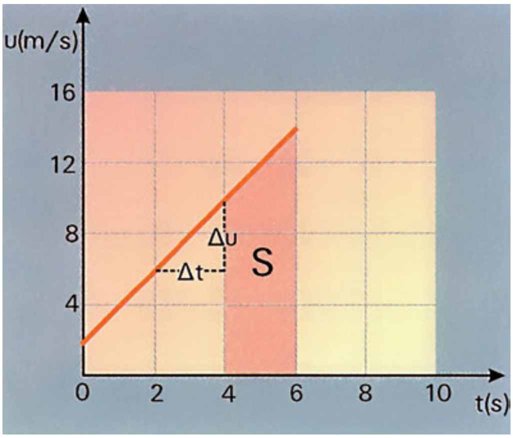
1) Η κλίση της ευθείας $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ είναι ίση με την επιτάχυνση α. Αυτό σημαίνει ότι από το διάγραμμα υ-t μπορούμε εύκολα να βρούμε την επιτάχυνση της κίνησης υπολογίζοντας το πηλίκο Δυ/Δt μεταξύ δύο οποιωνδήποτε χρονικών στιγμών t_1 και t_2. Το αποτέλεσμα θα είναι πάντα το ίδιο, επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή.

2) Το εμβαδόν του επίπεδου τμήματος, που ορίζεται από την ευθεία $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ και τον άξονα του χρόνου t, εκφράζει το διάστημα που έχει διατρέξει το κινητό.

Ας εφαρμόσουμε

Στο διάγραμμα υ-t της εικόνας 4.33 ο υπολογισμός της επιτάχυνσης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε χρονικών στιγμών δίνει το ίδιο αποτέλεσμα $\alpha = 2m/s^2$, π.χ. μεταξύ των στιγμών t_1=2s και t_2=4s:

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{4m/s}{2s} = 2m/s^2$$



Εικόνα 4.33

Το διάστημα s που διανύεται μεταξύ δύο τυχαίων χρονικών στιγμών, π.χ. $t_1 = 4s$ και $t_2 = 6s$, θα είναι ίσο με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος, το οποίο στην περίπτωση αυτή είναι ένα τραπέζιο. Από τη γεωμετρία ξέρουμε ότι:

$E_{τραπεζίου}$ = (άθροισμα παράλληλων πλευρών x ύψος): 2

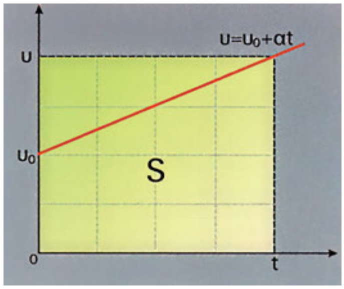
δηλαδή:

$$s = \frac{(υ_1 + υ_2)Δt}{2} = \frac{(10\,m/s + 14\,m/s)2s}{2} = 24\,m$$

Από το διάγραμμα (υ –t)
- **Με την κλίση της ευθείας βρίσκουμε την επιτάχυνση.**
- **Με το εμβαδόν βρίσκουμε το διάστημα.**

3. Διάστημα

Η μέθοδος του εμβαδού μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να βρούμε το τυχαίο διάστημα s που διατρέχει το κινητό στην ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση από τη χρονική στιγμή t=0, που αρχίζει να κινείται με αρχική ταχύτητα $υ_0$, μέχρι μια τυχαία χρονική στιγμή t, που έχει αποκτήσει ταχύτητα $υ= υ_0+αt$. Όπως είδαμε και στο παράδειγμα, το διάστημα s είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τραπεζίου.



Εικόνα 4.34
Διάγραμμα για την απόδειξη της σχέσης s=f(t) στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Άρα:

$$α = \frac{(υ + υ_0)t}{2} = \frac{(υ_0 + αt + υ_0)t}{2} = \frac{2υ_0 t + αt^2}{2}$$ ή τελικά

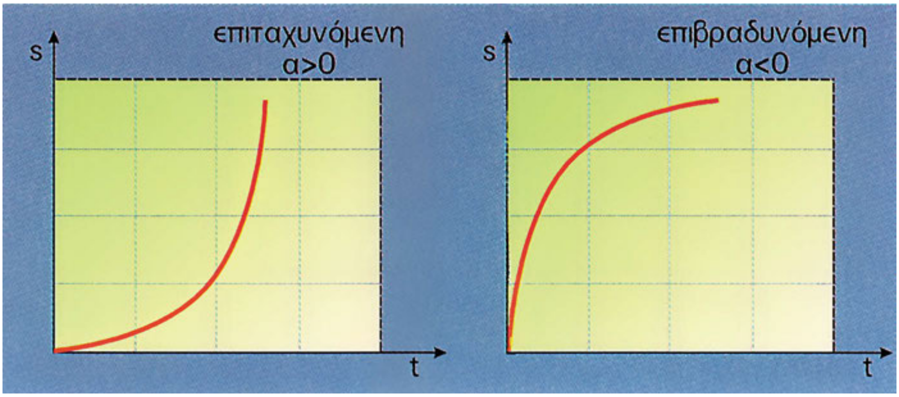
$$\boxed{\mathbf{S = υ_0 t + \frac{1}{2}αt^2}}$$ (νόμος του διαστήματος) (4.5)

Αν η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν ($υ_0$=0), ο νόμος του διαστήματος γίνεται:

$$\boxed{\mathbf{S = \frac{1}{2}αt^2}}$$

Μόνο για ανάγνωση...

Η συνάρτηση του διαστήματος s=f(t) είναι της μορφής $y=αx^2+βx$ και, όπως έχουμε μάθει στα Μαθηματικά, η γραφική παράστασή της είναι μια καμπύλη γραμμή, που ονομάζεται παραβολή και περνάει από την αρχή των αξόνων. Η καμπύλη αυτή ανάλογα με το πρόσημο του α «στρέφει τα κοίλα της» πάνω (για θετικό α) ή κάτω (για αρνητικό α), δηλαδή εμφανίζει μια συγκεκριμένη καμπυλότητα, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.35.



Εικόνα 4.35
Διαγράμματα s = f(t) στις ευθύγραμμες ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις

♦ Ειδικές μορφές των εξισώσεων κίνησης

1. Ο τύπος... χωρίς χρόνο

Σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα υ σε σχέση με το διάστημα s, που έχει διατρέξει το κινητό.

Από τις εξισώσεις της ταχύτητας και του διαστήματος με απαλοιφή του χρόνου βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση μεταξύ ταχύτητας και διαστήματος.

(Θυμίζουμε ότι “απαλοιφή του χρόνου” σημαίνει: λύνουμε την εξίσωση της ταχύτητας ως προς t και αυτό που θα βρούμε το αντικαθιστούμε στην εξίσωση του διαστήματος, οπότε κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση).

Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon &= \upsilon_0 + \alpha t \\ s &= \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\textbf{πράξεις}} \boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\alpha s}} \qquad (4.6)$$

Στην περίπτωση που η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν ($\upsilon_0 = 0$), η σχέση (4.6) γίνεται

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2\alpha s}}$$

2. Ολικό διάστημα και ολικός χρόνος

Όταν ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, η ταχύτητά του μειώνεται συνεχώς. Υπάρχει, λοιπόν, η δυνατότητα σε κάποια χρονική στιγμή να μηδενιστεί η ταχύτητα. Το διάστημα που διανύει το κινητό από τη χρονική στιγμή που αρχίζει να επιβραδύνεται μέχρι να ακινητοποιηθεί θα το ονομάζουμε **ολικό διάστημα $s_{Ολ}$**. Ο αντίστοιχος χρόνος που περνάει μέχρι να ακινητοποιηθεί θα λέγεται **ολικός χρόνος $t_{Ολ}$**.

Το ολικό διάστημα είναι μια ιδιαίτερα σημαντική παράμετρος στις επιβραδυνόμενες κινήσεις και σχετίζεται άμεσα με θέματα κυκλοφορίας των αυτοκινήτων, με τροχαία ατυχήματα κτλ.

Ο υπολογισμός του $s_{Ολ}$ γίνεται ταυτόχρονα με τον υπολογισμό του ολικού χρόνου $t_{Ολ}$ ως εξής:

Επειδή για $t = t_{Ολ}$ η ταχύτητα του κινητού μηδενίζεται, από την εξίσωση (4.4) της ταχύτητας θα έχουμε:

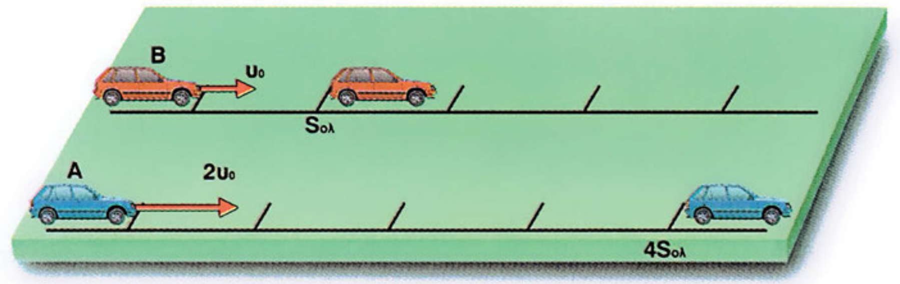
$$υ=υ_0+αt \text{ ή } 0 = υ_0+α\, t_{Ολ} \text{ ή } t_{Ολ} = -\frac{υ_0}{α} \quad (α<0) \text{ ή απλούστερα}$$

$$t_{Ολ} = \frac{υ_0}{|α|} \tag{4.7}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση του διαστήματος την τιμή του χρόνου με $t_{Ολ}$ και κάνουμε τις πράξεις, βρίσκουμε το ολικό διάστημα $S_{Ολ}$.

$$\left.\begin{array}{l} t_{Ολ} = \dfrac{υ_0}{|α|} \\ s = υ_0 t + \dfrac{1}{2}αt^2 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{πράξεις}} S_{Ολ} = \frac{υ_0^2}{2|α|} \tag{4.8}$$

Πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα ότι το ολικό διάστημα εξαρτάται από το τετράγωνο της αρχικής ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι αν η αρχική ταχύτητα γίνει 2πλάσια, 3πλάσια κτλ., το ολικό διάστημα θα γίνεται 4πλάσιο, 9πλάσιο κτλ.



Εικόνα 4.36
Το ολικό διάστημα στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση 4πλασιάζεται, αν η αρχική ταχύτητα 2πλασιαστεί.

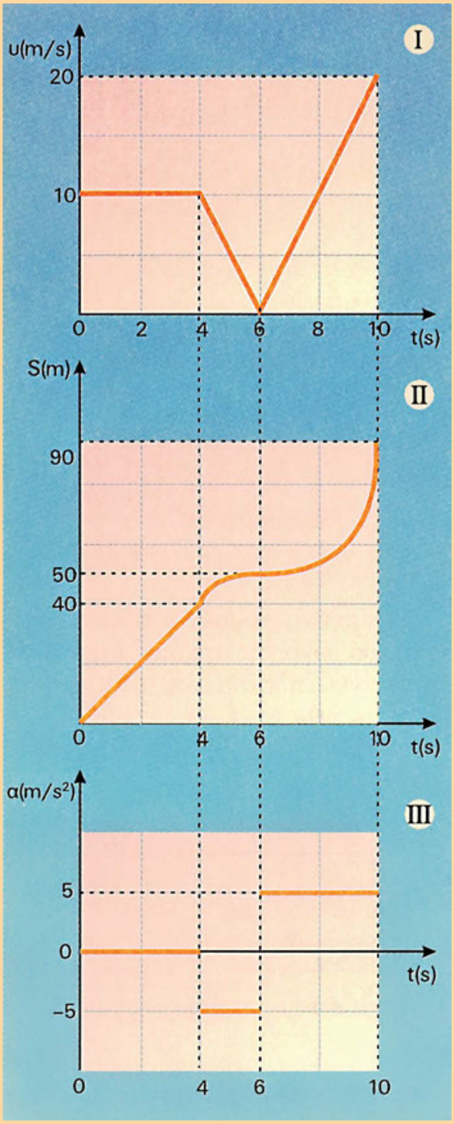
Στην εικόνα 4.36 το αυτοκίνητο Α έχει διπλάσια αρχική ταχύτητα από το Β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαστικά τους και το οδόστρωμα βρίσκονται στην ίδια κατάσταση, τότε το αυτοκίνητο Α θα χρειαστεί να διανύσει τετραπλάσιο διάστημα από το Β μέχρι να ακινητοποιηθεί. Είναι εύκολο να αποδείξουμε (πώς;) ότι αν $\alpha_1=\alpha_2$,

τότε: $\dfrac{s_{Ολ,1}}{s_{Ολ,2}} = \dfrac{\upsilon_{0,1}^2}{\upsilon_{0,2}^2}$.

Παραδείγματα

1. Δίνεται το διάγραμμα (Ι) μεταβολής της ταχύτητας με το χρόνο ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα.

Ζητούνται τα διαγράμματα διαστήματος-χρόνου (ΙΙ) και επιτάχυνσης-χρόνου (ΙΙΙ)



Λύση

Εξετάζουμε την κίνηση χωριστά σε κάθε χρονικό διάστημα στο οποίο το είδος αυτής αλλάζει. Αφού βρούμε τα διαστήματα και τις επιταχύνσεις με τη βοήθεια των εξισώσεων κίνησης ή με τη γραφική μέθοδο, τα απεικονίζουμε στους αντίστοιχους άξονες.

● <u>Χρονικό διάστημα 0-4s</u>

Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$s_1 = E_{παραλληλογράμμου}$ (ή $s_1 = \upsilon t$)

$s_1 = 10m/s \cdot 4s$ ή $s_1 = 40m$

$\alpha_1 = 0m/s^2$, διότι η κίνηση είναι ομαλή.

● <u>Χρονικό διάστημα 4-6s</u>

Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

$s_2 = E_{τριγώνου}$ (ή $s_2 = \upsilon_0\, t + \dfrac{1}{2}\alpha_2 t^2$)

$s_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 10m/s \cdot 2s$ ή $s_2 = 10m$

$\alpha_2 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{(0-10)m/s}{(6-4)s}$ ή $\alpha_2 = -5m/s^2$

● **Χρονικό διάστημα 6-10s**

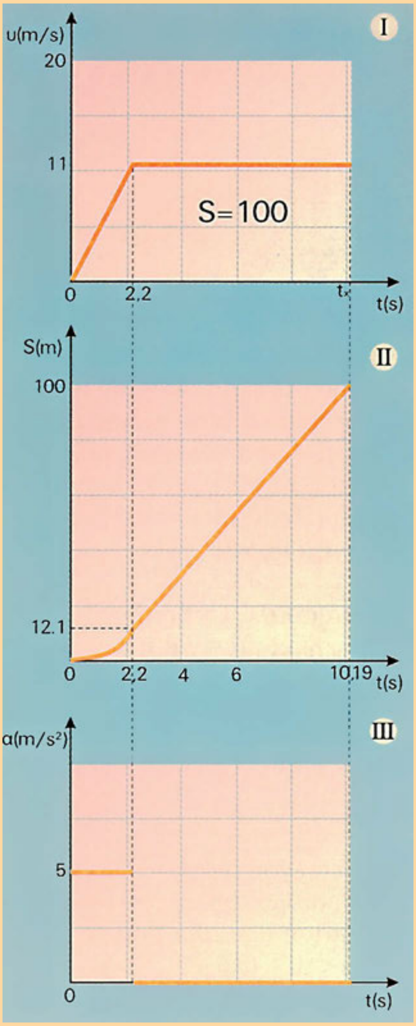
Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$s_3 = E_{τριγώνου}$ (ή $s_3 = \frac{1}{2}\alpha_3 t^2$)

$s_3 = \frac{1}{2} \cdot 20m/s \cdot 4s$ ή $s_2 = 40m$

$\alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{(20-0)m/s}{(10-6)s}$ ή $\alpha_3 = 5m/s^2$

2. Δρομέας των 100m αναπτύσσει μέγιστη ταχύτητα 11m/s κινούμενος με σταθερή επιτάχυνση 5m/s^2. Θέλουμε να βρούμε το χρόνο που έκανε ο δρομέας, καθώς και τα διαγράμματα (υ-t), (s-t), (α-t) της κίνησής του.



Λύση

Η κίνηση του αθλητή αποτελείται από δύο επιμέρους κινήσεις:

● από μια ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $\alpha = 5m/s^2$ μέχρι να επιτύχει τη μέγιστη ταχύτητά του $\upsilon = 11m/s$. Η κίνηση αυτή διαρκεί από τη στιγμή της εκκίνησής του μέχρι μια χρονική στιγμή t, την οποία μπορούμε να βρούμε από την εξίσωση της ταχύτητας:

$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ ή (επειδή $\upsilon_0 = 0$)

$\upsilon = \alpha t$ ή $t = \frac{\upsilon}{\alpha} = \frac{11m/s}{5m/s^2} = 2{,}2s$,

και

● από μια ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\upsilon = 11m/s$ μέχρι τον τερματισμό του κατά τη ζητούμενη χρονική στιγμή έστω t_x.

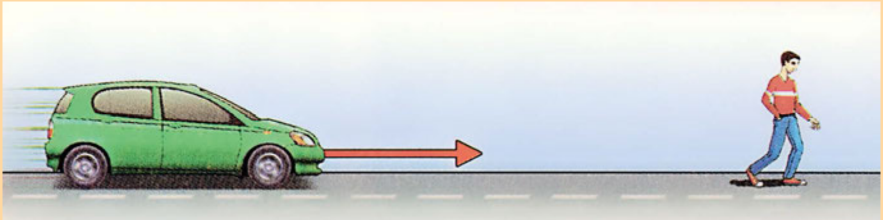
Από το διάγραμμα (υ-t) μπορούμε εύκολα να βρούμε το χρόνο t_x, αν θυμηθούμε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος εκφράζει το διάστημα που διανύει ο δρομέας, το οποίο είναι βέβαια 100 m. Επομένως:

$E_{\text{τραπεζίου}} = s$ ή $s = \dfrac{\left[t_x + \left(t_x - 2,2\right)11\right]}{2}$ =100 m.

Από την εξίσωση αυτή εύκολα υπολογίζεται ότι $t_x \cong 10,19$s
(προφανώς: μεγάλη βάση τραπεζίου = t_x, μικρή βάση = t_x-2,2 και ύψος τραπεζίου =11m/s).

Στη συνέχεια εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα (s-t) και (α-t) σύμφωνα με τα όσα ισχύουν για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και για την ομαλή.

3. Οδηγός αυτοκινήτου αντιλαμβάνεται έναν άνθρωπο σε απόσταση 20m, ο οποίος επιχειρεί να διασχίσει το δρόμο. Αν ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού είναι t_a= 0,1s και η (μέγιστη)επιβράδυνση που μπορεί να αναπτύξουν τα φρένα του αυτοκινήτου είναι α =15m/s^2, με πόση (μέγιστη) ταχύτητα πρέπει να κινείται το αυτοκίνητο, ώστε να μη χτυπήσει τον πεζό;



Λύση

Η κίνηση του αυτοκίνητου αποτελείται από δύο επιμέρους κινήσεις:

- από μια ομαλή κίνηση, που διαρκεί t_a= 0,1s, δηλαδή από τη στιγμή που ο οδηγός του αυτοκινήτου αντιλαμβάνεται τον άνθρωπο μέχρι να αντιδράσει και να πατήσει φρένο.

Στη διάρκεια αυτού του χρόνου το αυτοκίνητο διανύει διάστημα
$s_1 = \upsilon_0 t_a$ (1), και

- από μια ομαλά επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση 15m/s^2 και αρχική ταχύτητα υ_0, η οποία είναι η ταχύτητα που θέλουμε να βρούμε. Κατά την επιβραδυνόμενη κίνηση το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει να κινείται διανύει διάστημα (.... θυμηθείτε το ολικό διάστημα της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης...)

$$s_2 = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \ .(2)$$

Προκειμένου ο άνθρωπος να μη χτυπηθεί από το αυτοκίνητο, θα πρέπει το άθροισμα αυτών των δύο διαστημάτων να μην είναι μεγαλύτερο από την απόσταση των 20m. Δηλαδή,

$s_1 + s_2 \leq d$. (3)

Από τη σχέση (3), θα βρούμε τη μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα του αυτοκινήτου: $s_1 + s_2 = d$, και λόγω των σχέσεων (1) και (2) έχουμε ότι:

$$υ_0\, t_a + \frac{υ_0^2}{2α} = d \text{ ή } 0{,}1\, υ_0 + \frac{υ_0^2}{30} - 20 = 0 \text{ ή } υ_0^2 + 3\, υ_0 - 600 = 0. \quad (4)$$

Η (4) είναι μια εξίσωση 2ου βαθμού ως προς την ταχύτητα $υ_0$ που θέλουμε να βρούμε. Η επίλυσή της σύμφωνα με όσα ξέρουμε από τα μαθηματικά θα μας δώσει δύο λύσεις:

$$υ_{0,1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 600}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{2409}}{2} = \frac{-3 \pm 49{,}08}{2} \Rightarrow$$

$υ_{01}$ =23,04m/s και $υ_{02}$= -26,04m/s.

Από τις δύο λύσεις δεκτή είναι η θετική $υ_{01}$ = 23,04m/s, διότι θεωρούμε ότι η κίνηση του αυτοκινήτου γίνεται κατά τη θετική φορά του άξονα κίνησης x΄x.

Συμπεραίνουμε ότι για ταχύτητα μεγαλύτερη από 23,04m/s (82,9km/h) θα έχουμε ατύχημα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 Να συμπληρωθούν τα κενά:

α) Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η τροχιά του κινητού είναι .... και η ταχύτητά του παραμένει ....

β) Στο SI μονάδα μέτρησης της ταχύτητας είναι .... και της επιτάχυνσης είναι ....

γ) Η ταχύτητα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της .... ενός κινητού, ενώ η επιτάχυνση εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της .... ενός κινητού.

4.2 Να συμπληρωθούν τα κενά:

Κινητό	**Αριθμός συντεταγμένων που χρειάζονται, για να καθοριστεί η θέση του κινητού.**
Αεροπλάνο	......
Ακροβάτης που περπατάει σε σχοινί	......
Καράβι σε ήρεμη θάλασσα	......
Καράβι σε φουρτουνιασμένη θάλασσα	......
Πιόνι σκακιού	......
Αυτοκίνητο σε πεδινό δρόμο	......
Αυτοκίνητο σε ορεινό δρόμο	......

4.3 Μια από τις διαφορές μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι ότι:
α) έχουν πάντα αντίθετη φορά
β) το ένα μέγεθος είναι διανυσματικό, ενώ το άλλο μονόμετρο.
γ) το ένα μέγεθος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θέσης, ενώ το άλλο το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας
δ) η επιτάχυνση είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

4.4 Διαλέξτε δύο από τους παρακάτω τύπους και αποδείξτε τους:

α) $\upsilon=\upsilon_0+\alpha t$ γ) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\alpha s}$

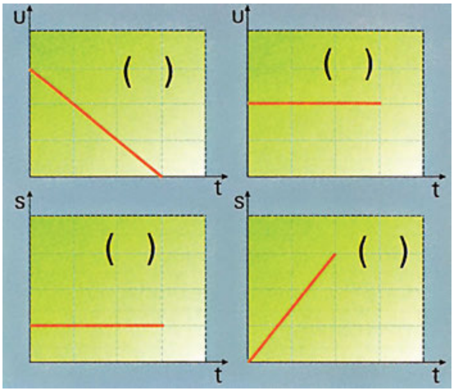
β) $s= \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ δ) $s_{O\lambda} = \frac{\upsilon_0^2}{2|\alpha|}$

4.5 Δύο κινητά που κινούνται στην ίδια ευθεία έχουν ταχύτητες υ και -υ αντίστοιχα. Τι συμπεραίνετε για την κίνησή τους;

4.6 Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση:
α) η επιτάχυνση είναι μηδέν
β) η ταχύτητα είναι σταθερή
γ) ο ρυθμός μεταβολής της θέσης είναι σταθερός
δ) ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι μηδέν.
Χαρακτηρίστε με Σ τις σωστές προτάσεις και με Λ τις λανθασμένες.

4.7 Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:
α) η επιτάχυνση αυξάνεται
β) η ταχύτητα αυξάνεται
γ) ο ρυθμός μεταβολής της θέσης είναι σταθερός
δ) ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι σταθερός.
Χαρακτηρίστε με Σ τις σωστές προτάσεις και με Λ τις λανθασμένες.

4.8 Επιλέξτε το σωστό διάγραμμα για καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις ευθύγραμμης κίνησης:
α) ακινησία
β) ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
γ) ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
δ) ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.



4.9 Ένα αυτοκίνητο που αρχικά ηρεμεί ξεκινάει με σταθερή επιτάχυνση α = 0,5m/s^2 κινούμενο ευθύγραμμα. Ύστερα από χρόνο t=1 min η ταχύτητά του θα είναι:

α) 0,5 m/s β) 30m/s^2 γ) 108 km/h
δ) 3 m/s ε) 30m ζ) 108.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

4.10 Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα μεταβάλλεται κατά 60m/min σε 1s. Η επιτάχυνσή του θα είναι:

α) 60m/s^2 β) 10m/s^2 γ) 1m/s^2 δ) 6m/s^2

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

4.11 Όχημα κινούμενο ευθύγραμμα με ταχύτητα υ=10 m/s αρχίζει να επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση α, και, αφού διανύσει διάστημα s=50m, η ταχύτητά του διπλασιάζεται. Ζητούνται τα εξής:

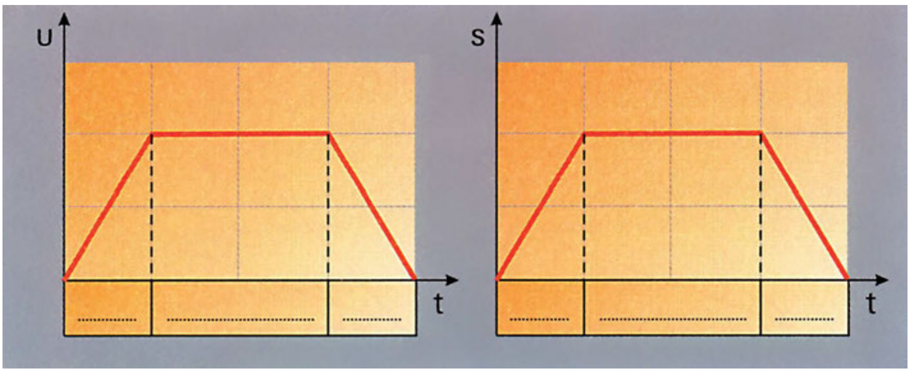
α) η επιτάχυνση του κινητού
β) τα διαγράμματα (υ-t), (s-t), (α-t).

4.12 Με βάση τον πίνακα μετρήσεων

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου.
β) Η αρχική ταχύτητα είναι .... m/s.
γ) Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, διότι ....
δ) Η επιτάχυνση της κίνησης είναι .... m/s^2.
ε) Το διάστημα για τα πρώτα 4s είναι .... m.

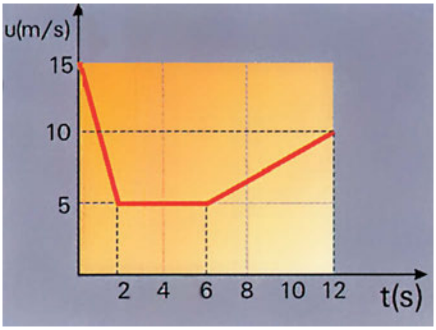
Πίνακας μετρήσεων	
t(s)	**υ(m/s)**
0	0
1	2
2	4
4	8
8	16
10	20

4.13 Χαρακτηρίστε καθεμιά από τις ευθύγραμμες κινήσεις που παριστάνονται στα δύο διαγράμματα, συμπληρώνοντας το αντίστοιχο κενό:



4.14 Δρομέας των 200m αναπτύσσει μέγιστη ταχύτητα 10m/s με επιτάχυνση 5m/s^2. Ποιος είναι ο χρόνος που έκανε;

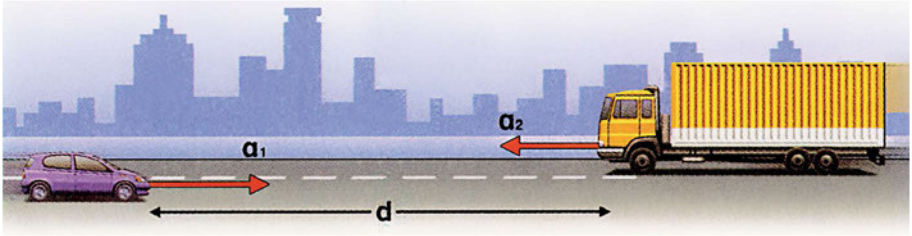
4.15 Από το παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου μιας ευθύγραμμης κίνησης να γίνουν τα διαγράμματα α) διαστήματος- χρόνου (s-t) και β) επιτάχυνσης- χρόνου (α-t).



4.16 Δυο οχήματα αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα πάνω στην ίδια ευθεία με επιταχύνσεις που έχουν μέτρα $α_1$=5m/s^2 και $α_2$=4m/s^2 αντίστοιχα. Αν αρχικά η απόστασή τους ήταν d=72m και η κίνησή τους είναι αντίρροπη,

α) να βρεθεί πού και πότε θα συναντηθούν τα οχήματα

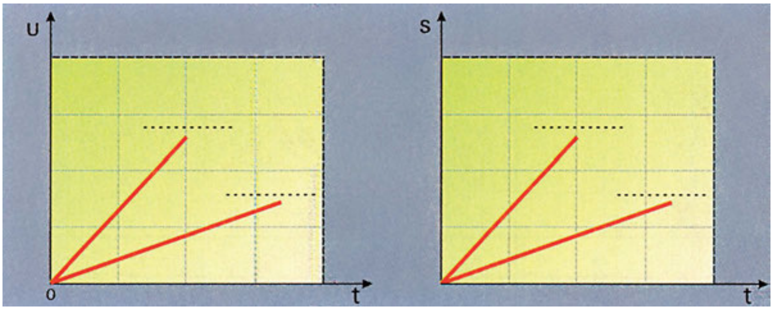
β) να γίνουν τα διαγράμματα (υ-t), (s-t) και (α-t).



4.17 Αντιστοιχίστε καθεμιά από τις 4 ευθείες με τις παρακάτω περιπτώσεις κινητών, συμπληρώνοντας τα κατάλληλα κενά στα διαγράμματα που ακολουθούν:

α) ποδήλατο υ = 25km/h β) αυτοκίνητο α = 3m/s^2

γ) μοτοσικλέτα υ = 110km/h δ) αεροπλάνο α = 20m/s^2



4.18 Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται η μεταβολή του διαστήματος s με το χρόνο t ενός κινητού που αρχικά ηρεμεί, το οποίο εκτελεί

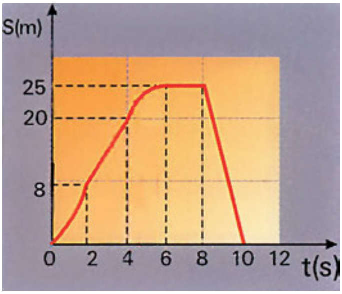
ευθύγραμμη κίνηση. Ζητούνται:

α) να αναγνωριστεί το είδος κάθε επιμέρους κίνησης,

β) να βρεθεί η μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα του κινητού,

γ) να υπολογιστεί το συνολικό διάστημα και η μετατόπιση του κινητού,

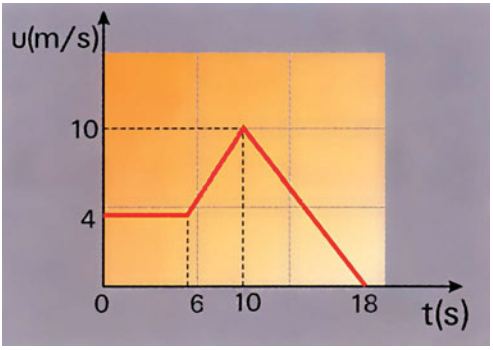
δ) να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας- χρόνου (υ-t) και επιτάχυνσης - χρόνου (α-t).



4.19 Στο διάγραμμα απεικονίζεται η μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα. Ζητούνται τα εξής:

Ι) Χαρακτηρίστε με Σ τις σωστές προτάσεις και με Λ τις λανθασμένες:

- η ταχύτητα για t = 0s είναι υ = 0m/s
- το συνολικό διάστημα είναι 92m
- η κίνηση στη διάρκεια των 4 πρώτων δευτερολέπτων είναι ομαλή
- η επιταχυνόμενη κίνηση έχει επιτάχυνση 2 m/s^2.



ΙΙ) Επιλέξτε τη σωστή απάντηση

Κατά τη χρονική στιγμή t=14s η ταχύτητα είναι:

α) 4m/s β) 5m/s γ) 6m/s δ) 2m/s

ΙΙΙ) Να συμπληρώσετε τα κενά:

- Τη χρονική στιγμή t = 18s το κινητό ....
- Τη χρονική στιγμή t = 10s το κινητό αποκτά τη .... ταχύτητα
- Τη χρονική στιγμή t = 12s το κινητό εκτελεί κίνηση ....
- Το κινητό εκτελεί διαδοχικά τις εξής κινήσεις: αρχικά .... κίνηση, έπειτα .... κίνηση και τέλος ....κίνηση.

4.20 Περιπολικό της τροχαίας καταδιώκει λεωφορείο που πέρασε με κόκκινο. Το λεωφορείο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 1m/s, ενώ το περιπολικό, όταν αρχίζει να κινείται, έχει σταθερή επιτάχυνση α=1m/s^2 και απέχει από το λεωφορείο απόσταση d=8m. Ζητούνται τα εξής:

α) Σε πόσο χρόνο το περιπολικό θα προλάβει το λεωφορείο;

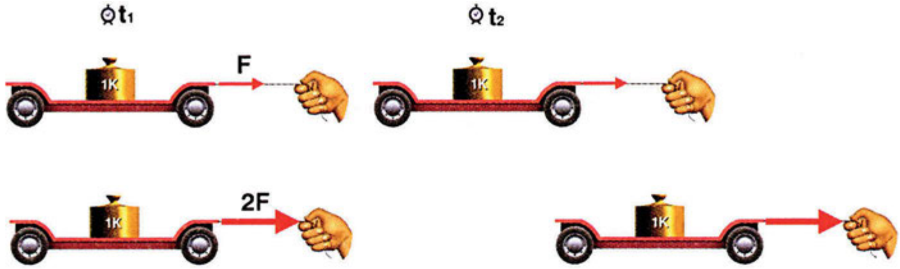
β) Σε τι απόσταση από το φανάρι θα συμβεί αυτό;

γ) Να παρασταθούν γραφικά οι ταχύτητες τον δυο κινητών με το χρόνο σε κοινό σύστημα αξόνων (υ-t).
δ) Να παρασταθούν γραφικά τα διαστήματα των δύο κινητών με το χρόνο σε κοινό σύστημα αξόνων (s-t) και να σημειωθεί το σημείο συνάντησής τους Σ.
ε) Υπάρχει κι άλλο σημείο συνάντησης στο διάγραμμα (s-t);

4.5 ΔΥΝΑΜΗ... Το μυστικό της επιτάχυνσης - 2ος Νόμος του Νεύτωνα

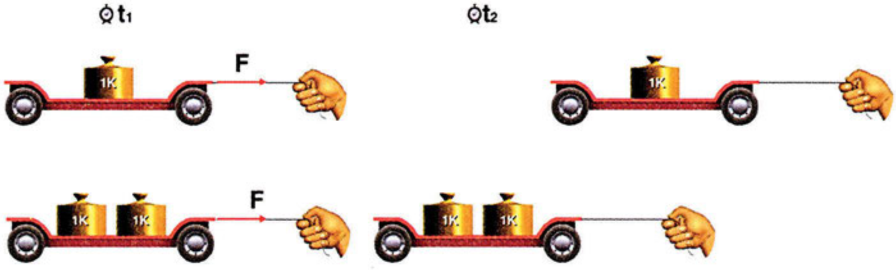
Αν θυμηθούμε τον ορισμό της δύναμης (... *αίτιο που μεταβάλλει την κινητική κατάσταση των σωμάτων...*) και τον 1ο νόμο του Νεύτωνα (**...** *αν δεν ασκούνται δυνάμεις σε κάποιο σώμα, τότε η ταχύτητά του παραμένει σταθερή....*), τότε εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η **εφαρμογή δύναμης** σε κάποιο σώμα θα επιφέρει **μεταβολή στην ταχύτητά** του, δηλαδή θα του προσδώσει **επιτάχυνση.**

Από την πειραματική διάταξη της εικόνας 4.37 διαπιστώνουμε ότι αν



Εικόνα 4.37
Η επιτάχυνση που αποκτά ένα σώμα είναι ανάλογη με τη δύναμη που του ασκείται.

τραβήξουμε δύο ίδια βαγονάκια το ένα με δύναμη F και το άλλο με διπλάσια δύναμη 2F, τότε αυτό που δέχεται τη διπλάσια δύναμη διατρέχει διπλάσιο διάστημα στον ίδιο χρόνο, αποκτά δηλαδή διπλάσια επιτάχυνση.



Εικόνα 4.38
Η επιτάχυνση που αποκτούν τα σώματα, με την επίδραση δύναμης, είναι αντίστροφη της μάζας του.

Όμως, αν ασκηθεί η ίδια δύναμη σε δυο βαγονάκια που έχουν διπλάσια μάζα το ένα από το άλλο, εικόνα 4.38, τότε αυτό που έχει τη μικρότερη μάζα διανύει διπλάσιο διάστημα στον ίδιο χρόνο, αποκτά δηλαδή διπλάσια επιτάχυνση.

Τα δύο παραπάνω συμπεράσματα, τα οποία αφορούν τις σχέσεις "επιτάχυνση-δύναμη" και "επιτάχυνση - μάζα", ο Νεύτωνας τα συμπεριέλαβε σε μια μαθηματική σχέση που ονομάζεται **2ος νόμος του Νεύτωνα** ή **"Θεμελιώδης Νόμος της Δυναμικής"** και διατυπώνεται ως εξής:

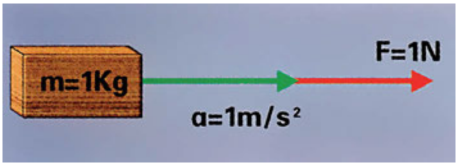
«Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι ίση με το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την επιτάχυνση με την οποία κινείται αυτό», δηλαδή

$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$ **ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ** (4.9)

● Με βάση το θεμελιώδη νόμο ορίζεται η μονάδα δύναμης στο S.I. σύστημα και ονομάζεται Newton (1N).

1N είναι η δύναμη η οποία όταν ασκηθεί σε σώμα μάζας 1kg του προσδίδει επιτάχυνση $1m/s^2$ κατά τη διεύθυνσή της.

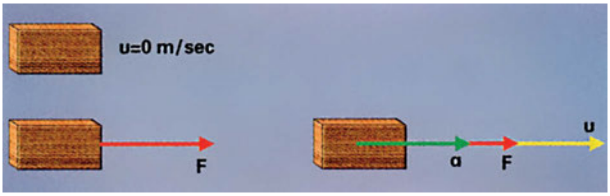
Δηλαδή: **$1N = 1kg. 1m/s^2$.**



Παρατηρήσεις

● Η συνισταμένη δύναμη $\Sigma\vec{F}$ και η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι διανύσματα **ομόρροπα,** διότι η μάζα m του σώματος είναι πάντα θετικός αριθμός.

Έτσι, αν ένα σώμα αρχικά ηρεμεί (υ=0m/s) και δεχτεί την επίδραση σταθερής δύναμης $\vec{F}$, τότε θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, η οποία θα είναι ομόρροπη της δύναμης, και το σώμα θα εκτελέσει κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη (α>0 και σταθ.).



Ας εφαρμόσουμε

Σώμα μάζας m= 10kg, που αρχικά ηρεμεί, δέχεται την επίδραση σταθερής δύναμης F=50N για χρόνο t=3s. Πόση είναι η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t=3s;

Από το θεμελιώδη νόμο βρίσκουμε την επιτάχυνση α της κίνησης:

$$\Sigma F = m\alpha \text{ ή } \alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{50N}{10kg} = \frac{50kg\frac{m}{s^2}}{10kg} = 5\frac{m}{s^2}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας για τις ευθύγραμμες ομαλά επιταχυνόμενες κινήσεις έχουμε: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ ή, επειδή το σώμα αρχικά ηρεμεί, $\upsilon = \alpha t$,

οπότε η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t=3s θα είναι: $\upsilon = 5\frac{m}{s^2}3s = 15\frac{m}{s}$.

Μπορούμε όμως να εργαστούμε και ως εξής:

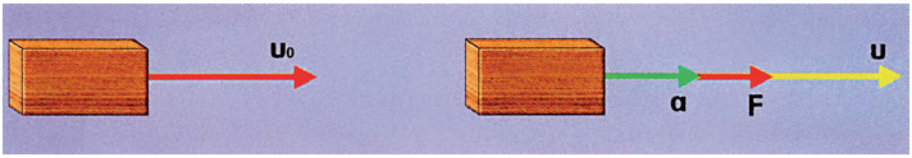
Από τις σχέσεις $\Sigma F = m\alpha$ ή $\alpha = \frac{\Sigma F}{m}$ ή $\alpha = \frac{F}{m}$ (1) και $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ ή $\upsilon = \alpha t$ (2)

προκύπτει ότι $\upsilon = \frac{Ft}{m}$ (3). Από τη σχέση (3), αφού αντικαταστήσουμε

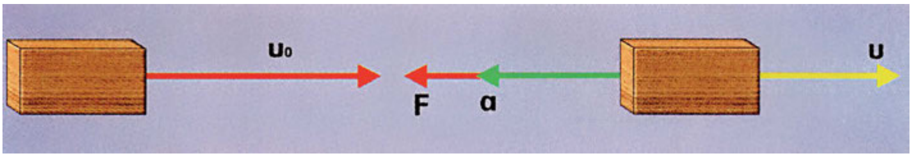
τα μεγέθη και κάνουμε τις πράξεις, βρίσκουμε την ταχύτητα.

● Αν σε ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ασκηθεί σταθερή δύναμη κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας, τότε ανάλογα με τη φορά της δύναμης διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Η φορά της δύναμης να **συμπίπτει** με τη φορά της ταχύτητας, οπότε το σώμα θα εκτελέσει ομαλά **επιταχυνόμενη** κίνηση.



ii) Η φορά της δύναμης να είναι **αντίθετη** με τη φορά της ταχύτητας, οπότε το σώμα θα εκτελέσει ομαλά **επιβραδυνόμενη** κίνηση.



Ας εφαρμόσουμε

Σώμα μάζας 10kg κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα 36km/h. Μια σταθερή δύναμη επιδρά πάνω του με φορά αντίθετη της ταχύτητάς του και το ακινητοποιεί σε χρόνο 2s. Ζητείται το μέτρο της δύναμης αυτής.

Για τη δύναμη θα ισχύει ότι $F = m\alpha$ (θεμελιώδης νόμος).

Προφανώς το σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε ο χρόνος ακινητοποίησης δίνεται από τη γνωστή σχέση: $t_{Ολ} = \frac{υ_0}{|α|}$, από την οποία βρίσκουμε την επιβράδυνση της κίνησης:

$υ_0$ = 36km/h = 10m/s, $t_{Ολ}$=2s και, συνεπώς, $|α| = \frac{υ_0}{t_{Ολ}} = \frac{10m/s}{2s} = 5m/s^2$.

Επομένως, το μέτρο της δύναμης θα είναι: $F = mα = 10kg \cdot 5m/s^2 \Rightarrow$ F=50N.

● Όταν σε ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, τότε πρώτα βρίσκουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων και μετά εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο.

Ας εφαρμόσουμε

Σώμα μάζας m = 10kg δέχεται την επίδραση δυο κάθετων και ίσων μεταξύ τους δυνάμεων F_1=F_2=F=5N. Θέλουμε να βρούμε την επιτάχυνση του σώματος.

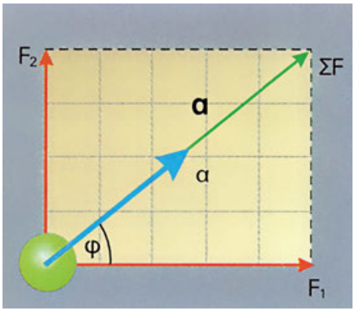
Υπολογίζουμε, με το γνωστό τρόπο, τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα:

$$ΣF = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\ συν90^o} = \sqrt{2F^2} = F\sqrt{2}$$

Δηλαδή: $ΣF = 5\sqrt{2}$ N.

Στη συνέχεια, από το θεμελιώδη νόμο ΣF = mα βρίσκουμε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος:

$$α = \frac{ΣF}{m} = \frac{5\sqrt{2}N}{10kg} = \frac{\sqrt{2}}{2} m/s^2.$$



Ακολούθως, επειδή η επιτάχυνση είναι μέγεθος διανυσματικό, πρέπει να βρούμε και την κατεύθυνσή της. Αρκεί γι' αυτό να υπολογίσουμε τη γωνία φ:

$$εφφ = \frac{F_2}{F_1} = 1,\ άρα\ \widehat{φ} = 45^o.$$

4.5.1 Δυναμικός ορισμός της μάζας

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο κάθε μεταβολή στη δύναμη που ασκείται σε κάποιο σώμα προκαλεί και μια ισόποση μεταβολή στην επιτάχυνση, με αποτέλεσμα το πηλίκο $\frac{F}{α}$ να παραμένει σταθερό.

Δηλαδή, αν διπλασιαστεί η δύναμη διπλασιάζεται και η επιτάχυνση, αν τριπλασιασθεί η δύναμη τριπλασιάζεται και η επιτάχυνση κ.ο.κ.

Συνεπώς $\frac{F}{\alpha} = \frac{2F}{2\alpha} = \frac{3F}{3\alpha} = \cdots = \frac{\nu F}{\nu\alpha} = m$,

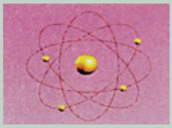
Το σταθερό πηλίκο της δύναμης που ασκείται σε κάποιο σώμα προς την επιτάχυνση την οποία προκαλεί ονομάζεται μάζα.

Η μάζα είναι μονόμετρο μέγεθος και, εκτός από την αδράνεια, έχει και την ιδιότητα να ασκεί ελκτικές δυνάμεις σε άλλες μάζες.

Για ανάγνωση και μόνο

Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας του Einstein η μάζα δεν είναι μια σταθερή παράμετρος της κίνησης, αλλά εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος. Συγκεκριμένα, η μάζα m αυξάνεται με την ταχύτητα υ του σώματος σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}}$$



m_o είναι η μάζα τον σώματος, όταν είναι ακίνητο (μάζα ηρεμίας), και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό ($c = 300.000\ km/s = 3.10^8 m/s$). Η αύξηση της μάζας δε σημαίνει αύξηση των γεωμετρικών διαστάσεων του σώματος αλλά απλώς και μόνο αύξηση της αδράνειάς του.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η εξίσωση αυτή θέτει ως όριο ταχύτητας στο σύμπαν για τα υλικά σώματα την τιμή c.

Παραδείγματα

1. Ο οδηγός αυτοκινήτου το οποίο κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα υ = 72km/h αντιλαμβανόμενος ένα εμπόδιο φρενάρει. Το αυτοκίνητο αφού διανύσει 20m, ακινητοποιείται. Αν η μάζα του αυτοκινήτου είναι m = 800kg, θέλουμε να βρούμε τη δύναμη που αναπτύχθηκε στους τροχούς του.

Η δύναμη που χρειάστηκε, για να ακινητοποιηθεί το αυτοκίνητο, είναι F=mα.

Η απόσταση των 20m που διανύει το αυτοκίνητο μέχρι να ακινητοποιηθεί είναι το ολικό διάστημα της επιβραδυνόμενης κίνησης, το οποίο, όπως γνωρίζουμε, υπολογίζεται από τη σχέση $s_{ολ} = \dfrac{υ_0^2}{2|α|}$, από την οποία βρίσκουμε την επιβράδυνση α της κίνησης.

Έχουμε ότι $υ_0 = 72km/h = 20m/s$ και $S_{ολ} = 20m$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι

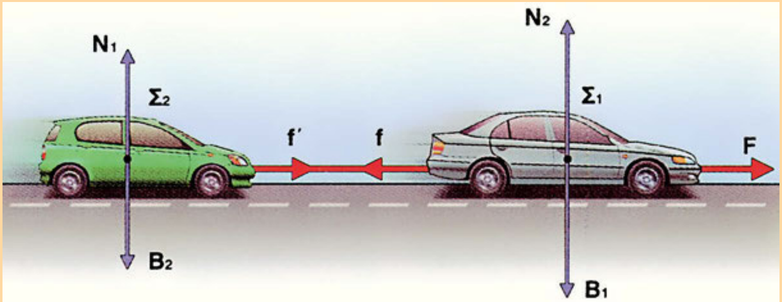
$α = 10m/s^2$.

Επομένως, η δύναμη είναι $F = 800kg\ 10m/s^2 = 8000N$.

2. Το αυτοκίνητο $Σ_1$ μάζας m_1 = 1200kg ρυμουλκεί με σχοινί σε οριζόντιο δρόμο ένα άλλο αυτοκίνητο $Σ_2$ μάζας m_2=800kg. Αν η επιτάχυνση με την οποία κινούνται τα δύο οχήματα είναι α=3m/s^2, ζητούνται:
α) η δύναμη έλξης που αναπτύσσει ο κινητήρας του $Σ_1$
β) η τάση του σχοινιού.

α) Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο στο σύστημα των δύο σωμάτων: $ΣF = (m_1 + m_2)α$ ή $F - f + f' = (m_1 + m_2)α$ ή $F = (m_1 + m_2)α$ (1), διότι $-f + f' = 0$ (οι τάσεις στα άκρα του σχοινιού είναι, όπως ξέρουμε, ζεύγος «δράσης-αντίδρασης», οπότε είναι αντίθετες).

Από την (1) με αντικατάσταση και πράξεις βρίσκουμε τη ζητούμενη δύναμη $F = 2000kg \cdot 3m/s^2 = 6000N$.



β) Η τάση του σχοινιού βρίσκεται, αν εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο σε ένα από τα δύο οχήματα (συνήθως σ' αυτό που δέχεται τις λιγότερες δυνάμεις).

Για το $Σ_2$ θα έχουμε: $ΣF = m_2α$ ή $f' = 800kg \cdot 3m/s^2 = 2400N$.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε, αν είχαμε εφαρμόσει το θεμελιώδη νόμο στο $Σ_1$. Ας δοκιμάσουμε...

3. Σε ένα σώμα μάζας m = 10kg, που βρίσκεται σε οριζόντιο τραπέζι, ασκούνται τρεις οριζόντιες δυνάμεις F_1=3N, F_2=2N F_3=1N όπως στην εικόνα. Ζητείται η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα, αν $\hat{φ}$= 60^o.

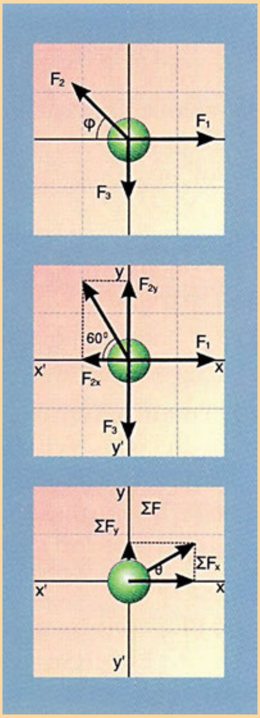
Βρίσκουμε αρχικά τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και μετά εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο, για να βρούμε την επιτάχυνση.

Ο υπολογισμός της συνισταμένης ΣF γίνεται με τη γνωστή μέθοδο της ανάλυσης σε άξονες.

$$\Sigma F_x = F_1 - F_{2x} = F_1 - F_2 \sigma\upsilon\nu 60^o = \left(3 - 2\frac{1}{2}\right) N = 2N$$

$$\Sigma F_y = F_{2y} - F_3 = F_2 \eta\mu 60^o - F_3 = \left(2\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) N = 0,73N$$

$$\Sigma F = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} = \sqrt{4 + 0,53} N \cong 2,13N$$



Και από το θεμελιώδη νόμο εύκολα υπολογίζεται το μέτρο της επιτάχυνσης:

$\Sigma F = m\alpha$ ή $\alpha = 0,213\ m/s^2$.

Η κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης προσδιορίζεται από τη γωνία θ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x:

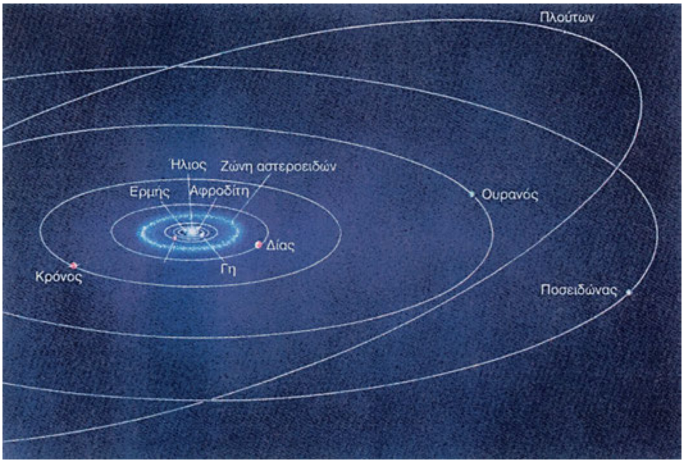
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{0,73}{2} \cong 0,37 \text{ άρα } \hat{\theta} \cong 22,3^o.$$

4.5.2 Βάρος

Αναφέραμε πιο πάνω ότι μια άλλη θεμελιώδη ιδιότητα που έχουν τα σώματα, είναι να ασκούν το ένα στο άλλο ελκτικές δυνάμεις. Οι δυνάμεις αυτές εξαρτώνται από τις μάζες των σωμάτων και από την απόσταση μεταξύ τους. Για παράδειγμα, εσύ και το βιβλίο αυτό έλκεστε, μόνο που οι ελκτικές αυτές δυνάμεις είναι πολύ ασθενείς και τα αποτελέσματά τους δεν είναι εμφανή. Προκειμένου να γίνουν αισθητές οι δυνάμεις αυτές πρέπει οι μάζες των σωμάτων που αλληλεπιδρούν να είναι τεράστιες (όπως είναι, π.χ., οι μάζες των πλανητών).

Εικόνα 4.39
Αν δεν υπήρχε η έλξη της γης, όλοι μας θα είχαμε χαθεί στο διάστημα.

Στην περίπτωση των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος αυτές οι δυνάμεις έλξης αποκτούν καθοριστική σημασία. Είναι εκείνες οι οποίες συγκρατούν τους πλανήτες στην τροχιά τους και καθορίζουν τους νόμους κίνησής τους. Οι πάσης φύσεως δορυφόροι (μετεωρολογικοί, τηλεπικοινωνιακοί κτλ.), οι οποίοι περιστρέφονται γύρω από τον πλανήτη μας, επίσης συγκρατούνται στην τροχιά τους από τις ελκτικές δυνάμεις που ασκεί πάνω τους η μάζα της Γης.



Εικόνα 4.40
Οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μαζών κυριαρχούν στο μακρόκοσμο.

Αν αφήσουμε ένα αντικείμενο από τα χέρια μας, π.χ. αυτό το βιβλίο, τότε θα το δούμε να κατευθύνεται προς το έδαφος. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ελκτική δύναμη που ασκεί η Γη στο βιβλίο. Αυτή η έλξη της Γης εκδηλώνεται σε κάθε σώμα και ονομάζεται **βάρος** του σώματος.

Βάρος ονομάζεται η ελκτική δύναμη που ασκεί η μάζα της Γης στη μάζα κάθε σώματος.

Επειδή το βάρος είναι δύναμη, θα πρέπει σύμφωνα με το 2° νόμο του Νεύτωνα να προσδίδει επιτάχυνση στα σώματα. Η επιτάχυνση αυτή ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας και συμβολίζεται με το **g.**

Η εφαρμογή του 2^{ου} νόμου σε ένα σώμα το οποίο κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του οδηγεί στην εξής σχέση:

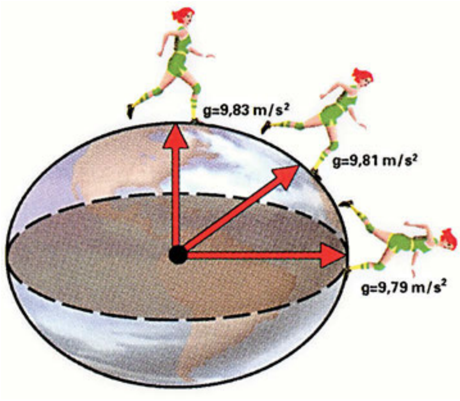
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \text{ή} \quad \boxed{\vec{B} = m\vec{g}} \qquad (4.10)$$

Για ανάγνωση και μόνο...

• Η επιτάχυνση της βαρύτητας g εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του τόπου και αυξάνεται από τον ισημερινό προς τους πόλους της γης.

Συγκεκριμένα:
Επειδή η Γη δεν είναι τέλεια σφαίρα, αλλά παρουσιάζει μια διαπλάτυνση στον ισημερινό, η **ισημερινή ακτίνα** της Γης είναι μεγαλύτερη κατά 21km περίπου από την αντίστοιχη **πολική ακτίνα.** Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η απόσταση απ' το κέντρο της Γης στον ισημερινό να είναι μεγαλύτερη απ' ότι θα ήταν, αν το σώμα βρισκόταν στους πόλους. Επομένως, στον ισημερινό θα δέχεται μικρότερη έλξη από τη Γη και η τιμή του g θα είναι επίσης μικρότερη. Αντίθετα, το βάρος ενός σώματος θα είναι μεγαλύτερο στους πόλους, όπως επίσης και το g. **Η μάζα όμως του σώματος θα είναι παντού σταθερή.**

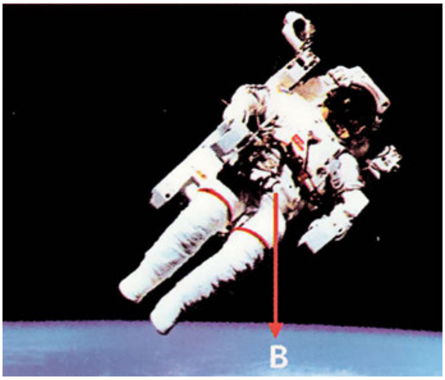
Η τιμή του g (για υπερθαλάσσιο ύψος μηδέν) είναι κατά μέσο όρο: στον ισημερινό $g=9{,}79 m/s^2$, στους πόλους $g=9{,}83m/s^2$ και σε γεωγραφικό πλάτος 45° $g=9{,}81m/s^2$ (εικόνα 4.41).



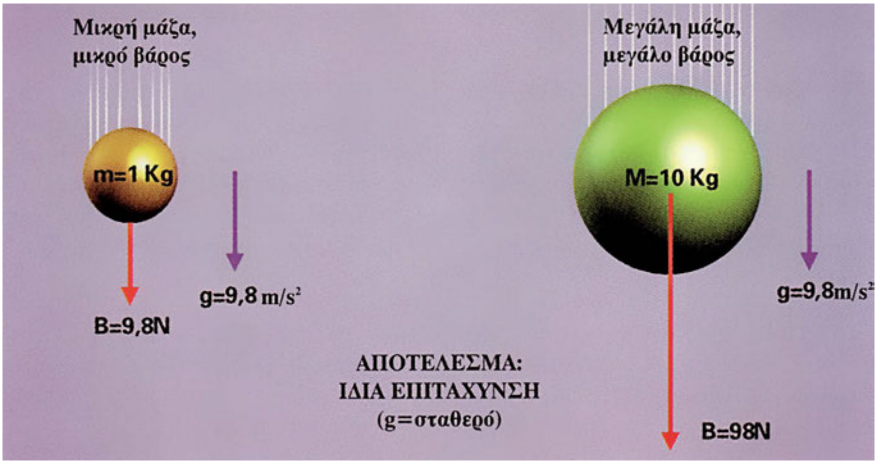
Εικόνα 4.41
Το βάρος αυξάνεται προς τους πόλους της Γης.

● **Η επιτάχυνση της βαρύτητας g εξαρτάται από το υψόμετρο του τόπου και μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια της Γης.**

Αν με ένα μεγάλης ακρίβειας δυναμόμετρο μετρήσουμε το βάρος ενός σώματος στην επιφάνεια της γης (h = 0 m) και επαναλάβουμε τη μέτρηση στην κορυφή ενός ψηλού βουνού, π.χ. στον Όλυμπο (h = 3000 m), θα διαπιστώσουμε ότι το βάρος του σώματος έχει μειωθεί. Καθώς, λοιπόν, αυξάνεται το υψόμετρο ενός τόπου, η ελκτική δύναμη της γης μειώνεται, με αποτέλεσμα να μειώνεται το βάρος των σωμάτων και, επομένως, η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Θα πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι η έλξη της Γης προς όλα τα σώματα μηδενίζεται (θεωρητικά) σε άπειρη απόσταση από το κέντρο της. Στην πραγματικότητα, η έλξη της Γης γίνεται τόσο μικρή για μεγάλες αποστάσεις από το κέντρο της Γης, ώστε να τη θεωρούμε πρακτικά ίση με μηδέν.



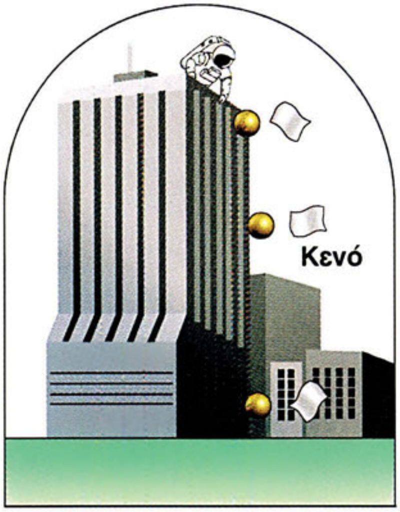
Εικόνα 4.42
Η έλξη της Γης θεωρητικά μηδενίζεται σε άπειρη απόσταση από το κέντρο της. Ο αστροναύτης έξω από την ατμόσφαιρα της Γης εξακολουθεί να έχει βάρος, μόνο που είναι μικρότερο απ' ό,τι στην επιφάνεια της Γης.



● Η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ένα σημείο έχει την ίδια τιμή για κάθε σώμα (που θα βρεθεί στο σημείο αυτό) ανεξάρτητα από τη μάζα του.

Ένα βαρύ κι ένα ελαφρύ σώμα δέχονται διαφορετική δύναμη από τη Γη, έχουν δηλαδή διαφορετικό βάρος. Η επιτάχυνση όμως την οποία αποκτά κάθε σώμα είναι ίδια και ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. **Η Γη επομένως επιταχύνει όλα τα σώματα με τον ίδιο τρόπο, ανεξάρτητα από τη μάζα τους.** Αν αφεθούν τα σώματα αυτά από το ίδιο ύψος, θα έπρεπε να φτάσουν στην επιφάνεια της Γης ταυτόχρονα, εφόσον έχουν την ίδια επιτάχυνση, εικόνα 4.43. Η αντίσταση όμως του αέρα επιδρά με διαφορετικό τρόπο στα σώματα, οπότε η άφιξή τους στο έδαφος δεν είναι ταυτόχρονη. Αν απαλείψουμε την επίδραση του αέρα, εκτελέσουμε δηλαδή το πείραμα στο κενό, τότε θα διαπιστώσουμε ότι τα σώματα ανεξάρτητα από το βάρος τους φτάνουν τη γη ταυτόχρονα, εικόνα 4.44.

Εικόνα 4.43
Ένα κομμάτι χαρτί και μια σιδερένια σφαίρα αφήνονται να πέσουν από κάποιο ύψος. Το χαρτί δέχεται μεγαλύτερη αντίσταση από την ατμόσφαιρα απ' ό,τι δέχεται η σφαίρα. Επομένως, η σφαίρα φτάνει πρώτη στο έδαφος.



Εικόνα 4.44
Αν εξαλείψουμε την επίδραση της ατμόσφαιρας, τότε τα σώματα φτάνουν ταυτόχρονα το έδαφος. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση που αποκτούν από την ελκτική δύναμη της Γης είναι ίδια και για τα δύο σώματα.

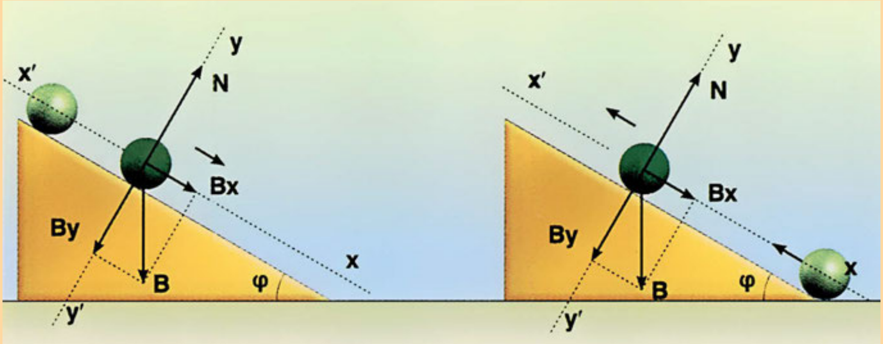
Ο "σωλήνας του Νεύτωνα" είναι μια εργαστηριακή διάταξη με την οποία μπορούμε να διαπιστώσουμε τα παραπάνω. Η διάταξη περιλαμβάνει ένα γυάλινο σωλήνα, μια αντλία κενού και μια φωτογραφική συσκευή, που μπορεί να βγάζει φωτογραφίες σε ίσα χρονικά διαστήματα.

- Τοποθετούμε στο σωλήνα δύο σώματα διαφορετικής μάζας (π.χ. ένα φτερό και μια πέτρα),
- αφαιρούμε τον αέρα με την αντλία,
- αντιστρέφουμε το σωλήνα,
- φωτογραφίζουμε την πτώση των σωμάτων.

Θα διαπιστώσουμε ότι τα σώματα φτάνουν ταυτόχρονα στη βάση του σωλήνα.

Παραδείγματα

1. Σώμα μάζας m: i) το αφήνουμε να κινηθεί από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ, ii) το εκτοξεύουμε από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με αρχική ταχύτητα υ_0. Θέλουμε να μελετήσουμε την κίνησή του.



i) Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και τις αναλύουμε σε δύο άξονες: στον άξονα κίνησης x΄x (κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου) και σε έναν άξονα κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο y΄y. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο στον άξονα κίνησης x΄x και έχουμε:

ΣF_x= mα ή B_x= mα ή Bημφ = mα ή mgημφ = mα ή **α = g ημφ.**

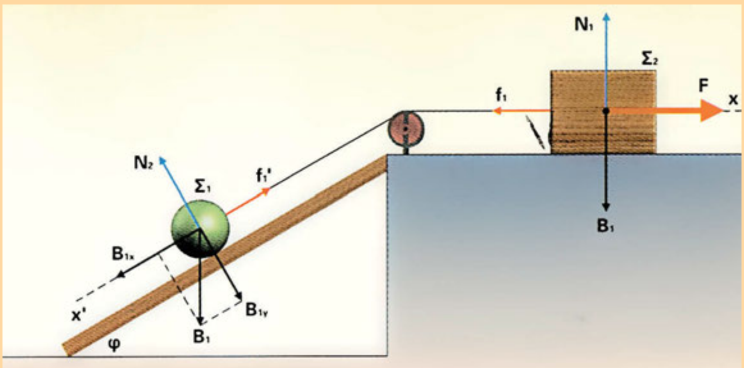
Η κίνηση είναι, επομένως, ομαλά επιταχυνόμενη και το μέτρο της επιτάχυνσης εξαρτάται από την κλίση του επιπέδου.

ii) Κατά τον ίδιο τρόπο θα έχουμε:

ΣF_x=mα ή -B_x=mα ή -Bημφ=mα ή -mgημφ=mα ή **α = -g ημφ.**

Η κίνηση είναι, επομένως, ομαλά επιβραδυνόμενη και το μέτρο της επιβράδυνσης εξαρτάται από την κλίση του επιπέδου.

2. Για τη διάταξη του σχήματος δίνονται οι εξής πληροφορίες...
- **Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 συνδέονται με σχοινί, που διέρχεται από ακίνητη τροχαλία, και ολισθαίνουν σε λεία επίπεδα με την επίδραση σταθερής δύναμης F που εφαρμόζεται στο Σ_2,**
- **m_1 = 10kg, φ=30^o,**
- **Η κίνηση των σωμάτων γίνεται με σταθερή ταχύτητα και ζητούνται: α) η δύναμη F, β) η τάση του σχοινιού.**



α) Σχεδιάζουμε και αναλύουμε τις δυνάμεις στον άξονα κίνησης x΄x.

Επειδή η κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα, η επιτάχυνση θα είναι μηδέν και ο θεμελιώδης νόμος θα πάρει τη μορφή:
$\Sigma F_x = 0$ ή $F - f_1 + f_1' - B_{1x} = 0$ ή $F - B_{1x} = 0$
($-f_1 + f_1' = 0$ ως ζεύγος “δράσης - αντίδρασης”).
Επομένως, $F = B_{1x} = B_1$ ημ30º $= m_1 g$ημ30º $\Rightarrow F = 50N$.

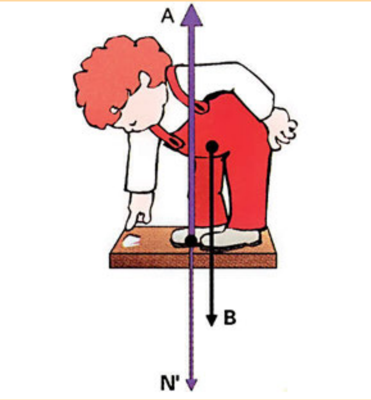
β) Η τάση του σχοινιού βρίσκεται με την εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου σε ένα από τα δύο σώματα, έστω στο Σ_2:

$\Sigma F_x = 0$ ή $F - f_1 = 0$ ή $f_1 = F$ ή $f_1 = 50N$.

3. Νεαρός αφήνει από την ταράτσα πολυκατοικίας να πέσει ελεύθερα νόμισμα προς το έδαφος, ώστε να το παραλάβει φίλος του. Η ταράτσα βρίσκεται σε ύψος h=20m. Σε πόσο χρόνο και με ποια ταχύτητα θα φτάσει το νόμισμα στο έδαφος, αν η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα; ($g = 10m/s^2$)

Το νόμισμα κινείται ευθύγραμμα με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση επιτάχυνσης α = g. Άρα: $s = h = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}gt^2$ και $\upsilon = gt$. Επομένως:
$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2s$ και $\upsilon = 20\,\frac{m}{s}$

4. Γιατί η ζυγαριά δείχνει το βάρος μας;



Το βάρος είναι η ελκτική δύναμη της γης που ασκείται πάνω μας και όχι στη ζυγαριά. Πώς λοιπόν η ζυγαριά δείχνει το δικό μας βάρος; Ας δούμε πώς......

Στον πιτσιρίκο της εικόνας ασκούνται δύο δυνάμεις:

Το βάρος του Β και μια δύναμη επαφής Α από την επιφάνεια της ζυγαριάς.

Όμως και η επιφάνεια της ζυγαριάς δέχεται, λόγω του αξιώματος “δράσης -αντίδρασης”, μια ίσου μέτρου δύναμη Ν΄.

Η δύναμη Ν΄ είναι αυτή που αναγκάζει το ελατήριο της ζυγαριάς να παραμορφωθεί και να μας δώσει ένδειξη. Αλλά Α = Ν΄, **επομένως η ένδειξη της ζυγαριάς είναι ίση με τη δύναμη Α.**

Ο πιτσιρίκος είναι ακίνητος (... όσο γίνεται) και συνεπώς θα ισχύει:
ΣF = 0 ή Β-Α = 0 ή Β = Α,
δηλαδή η ένδειξη της ζυγαριάς Α ισούται με το βάρος Β
(με την προϋπόθεση πάντα ότι είμαστε ακίνητοι πάνω στη ζυγαριά).

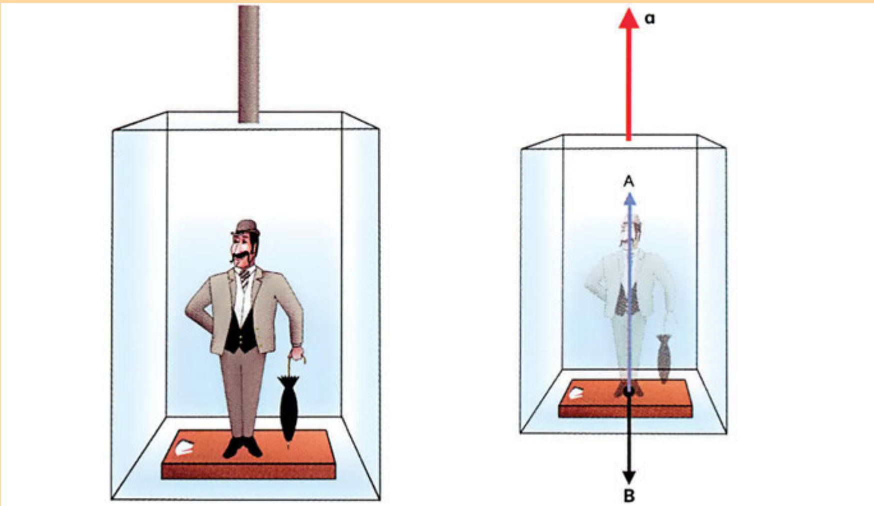
5. Στο πάτωμα ενός ανελκυστήρα βρίσκεται μια ζυγαριά και πάνω της στέκεται ο κύριος της εικόνας μάζας m = 90kg. Όσο ο ανελκυστήρας δεν κινείται, η ζυγαριά δείχνει 900N. Ξαφνικά ο ανελκυστήρας αρχίζει να επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση α=2m/s^2. Τι θα δείχνει τώρα η ζυγαριά; (g=10m/s^2)

Η εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της δυναμικής στον άνθρωπο θα δώσει:

ΣF = mα ή Α-Β = mα ή Α = Β + mα (1).

Μάθαμε ότι η ένδειξη της ζυγαριάς είναι ίση με τη δύναμη Α. Η σχέση (1) μας λέει ότι η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μεγαλύτερη από το βάρος Β του ανθρώπου κατά τον όρο mα: Α = 900N + 90kg·2m/s^2 = 1080N.

Δοκιμάστε να λύσετε το ίδιο πρόβλημα, όταν ο ανελκυστήρας κινείται με την ίδια σταθερή επιτάχυνση προς τα κάτω.



Επίδραση της επιτάχυνσης α (σε πολλαπλάσια της g) στον άνθρωπο
1) α = 2,2g: δυσφορία 2) α = 3g: έντονη δυσφορία 3) α = 4g: διαταραχή στην όραση 4) α = 5g: αισθητή μείωση του οπτικού πεδίου 5) α = 6g: λιποθυμικές τάσεις.

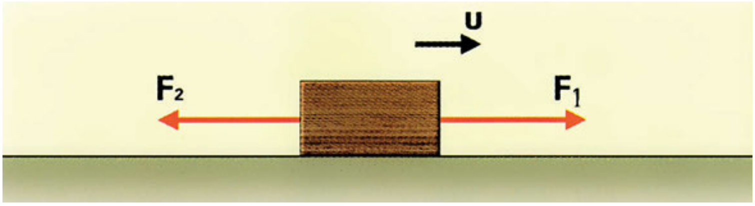
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Στις παρακάτω ασκήσεις τα επίπεδα θεωρούνται λεία).

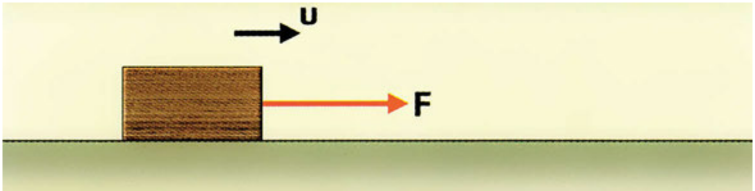
4.21 Διατυπώστε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση των σωμάτων.

4.22 Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Τι συμπεραίνετε για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα;

4.23 Το σώμα της εικόνας κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Αν $F_1 = 5N$, να βρεθεί η F_2.



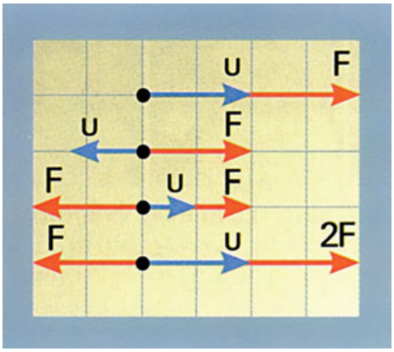
4.24 Το σώμα του σχήματος κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Αν F = 10N και B = 20N, σχεδιάστε τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και υπολογίστε τα μέτρα τους.



4.25 Σε ένα σώμα που αρχικά είναι ακίνητο επιδρά σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και το σώμα αρχίζει να κινείται. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
β) Το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
γ) Το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.
δ) Τίποτα από τα παραπάνω.

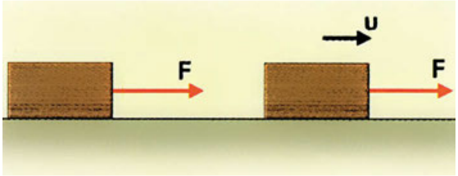
4.26 Ποια είναι και πώς ορίζεται η μονάδα μέτρησης δύναμης στο SI;



4.27 Σε ποιο σχήμα αντιστοιχεί καθεμιά από τις παρακάτω καταστάσεις;

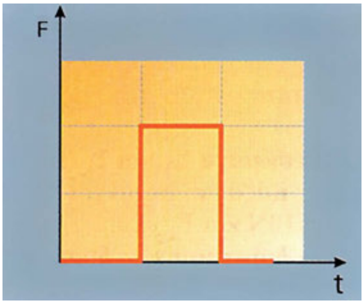
.... Η ταχύτητα μειώνεται.
.... Η ταχύτητα παραμένει σταθερή.
.... Η ταχύτητα αυξάνεται.
.... Ακινησία.

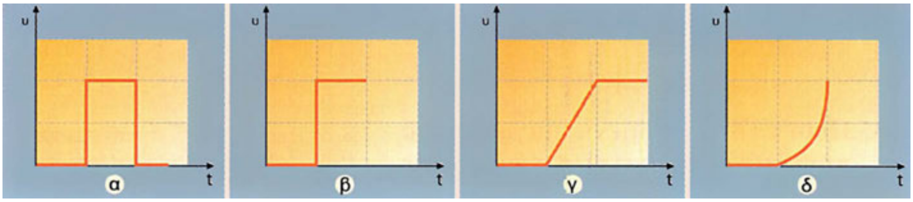
4.28 Σώμα μάζας m = 10kg δέχεται την επίδραση σταθερής δύναμης F. Αν το σώμα αρχικά ήταν ακίνητο και σε χρόνο t = 2s αποκτά ταχύτητα υ = 20m/s, το μέτρο της δύναμης είναι:



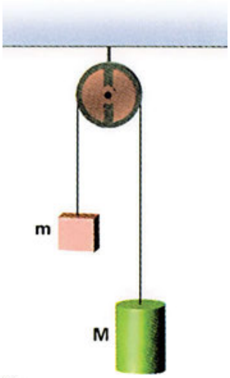
α) F = 1N β) F = 10N
γ) F = 100N δ) F = 1000N
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

4.29 Σώμα αρχικά ακίνητο δέχεται την επίδραση δύναμης F, η οποία μεταβάλλεται όπως δείχνει το σχήμα. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει τη μεταβολή της ταχύτητας του σώματος με το χρόνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.





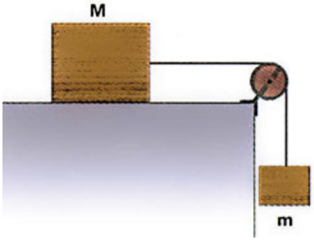
4.30 Αν M > m, τότε η επιτάχυνση α των δύο σωμάτων είναι:



α) $\alpha = \dfrac{M-m}{M+m}g$ β) $\alpha = \dfrac{M+m}{M-m}g$

γ) $\alpha = \dfrac{Mm}{M+m}g$ δ) $\alpha = \dfrac{m}{M}g$

4.31 Η επιτάχυνση α των δύο σωμάτων είναι:



α) $\alpha = \dfrac{m}{M+m}g$ β) $\alpha = \dfrac{Mm}{M-m}g$

γ) $\alpha = \dfrac{M+m}{M}g$ δ) $\alpha = \dfrac{M-m}{m}g$

4.32 Σώμα μάζας m = 0,5kg δέχεται την επίδραση δυο κάθετων σταθερών δυνάμεων $F_1 = 3N$ και $F_2 = 4N$. Η επιτάχυνση α που αποκτάει το σώμα είναι:

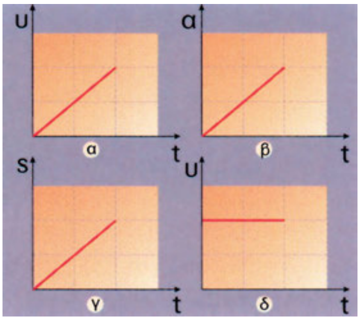
α) $α = 2m/s^2$ β) $α = 10m/s^2$
γ) $α = 15m/s^2$ δ) $α = 50m/s^2$

*** 4.33 Χαρακτηρίστε με Σ τις σωστές προτάσεις και με Λ τις λανθασμένες:**

- Η μάζα ενός σώματος είναι σταθερή, ενώ το βάρος του μπορεί να αλλάζει.
- Το βάρος ενός σώματος είναι μεγαλύτερο στον ισημερινό της γης από ό, τι στους πόλους.
- Η επιτάχυνση της βαρύτητας εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του τόπου.
- Ένας αστροναύτης σε τροχιά γύρω από τη γη δεν έχει βάρος.

4.34 Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ αρχικά ακίνητα σε οριζόντιο επίπεδο και της ίδιας μάζας m δέχονται την επίδραση σταθερών οριζόντιων δυνάμεων $F_1 = 10N$ και $F_2 = 20N$ αντίστοιχα, επί χρόνο t = 10s. Αν το σώμα $Σ_1$ διανύει διάστημα s_1 = 50m, ζητούνται οι μάζες των σωμάτων και το διάστημα που διανύει το σώμα $Σ_2$.

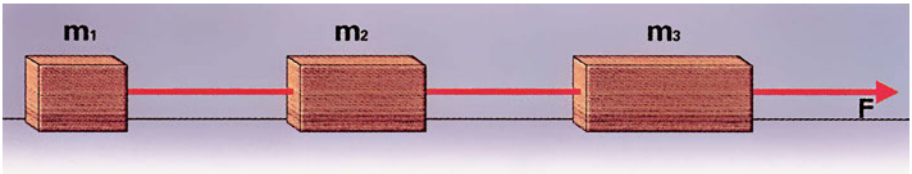
4.35 Ποιο από τα επόμενα διαγράμματα παριστάνει την κίνηση σώματος με την επίδραση σταθερής δύναμης;



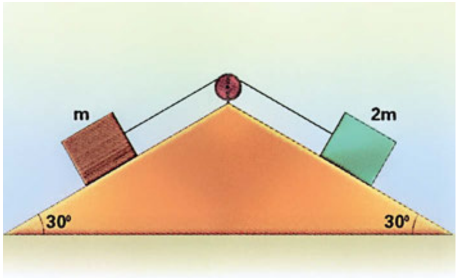
4.36 Διαθέτεις ένα δυναμόμετρο, μια ζυγαριά και μια πέτρα. Ποια από τα παρακάτω φυσικά μεγέθη μπορείς να βρεις;

- Τη μάζα της πέτρας
- Το βάρος της πέτρας
- Τον όγκο της πέτρας
- Την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

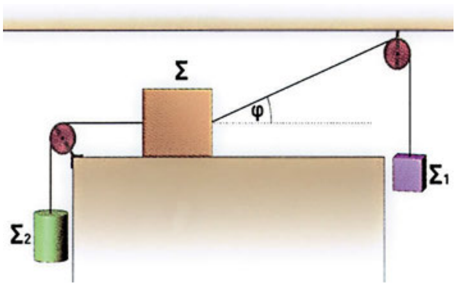
4.37 Τρία σώματα μαζών m_1=10kg, m_2=20kg, m_3=30kg συνδέονται με δυο σχοινιά όπως δείχνει το σχήμα, και στο σώμα μάζας m_3 ασκείται σταθερή δύναμη F=100N. Να υπολογίσετε τις τάσεις των σχοινιών.



4.38 Στη διάταξη του σχήματος θέλουμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση των σωμάτων και την τάση του σχοινιού που τα συνδέει. ($m = 3kg$, $g = 10\ m/s^2$)

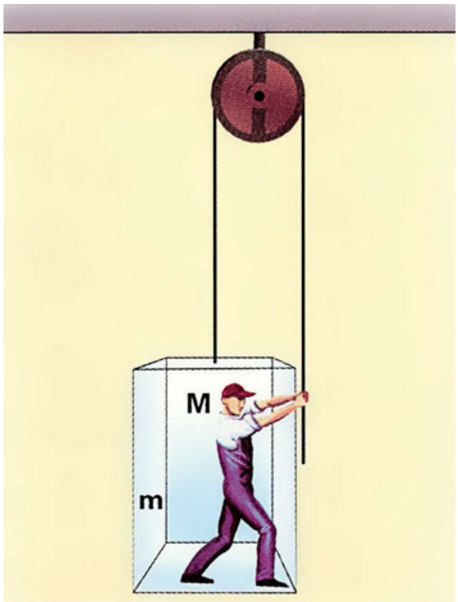


4.39 Σώμα Σ βάρους $B = 10N$ ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα Σ είναι δεμένο με δύο σχοινιά, τα οποία διέρχονται από δύο τροχαλίες που έχουν στα άκρα τους τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με βάρη $B_1 = 4N$ και $B_2 = 2N$ αντίστοιχα. Αν το ένα σχοινί είναι οριζόντιο, ζητούνται:



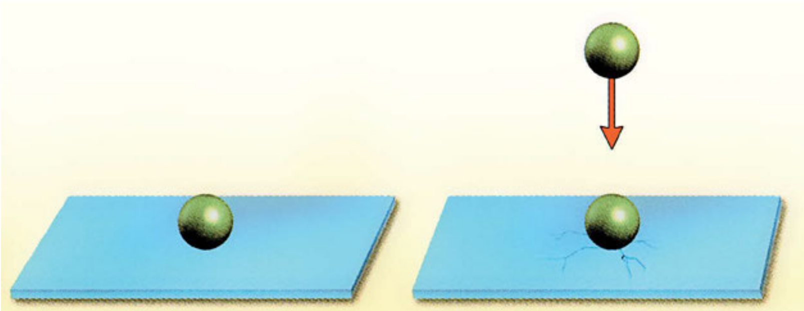
α) η γωνία φ που σχηματίζει το άλλο σχοινί με το οριζόντιο επίπεδο
β) η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα Σ, αν κοπεί ένα από τα δύο σχοινιά. ($g = 10m/s^2$)

4.40 Άνθρωπος μάζας $M = 80kg$ βρίσκεται μέσα σε ένα αναβατόριο μάζας $m = 20kg$, που συγκρατείται από μια τροχαλία όπως δείχνει το σχήμα.
α) Πόση δύναμη πρέπει να ασκεί ο άνθρωπος στο σχοινί, για να ανεβαίνει με επιτάχυνση $α = 2m/s^2$;
β) Πόση θα είναι η επιτάχυνση με την οποία θα ανεβαίνει, αν ασκεί δύναμη ίση με το βάρος του; ($g = 10m/s^2$)

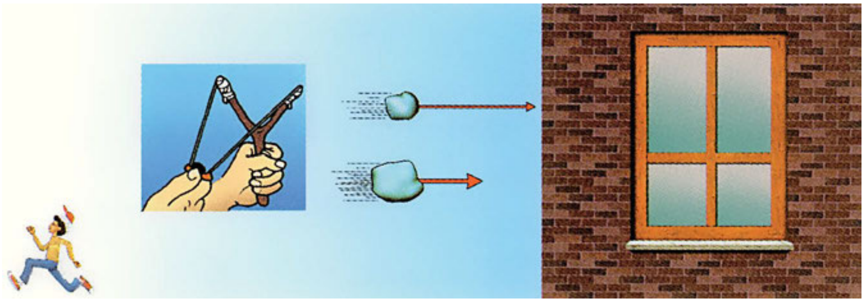


4.6 Ορμή

Μια σιδερένια σφαίρα ισορροπεί σε μια γυάλινη επιφάνεια χωρίς το γυαλί να σπάσει. Η ίδια σφαίρα αν αφεθεί να πέσει από κατάλληλο ύψος, είναι δυνατόν να προκαλέσει τη θραύση του γυαλιού.



Το παιδάκι στην εικόνα 4.45 κάνοντας την αταξία του διαπιστώνει ότι: το σπάσιμο του τζαμιού και το μέγεθος της ζημιάς εξαρτώνται από το μέγεθος της πέτρας και από το τέντωμα του λάστιχου της σφεντόνας του.



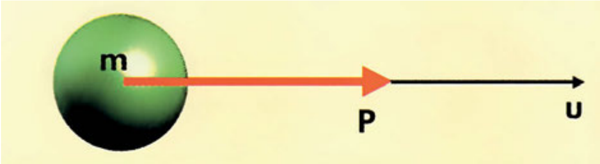
Εικόνα 4.45
Λάθος στόχος από "λάθος" σκοπευτή...

Γενικότερα, υπάρχουν φαινόμενα τα οποία εξαρτώνται τόσο από την μάζα των σωμάτων όσο και από την ταχύτητά τους. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην ανάγκη ορισμού ενός φυσικού μεγέθους, το οποίο χαρακτηρίζει τα κινούμενα σώματα και ονομάζεται **ορμή.**

Ορμή $\vec{P}$ ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ονομάζουμε το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την ταχύτητά του.

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{\upsilon}} \qquad (4.11)$$

Η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος, πάντοτε συγγραμμικό και ομόρροπο της ταχύτητας, ενώ η μονάδα μέτρησής του στο SI είναι το 1kg·m/s.



Επειδή $1N=1kg\cdot m/s^2$, εύκολα αποδεικνύεται ότι η ορμή μπορεί να μετριέται και σε $N\cdot s$.

4.6.1 Σύστημα - Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις

Σύστημα για τη Φυσική είναι ένα οποιοδήποτε τμήμα του υλικού κόσμου, το οποίο μελετάμε, αφού το απομονώσουμε νοητά από όλο τον υπόλοιπο υλικό κόσμο. **Περιβάλλον** του συστήματος είναι ό,τι δεν ανήκει στο σύστημα, δηλαδή ο υπόλοιπος υλικός κόσμος.

Σύστημα, για παράδειγμα, μπορεί να είναι ένα άτομο ή ένα ηλεκτρόνιο ή όλα τα μόρια ενός αερίου. Σύστημα, όμως, μπορεί να είναι η Γη με τη Σελήνη ή ένας γαλαξίας ή και μια ομάδα γαλαξιών. Επίσης, σύστημα μπορεί να είναι η σχολική μας αίθουσα, οπότε περιβάλλον θα είναι ό,τι υπάρχει έξω από αυτήν.

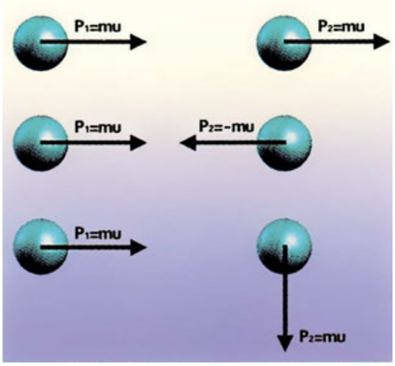
Σύστημα μπορεί να είναι οτιδήποτε...

Ένα σύστημα είναι δυνατόν να αποτελείται από περισσότερα του ενός σώματα. Στην περίπτωση αυτή η ορμή του συστήματος θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των ορμών όλων των σωμάτων του συστήματος, **δηλαδή:**

$$\vec{P}_{ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_ν$$

Για παράδειγμα, το σύστημά μας αποτελείται από δύο σφαίρες ίσης μάζας και ίσου μέτρου ταχύτητας. Η ορμή του θα είναι:

$\vec{P}_{ΣΥΣ} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$, και ανάλογα με το πώς κινούνται οι σφαίρες είναι δυνατόν να έχουμε διάφορες περιπτώσεις όπως:



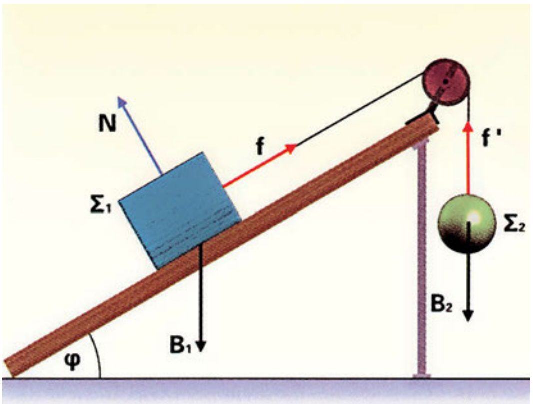
$$P_{ΣΥΣ} = P_1 + P_2 = mυ + mυ = 2mυ$$

$$P_{ΣΥΣ} = P_1 - P_2 = mυ - mυ = 0$$

$$P_{ΣΥΣ} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{(mυ)^2 + (mυ)^2} = mυ\sqrt{2}$$

Προσέξτε ότι οι ορμές προστίθενται όπως και οι δυνάμεις, ακολουθούν δηλαδή τους νόμους σύνθεσης των διανυσμάτων.

Εσωτερικές δυνάμεις σ' ένα σύστημα είναι εκείνες οι οποίες ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος, ενώ **εξωτερικές** δυνάμεις είναι εκείνες οι οποίες ασκούνται στα σώματα του συστήματος από το περιβάλλον του.



Εικόνα 4.46

Στο παράδειγμα του σχήματος της εικόνας 4.46 αν λάβουμε ως **σύστημα** τα δύο **σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$** μαζί με το **σχοινί** που τα συνδέει, τότε εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος θα είναι μόνο οι **τάσεις του νήματος** f και f΄, ενώ εξωτερικές, όλες οι υπόλοιπες.

Αν συμπεριλάβουμε στο σύστημα και το λείο κεκλιμένο επίπεδο, τότε η δύναμη Ν μετατρέπεται σε εσωτερική, διότι ασκείται από ένα σώμα του συστήματος (κεκλιμένο επίπεδο) σε άλλο σώμα του συστήματος (σώμα $Σ_1$).

Εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα (4.3), όπου θα χαρακτηρίζονται οι διάφορες δυνάμεις ως εσωτερικές ή εξωτερικές ανάλογα με την επιλογή των σωμάτων που θα αποτελούν το σύστημα:

(Θεωρούμε ότι τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ δεν αλληλεπιδρούν με δυνάμεις πεδίου)

Πίνακας 4.3: Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις συστημάτων		
ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ	ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ	ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ
Σ_1, Σ_2, νήμα	f και f΄	N, B_1, B_2,
Σ_1, Σ_2, νήμα, κεκλιμένο επίπεδο	f, f΄, N	B_1, B_2
Σ_1, Σ_2, νήμα, κεκλιμένο επίπεδο, γη	όλες	καμία
Σ_1, Σ_2, γη	B_1, B_2	N, f, f΄
Σ_1, Σ_2	καμία	όλες

Επομένως, ανάλογα με το ποια σώματα αποτελούν το σύστημα οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ τους θα χαρακτηριστούν εσωτερικές ή εξωτερικές.

4.7 Μεταβολή της ορμής και δύναμη

Αν κάποιος επεξεργαστεί με μαθηματικό τρόπο το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής $\vec{F} = m\vec{\alpha}$ εύκολα θα διαπιστώσει ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή της ορμής του. Πράγματι:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = m\vec{\alpha}\\ \vec{\alpha} = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{F} = m\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\\ \vec{P} = m\vec{\upsilon} \text{ ή } \Delta\vec{P} = m\Delta\vec{\upsilon}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}} \qquad (4.12)$$

Η μάζα του σώματος θεωρείται σταθερή (m=στ.), ενώ $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

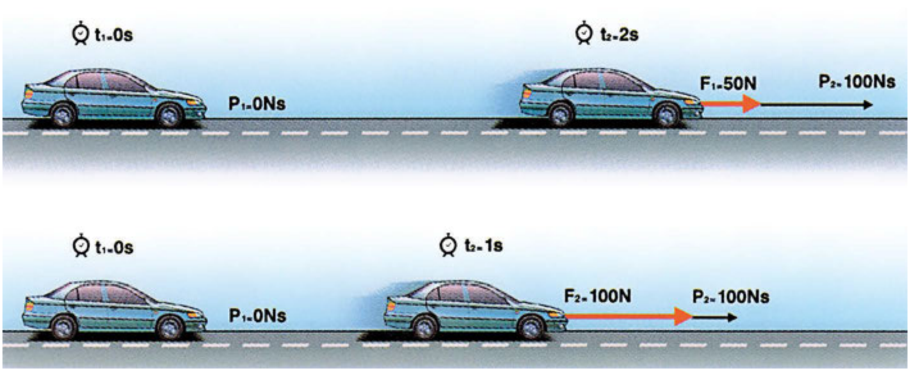
Η τελευταία εξίσωση (4.12) μας πληροφορεί ότι κάθε μεταβολή στην ορμή $\Delta\vec{P}$ ενός σώματος οφείλεται στη δράση επί του σώματος δύναμης $\vec{F}$ για κάποιο χρονικό διάστημα Δt. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή και ως **γενικευμένος νόμος της δυναμικής,** επειδή, όπως μπορεί να αποδειχθεί, ισχύει και στις περιπτώσεις που η μάζα των σωμάτων δεν παραμένει σταθερή (π.χ. η μάζα ενός πυραύλου, που κινείται εκτοξεύοντας αέρια, ή ενός αφηρημένου διαβάτη μέσα σε καταρρακτώδη βροχή). Αν επιλύσουμε το γενικευμένο νόμο ως προς $\Delta\vec{P}$, προφανώς θα βρούμε ότι:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t\,.$$

Η τελευταία αυτή σχέση έχει να μας πει πολύ σημαντικά πράγματα:

Το γεγονός ότι μια δεδομένη μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{P}$ κάποιου σώματος εξαρτάται από το γινόμενο της δύναμης που ασκείται πάνω του επί το χρόνο επενεργείας της, σημαίνει ότι η συγκεκριμένη αυτή μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{P}$ μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς και διάφορους συνδυασμούς των τιμών της δύναμης F και του χρόνου Δt. Θα μπορούσαμε, δηλαδή, να ασκήσουμε μικρή δύναμη για πολύ χρόνο ή μεγάλη δύναμη για λίγο χρόνο κτλ.

Ας δούμε όμως ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:
Το αυτοκίνητο της εικόνας 4.47, που αρχικά ηρεμεί (P_1=0), θέλουμε να αποκτήσει ορμή P_2=100Ns, δηλαδή να επιφέρουμε μια μεταβολή στην ορμή του ΔP= P_2-P_1 = 100Ns.



Εικόνα 4.47

Σύμφωνα με την εξίσωση ΔP = FΔt μπορούμε να ασκήσουμε δύναμη F=50N επί χρόνο Δt=2s, αλλά μπορούμε επίσης να ασκήσουμε διπλάσια δύναμη F=100N επί χρόνο Δt=1s (μισός χρόνος). Βεβαίως, υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί δύναμης και χρόνου, για να επιτύχουμε την ίδια μεταβολή της ορμής. Όλοι αυτοί οι συνδυασμοί έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: **μεγάλη τιμή δύναμης σημαίνει μικρό χρονικό διάστημα και αντιστρόφως** (όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα 4.4).

Πίνακας 4.4

Μεταβολή της ορμής ΔP (Ns)	Δύναμη F(N)	Χρονικό διάστημα Δt(s)
100	50	2
	100	1
	1000	0,1
	κτλ	κτλ

Με βάση τη σχέση αυτή μεταξύ δύναμης και χρόνου, για συγκεκριμένη πάντα μεταβολή της ορμής μπορούν να ερμηνευθούν διάφορες καταστάσεις από την καθημερινή ζωή. (εικόνα 4.48)

Εικόνα 4.48

Έτσι εξηγείται το γεγονός ότι οι αθλητές του μπάσκετ χρησιμοποιούν ειδικά παπούτσια, όταν παίζουν, ότι οι σκιέρ, όταν ανατρέπονται, συνήθως δε “χτυπάνε” παρά την μεγάλη ταχύτητά τους, ότι οι αθλητές του “ύψους” και του “άλματος επί κοντώ” πέφτουν πάνω σε ελαστικά στρώματα μετά το άλμα τους, ότι οι ποδοσφαιρικοί αγώνες γίνονται σε γήπεδα με ειδικό χλοοτάπητα κτλ.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ουσιαστικά επιδιώκεται η αύξηση του χρόνου μεταβολής της ορμής, ώστε να μειωθεί η μέγιστη τιμή της δύναμης προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι επιπτώσεις της.

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι φανερό ότι:

Εικόνα 4.49
Μεγάλη μεταβολή της ορμής σε μικρό χρονικό διάστημα προκαλεί δύναμη με καταστρεπτικά αποτελέσματα (φωτογραφία από crash-test).

Εικόνα 4.50
Οι αλεξιπτωτιστές των Ειδικών Δυνάμεων κατά την πρόσκρουσή τους με τη γη λυγίζουν τα πόδια τους και, αφού διαγράψουν μια περιστροφή γύρω από τον άξονά τους, εκτελούν στο έδαφος μια κυβίστηση (“βαρελάκι”).

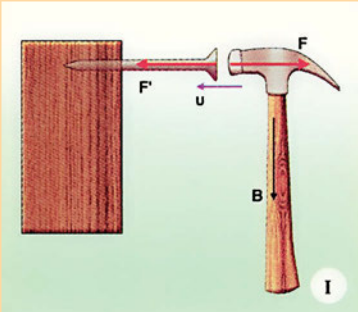
- Για να μεταβληθεί η ορμή ενός σώματος, πρέπει να του ασκήσουμε δύναμη.
- Όσο πιο γρήγορα αλλάζει η ορμή, τόσο μεγαλύτερη δύναμη απαιτείται.
- Προκειμένου να αποφύγουμε την ανάπτυξη δυνάμεων με καταστρεπτικά αποτελέσματα, φροντίζουμε με κατάλληλες τεχνικές να αυξάνουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται, για να επιφέρουμε τη μεταβολή της ορμής που επιδιώκουμε.

Παραδείγματα για τον υπολογισμό της δύναμης λόγω μεταβολής της ορμής

Θέλουμε να καρφώσουμε ένα καρφί κάθετα στον τοίχο (Ι) και άλλο ένα στο πάτωμα (ΙΙ). Χρησιμοποιούμε ένα σφυρί μάζας m = 2 kg, το οποίο προσκρούει στο καρφί με ταχύτητα υ = 10m/s και ακινητοποιείται. Η διάρκεια του χτυπήματος είναι Δt = 0,01sec. Ζητούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί το σφυρί στο καρφί στις δύο αυτές περιπτώσεις. ($g = 10m/sec^2$)

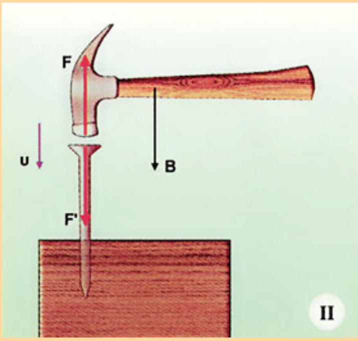
Λύση

Επειδή για το καρφί δεν έχουμε πληροφορίες (μάζα, ταχύτητα κτλ.), υπολογίζουμε τη δύναμη F, που δέχεται το σφυρί, και λόγω του αξιώματος “δράσης-αντίδρασης” μπορούμε να βρούμε τη δύναμη F΄, που δέχεται το καρφί.



Περίπτωση(Ι):

Εφαρμόζοντας το νόμο μεταβολής της ορμής για το σφυρί έχουμε ότι:



$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}_{τελ} - \vec{P}_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{\vec{0} - \vec{P}_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{-m\vec{υ}}{\Delta t}$$

Από την τελευταία σχέση $\vec{F} = \frac{-m\vec{υ}}{\Delta t}$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι η δύναμη F, την οποία δέχεται το σφυρί και η ταχύτητά του υ είναι διανύσματα αντίρροπα (προφανώς λόγω του αρνητικού προσήμου του β΄ μέλους της σχέσης).

Θα πρέπει τώρα τη διανυσματική αυτή σχέση να τη μετατρέψουμε σε σχέση αλγεβρικών τιμών των διανυσμάτων, προκειμένου να βρούμε τη ζητούμενη τιμή της δύναμης. **Αυτό είναι κάτι πολύ απλό,** αφού το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να **ορίσουμε αυθαίρετα** μια θετική φορά (έστω της δύναμης) και στη συνέχεια για όποιο διάνυσμα έχει **θετική φορά** να πάρουμε **θετική αλγεβρική τιμή** (δύναμη F) και για όποιο έχει **αρνητική φορά** να πάρουμε **αρνητική αλγεβρική τιμή** (ταχύτητα υ).
Έτσι, η διανυσματική σχέση θα γίνει:

$$F = \frac{-m(-\upsilon)}{\Delta t} = \frac{m\upsilon}{\Delta t} = \frac{2kg \cdot 10m/s}{0,01s} = 2000\,N$$

Τελικά, η **απάντηση** είναι ότι η δύναμη την οποία δέχεται το σφυρί έχει μέτρο 2000N και η φορά της είναι αντίθετη της ταχύτητας του σφυριού, ενώ η δύναμη F΄ που ασκείται στο καρφί έχει μέτρο πάλι 2000N (δράση - αντίδραση) και φορά ομόρροπη της ταχύτητας του σφυριού.

Σημειώστε ότι το βάρος του σφυριού δεν εμπλέκεται καθόλου στις εξισώσεις μας, διότι δεν έχει συνιστώσα κατά τον άξονα κίνησης του σφυριού.

Περίπτωση (ΙΙ)

Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε ότι στον άξονα κίνησης δρα και το βάρος μαζί με τη ζητούμενη δύναμη F, οπότε ο νόμος μεταβολής της ορμής θα έχει τη μορφή:

$$\vec{F}_{ΟΛ} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} + \vec{B} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} + \vec{B} = \frac{\vec{P}_{τελ} - \vec{P}_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{\vec{0} - \vec{P}_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{-m\vec{\upsilon}}{\Delta t}$$

και τελικά: $\vec{F} + \vec{B} = \frac{-m\vec{\upsilon}}{\Delta t}$, οπότε λαμβάνοντας θετική τη φορά, έστω της ταχύτητας, θα έχουμε ότι:

$-F + B = \frac{-m\upsilon}{\Delta t}$ ή $F = B + \frac{m\upsilon}{\Delta t}$ και επειδή $B = mg$,

τελικά θα έχουμε $F = mg + \frac{m\upsilon}{\Delta t}$ και μετά την αντικατάσταση και τις πράξεις θα βρούμε **F=2020N.**

Στην περίπτωση αυτή, επομένως, το καρφί δέχεται (άρα και ανταποδίδει) μεγαλύτερη δύναμη εξαιτίας της συνεισφοράς του βάρους του σφυριού.

Μπαλάκι του τένις μάζας m=250g κινούμενο (σχεδόν) κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου 50m/s αποκρούεται, με αποτέλεσμα να αντιστραφεί η φορά της ταχύτητας δίχως να αλλάξει το μέτρο της. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που του ασκήθηκε από τη ρακέτα, αν η διάρκεια της απόκρουσης ήταν 0,02 s. ($g = 10m/sec^2$).

Λύση

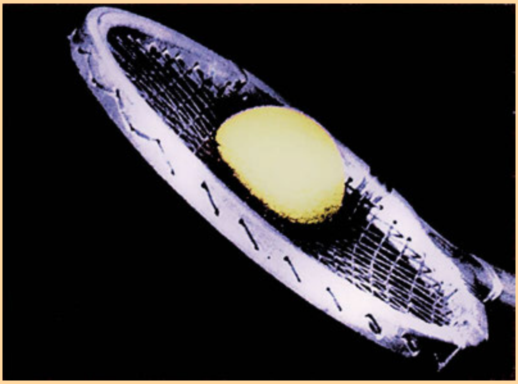
Εφαρμόζοντας το νόμο μεταβολής της ορμής θα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

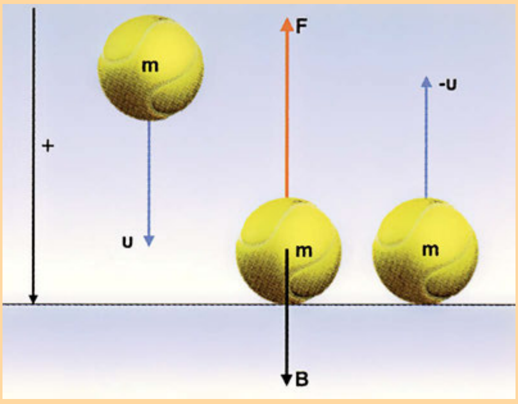
$$\vec{F}_{Ολ} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} + \vec{B} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} + \vec{B} = \frac{\vec{P}_{τελ} - \vec{P}_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{m\vec{υ}_{τελ} - m\vec{υ}_{αρχ}}{\Delta t}.$$

Επιλέγοντας θετική φορά έστω του βάρους θα έχουμε ότι:

$$-F + B = \frac{-mυ - mυ}{\Delta t} = \frac{-2mυ}{\Delta t} \Rightarrow F = B + \frac{2mυ}{\Delta t}$$

και μετά την αντικατάσταση και τις πράξεις βρίσκουμε F = 1252,5N.



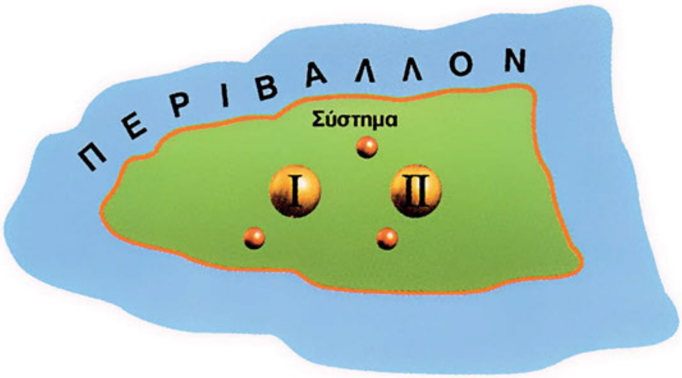


(Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η τιμή της δύναμης που βρήκαμε αντιπροσωπεύει μια μέση τιμή της. Η ρακέτα προφανώς ανταποδίδει δύναμη στο μπαλάκι, η οποία κυμαίνεται μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής. Αυτό, συμβαίνει, διότι η επαφή της ρακέτας με το μπαλάκι γίνεται συνεχώς καλύτερη, μέχρι τελικά να γίνει πλήρης).

4.8 Η αρχή διατήρησης της ορμής και οι εφαρμογές της

Ας υποθέσουμε ότι μελετάμε ένα σύστημα σωμάτων, το οποίο δε δέχεται δυνάμεις από το περιβάλλον του. Επομένως, οι μόνες δυνάμεις που υπάρχουν είναι μεταξύ των σωμάτων του συστήματος, δηλαδή οι εσωτερικές. Λόγω του αξιώματος δράσης-αντίδρασης, όπως είναι γνωστό, οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη αντίθετων δυνάμεων.

Ας δούμε τι συμβαίνει στην ορμή του συστήματος, όταν δύο από τα σώματα ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο.



Εικόνα 4.51
Σύστημα σωμάτων

Το σώμα **I** δέχεται την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ από το σώμα **II,** επομένως η ορμή του θα μεταβληθεί κατά $\Delta\vec{P}_{I} = \vec{F}\Delta t$. Το σώμα **II** δέχεται και αυτό από το σώμα **I** δύναμη $-\vec{F}$, οπότε, επίσης θα μεταβάλει την ορμή του κατά $\Delta\vec{P}_{II} = -\vec{F}\Delta t$. Η συνολική μεταβολή στην ορμή του συστήματος θα είναι προφανώς $\Delta\vec{P}_{ολ} = \Delta\vec{P}_{I} + \Delta\vec{P}_{II} = \vec{0}$.

Αν επεκτείνουμε την παραπάνω μέθοδο για όλα τα σώματα του συστήματος, θα καταλήξουμε σε ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα για τη Φυσική, το οποίο ονομάζεται **αρχή διατήρησης της ορμής:**

"Όταν σε ένα σύστημα σωμάτων η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, τότε η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή".

Παρατηρήσεις

● Η **αρχή διατήρησης της ορμής** μαζί με την **αρχή διατήρησης της ενέργειας** (Κεφάλαιο 5) και την **αρχή διατήρησης της στροφορμής** (Κεφάλαιο 6), έχουν τεράστια πρακτική και θεωρητική σημασία για τη Φυσική. Είναι απλές, έχουν καθολική ισχύ και αποτελούν τα κλειδιά για κάθε ερευνητική δραστηριότητα.

● Ο νόμος μεταβολής της ορμής για ένα σύστημα σωμάτων παίρνει την εξής μορφή:

$$\boxed{\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}} \qquad (4.13)$$

από την οποία εύκολα συνάγεται ότι αν $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0}$, τότε και $\Delta\vec{P} = \vec{0}$, δηλαδή η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

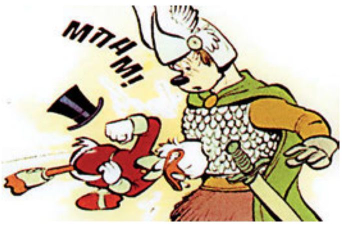
● Οι εσωτερικές δυνάμεις **μπορούν** να μεταβάλουν τις ταχύτητες των σωμάτων του συστήματος **αλλά με τέτοιο τρόπο, ώστε η ορμή του συστήματος να παραμένει πάντοτε σταθερή.**

● Οι εσωτερικές δυνάμεις **δεν μπορούν να μεταβάλουν την ορμή του συστήματος.**

Μερικές εφαρμογές της αρχής διατήρησης της ορμής

1) Κρούσεις

Με τον όρο κρούση στη Φυσική εννοούμε μια αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ή περισσότερων σωμάτων, κατά την οποία:



● Αναπτύσσονται ισχυρότατες δυνάμεις σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα.

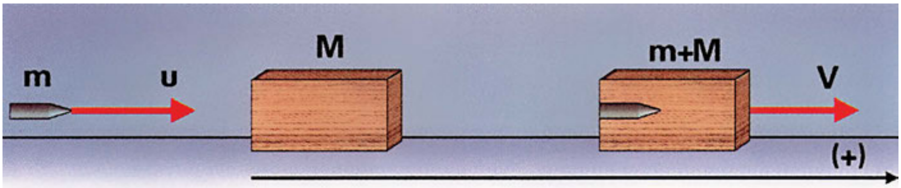
● Η κινητική κατάσταση των συγκρουόμενων σωμάτων μεταβάλλεται απότομα, με αποτέλεσμα να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε με σαφήνεια τις χρονικές στιγμές «πριν» και «μετά» την κρούση.

● Ισχύει **πάντα** η αρχή διατήρησης της ορμής, διότι οι εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες ενδεχομένως ασκούνται στο σύστημα των συγκρουόμενων σωμάτων, είναι πολύ μικρότερες από τις εσωτερικές δυνάμεις, που αναπτύσσονται κατά την κρούση.

● Η κρούση στην οποία διατηρείται σταθερή η συνολική κινητική κατάσταση του συστήματος λέγεται **ελαστική.**

● Όταν δύο σώματα μετά την κρούση συνιστούν ένα νέο σώμα **(συσσωμάτωμα), τότε έχουμε μη ελαστική ή πλαστική** κρούση.

Στο παράδειγμα του σχήματος ένα βλήμα μάζας m και ταχύτητας υ κινούμενο οριζόντια σφηνώνεται σε ένα αρχικά ακίνητο κομμάτι ξύλου μάζας M. Θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.



Λύση

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για το σύστημα «βλήμα-ξύλο» θα ισχύει η **αρχή διατήρησης της ορμής,** οπότε θα έχουμε:

$\mathbf{P_{πριν} = P_{μετά}}$, δηλαδή $\mathbf{mυ + 0 = (m+M)V} \Rightarrow \boxed{V = \dfrac{mυ}{m+M}}$ (1)

Αν, τώρα, θέλαμε να βρούμε πόση είναι η εσωτερική δύναμη με την οποία αλληλεπιδρούν το βλήμα και το ξύλο, θα πρέπει να εφαρμόσουμε το νόμο μεταβολής της ορμής για ένα από τα δύο σώματα:

Βλήμα: $\mathbf{ΔP = P_{μετά} - P_{πριν} = mV - mυ}$ και λόγω της (1) μετά τις πράξεις βρίσκουμε

ότι $ΔP = -\dfrac{mMυ}{m+M}$, επομένως η δύναμη που δέχεται είναι:

$$F = -\frac{mMυ}{(m+M)Δt}.$$

Ξύλο: $\mathbf{ΔP = P_{μετά} - P_{πριν} = MV - 0}$ και λόγω της (1) μετά τις πράξεις βρίσκουμε

ότι $ΔP = -\dfrac{mMυ}{m+M}$, επομένως η δύναμη που δέχεται είναι:

$$F = \frac{mMυ}{(m+M)Δt}.$$

Τι παρατηρείτε σχετικά με τις δυνάμεις που ασκούνται στο βλήμα και στο ξύλο;

2) Ανάκρουση πυροβόλων όπλων

Κατά την εκπυρσοκρότηση ενός πυροβόλου όπλου οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις είναι εσωτερικές και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να μεταβάλουν την ορμή του συστήματος «όπλο-σφαίρα».

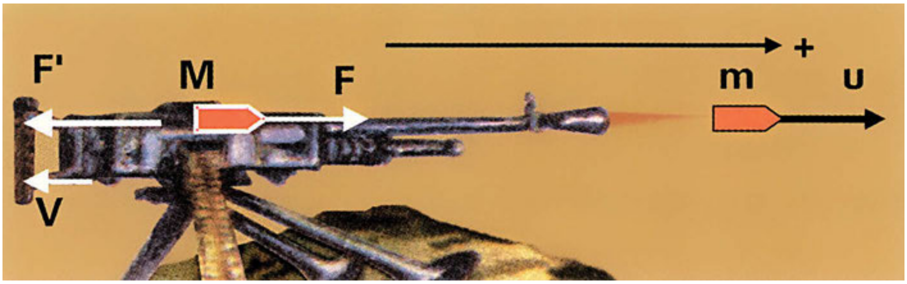
Ας θεωρήσουμε ένα πολεμικό όπλο, αρχικά ακίνητο, μάζας Μ, το οποίο φέρει στη θαλάμη του σφαίρα μάζας m. Η αρχική ορμή του συστήματος, πριν από την εκπυρσοκρότηση, είναι προφανώς ίση με μηδέν $\mathbf{P_{αρχ}= 0}$. Μετά την εκπυρσοκρότηση η σφαίρα αποκτά ορμή $\mathbf{P_{σφ}=mυ}$, ενώ το όπλο θα πρέπει να αποκτήσει αντίθετη ορμή, τέτοια ώστε η ορμή του συστήματος «όπλο-σφαίρα» να εξακολουθεί να είναι μηδέν. Λέμε ότι το όπλο ανακρούεται, δηλαδή κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης της σφαίρας.

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε την ταχύτητα ανάκρουσης του όπλου, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\mathbf{P_{αρχ}= 0 \text{ και } P_{τελ} = P_{σφ} + P_{οπλ} = mυ + MV}$$

$$\mathbf{\text{Όμως } P_{αρχ} = P_{τελ} \text{ ή } 0 = mυ + MV \text{ άρα }} \boxed{V = -\frac{mυ}{M}}$$

(Το αρνητικό πρόσημο στην τελευταία σχέση δείχνει ότι το όπλο κινείται αντίθετα από τη σφαίρα. Το γεγονός εξάλλου ότι: $m \ll M$ σημαίνει ότι (ευτυχώς!) η ταχύτητα ανάκρουσης V του όπλου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα της σφαίρας. *(Γιατί ευτυχώς;)*



3) Βαδίζοντας σε μια βάρκα

Ένας ναύτης μάζας m αρχίζει να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα υ πάνω σε μια αρχικά ακίνητη βάρκα μήκους L και μάζας Μ. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μετατόπιση της βάρκας ως προς την προκυμαία, όταν ο ναύτης βαδίσει από το ένα άκρο της βάρκας στο άλλο.

Στο σύστημα «άνθρωπος-βάρκα» οι εξωτερικές δυνάμεις βάρος και άνωση έχουν μηδενική συνισταμένη (η αντίσταση του νερού θεωρείται αμελητέα), οπότε ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Η αρχική ορμή του συστήματος είναι μηδέν. Όταν αρχίζει να βαδίζει ο άνθρωπος, η βάρκα μετατοπίζεται αντίθετα, προκειμένου η ορμή του συστήματος να εξακολουθεί να παραμένει ίση με μηδέν. Έστω υ η ταχύτητα του ανθρώπου και V η ταχύτητα της βάρκας, θα ισχύουν:

$P_{αρχ} = 0$, $P_{τελ} = mυ - MV$ όμως $P_{αρχ} = P_{τελ}$ ή $0 = mυ - MV$ ή $V = \dfrac{mυ}{M}$ (1).

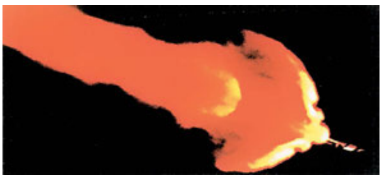
Αν υποθέσουμε ότι η βάρκα μετατοπίζεται κατά X ως προς την προκυμαία, τότε προφανώς ο άνθρωπος θα μετατοπιστεί κατά L-X. Αν η διάρκεια κίνησης του ανθρώπου είναι Δt, θα έχουμε: $υ = \dfrac{L - X}{\Delta t}$

και $V = \dfrac{X}{\Delta t}$, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε: $\dfrac{X}{\Delta t} = \dfrac{m(L - X)}{M\Delta t}$

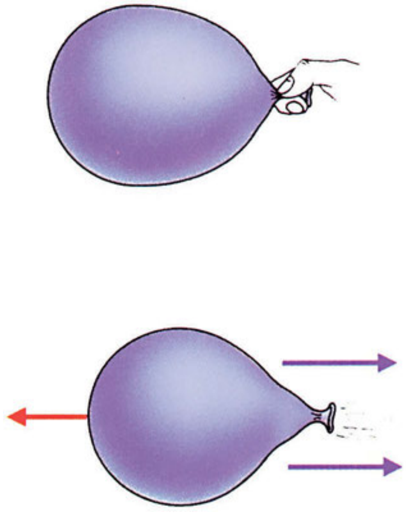
(πράξεις) προκύπτει τελικά: $X = \dfrac{m}{m + M} L$ (2).

Από τη σχέση (2) φαίνεται καθαρά ότι η μετατόπιση x της βάρκας (για δεδομένο L) εξαρτάται από τη σχέση των μαζών m, M. Προσπαθήστε να ερευνήσετε περισσότερο το φαινόμενο: θα είχαμε π.χ. τα ίδια φαινόμενα αν αντί για βάρκα είχαμε ένα αεροπλανοφόρο, ή αν, αντί για τον αδύνατο ναύτη είχαμε στη βάρκα έναν ευτραφή άντρα;

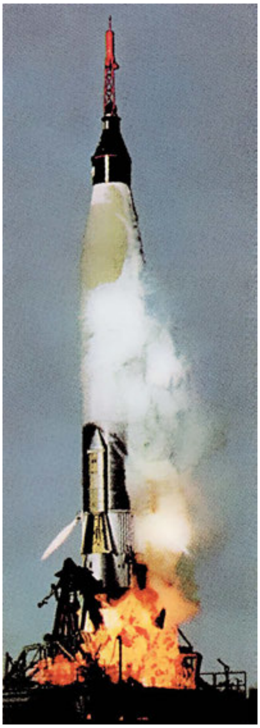
4) Η αρχή κίνησης του πυραύλου



Οι πύραυλοι μαζί με την υγρή καύσιμη ύλη τους φέρουν και υγρό οξυγόνο, που το χρησιμοποιούν ως οξειδωτικό. Κατά την απογείωση τα δύο αυτά υγρά αναμειγνύονται με κατάλληλο τρόπο και από την καύση τους παράγονται μεγάλες μάζες θερμών αερίων, που εκρέουν με μεγάλη ταχύτητα προς το έδαφος. Επειδή οι δυνάμεις που αναπτύσσονται από την καύση είναι εσωτερικές, ο πύραυλος αποκτά ορμή αντίθετη των εκπεμπόμενων αερίων κι έτσι απογειώνεται (εικόνα 4.53). Η δύναμη που δέχεται ο πύραυλος εξαρτάται από το ρυθμό εκροής και από την ταχύτητα των αερίων της καύσης.



Εικόνα 4.52
Η αρχή κίνησης του πυραύλου ισχύει και στην περίπτωση ενός απλού μπαλονιού.



Εικόνα 4.53
Απογείωση μέσα σε φωτιά και πάγο. Ένας πύραυλος τύπου ΑΤΛΑΣ απογειώνεται, ενώ από την επιφάνειά του πέφτουν κομμάτια πάγου. Ο σχηματισμός του πάγου οφείλεται στην πήξη των υδρατμών του αέρα, που έρχονται σε επαφή με τις δεξαμενές του υγρού οξυγόνου.

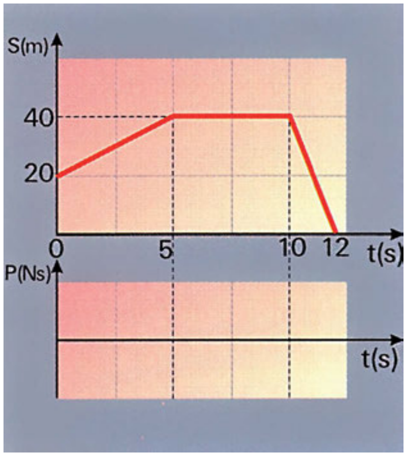
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.41 Να συμπληρωθούν τα κενά:
Η ορμή ενός σώματος είναι .... μέγεθος, το μέτρο της υπολογίζεται από την εξίσωση .... και η μονάδα μέτρησής της στο SI είναι .... ή ....

4.42 Ποιο σώμα έχει τη μεγαλύτερη ορμή;
α) φορτηγό μάζας 5tn και ταχύτητας 20km/h
β) αυτοκίνητο μάζας 980kg και ταχύτητας 20m/s
γ) βλήμα μάζας 100g και ταχύτητας 100km/h.

4.43 Οι εσωτερικές δυνάμεις δεν μπορούν να μεταβάλουν την ορμή ενός συστήματος, επειδή:
α) είναι πολύ ασθενείς □
β) ασκούνται σε διαφορετικά σώματα του συστήματος □
γ) εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη αντίθετων δυνάμεων □
δ) αλληλοεξουδετερώνονται □
Να σημειωθούν με Σ οι σωστές προτάσεις και με Λ οι λανθασμένες.

4.44 Σώμα μάζας m = 10 kg κινείται με τέτοιο τρόπο, ώστε το διάγραμμα μεταβολής του διαστήματός του με το χρόνο (s-t) να έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος. Θέλουμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα μεταβολής της ορμής του σώματος με το χρόνο (P-t).

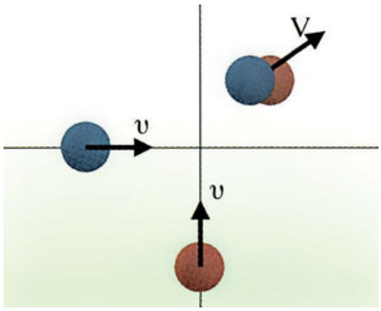


4.45 Ένας χιονοδρόμος βρίσκεται στη μέση μιας παγωμένης λίμνης. Υποθέστε ότι δεν υπάρχει τριβή. Τι νομίζετε ότι θα μπορούσε να κάνει, προκειμένου να επιστρέψει στην όχθη;

4.46 Μπορείτε να εξηγήσετε την κίνηση του "κανό" με βάση την αρχή διατήρησης της ορμής;

4.47 Ένα κρυστάλλινο ανθοδοχείο πέφτει σε στρωμένο με χαλί πάτωμα και δε σπάει. Το ίδιο ανθοδοχείο πέφτει στο πάτωμα, όταν δεν υπάρχει το χαλί, και σπάει. Γιατί;

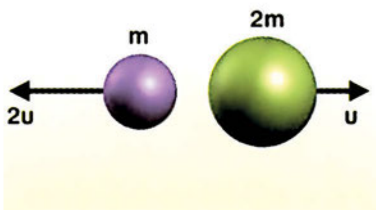
4.48 Δύο σφαίρες από πλαστελίνη ίσης μάζας m και ταχύτητας υ κινούμενες σε κάθετες διευθύνσεις συγκρούονται πλαστικά. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα V του συσσωματώματος.



4.49 Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών είναι:

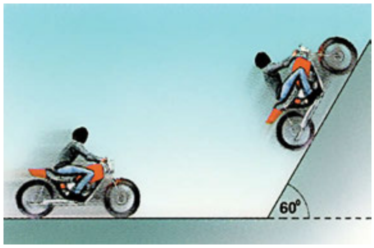
α) 4mυ □
β) μηδέν □
γ) $4m^2υ^2$ □
δ) τα στοιχεία δεν επαρκούν για να απαντήσω. □

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.



4.50 Ένα πείραμα ....
Δύο σπιρτόξυλα τοποθετούνται όπως στο σχήμα και τυλίγονται με αλουμινόχαρτο. Πλησιάζοντας τη φλόγα ενός κεριού τι θα συμβεί; Να ερμηνευτεί το φαινόμενο.

4.51 Μοτοσικλετιστής μάζας 80kg κινείται με ταχύτητα υ=10m/s σε οριζόντιο δρόμο. Κάποια στιγμή συναντάει μια ανηφόρα γωνίας κλίσης φ=60° και αρχίζει να την ανεβαίνει με την ίδια ταχύτητα. Πόση είναι η μεταβολή της ορμής του;



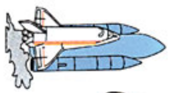
4.52 Ένα βλήμα σφηνώνεται σε ένα κομμάτι ξύλου. Σε ποια περίπτωση θα διατρέξει μεγαλύτερο διάστημα μέσα στο ξύλο;

α) Όταν το ξύλο είναι ακίνητο.
β) Όταν το ξύλο κινείται προς το βλήμα με ταχύτητα υ.
γ) Όταν το ξύλο κινείται απομακρυνόμενο από το βλήμα με ταχύτητα υ.
δ) Όταν το ξύλο κινείται προς το βλήμα με ταχύτητα 2υ.

4.53 Ποια από τα παρακάτω οχήματα κινούνται με βάση την αρχή διατήρησης της ορμής;

α) ποδήλατο 

β) βαπόρι 

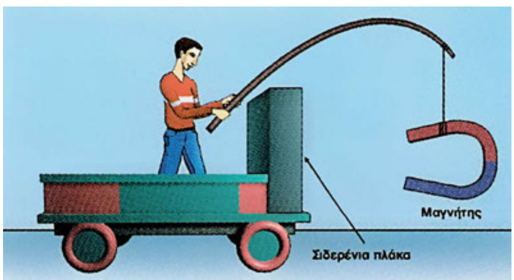
γ) πύραυλος 

δ) αυτοκίνητο 

ε) ελικοφόρο αεροπλάνο 

ζ) αερόστατο 

4.54 Ένας εφευρετικός μαθητής επινόησε το όχημα της εικόνας. Θα μπορέσει κατά τη γνώμη σας να κινηθεί το όχημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



4.55 Σημειώστε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες από τις παρακάτω προτάσεις:

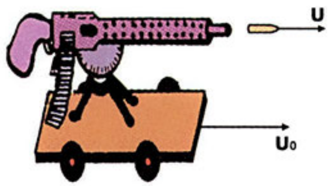
α) Όταν ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα σε μια ανηφόρα, η μεταβολή της ορμής του είναι μηδέν.
β) Όταν ένα ποδήλατο κινείται με σταθερή ταχύτητα, η μεταβολή της ορμής του είναι μηδέν.

γ) Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα και η μεταβολή της ορμής του είναι διανύσματα αντίρροπα.

δ) Για να μεταβληθεί η ορμή ενός συστήματος, πρέπει να δεχτεί δύναμη από το περιβάλλον του.

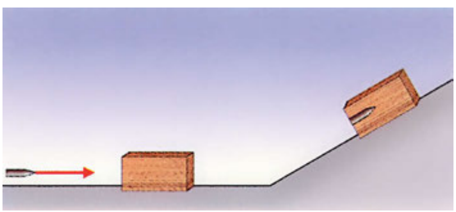
4.56 **Ένας αθλητής του "καράτε" εκτελεί ένα χτύπημα με το πόδι του, προκειμένου να σπάσει ένα τούβλο. Αν η ελάχιστη δύναμη για τη θραύση του τούβλου είναι F_0 και η ορμή που αναπτύσσει το πόδι του αθλητή είναι P, να βρεθεί ο μέγιστος χρόνος t_m, που επιτρέπεται να διαρκεί το χτύπημα, ώστε να σπάσει το τούβλο.**

4.57 **Το πυροβόλο όπλο του σχήματος τοποθετημένο σταθερά πάνω στο βαγόνι, κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_0$. Η συνολική μάζα όπλου και βαγονιού είναι M, ενώ η μάζα της σφαίρας είναι m. Κάποια στιγμή το όπλο πυροβολεί και η σφαίρα εξέρχεται από την κάννη με ταχύτητα υ. Να βρεθεί η ταχύτητα του συστήματος "όπλο-βαγόνι" μετά τον πυροβολισμό (διερεύνηση).**



4.58 **Σε μια μικρή βάρκα με πανί βρίσκονται τρεις μαθητές. Η λίμνη στην οποία ψαρεύουν είναι απόλυτα ήρεμη και επικρατεί άπνοια. Ο ένας από αυτούς κρατάει στα χέρια του έναν ισχυρό ανεμιστήρα και λέει:**
«Αν στρέψω τον ανεμιστήρα στο πανί θα είναι σαν να φυσάει ο αέρας, οπότε θα βγούμε στην ακτή». **Ο δεύτερος διαφωνεί και λέει:** ***«Δε θα κινηθούμε, διότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής».*** **Ο τρίτος, τέλος, διαφωνώντας με τους άλλους δύο, λέει:** ***«Θα κινηθούμε, αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση του ρεύματος αέρα που δημιουργεί ο ανεμιστήρας».***
Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του νερού της λίμνης αμελητέα, συζητήστε ποιος από τους τρεις έχει δίκιο.

4.59 **Βλήμα μάζας m = 100gr κινούμενο με ταχύτητα υ = 300m/s σφηνώνεται σε ακίνητο κομμάτι ξύλου μάζας M = 2,9kg. Το συσσωμάτωμα (βλήμα-ξύλο), αφού διατρέξει διάστημα**

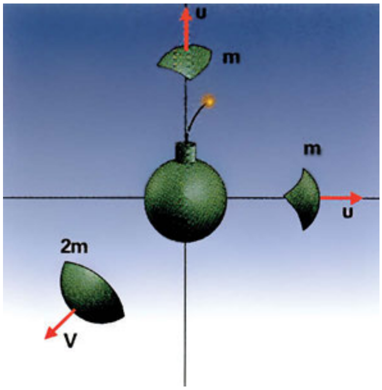


s = 10m σε λείο οριζόντιο δάπεδο, ανέρχεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ = 30°. Να υπολογιστούν:

α) Το διάστημα που διατρέχει το συσσωμάτωμα στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει να κινείται.

β) Οι χρόνοι κίνησης στο οριζόντιο και στο κεκλιμένο επίπεδο ($g = 10m/s^2$).

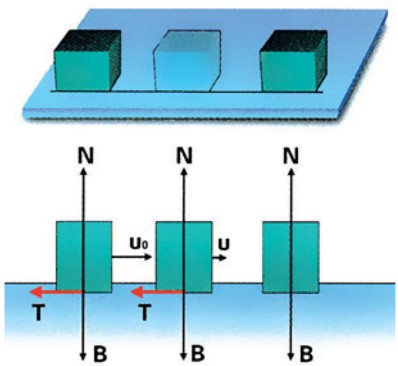
4.60 Μια βόμβα αρχικά ακίνητη εκρήγνυται και διασπάται σε τρία κομμάτια. Τα δύο από αυτά έχουν ίσες μάζες και ταχύτητες και κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους. Αν το τρίτο κομμάτι έχει διπλάσια μάζα από τα άλλα, να βρεθεί η ταχύτητά του V.



4.9 Τριβή

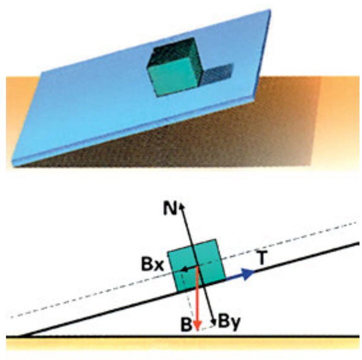
4.9.1 Δυνάμεις τριβής

Ένα σώμα το οποίο εκτοξεύεται με κάποια αρχική ταχύτητα $υ_0$ σε οριζόντιο δάπεδο, θα σταματήσει να κινείται ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα (εικόνα 4.54). Σύμφωνα με το 2° νόμο του Νεύτωνα θα πρέπει να δεχτούμε ότι το σώμα κατά την κίνησή του δέχεται συνεχώς την επίδραση μιας δύναμης Τ με φορά αντίθετη της ταχύτητάς του, η οποία το επιβραδύνει και τελικά το αναγκάζει να ακινητοποιηθεί.



Εικόνα 4.54

Ένα σώμα ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (εικόνα 4.55). Σύμφωνα με τον 1° νόμο του Νεύτωνα θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να είναι ίση με μηδέν: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι στον y-άξονα η συνιστώσα του βάρους B_y εξουδετερώνεται από την κάθετη αντίδραση Ν της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου. Στον x-άξονα, όμως, πρέπει να υποθέσουμε την ύπαρξη μιας



Εικόνα 4.55

δύναμης Τ, η οποία θα εξουδετερώνει τη συνιστώσα του βάρους B_x.

Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι, όταν οι επιφάνειες δύο σωμάτων βρίσκονται σε επαφή, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, αναπτύσσονται δυνάμεις, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα ή να παρεμποδίζουν την κίνηση των σωμάτων ή να εμποδίζουν την έναρξη της κίνησής τους.

Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται **δυνάμεις τριβής.**

Σε σχέση με τις δυνάμεις τριβής η καθημερινή ζωή μας χαρακτηρίζεται από την εξής αντίφαση: **από τη μια μεριά προσπαθούμε να τις εξαφανίσουμε και από την άλλη δε θα μπορούσαμε να ζήσουμε χωρίς αυτές.** Πράγματι:

Ένα ποσοστό της ισχύος όλων των τροχοφόρων καταναλώνεται για την υπερνίκηση των δυνάμεων τριβής.

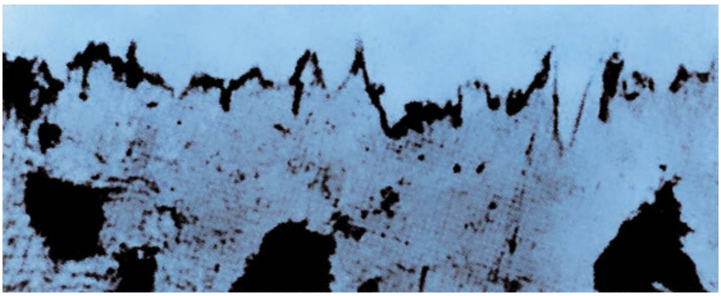
Η τριβή φθείρει και τελικά καταστρέφει τα κινητά τμήματα όλων των μηχανών. Γι'αυτό αναγκαζόμαστε να τα "λαδώνουμε" και να τα "γρασάρουμε".

Η μηχανή του αυτοκινήτου μας απαιτεί συχνή αλλαγή λαδιών, για να μην "κολλήσει", ενώ η αλυσίδα του ποδηλάτου μας χρειάζεται τακτικό "λάδωμα".

Επίσης, από τις δυνάμεις τριβής εξαρτώνται το βάδισμά μας, η δυνατότητά μας να συγκρατούμε στα χέρια μας οποιοδήποτε αντικείμενο, το ασφαλές "φρενάρισμα" ενός τροχοφόρου κ.ά..

4.9.2 Πού οφείλεται η τριβή

Όσο καλή κατεργασία λείανσης και να έχουν υποστεί οι επιφάνειες των σωμάτων, ποτέ δε θα είναι απολύτως λείες, αλλά πάντοτε θα εμφανίζουν **εσοχές και εξοχές** (ανωμαλίες). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όταν οι επιφάνειες δύο σωμάτων βρίσκονται σε επαφή, οι εξοχές της μιας επιφάνειας να εισχωρούν στις εσοχές της άλλης και αντίστροφα. Με τον τρόπο αυτό παρεμποδίζεται η σχετική κίνηση των δύο σωμάτων και μακροσκοπικά το γεγονός αυτό εκφράζεται με τις δυνάμεις τριβής.



Εικόνα 4.56
Η φωτογραφία απεικονίζει σε μεγέθυνση επιφάνεια χάλυβα που έχει υποστεί λείανση υψηλού βαθμού.

Μόνο για ανάγνωση...

Πρέπει να τονισθεί πάντως ότι οι **δυνάμεις τριβής είναι μοριακής φύσης.** Δηλαδή στις περιοχές αλληλοδιείσδυσης των ανωμαλιών τα μόρια των επιφανειών απέχουν ελάχιστα, οπότε αναπτύσσονται ισχυρές ελκτικές δυνάμεις συνοχής και συνάφειας. Με άλλα λόγια, συμβαίνουν πολυάριθμες «συγκολλήσεις» (ψυχρές βέβαια), οι οποίες παρεμποδίζουν τη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων. Έτσι, όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε ένα άλλο, η δύναμη της τριβής ουσιαστικά σχετίζεται με το σπάσιμο αυτών των χιλιάδων μικροσκοπικών συγκολλήσεων, οι οποίες συνεχώς αναδομούνται, καθώς δημιουργούνται νέες τυχαίες επαφές κατά την ολίσθηση του σώματος.

4.10 Στατική τριβή T_Σ

Οι δυνάμεις τριβής οι οποίες αναπτύσσονται μεταξύ επιφανειών που είναι ακίνητες και εμποδίζουν να αρχίσει η κίνησή τους λέγονται δυνάμεις στατικής τριβής T_Σ.

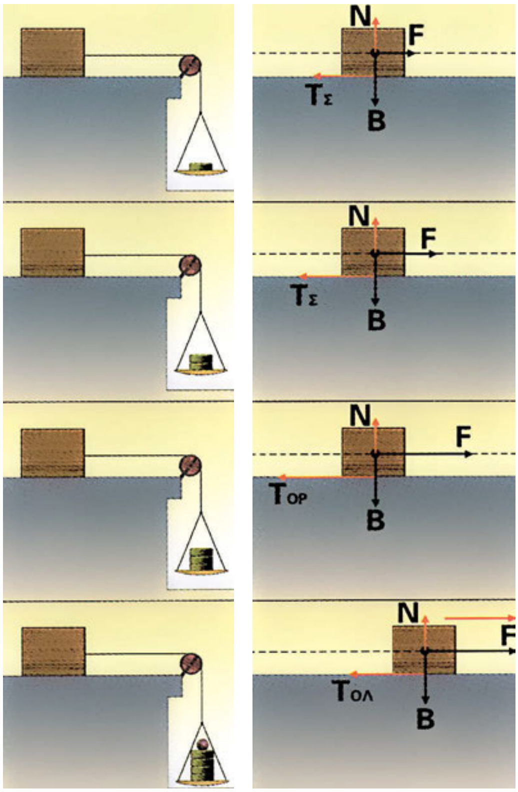
Στην παρακάτω πειραματική διάταξη της εικόνας 4.57 περιγράφονται αναλυτικά οι περιπέτειες ενός σώματος και των τριβών του.

Η **στατική τριβή T_Σ** εξουδετερώνει τη δύναμη F και δεν επιτρέπει στο σώμα να αρχίσει να κινείται. Ισχύει $T_\Sigma = F$.

Αν αυξήσουμε τη δύναμη F, τότε η στατική τριβή T_Σ αυξάνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε πάλι να εξουδετερώνει τη δύναμη F, οπότε το σώμα εξακολουθεί να παραμένει ακίνητο. Ισχύει $T_\Sigma = F$.

Η αύξηση της στατικής τριβής T_Σ τερματίζεται σε μια μέγιστη τιμή, την **οριακή τριβή** $T_{ΟΡ}$. Το σώμα είναι έτοιμο να αρχίσει να ολισθαίνει. Ισχύει $T_{Ορ} = F$.

Πράγματι, μια ελάχιστη αύξηση της δύναμης F προκαλεί την ολίσθηση του σώματος και ταυτόχρονα η στατική τριβή μετατρέπεται σε **τριβή ολίσθησης** $T_{Ολ}$
Ισχύει $T_{Ολ} < T_{Ορ}$.



Εικόνα 4.57

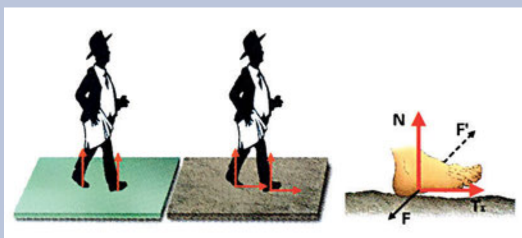
Η στατική τριβή δεν είναι μια σταθερή δύναμη, αλλά έχει την ιδιότητα να αυξάνεται ανάλογα με τη δύναμη που εμείς ασκούμε σε κάποιο σώμα στην προσπάθειά μας να το θέσουμε σε κίνηση. Βέβαια, είναι προφανές ότι η αύξηση της στατικής τριβής πρέπει κάπου να σταματάει διαφορετικά θα ζούσαμε σε έναν «ακίνητο» κόσμο.

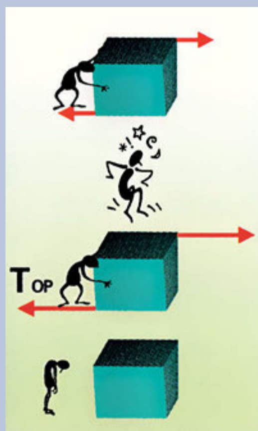
Η μέγιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει η στατική τριβή λέγεται **οριακή τριβή $T_{Ορ}$**, και για δεδομένο ζεύγος επιφανειών εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών αυτών (από τι υλικό είναι κατασκευασμένες, πόσο λείες είναι) και από την κάθετη δύναμη με την οποία αλληλεπιδρούν οι επιφάνειες, όταν είναι σε επαφή.

Όταν η δύναμη που ασκούμε, για να θέσουμε σε κίνηση ένα σώμα, υπερβεί την οριακή τριβή, τότε το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει και ταυτόχρονα η τριβή από στατική μετατρέπεται σε **τριβή ολίσθησης $T_{Ολ}$**, την οποία θα μελετήσουμε στην συνέχεια.

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΙΒΗ ΚΑΙ ΒΑΔΙΣΜΑ

Όταν βαδίζουμε ή τρέχουμε, αυτό το οποίο κάνουμε είναι να ασκούμε στο έδαφος μια δύναμη F, και λόγω του αξιώματος "Δράσης- Αντίδρασης" το έδαφος μας ανταποδίδει μια δύναμη F΄, η οποία αναλύεται στην κάθετη αντίδραση N και στην στατική τριβή $T_Σ$, η οποία μας ωθεί εμπρός κι έτσι κινούμαστε. Το βάδισμα σε απόλυτα λείο έδαφος θα ήταν αδύνατο, επειδή η F΄ θα ταυτιζόtανε με τη N οπότε δε θα υπήρχε η απαιτούμενη $T_Σ$.





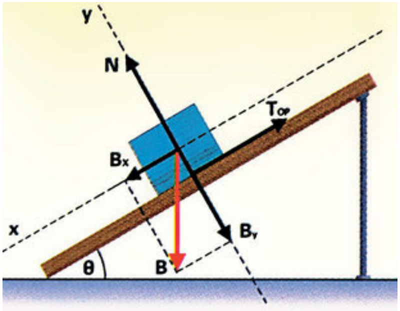
Η στατική τριβή αυξάνεται αλλά μόνο μέχρι την οριακή τιμή, επομένως....
μην εγκαταλείπετε την προσπάθεια.

Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι η οριακή τριβή είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης N και ότι εξαρτάται και από τη φύση των επιφανειών. Η διαπίστωση αυτή αποδίδεται με την εξής σχέση:

$$\boxed{T_{ορ} = η_{ορ} \cdot N} \quad (4.14)$$

όπου **$η_{ορ}$ ο συντελεστής οριακής τριβής**, του οποίου οι τιμές εξαρτώνται από το είδος των επιφανειών.

Ο υπολογισμός του $\eta_{\text{ορ}}$ είναι δυνατός με την απλή διάταξη της εικόνας 4.58:



Εικόνα 4.58

Σώμα μάζας m ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο μεταβλητής γωνίας κλίσης θ. Επιτυγχάνουμε την κατάλληλη κλίση του επιπέδου, ώστε το σώμα να είναι έτοιμο να ολισθήσει, οπότε η στατική τριβή έχει πάρει την οριακή τιμή της. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$, θα έχουμε:

$\Sigma F_x = 0$ ή $B_x - T_{\text{ορ}} = 0$ ή $B\eta\mu\theta - \eta_{\text{ορ}}N = 0$

ή $\eta_{\text{ορ}}\, N = B\eta\mu\theta$ (1)

$\Sigma F_y = 0$ ή $B_y - T_{\text{ορ}} = 0$ ή $N - B\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ ή $N = B\sigma\upsilon\nu\theta$. (2)

Τελικά, από τις (1), (2) διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\boxed{\eta_{\text{ορ}} = \varepsilon\varphi\theta} \qquad (4.15)$$

Αρκεί, επομένως, να μετρηθεί η γωνία θ, τη στιγμή ακριβώς κατά την οποία επίκειται ολίσθηση του σώματος, οπότε έχει προσδιοριστεί και ο συντελεστής οριακής τριβής.

Ας πειραματιστούμε: Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, οι συντελεστές τριβής δεν αναφέρονται μόνο σε ένα υλικό αλλά σε ζεύγη επιφανειών (και υλικών). Δεν έχει νόημα π.χ., η φράση "ο οριακός συντελεστής τριβής του ξύλου είναι... " Πρώτα, διότι πρέπει να διευκρινήσουμε για ποιο είδος ξύλου μιλάμε, και, ύστερα, διότι πρέπει να αναφέρουμε με ποιο υλικό έρχεται σε επαφή το ξύλο.

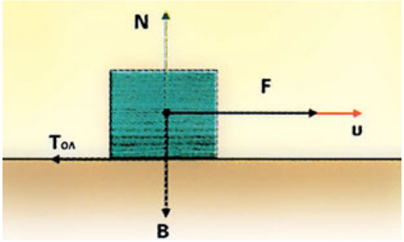
Θέλουμε, λοιπόν, να υπολογίσουμε τον οριακό συντελεστή τριβής του χαρτιού, π.χ. του εξώφυλλου στο βιβλίο Φυσικής, με το σφουγγάρι του σπόγγου. Τοποθετούμε το σπόγγο πάνω στο βιβλίο σε οριζόντια θέση. Δίνουμε κλίση στο βιβλίο από την τιμή 0° φτάνουμε σιγά-σιγά σε κάποια κλίση, όπου ο σπόγγος τείνει να ολισθήσει. Εκεί σταματάμε και μετράμε τη γωνία με μοιρογνωμόνιο και από τη σχέση (4.15) υπολογίζουμε το συντελεστή οριακής τριβής.

4.11 Τριβή ολίσθησης $T_{\text{ολ}}$

Είναι η δύναμη η οποία εμφανίζεται στις επιφάνειες δύο σωμάτων που βρίσκονται σε σχετική κίνηση η μία ως προς την άλλη και έχει φορά πάντα αντίθετη της ταχύτητας του σώματος που ολισθαίνει (εικόνα 4.59).

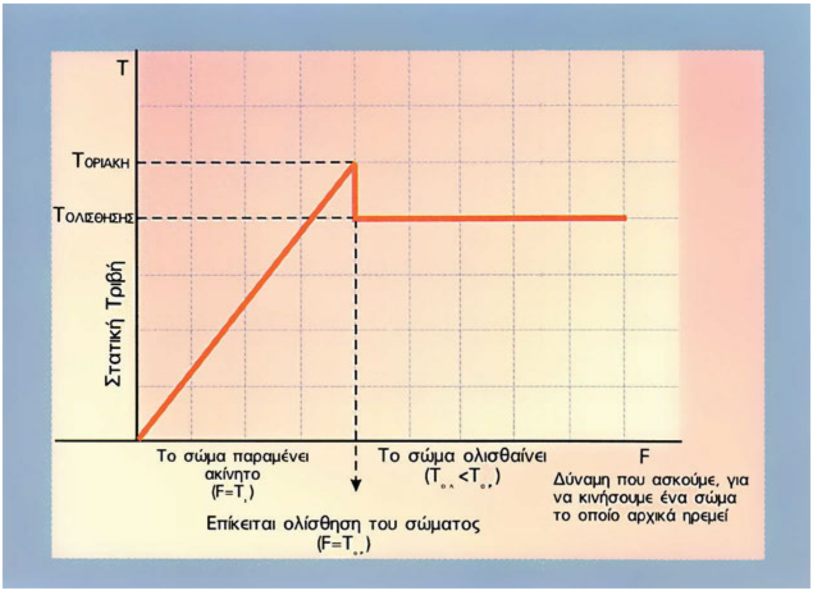
Η τριβή ολίσθησης οφείλεται στις ανωμαλίες των επιφανειών, όπως και η στατική τριβή, αλλά διαφέρει από αυτήν στο ότι είναι **σταθερή.**

Επίσης **οι δυνάμεις τριβής ολίσθησης είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες δυνάμεις οριακής τριβής.**



Εικόνα 4.59
Η τριβή ολίσθησης έχει πάντα αντίθετη φορά από τη φορά της ταχύτητας.

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούμε να τα αποδώσουμε με το παρακάτω ποιοτικό διάγραμμα (εικόνα 4.60).



Εικόνα 4.60
Ποιοτικό διάγραμμα μεταβολής της τριβής με τη δύναμη που ασκούμε

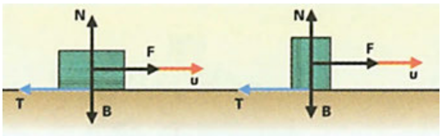
Ας στοχαστούμε...
Η μέγιστη δύναμη στατικής τριβής είναι ίση με την ελάχιστη δύναμη η οποία απαιτείται, για να αρχίσει η ολίσθηση.
... και ας παραλληλίσουμε τους νόμους της Φυσικής με ό,τι μας μαθαίνει η Ιστορία και η παρατήρηση της φύσης:
Ας συσχετίσουμε την οριακή τριβή με αυτό που λέει ο λαός μας: “Λίγο πριν ξημερώσει, επικρατεί το πιο βαθύ σκοτάδι” ή με αυτό που διδάσκει η Ιστορία ότι δηλαδή “τα απολυταρχικά καθεστώτα γίνονται πιο καταπιεστικά, όταν πλησιάζει η ανατροπή τους”.

● Οι νόμοι της τριβής ολίσθησης

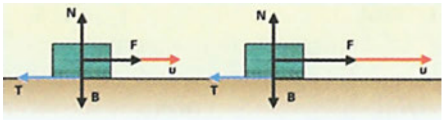
Επειδή οι δυνάμεις τριβής είναι μοριακές και περίπλοκης φύσης, οι νόμοι οι οποίοι διέπουν το φαινόμενο της τριβής είναι εμπειρικοί και μας επιτρέπουν να προβλέψουμε μόνο κατά προσέγγιση τα αποτελέσματα τους. Μπορούμε όμως με τη βοήθεια τεσσάρων απλών πειραμάτων να περιγράψουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τη συμπεριφορά κατά την ολίσθηση της τόσο μεγάλης ποικιλίας επιφανειών που υπάρχουν. Έτσι, όπως φαίνεται και στα σχήματα της εικόνας 4.61, η τριβή ολίσθησης είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν των επιφανειών και από την ταχύτητα ολίσθησης (εντός ορίων, διότι σε μεγάλες ταχύτητες η τριβή μειώνεται), ενώ εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών και από την κάθετη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ τους.

Η εξάρτηση της τριβής από τη φύση των επιφανειών εκφράζεται με το συντελεστή τριβής ολίσθησης, ο οποίος για ένα καθορισμένο ζεύγος επιφανειών εκφράζει το σταθερό λόγο της τριβής ολίσθησης T προς την κάθετη δύναμη αλληλεπίδρασης των επιφανειών N, δηλαδή:

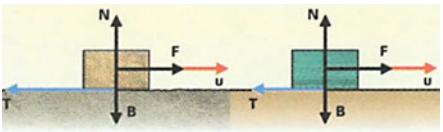
$$\eta = \frac{T}{N} \quad \text{ή διαφορετικά:} \quad \boxed{T = \eta\, N} \qquad (4.16)$$



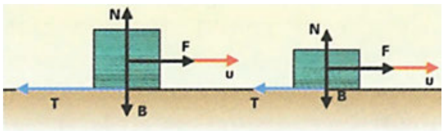
Η τριβή ολίσθησης είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας του σώματος.



Η τριβή ολίσθησης είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του σώματος.

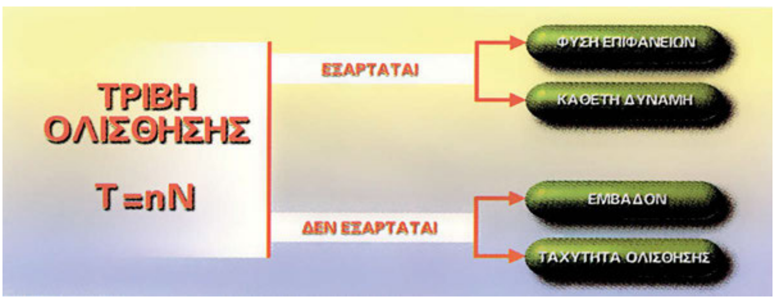


Η τριβή ολίσθησης εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών των σωμάτων.



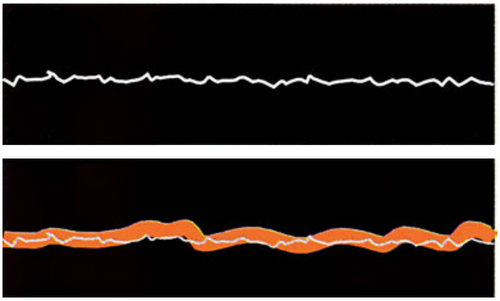
Η τριβή ολίσθησης εξαρτάται από την κάθετη δύναμη αλληλεπίδρασης των επιφανειών.

Εικόνα 4.61

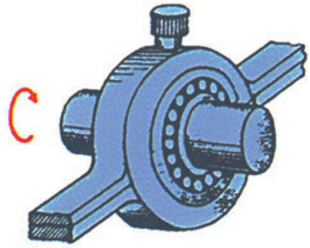


4.11.1 Μείωση της τριβής

Η μείωση της τριβής επιτυγχάνεται με ειδικά λιπαντικά ορυκτέλαια, των οποίων η χημική σύσταση και οι ιδιότητες ποικίλλουν ανάλογα με το σκοπό χρήσης τους. Πάντως, ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνουν τη μείωση της τριβής είναι σε γενικές γραμμές ο ίδιος.



Εικόνα 4.62
Η παρεμβολή στρώματος λιπαντικού μεταξύ των επιφανειών εμποδίζει τα μόρια τους να πλησιάσουν τόσο, ώστε να αναπτύξουν ελκτικές δυνάμεις.



Το λιπαντικό υλικό εισχωρεί στις εσοχές των επιφανειών (εικόνα 4.62) σχηματίζοντας ένα στρώμα το οποίο δεν επιτρέπει την ανάπτυξη μοριακών δυνάμεων, με αποτέλεσμα να μειώνεται η δύναμη τριβής.

Η μείωση της τριβής επιτυγχάνεται επίσης με τη χρήση στρώματος πεπιεσμένου αέρα. Έχουν ήδη κατασκευαστεί οχήματα (τρένα, πλωτά σκάφη), τα οποία χρησιμοποιούν αυτή τη μέθοδο με ιδιαίτερη επιτυχία (εικόνα 4.63).

Εικόνα 4.63

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5 Συντελεστές τριβής για διάφορα ζεύγη επιφανειών		
Επιφάνειες	Συντελεστής οριακής τριβής	Συντελεστής τριβής ολίσθησης
ξύλο-ξύλο	0,65	0,40
ξύλο - ξύλο με στρώμα σαπουνιού	0,45	0,20
ατσάλι-ατσάλι (με λίπανση)	0,10	0,06
ατσάλι-ατσάλι (χωρίς λίπανση)	0,58	0,15
μέταλλο-βρεγμένο μέταλλο	0,50	0,30
καουτσούκ-άσφαλτος	1,00	0,80
καουτσούκ-βρεγμένη άσφαλτος	0,80	0,30
χαλκός-ατσάλι	0,53	0,36
γυαλί-γυαλί	0,90-1,00	0,40

Τι κάνουμε, για να λύσουμε ένα πρόβλημα τριβής

- Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις (επαφής και πεδίου) που ασκούνται στο σώμα.
- Θεωρούμε ένα αξονικό σύστημα xoy, του οποίου ο x-άξονας συμπίπτει με την κατεύθυνση της κίνησης.
- Αναλύουμε τις δυνάμεις, που χρειάζεται να αναλυθούν στους άξονες και τριγωνομετρικά βρίσκουμε τις συνιστώσες τους.
- Εφαρμόζουμε το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα για κάθε άξονα:

  $\Sigma F_y = 0$ (1) διότι οι κινήσεις που εξετάζουμε είναι μίας διάστασης (μόνο κατά τον x-άξονα)

  $\Sigma F_x = m\alpha$ (2) [σε περίπτωση ομαλής κίνησης $\Sigma F_x=0$]

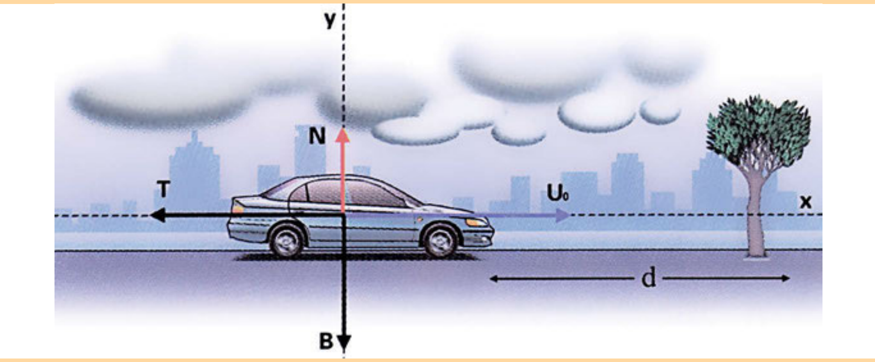
  $T = \eta N$ (3)
- Η επεξεργασία του συστήματος των τριών εξισώσεων, καθώς και η χρήση των τύπων της κινηματικής, οδηγούν στη λύση συνηθισμένων προβλημάτων. (Επίσης δεν ξεχνάμε ποτέ ότι B=mg).

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

➢ **Ο οδηγός του αυτοκινήτου στην εικόνα αντιλαμβανόμενος το δέντρο φρενάρει απότομα τη στιγμή κατά την οποία ο εμπρόσθιος προφυλακτήρας απέχει από αυτό απόσταση d = 50m και η ταχύτητά του είναι υ_0 = 10m/s. Εξαιτίας της βροχής ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των τροχών και του δρόμου είναι η = 0,1.**

1) Ο οδηγός τελικά θα αποφύγει τη σύγκρουση με το δέντρο;

2) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα (υ-t), (s-t) και (α-t). ($g=10m/s^2$)



Λύση

1) Προφανώς, θα πρέπει να συγκρίνω την απόσταση d με το διάστημα $s_{ολ}$, το οποίο θα διατρέξει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει.

Έχουμε μάθει ότι $S_{ολ} = \dfrac{υ_0^2}{2|α|}$,

οπότε αναζητούμε την επιβράδυνση α της κίνησης.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο αυτοκίνητο είναι το βάρος του (πεδίου), η αντίδραση N επί των τροχών (επαφής) και η τριβή ολίσθησης (επαφής). Ισχύουν:

$ΣF_y = 0$ ή $N - B = 0$ ή $N = B$ (1)

$ΣF_x = mα$ ή $-T = mα$ (2)

$T = ηN$ (3)

Η σχέση (2), λόγω της (1) και της (3), γίνεται:

$-ηB = mα$ και επειδή $B = mg$, έχουμε τελικά ότι:

$-ηmg = mα$ ή $\boldsymbol{α = -ηg}$ **(4)**

Βρήκαμε, επομένως, την επιβράδυνση α της κίνησης.

Στη συνέχεια κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις και πράξεις βρίσκουμε ότι $s_{ολ}$=50m, ενώ δίνεται ότι και d=50m. **Άρα το αυτοκίνητο μόλις που έρχεται σε επαφή με το δέντρο.**

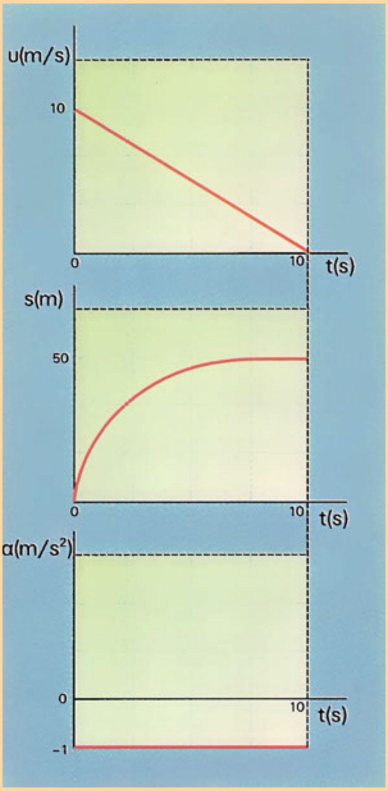
2) Εφόσον θέλουμε να κατασκευάσουμε διαγράμματα με το χρόνο, πρέπει να βρούμε προηγουμένως πόσο χρόνο διαρκεί η κίνηση του αυτοκινήτου.

Γνωρίζουμε ότι στις επιβραδυνόμενες κινήσεις ο απαιτούμενος χρόνος μέχρι να σταματήσει ένα κινητό είναι $t_{ολ} = \left|\dfrac{υ_0}{α}\right|$,

οπότε λόγω της (4) $t_{ολ} = \dfrac{υ_0}{ηg}$

δηλαδή $\boldsymbol{t_{ολ} = 10s}$

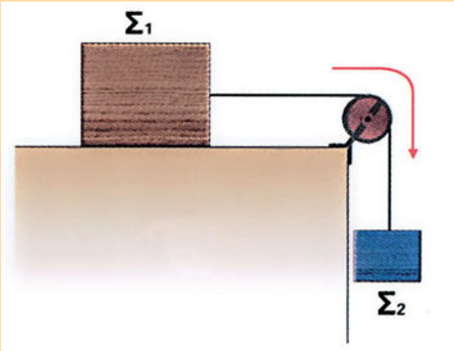
Τα ζητούμενα διαγράμματα σχεδιάζονται σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε σχετικά με τις ευθύγραμμες ομαλά επιβραδυνόμενες κινήσεις.



Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το ολικό διάστημα κίνησης μπορούσαμε να το βρούμε και από το διάγραμμα της ταχύτητας, υπολογίζοντας το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από το γράφημα της ταχύτητας και από τους άξονες.

Πράγματι: $s_{ολ} = E_{τριγώνου} = (βάση \ x \ ύψος): 2 = (10s \cdot 10m/s): 2 = 50m.$

➢ **Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ μαζών m και 3m αντίστοιχα κινούνται όπως δείχνει το σχήμα με επιτάχυνση $α = \frac{g}{2}$. Ζητούνται:**



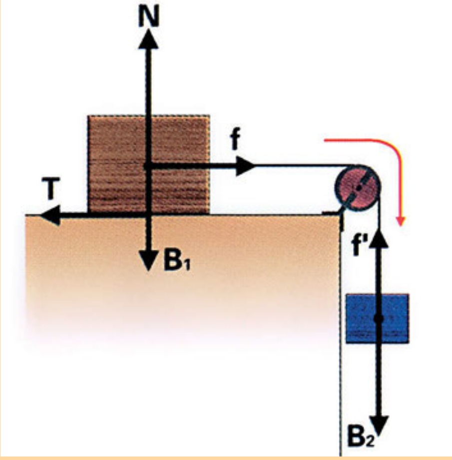
α) ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος $Σ_1$ και του οριζόντιου επιπέδου,

β) η τάση του σχοινιού.

(m= 1kg, g= 10m/s^2)

Λύση

1) Αρχικά σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα που εξετάζουμε.



Για το σώμα $Σ_1$: το βάρος του B_1, την τριβή T, την κάθετη δύναμη του επιπέδου N, και την τάση από το σχοινί f.

Για το σώμα $Σ_2$: το βάρος του B_2, και την τάση από το σχοινί f΄.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στους άξονες y και x το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, παίρνοντας ως θετική φορά των δυνάμεων στον x άξονα τη φορά της κίνησης:

$ΣF_y = 0$ ή $N-B_1 = 0$ ή $N = B_1$ (1)

$ΣF_x = mα$ ή $B_2 - f΄+ f - T = (m_1 + m_2)\cdot α$ (2).

Όμως, $f = -f΄$ (δράση-αντίδραση) και $T= ηN$ ή λόγω της (1) $T= η B_1$.

Άρα η (2) γίνεται: $B_2 - ηB_1 =(m_1+ m_1)α$

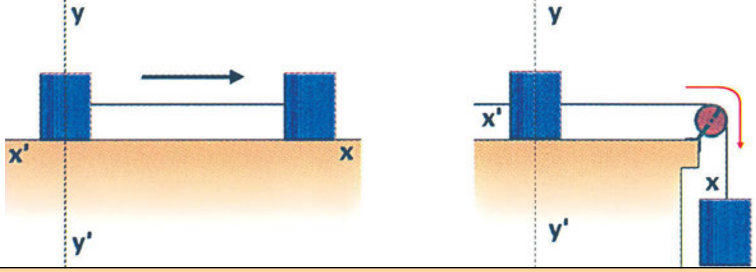
και επειδή $α=g/2$, $B_2=m_2g =3mg$, $B_1=m_1g =mg$

θα έχουμε ακόμη ότι:

$B_2-ηB_1 = (m_1 + m_2)$ g/2 ή 3mg-nmg = 4mg/2 άρα n=1.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Η παρουσία μιας τροχαλίας προκαλεί νοητή "κάμψη" στον x - άξονα



2) Για να βρούμε την τάση του σχοινιού εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο σε ένα από τα δύο σώματα (συνήθως σε αυτό που ασκούνται λιγότερες δυνάμεις).

Έτσι, για το $Σ_2$ θα έχουμε:

$ΣF_x=mα$ ή $B_2 - f΄= m_2\, α$ ή $m_2\, g - f΄= m_2\, g/2$ ή $3mg- f΄= 3m\, g/2$ ή $f΄= 5$ N

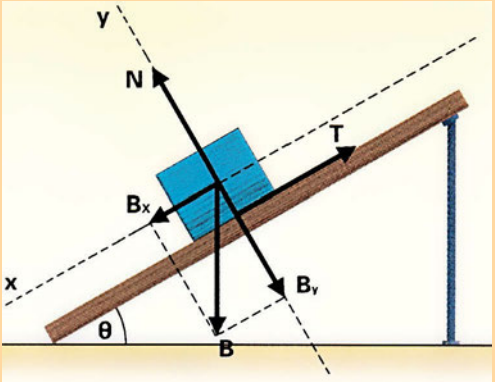
Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε, αν δουλεύαμε με το $Σ_1$.

Ας δοκιμάσουμε.

➢ **Σώμα μάζας m κινείται προς τη βάση κεκλιμένου επιπέδου με σταθερή ταχύτητα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $η = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να υπολογιστεί η γωνία κλίσης φ του κεκλιμένου επιπέδου.**

Λύση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και αναλύουμε το βάρος κατά τον άξονα κίνησης (x) και τον κάθετο σε αυτόν (y). Στη συνέχεια με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας βρίσκουμε τις συνιστώσες του βάρους B_x και B_y .



Είναι: B_x = Βημθ και

B_y = Βσυνθ.

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής σε κάθε άξονα:

$\Sigma F_y = 0$ ή $N - B_y = 0$ ή N = Βσυνθ ή N = mgσυνθ (1)

ΣF_x = mα, επειδή όμως η ταχύτητα είναι σταθερή, α = 0 και συνεπώς

$\Sigma F_x = 0$, δηλαδή:

Bx - T = 0 ή Βημθ - ηN = 0 και λόγω της (1) έχουμε ότι

mgημθ - η mgσυνθ = 0 ή ημθ – η συνθ = 0 ή εφθ = η ή εφθ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή θ=30^{o}.

● **Αν υποθέσουμε ότι το σώμα του προηγούμενου παραδείγματος έχει μάζα m = $\sqrt{2}$ kg και θέλουμε να ανέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα, πόση σταθερή δύναμη F παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο πρέπει να του ασκούμε; (g=10m/s^2)**

Λύση

$\Sigma F_y = 0$ ή $N - B_y = 0$ ή

N = Βσυνθ ή

N = mgσυνθ (1)

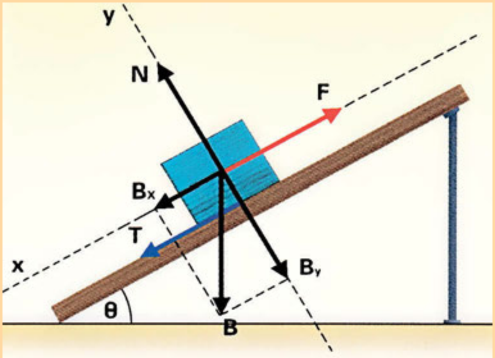
$\Sigma F_x = 0$ ή $F - B_x - T = 0$ ή

F - Βημθ - ηN = 0 ή

F = mgημθ + η mgσυνθ ή

F = mg(ημ30^{o} + η συν30^{o})

ή F = 10$\sqrt{2}$ N.

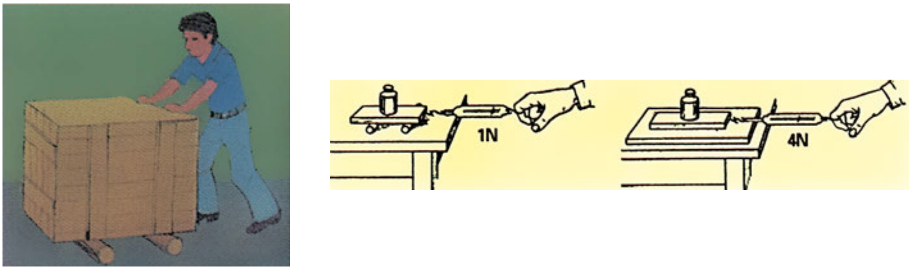


● **Αν κάποια στιγμή καταργήσουμε τη δύναμη, τι νομίζετε ότι θα κάνει στη συνέχεια το σώμα; (... μια μικρή υπόδειξη: μεταξύ των άλλων χρησιμοποιήστε αυστηρά τις γνώσεις σας περί οριακής τριβής....)**

4.12 Τριβή κύλισης

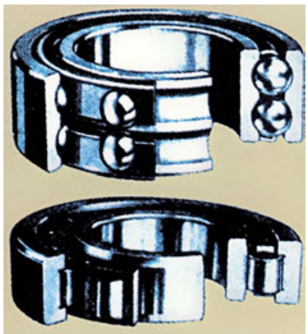
Είναι γνωστό ότι η ανακάλυψη του τροχού αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους σταθμούς στην ιστορία της ανθρωπότητας. Οι πάσης φύσεως μεταφορές στη σημερινή εποχή είναι συνυφασμένες με τα τροχοφόρα οχήματα. Ο λόγος είναι ιδιαίτερα απλός: **ευκολότερα κυλίουμε ένα σώμα παρά το ολισθαίνουμε.**

Για παράδειγμα, η μεταφορά ενός σώματος επί κυλιόμενων κυλίνδρων απαιτεί πολύ μικρότερη δύναμη, απ' ό,τι θα απαιτούσε η μεταφορά του με ολίσθηση. Σε όλες σχεδόν τις πρακτικές εφαρμογές επιδιώκεται η αντικατάσταση της ολίσθησης από την κύλιση (τροχοί, ρουλεμάν κτλ.).



Εικόνα 4.64
Η εμπειρία και το πείραμα δείχνουν ότι η κύλιση απαιτεί μικρότερη δύναμη από την ολίσθηση.

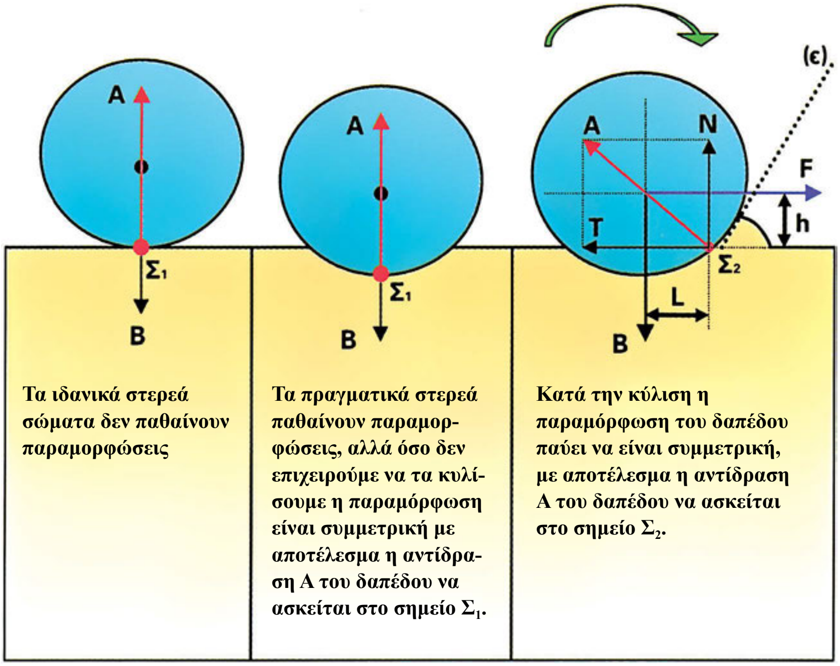
Κατά την κύλιση αναπτύσσεται τριβή, η οποία διαφέρει από τη στατική τριβή και από την τριβή ολίσθησης στο εξής: **κύλιση** σημαίνει **περιστροφή** του σώματος. Άρα το αίτιο εκείνο το οποίο θα παρεμποδίζει την περιστροφή δεν μπορεί να είναι δύναμη αλλά η **ροπή** κάποιας δύναμης. Πράγματι, η **τριβή κύλισης** είναι μια **ροπή,** η οποία παρεμποδίζει την περιστροφή του κυλιόμενου σώματος ενώ η **τριβή ολίσθησης,** είναι μια **δύναμη,** η οποία παρεμποδίζει την ολίσθηση του σώματος.



Εικόνα 4.65
Ένσφαιροι τριβείς (ρουλεμάν)

4.12.1 Υπολογισμός της τριβής κύλισης - Συνθήκη κύλισης

Ας θεωρήσουμε τον κύλινδρο της εικόνας 4.66, ο οποίος ενώ αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο, ασκούμε σ' αυτόν δύναμη F, με σκοπό να τον κυλίσουμε. Επειδή τα πραγματικά σώματα δεν είναι απολύτως ανελαστικά στερεά, όταν στηρίζονται το ένα πάνω στο άλλο παθαίνουν πάντοτε ελαστικές παραμορφώσεις στην επιφάνεια συνεπαφής τους. (Βέβαια, τις παραμορφώσεις αυτές δεν μπορούμε να τις αντιληφθούμε με τις αισθήσεις μας· ωστόσο **υπάρχουν** και είναι υπεύθυνες για ένα πλήθος φαινομένων.)



Εικόνα 4.66

Εξαιτίας αυτών των παραμορφώσεων, ο κύλινδρος κατά την κύλισή του είναι υποχρεωμένος να «αναρριχάται» κατά μήκος της ευθείας (ε), με αποτέλεσμα συνεχώς παρεμποδίζεται η κύλισή του.

Η ροπή **M** του ζεύγους των δυνάμεων **B** και **N** ονομάζεται **τριβή κύλισης** και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{M = B\,L} \qquad (4.17)$$

Η απόσταση **L** ονομάζεται **συντελεστής τριβής κύλισης,** μετρείται συνήθως σε cm και η τιμή του εξαρτάται από τη φύση των σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή.

Προκειμένου να αρχίσει να κυλίεται ο κύλινδρος, πρέπει η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων F και T να εξουδετερώσει την τριβή κύλισης.

Δηλαδή: $\mathbf{F \cdot h = B \cdot L}$

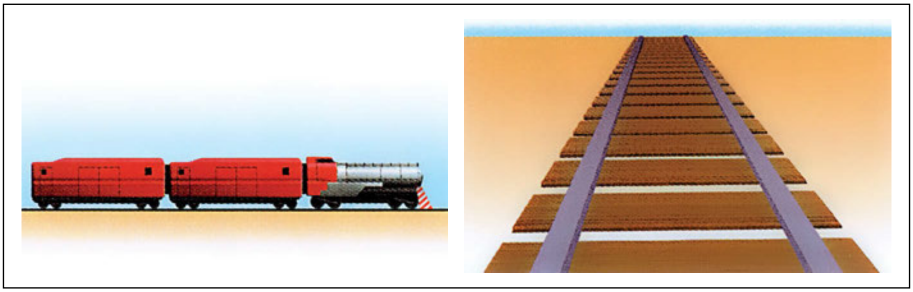
Επειδή, όμως, στην πράξη η απόσταση h ταυτίζεται με την ακτίνα R του κυλίνδρου **(h ≅ R)**, θα έχουμε τελικά:

$$\boxed{F = B\frac{L}{R}} \tag{4.18}$$

Η σχέση 4.18 αποτελεί την αναγκαία συνθήκη, για να αρχίσει η κύλιση του κυλίνδρου.

Ας προσέξουμε

- Ο συντελεστής τριβής κύλισης L ουσιαστικά εξαρτάται από το μέγεθος της παραμόρφωσης που θα υποστούν οι επιφάνειες· δηλαδή μεγάλη παραμόρφωση σημαίνει μεγάλο L και αντίστροφα.
- Τα τρένα έχουν μεταλλικούς τροχούς που κυλίονται στις σιδηροτροχιές, ακριβώς για να ελαχιστοποιείται η παραμόρφωση και επομένως και ο συντελεστής τριβής κίλισης L.
- Η δύναμη F (δύναμη έλξης) είναι ανάλογη με το βάρος B του κυλιόμενου σώματος, αλλά αντίστροφη με την ακτίνα του R. Αυτό σημαίνει ότι στα βαρέα οχήματα πρέπει να χρησιμοποιούνται τροχοί μεγάλης ακτίνας, ώστε να μειώνεται η απαιτούμενη δύναμη έλξης F.



Πίνακας 4.6 ΜΕΡΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΡΙΒΗΣ ΚΥΛΙΣΗΣ	
Σιδερένιος τροχός σε χωμάτινο δρόμο	**L = 0,100cm**
Σιδερένιος τροχός σε ασφαλτοστρωμένο δρόμο	**L = 0,015cm**
Τροχός αυτοκινήτου σε ασφαλτοστρωμένο δρόμο	**L = 0,035cm**
Τροχός σιδηροδρόμου	**L = 0,002cm**

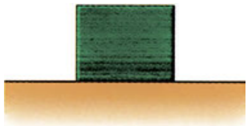
Είναι βέβαιο ότι η κύλιση είναι ευκολότερη από την ολίσθηση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.61 Η τριβή ολίσθησης εξαρτάται:
α) από τη μάζα του σώματος που ολισθαίνει
β) από την ταχύτητα ολίσθησης
γ) από το είδος της επιφάνειας του σώματος που ολισθαίνει
δ) από την επιτάχυνση του σώματος που ολισθαίνει.
Χαρακτηρίστε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παραπάνω προτάσεις.

4.62 Σε ποια από τις δυο περιπτώσεις του σχήματος θα είναι μεγαλύτερη η τριβή ολίσθησης;

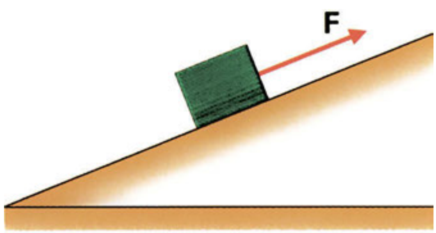
4.63 Το σώμα του σχήματος, που αρχικά ήταν ακίνητο τώρα κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα. Σχεδιάστε και ονομάστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό.



4.64 Η δύναμη που εμποδίζει τα σώματα να αρχίσουν να κινούνται λέγεται .... τριβή, και η μέγιστη τιμή της ονομάζεται .... τριβή. Όταν το σώμα αρχίζει να κινείται, η .... τριβή μετατρέπεται σε τριβή...........

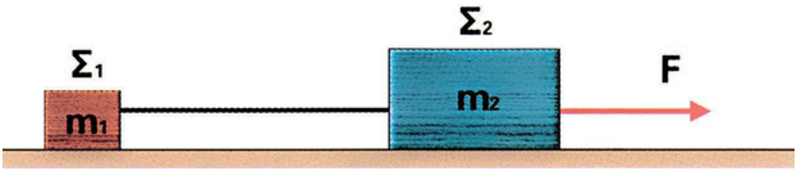
4.65 Εξηγήστε γιατί είναι πιο εύκολο να ολισθαίνουμε ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα παρά να το αναγκάσουμε να αρχίσει να ολισθαίνει;

4.66 Σώμα μάζας m=1kg κινείται με την επίδραση δύναμης F=25N σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ=30°. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $g = 10m/s^2$, ζητούνται τα εξής:



α) Να σχεδιαστούν οι υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.
β) Να υπολογιστεί η τριβή ολίσθησης.
γ) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος.

4.67 Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ μαζών m_1=1kg, m_2=9kg αντίστοιχα, που αρχικά ηρεμούν, συνδέονται με αβαρές σχοινί. Στο σώμα $Σ_2$ ασκείται οριζόντια δύναμη F=20N. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σωμάτων και επιπέδου είναι η=0,1 και g=10m/s², ζητούνται τα εξής:



α) Να σχεδιαστούν οι υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα.
β) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του συστήματος των σωμάτων.
γ) Να βρεθεί η τάση του σχοινιού.
δ) Πόση θα είναι η ταχύτητα των σωμάτων τη χρονική στιγμή t = 5s;
ε) Υποθέστε ότι τη χρονική στιγμή t = 5s η δύναμη F ξαφνικά παύει να ασκείται. Τι είδους κίνηση θα κάνουν τα σώματα; Τι θα συμβεί στο σχοινί;

4.68 Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή:
α) Η τριβή ολίσθησης είναι μεγαλύτερη από την τριβή κύλισης.
β) Η τριβή ολίσθησης είναι δύναμη, ενώ η τριβή κύλισης είναι ροπή.
γ) Η τριβή ολίσθησης είναι σταθερή, ενώ η τριβή κύλισης μεταβάλλεται.

4.69 Να περιγράψετε ένα φαινόμενο για κάθε είδος τριβής (ολίσθησης, στατική, κύλισης)

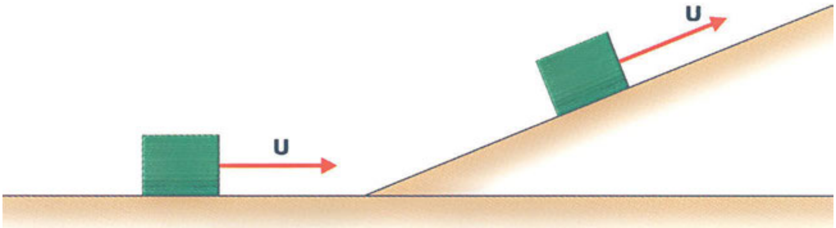
4.70 Έως τα μέσα περίπου της δεκαετίας του 1950 το κύριο συγκοινωνιακό μέσο στην Αθήνα ήταν το τραμ. Το τραμ είναι ένα μικρό ηλεκτρικό βαγόνι, το οποίο κυλάει σε ράγες και χρησιμοποιείται και σήμερα σε πολλές ευρωπαϊκές πόλεις. Πολλοί ισχυρίζονται ότι η αντικατάσταση του τραμ

από τα σημερινά τρόλεϊ, τα οποία χρησιμοποιούν συνηθισμένες ρόδες, ήταν λανθασμένη ενέργεια. Πού κατά τη γνώμη σας στηρίζεται ο ισχυρισμός αυτός;

4.71 Συζητήστε την ακόλουθη φράση: “Συνάντησα μεγάλη κίνηση στο δρόμο και με το “σταμάτα-ξεκίνα” του αυτοκινήτου μου σχεδόν ξέμεινα από βενζίνη”.

4.72 Ένα σώμα εκτοξεύεται πρώτα σε οριζόντιο επίπεδο και έπειτα σε κεκλιμένο επίπεδο. Η τριβή ολίσθησης για το σώμα είναι μεγαλύτερη στο οριζόντιο επίπεδο απ' ό,τι στο κεκλιμένο, διότι:
α) Στο οριζόντιο κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

β) Στο οριζόντιο η δύναμη Ν του επιπέδου είναι μεγαλύτερη από ό,τι στο κεκλιμένο.
γ) Τίποτα από τα παραπάνω.
Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι η σωστή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



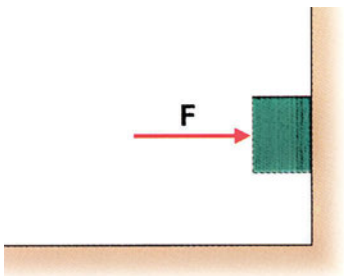
4.73 Να αντιστοιχίσετε τις καταστάσεις με τα μεγέθη:

Φαινόμενο	Μέγεθος
α) Αυτοκίνητο είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. β) Αυτοκίνητο είναι ακίνητο σε κεκλιμένο επίπεδο. γ) Αυτοκίνητο ανέρχεται σε κεκλιμένο επίπεδο. δ) Αυτοκίνητο κινείται με μπλοκαρισμένους τους τροχούς.	Τριβή κύλισης .... Τριβή ολίσθησης .... Στατική τριβή ....

4.74 Σημειώστε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Η τριβή ολίσθησης οφείλεται στις ανωμαλίες των επιφανειών.
β) Η οριακή τριβή είναι μικρότερη από την τριβή ολίσθησης.
γ) Ο συντελεστής τριβής κύλισης είναι καθαρός αριθμός.
δ) Η κύλιση είναι ευκολότερη από την ολίσθηση.

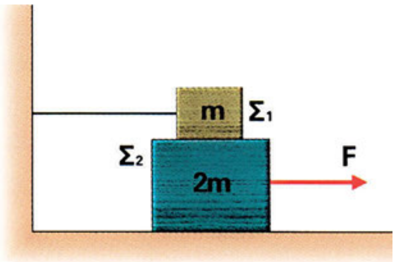
4.75 Να αναφέρετε από μία διαφορά μεταξύ:
• Στατικής τριβής - Τριβής ολίσθησης
• Τριβής ολίσθησης - Τριβής κύλισης
• Συντελεστή τριβής ολίσθησης - Συντελεστή τριβής κύλισης
• Φρεναρίσματος σε βρεγμένο δρόμο - Φρεναρίσματος σε στεγνό δρόμο.

4.76 Σώμα μάζας m=1kg στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο με την επίδραση δύναμης F. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και τοίχου είναι η = 0,1, να υπολογιστεί η δύναμη F, ώστε το σώμα:
α) να κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα
β) να κατέρχεται με επιτάχυνση $α=5m/s^2$
γ) να κατέρχεται με επιτάχυνση $α=10m/s^2$
$(g=10m/s^2)$.

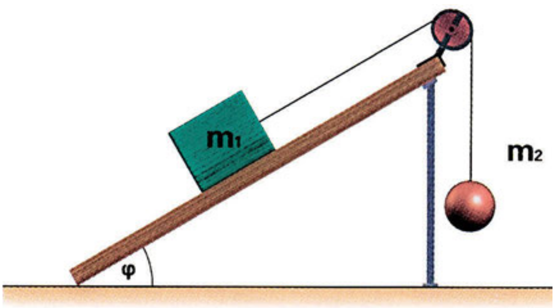


4.77 Κιβώτιο μάζας m είναι τοποθετημένο στο δάπεδο της καρότσας ενός φορτηγού, το οποίο κινείται με επιτάχυνση α. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι η = 0,1. α) Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο και να βρεθεί ποια απ' αυτές το επιταχύνει. β) Πόση πρέπει να γίνει η επιτάχυνση του φορτηγού, ώστε το κιβώτιο να αρχίσει να ολισθαίνει μέσα στη καρότσα; ($g=10m/s^2$)

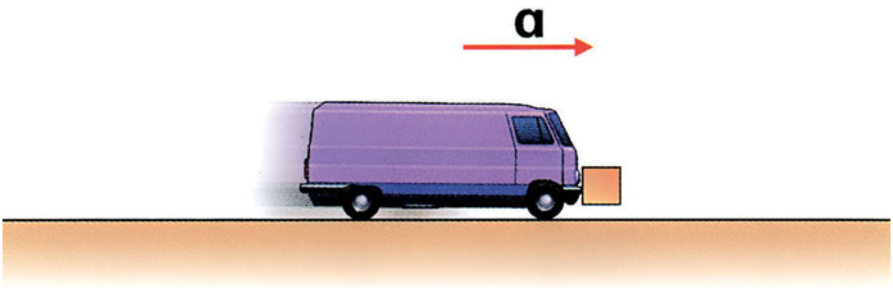
4.78 Στη διάταξη της εικόνας θέλουμε να υπολογίσουμε την απαιτούμενη δύναμη F, ώστε το σώμα Σ_2 να αρχίσει να κινείται. Πόση θα είναι τότε η τάση f του νήματος που συνδέει το σώμα Σ_1 με το κατακόρυφο τοίχωμα; Δίνεται ότι οι συντελεστές οριακής τριβής μεταξύ των σωμάτων, καθώς και μεταξύ του σώματος Σ_2 και του δαπέδου, είναι η (το g θεωρείται γνωστό).



4.79 Να βρεθεί η επιτάχυνση α, με την οποία κινούνται τα σώματα στην εικόνα, αν είναι γνωστά τα εξής:
m_1=30kg, m_2=10kg,
$g=10m/s^2$ $\varphi=30^o$ και n=0,1.



4.80 Όχημα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση α. Ένα κιβώτιο παρασύρεται από το όχημα και παραμένει προσκολλημένο στο μπροστινό μέρος του χωρίς να έρχεται σε επαφή με το δρόμο. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και οχήματος είναι η, να δειχτεί ότι $\eta = \frac{g}{\alpha}$ **.**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο
ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Από όσα συμβαίνουν γύρω μας...

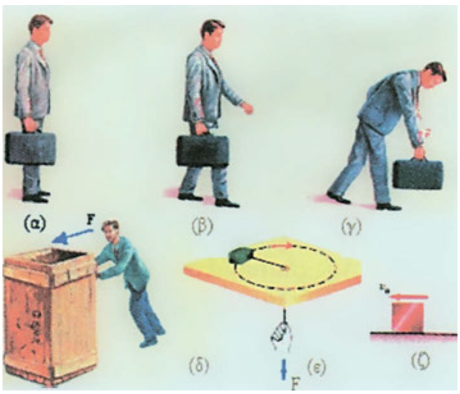
“Ενεργειακή κρίση”. “Εργάζεται σε οριακές συνθήκες”. “Εξοικονόμηση ενέργειας”. “Ενεργειακός τομέας μηχανολογίας”... είναι μερικές από τις φράσεις που απαντούν με μεγάλη συχνότητα σε συζητήσεις, σε δημοσιεύματα, σε εκπομπές. Προβληματισμοί και αντιπαραθέσεις με επίκεντρο δύο καταλυτικές φυσικές έννοιες: **έργο** και **ενέργεια.** Δύο φυσικά μεγέθη που είναι τόσο αλληλένδετα, ώστε να συμπορεύονται στα φυσικά φαινόμενα.

Στη Φυσική οι όροι αυτοί εμφανίστηκαν από ανάγκη. Διαπιστώθηκε ότι τα κινηματικά μεγέθη (μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση) από μόνα τους και τα αντίστοιχα δυναμικά (δύναμη, ροπή) απομονωμένα δεν αρκούσαν για να περιγραφούν σε βάθος οι φυσικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, άλλος είναι ο ρόλος του βάρους για τη φορτωμένη με ψώνια νοικοκυρά, που περιμένει στη στάση λεωφορείου, και άλλος, όταν αυτή ανηφορίζει το δρόμο για το σπίτι.

Στη προσπάθειά μας να καταλάβουμε, να εξηγήσουμε και να αξιοποιήσουμε τα μηνύματα της φύσης θα μπορούσαμε να αναφερθούμε σε πάρα πολλά παραδείγματα που αποκαλύπτουν την αναγκαιότητα να μιλάμε και να σκεφτόμαστε “ενεργειακά”.

5.1 Από τη βιολογική εργασία στο φυσικό έργο

Η Φυσική ενδιαφέρεται για οτιδήποτε έχει σχέση με την έννοια “εργάζομαι”. Μια έννοια που σχετίζεται με την κόπωση, την προσφορά, την κατανάλωση και την εξέλιξη. Στην εικόνα 5.1 φαίνονται χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από την καθημερινή ζωή όπου κάποιος καταβάλλει ή έχει καταβάλει προσπάθεια.



Εικόνα 5.1.
Χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγωγής ή κατανάλωσης ενέργειας

Ο νεαρός της εικ. 5.1(α) στέκεται κρατώντας ένα χαρτοφύλακα στο χέρι. Ο ίδιος νεαρός βαδίζει οριζόντια στην εικ. 5.1(β). Στην εικ. 5.1(γ) ο νεαρός επιχειρεί να αφήσει το χαρτοφύλακα στο έδαφος. Ο άντρας της εικ. 5.1(δ) μετακινεί κιβώτιο σε οριζόντιο έδαφος. Κάποιο χέρι περιστρέφει σώμα σε οριζόντιο επίπεδο, εικ. 5.1(ε). Τέλος, κάποιος έριξε το σώμα της εικ. 5.1(ζ) οριζόντια στο λείο έδαφος.

Είναι φανερό ότι καταναλώνεται, από βιολογική άποψη, **ενέργεια** από τον άνθρωπο σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις. Το ερώτημα είναι: "Αξιοποιείται αυτή η ενέργεια, από ποιον και με ποιο τρόπο;".

Στη Φυσική χρειαζόμαστε κάποιο μέγεθος που να είναι υπεύθυνο για τις μεταβολές, για τη μεταφορά και για τις μετατροπές της ενέργειας από μια μορφή σε μια άλλη. Το μέγεθος αυτό είναι το **έργο.** Εκδηλώσεις έργου είναι, λοιπόν, εκείνες που οδηγούν σε μετασχηματισμό ή σε μεταβολή κάποιας μορφής ενέργειας. Η επιλογή αυτή μοιάζει να οδηγεί σε μια σύζευξη, σε ένα "πάντρεμα" έργου και ενέργειας.

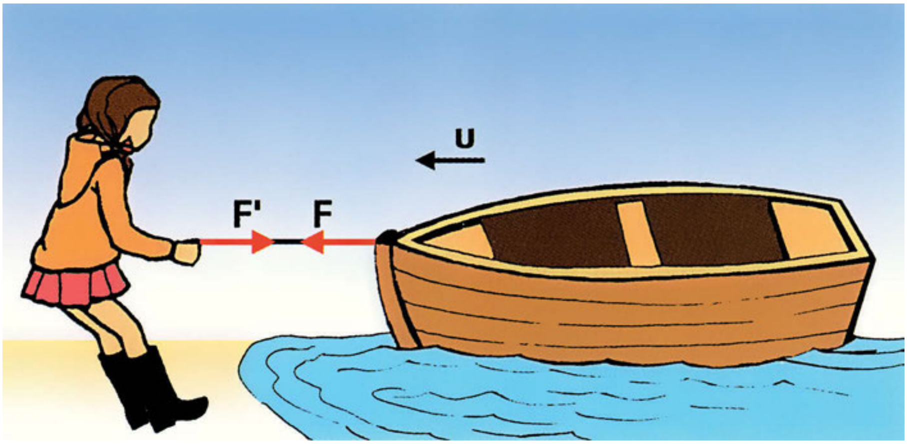
Συνηθίσαμε να λέμε **πως υπάρχει έργο δύναμης, όταν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνση στην οποία η δύναμη επενεργεί.** Αν δεχτούμε αυτή την αρχή, η νοικοκυρά που αναφέρθηκε πιο πάνω και ο νεαρός της εικ. 5.1(α) δε δικαιούνται να παραπονιούνται για κόπωση. Αν όμως έτσι έχουν τα πράγματα, τότε γιατί ακούγεται πως: "το λεωφορείο αργεί και πιάστηκαν τα χέρια μου"; Ίσως επειδή δε βλέπουμε την καταπόνηση (επιμήκυνση) κάποιων μυών των χεριών.

Το έργο δύναμης συνδέεται, λοιπόν, με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της. Το αντίστροφο όμως συμβαίνει; Έχουμε, δηλαδή, πάντα έργο δύναμης, όταν εμφανίζεται μετακίνηση;

Η παρουσία έργου εκδηλώνεται με αλλαγή της κατάστασης του σώματος και περιγράφεται με ποικίλους τρόπους: με μεταβολή ταχύτητας, με μετατόπιση σε άλλο επίπεδο, με παραμόρφωση, με εκπομπή σήματος διάφορων μορφών (ήχος, φως κτλ.), με θέρμανση... Σύμφωνα με αυτή την άποψη μπορούμε να προβλέψουμε ότι:

- Στην περίπτωση της εικ. 5.1 (α) δεν υπάρχει έργο, αφού η δύναμη που ασκεί ο νεαρός (ίση με το βάρος του χαρτοφύλακα) δεν προκαλεί μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της.
- Στην εικ. 5.1 (β) υπάρχει μετακίνηση (όχι όμως στη διεύθυνση που επενεργεί η δύναμη) και δεν αλλάζει η κινητική κατάσταση του σώματος. Άρα δε δικαιολογείται η παρουσία έργου.
- Στις εικόνες 5.1 (γ) και (δ) υπάρχει μετακίνηση κατά τη διεύθυνση που επενεργεί η δύναμη και αναμένεται εμφάνιση έργου.
- Στην εικόνα 5.1 (ε) η δύναμη επενεργεί σε διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας και η κινητική κατάσταση του σώματος παραμένει σταθερή. Το έργο, επομένως απουσιάζει.
- Στην εικόνα 5.1 (ζ), τέλος, δεν ασκείται δύναμη στο σώμα κατά τη διεύθυνση της κίνησης. Άρα δεν αναμένεται εμφάνιση έργου.

Το έργο γίνεται αντιληπτό, κατ' αρχήν, εμπειρικά. Η λεπτομερέστερη μελέτη βοηθά στην επιβεβαίωση του ρόλου του. Το κορίτσι της εικόνας τραβά με σχοινί τη βάρκα σε οριζόντια αμμουδιά.



Εικόνα 5.2:
Έργο δύναμης συγγραμικής με τη μετατόπιση

Το κορίτσι τραβά τη βάρκα με τη βοήθεια του σχοινιού με δύναμη $\vec{F}$, της οποίας η αντίδραση $\vec{F}'$ ασκείται στην άλλη άκρη του σχοινιού στο χέρι του. Οι τριβές, για διευκόλυνση, θεωρούνται αμελητέες. Ας δούμε πώς οδηγούμαστε σταδιακά στην ερμηνεία του φαινομένου.

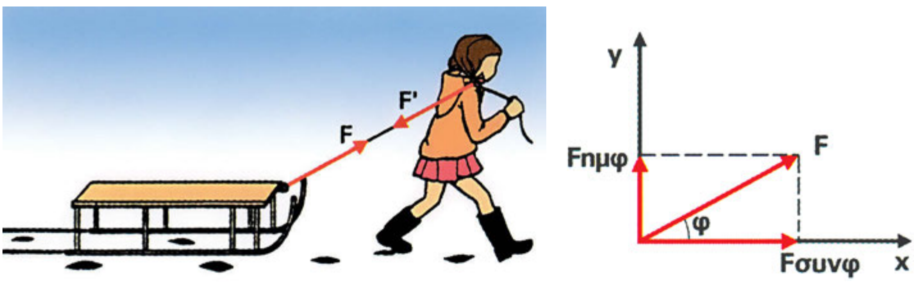
5.2. Έργο σταθερής δύναμης

Διατυπώθηκε παραπάνω η άποψη πως το έργο εμφανίζεται, όταν η δύναμη μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνση που επενεργεί. Αυτό μας βοηθά να διατυπώσουμε τον ορισμό του έργου W δύναμης.

Το έργο ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{W = F \cdot s} \qquad (5.1)$$

όταν η δύναμη $\vec{F}$ και η μετατόπιση $\vec{s}$ έχουν ίδια κατεύθυνση, και το μέτρο της $\vec{F}$ είναι σταθερό. Όταν αυτό δε συμβαίνει, το έργο αφορά μόνο τη συνιστώσα (Fσυνφ) της δύναμης στη διεύθυνση της μετατόπισης. Στην εικ. 5.3 φαίνεται το κορίτσι να τραβά έλκυθρο με πλάγια δύναμη $\vec{F}$.



Εικόνα 5.3:
Έργο δύναμης πλάγιας ως προς τη μετατόπιση

Τότε: $W=F_x\,s$

ή $$\boxed{W=Fs\,συνφ} \tag{5.2}$$

Η σχέση (5.2) είναι γενικός ορισμός για το έργο και αναφέρεται στο γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών, όπως είναι η δύναμη και η μετατόπιση. Είναι μονόμετρο (βαθμωτό) μέγεθος. Επομένως, για τον προσδιορισμό του αρκούν η αριθμητική τιμή, η μονάδα μέτρησής του και, όπως θα δούμε παρακάτω, το πρόσημό του.

Το πρόσημο και οι μονάδες έργου

Το έργο μιας δύναμης άλλοτε παράγεται και άλλοτε καταναλώνεται. Όταν το έργο είναι θετικό ($W>0$), λέμε ότι παράγεται, ενώ όταν είναι αρνητικό ($W<0$), λέμε ότι καταναλώνεται. Έτσι:

α) Αν η δύναμη $\vec{F}$ ή η συνιστώσα της στον άξονα της κίνησης έχει ίδια φορά με τη μετατόπιση, τότε βοηθά την κίνηση του σώματος, και το έργο είναι θετικό. Αυτό συνεπάγεται και από τη σχέση (5.2), αφού τότε η γωνία φ είναι 0° (όταν η $\vec{F}$ έχει ίδια φορά με την $\vec{s}$) ή μικρότερη από 90° (η $\vec{F}_x$ ίδιας φοράς με την $\vec{s}$) και συνφ>0. Άρα:

W>0 σημαίνει έργο που παράγεται από τη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Αν, όμως, μιλάμε για το σώμα, αυτό αξιοποιεί το έργο που παράγει η δύναμη. Το περιβάλλον, (με την εκπροσώπηση όποιου ασκεί την $\vec{F}$) λοιπόν, μεταβιβάζει μέσω έργου "βοήθεια" στο σώμα.

W=0 όταν η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση, εικόνα 5.1 (ε). Τότε φ=90° και συνφ=0. Το περιβάλλον δεν αλληλεπιδρά, μέσω έργου, με το σώμα.

W<0 προκύπτει, όταν η δύναμη ή η συνιστώσα της έχει αντίθετη φορά με την $\vec{s}$. Το περιβάλλον, μέσω έργου, "κοντράρει" το σώμα, με όλα όσα αυτό συνεπάγεται.

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα της εικόνας 5.2. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το έργο της $\vec{F}$ είναι θετικό (παραγόμενο) για τη βάρκα. Ας σκεφτούμε τι σημαίνει αυτό για το κορίτσι.

Ας σκεφτούμε:

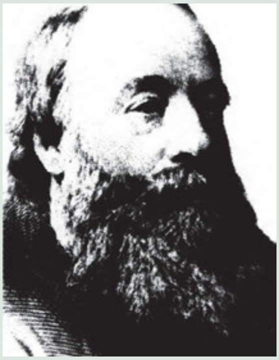
1. *Ας προσπαθήσουμε να θυμηθούμε περιπτώσεις παρόμοιες με εκείνες των εικόνων 5.1, στις οποίες "κάτι να λείπει" κάθε φορά από τα μεγέθη της σχέσης (5.2). Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να έχουμε έργο, όταν F=0;*

2. *Ας φανταστούμε τη μετακίνηση του έλκηθρου (εικ. 5.3) σε λεία ανηφόρα κλίσης θ. Το κορίτσι τραβάει το σχοινί με κλίση φ ως προς την ανηφόρα. Γράψτε τις σχέσεις για το έργο όσων δυνάμεων ασκούνται στο έλκηθρο και σημειώστε ποια έργα είναι θετικά και ποια αρνητικά.*

Η μέτρηση του έργου: Από τις σχέσεις (5.1) και (5.2) προκύπτει η μονάδα μέτρησης του έργου W στο S.I.

$$W=1N \cdot 1m = 1Joule$$

Το Joule είναι, λοιπόν, το παραγόμενο έργο από δύναμη ίση με 1N, όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά 1m στη κατεύθυνση που επενεργεί.



James P. JOULE *(1818-1889): Γεννήθηκε στην Αγγλία. Καταγόταν από εύπορη οικογένεια. Πήρε τη βασική εκπαίδευσή του στα μαθηματικά, στη φιλοσοφία και στη χημεία από τον Dalton, αλλά θεωρείται, σε μεγάλο βαθμό, αυτοδίδακτος. Η πιο παραγωγική ερευνητική περίοδός του ήταν το διάστημα ανάμεσα στα 20 και στα 30 χρόνια του. Τότε θεμελίωσε την* ***αρχή της διατήρησης της ενέργειας και την ισοδυναμία της θερμότητας με τις άλλες μορφές ενέργειας.*** *Το έργο του για την ποσοτική σχέση ανάμεσα στα μηχανικά, στα ηλεκτρικά και στα χημικά αποτελέσματα της θερμότητας ολοκληρώθηκε το 1843. Τότε υπολόγισε το* ***μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας*** *ίσο με 4,186 J/cal.*

Έθεσε τις βάσεις για την πρωτοεμφανιζόμενη τότε ***θερμοδυναμική****, τις οποίες επέκτεινε ο λόρδος Kelvin.*

Σημαντική ήταν, επίσης, η προσφορά του Joule στη Φυσική των χαμηλών θερμοκρασιών.

Τα βιωματικά μας κατάλοιπα: Ο άνθρωπος δεν μπορεί εύκολα να απαλλαγεί από τα βιώματά του:

Πολύ πριν μάθει τι είναι έργο και ενέργεια, έτριβε δυο πέτρες μεταξύ τους, για να δημιουργηθεί σπινθήρας και να ανάψει τα ξύλα. Η θερμότητα μπήκε στη ζωή του από πολύ νωρίς και το cal επέζησε ως μονάδα θερμικού έργου. Μην ξεχνάμε πως οι διαιτολόγοι στο θερμιδομετρητή μιλάνε για θερμίδες (1 ιατρική θερμίδα = 1kcal = 10^3cal) και όχι για Joules. *(Αλήθεια πώς κρίνετε τη φράση: “Η μερίδα του μουσακά έχει 800 θερμίδες”;).* Ισχύει: 1cal = 4,186 Joules.

- Οι Αγγλοσάξονες από τα χρόνια της αποικιοκρατίας επέβαλαν τις μονάδες τους, που έμειναν ως τις μέρες μας. Μιλάμε για τη μονάδα B.t.u. (British thermal unit), την οποία θα γνωρίσετε στη Β΄ τάξη και θα δείτε γραμμένη στις ετικέτες των κλιματιστικών συσκευών. 1B.t.u. = 1055 Joules.

Οι λογαριασμοί της Δ.Ε.Η. αναγράφουν πόσες kWh (κιλοβατώρες) καταναλώσαμε, και: **1kWh=3,6.10^6Joules.**

Οι μηχανολόγοι συνήθισαν να μιλάνε για “κιλό δύναμης” (kgf) και εννοούν το 1kp. Η αντίστοιχη μονάδα έργου είναι το 1kpm (αυτό μπορείτε να το ορίσετε ανάλογα με το Joule). Οι φυσικοί *δεν πολυσυμπαθούν αυτή τη μονάδα, επειδή θυμίζει ροπή.*

Πάντως: $1kpm = g\left(\frac{m}{s^2}\right)Joules.$

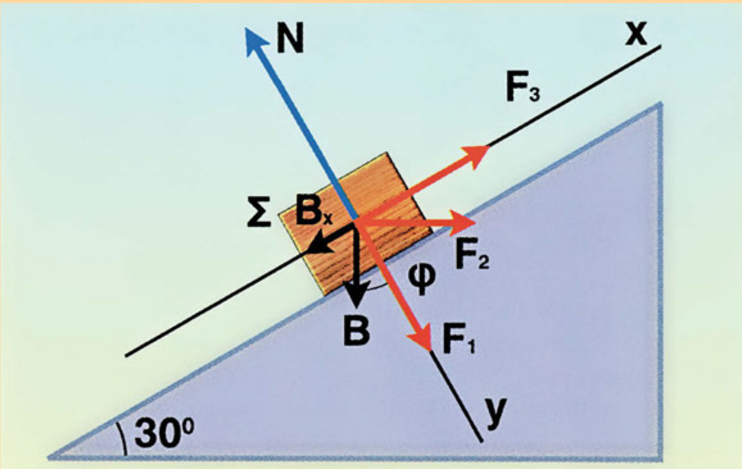
Αν, π.χ., $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, τότε 1kpm = 9,81 Joules. ***Συμπέρασμα:*** Άλλο είναι

το 1kpm για το Σουηδό ($g=9{,}83\,\frac{m}{s^2}$) και άλλο για μας ($g=9{,}81\,\frac{m}{s^2}$).

Παράδειγμα

Υπολογισμός έργου δυνάμεων: Σώμα Σ με μάζα m = 1kg ανέρχεται σε λεία ανηφόρα κλίσης φ = 30° και δέχεται την επίδραση των δυνάμεων που φαίνονται στην εικ. 5.4. Δίνονται: $F_1 = 30N$, $F_2 = 20N$ και $F_3 = 30N$. Να υπολογιστεί το συνολικό έργο των δυνάμεων για μετατόπιση κατά 30m,

αν δεχτούμε λείο επίπεδο και $g=10\,\frac{m}{s^2}$, $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.



Εικόνα 5.4: Υπολογισμός έργου δυνάμεων που ασκούνται σε σώμα

Λύση:

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (5.2): W=F · s · συνφ. Τα έργα είναι:

- Για το βάρος $\vec{B}$: $W_B = W_{Bx} = B_x s συν180^o = -B_x s = -mgημφs = -150J$

- Για την $\vec{F}_1$: $W_1 = F_1 s συν90° = 0J$

- Για την $\vec{F}_2$: $W_2 = F_2 s συν30^o = 20N \cdot 30m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3}\,J = 510J$

- Για την $\vec{F}_3$: $W_3 = F_3 s συν0^o = 30\ N \cdot 30m \cdot 1 = 900J$

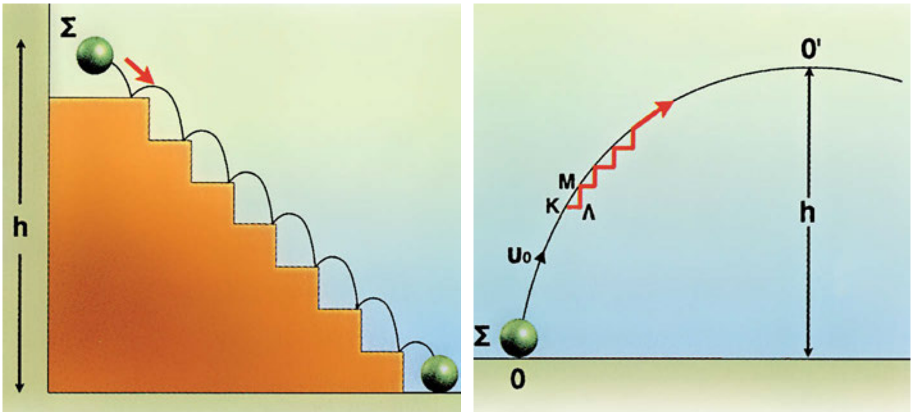
- Για την $\vec{N}$: $W_N = N s συν90^o = 0J$

Συνολικό έργο δυνάμεων: $W_{ολ} = W_B + W_1 + W_2 + W_3 + W_N = 1260J$.

5.3 Έργο γνωστών δυνάμεων

Από όλες τις δυνάμεις που μας περιτριγυρίζουν αξίζει να μελετήσουμε δύο, το βάρος και την τριβή, για δύο λόγους:
- Εμφανίζονται σχεδόν σε κάθε μηχανικό σύστημα.
- Αντιπροσωπεύουν τις δύο κυριότερες κατηγορίες δυνάμεων: τις δυνάμεις πεδίου (βάρος) και τις αντίστοιχες επαφής (τριβή).

5.3.1. Το βάρος, το έργο και η... συντήρηση



(α) (β)

Εικόνα 5.5: Το βάρος παράγει και καταναλώνει έργο.

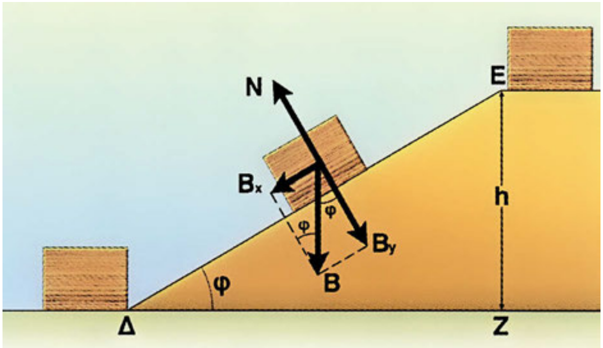
Στην εικόνα 5.5 βλέπουμε κινήσεις σωμάτων κατά τις οποίες ο ρόλος του βάρους είναι καθοριστικός. Το γκελάρισμα της σφαίρας Σ στα σκαλοπάτια και η πλάγια βολή στον αέρα επηρεάζονται σχεδόν αποκλειστικά από το βάρος. Το "σχεδόν" αναφέρεται στην παράλειψη της αντίστασης του αέρα, την οποία θεωρούμε αμελητέα. Στις κινήσεις της εικ. 5.5, λοιπόν, το έργο προέρχεται μόνο από το βάρος. Όταν το σώμα κινείται κατακόρυφο προς τα πάνω ή προς τα κάτω, το έργο του βάρους υπολογίζεται εύκολα. Αν μετατοπίζεται το σώμα κατακόρυφο κατά h, βρίσκουμε:

Άνοδος: $W = F s συνφ = B h συν 180^o = -Bh$
Κάθοδος: $W = F s συνφ = B h συν 0^o = Bh$.

Ας αναρωτηθούμε: Στο σερβίς του βόλεϊ ο παίκτης ρίχνει κατακόρυφα προς τα πάνω τη μπάλα. Το έργο του βάρους, μέχρι να ξαναγυρίσει η μπάλα στο ύψος του παίκτη, είναι: $W = -Bh + Bh = 0$. Γιατί, τότε, γίνεται η κίνηση αυτή; Ο άλλος παίκτης, που ρίχνει τη μπάλλα απ' την αρχή προς τα αντίπαλα καρέ, τι διαφορετικό κάνει; Έτσι κι αλλιώς και οι δύο παίκτες στο δίποντο στοχεύουν...

Όταν η κίνηση του σώματος δεν είναι κατακόρυφη αλλά πλάγια, όπως στην εικόνα 5.5 β, το έργο του βάρους υπολογίζεται με υπομονή. Προσεγγίζουμε την τροχιά με μια σειρά οριζόντιων και κατακόρυφων μετατοπίσεων. Είναι φανερό ότι για την κίνηση από το Ο στο Ο΄, που απέχουν υψομετρικά κατά h, το έργο βάρους είναι: W = - Bh.

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και για τη μετατόπιση του σώματος πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, ώστε να βρεθεί κατά h ψηλότερα (εικόνα 5.6).



Εικόνα 5.6: Έργο του βάρους σε κεκλιμένο επίπεδο

Η μεταφορά του σώματος από το σημείο Δ του εδάφους στο Ε του τραπεζιού μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) Μέσω της διαδρομής ΔΖΕ: Το έργο του βάρους ισούται με:

$$W_{ΔZE} = W_{ΔZ} + W_{ZE} = 0 - Bh = -Bh$$

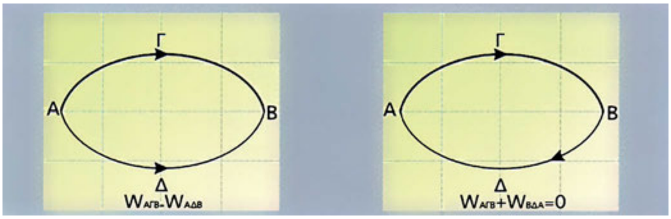
Μέσω της διαδρομής ΔΕ (με τη βοήθεια πλάγιας σανίδας):

$$W_{ΔE} = WB_x = -B_x(ΔE) = -Bημφ(ΔE) = -Bh$$

(αφού $ημφ = \dfrac{h}{ΔE}$ στο τρίγωνο ΔΕΖ και $ημφ = \dfrac{B_x}{B}$).

Το έργο του βάρους, επομένως, αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τη διαδρομή που επιλέγουμε. Επίσης, στην κλειστή διαδρομή ΔΖΕΔ το έργο του βάρους είναι:

$$W_{ΔZE} = W_{ΔZ} + W_{ZE} + W_{EΔ} = 0 - Bh + Bh = 0.$$



Η ιδιότητα του έργου βάρους μεταξύ δύο σταθερών σημείων να είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από τη διαδρομή που επιλέγουμε ανάμεσα στα σημεία, κατατάσσει το βάρος σε μια σημαντική κατηγορία δυνάμεων, στις **συντηρητικές ή διατηρητικές.**

Συντηρητικές ή διατηρητικές δυνάμεις είναι εκείνες των οποίων το έργο είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή και εξαρτάται μόνο από τη θέση του αρχικού και του τελικού σημείου. Με άλλα λόγια, το έργο αυτών των δυνάμεων σε κλειστή διαδρομή είναι ίσο με μηδέν.

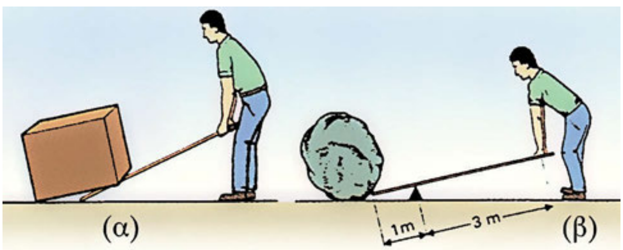
Το βάρος πρωταγωνιστεί σε πολλά από τα συστήματα που αποκαλούμε μηχανές. **Μηχανή,** γενικά, θεωρούμε κάθε διάταξη με την οποία επιδιώκουμε κέρδος σε κάποιο φυσικό μέγεθος. Δείτε, π.χ., την περίπτωση της εικ. 5.6. Με τη “μηχανή” που λέγεται κεκλιμένο επίπεδο κερδίζουμε σε δύναμη, αφού απαιτείται ελάχιστη τιμή της (για μετακίνηση χωρίς τριβή με πολύ μικρή και σταθερή ταχύτητα) ίση με F=Βημφ. Η αντίστοιχη δύναμη F΄ στην ανύψωση κατά h χωρίς τη μηχανή είναι: F΄ = Β. Το **κέρδος,** λοιπόν, είναι: $k = \frac{F}{F'}$ = ημφ. Στη μετατόπιση η ζημιά είναι ακριβώς ίδια, αφού αντί για τη διαδρομή ΖΕ = h η μηχανή προτιμά την $ΔΕ = \frac{h}{ημφ} > h$.

Η ιδιότητα αυτή του βάρους αποδείχτηκε θεμελιακή στη λειτουργία απλών μηχανών και οδήγησε στο **χρυσό κανόνα της Μηχανικής:**

Σε κάθε απλή μηχανή όσο κερδίζουμε σε δύναμη, τόσο χάνουμε σε διαδρομή. Έτσι, το έργο: W=Fs μένει σταθερό.

5.3.2: Πρώτη γνωριμία με μηχανές

Εκτός από το κεκλιμένο επίπεδο, απλές μηχανές θεωρούνται ο μοχλός, οι τροχαλίες, το πολύσπαστο και το βαρούλκο (βλ. εικόνες 5.7, 5.8, 5.9, και 5.10)



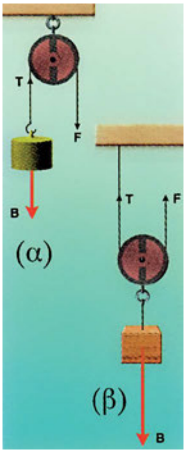
Εικόνα 5.7: Τα δύο είδη μοχλών

Στην εικόνα 5.7 (α, β) φαίνονται δυο είδη μοχλών. Διαφέρουν ως προς τη θέση του στηρίγματος (υπομόχλιου) σε σχέση με τα σημεία όπου δρουν η δύναμη που ασκούμε και το φορτίο που μετακινούμε. Άλλοτε βρίσκεται εκτός των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων, εικ. 5.7 (α), άλλοτε πάλι ανάμεσα τους. Δεν πρέπει να ξεχνάμε και την ισορροπία ροπών των δυνάμεων ως προς το υπομόχλιο (αλήθεια, γιατί ισχύει αυτό;). **Το μηχανικό κέρδος είναι πάντα το πηλίκο του φορτίου προς τη δύναμη που ασκούμε.**

Δοκιμάζουμε: Ας βρούμε το μηχανικό κέρδος για τους μοχλούς της εικ. 5.7. Για το μοχλό της εικ. 5.7(α) δεχόμαστε ότι η ράβδος χωρίζεται σε τμήματα με λόγο 3:1. Πόση είναι η αντίστοιχη μηχανική ζημιά για τις μετατοπίσεις δύναμης και φορτίου;

- Στις εικόνες 5.8(α) και (β) έχουμε δύο είδη τροχαλίας: την ακίνητη στην 5.8(α) και την κινητή στην 5.8(β). Η ελάχιστη δύναμη για ισορροπία ή ανύψωση του σώματος με σταθερή ταχύτητα για την ακίνητη είναι ίση με το βάρος του σώματος.

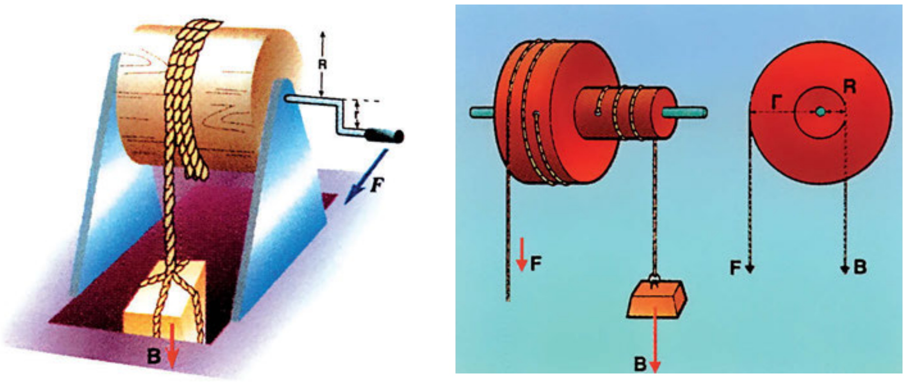
Εύλογη απορία: Τι μας προσφέρει τότε η μηχανή, αφού το μηχανικό κέρδος είναι 1 (στην ουσία δεν υπάρχει κέρδος); Η αντίστοιχη ελάχιστη δύναμη για την κινητή είναι ίση με το μισό του βάρους που ανυψώνεται (κέρδος 2). Γιατί;



Εικόνα 5.8: Η ακίνητη και η κινητή τροχαλία

- Στην εικόνα 5.9 έχουμε συνεργασία κινητής και ακίνητης τροχαλίας και το σύστημα λέγεται **πολύσπαστο.** Ο εργάτης ανυψώνει τον εαυτό του με τη βοήθεια του σχοινιού της μηχανής. Δοκιμάζουμε, πάλι, να βρούμε το μηχανικό κέρδος στις δυνάμεις και τη ζημιά στις μετατοπίσεις.

Εικόνα 5.9: Συνδυασμός ακίνητης και κινητής τροχαλίας(πολύσπαστο)



(α) (β)

Εικόνα 5.10: Το βαρούλκο

Στην εικόνα 5.10 (α) και (β) έχουμε το **βαρούλκο.** Είναι η μηχανή που βλέπουμε σε παλιά πηγάδια νερού για το ανέβασμα του κουβά. Ο κύλινδρος είναι δυνατό να έχει μεγαλύτερη ή μικρότερη ακτίνα R από την αντίστοιχη r του κύκλου που διαγράφει το άκρο της χειρολαβής στη μανιβέλα.

Το μηχανικό κέρδος $\frac{B}{F}$ (B = το βάρος που ανυψώνουμε, το οποίο ονομάζουμε συνήθως **φορτίο,** F = η δύναμη που ασκούμε) βρίσκεται από την ισορροπία των ροπών. Η συνισταμένη ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν. Άρα, $B \cdot R = F \cdot r$ και:

$$\frac{B}{F} = \frac{r}{R}.$$

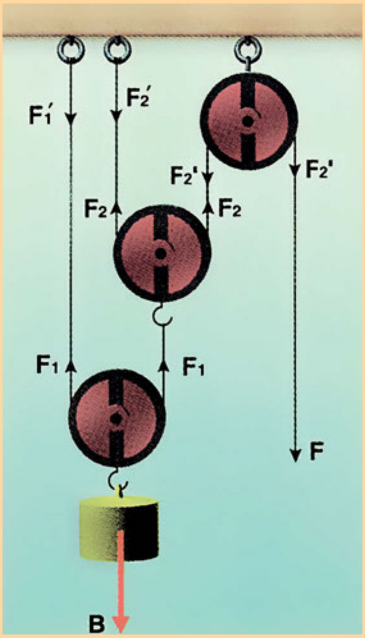
Η δύναμη είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το βάρος B ανάλογα με τη σχέση των δύο ακτίνων R, r.

Η λύση (α) της εικ. 5.10 αντιστοιχεί σε μηχανικό κέρδος μικρότερο του 1 αλλά σε κέρδος μετατοπίσεων μεγαλύτερο από 1. Ασκούμε, δηλαδή, δύναμη μεγαλύτερη από το βάρος, αλλά κερδίζουμε σε αριθμό περιστροφών της μανιβέλας.

Το αντίστροφο συμβαίνει στο σύστημα (β) της εικ. 5.10.

***Σημαντική επισήμανση*:** Για τις τροχαλίες, ακίνητες και κινητές, μπορούμε να δεχτούμε αμελητέα τη μάζα, άρα και το απαιτούμενο έργο περιστροφής του τροχού τους. Αυτό δεν ισχύει για τον κύλινδρο του βαρούλκου, του οποίου η μάζα και η ακτίνα είναι υπολογίσιμα. Γι’ αυτό προτιμήσαμε την ισορροπία ροπών και όχι την ισότητα έργων, για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα...

Παράδειγμα (Ο χρυσός κανόνας της Μηχανικής): Με το πολύσπαστο της εικ. 5.11 επιχειρούμε να ανυψώσουμε βάρος Β = 500Ν. Να υπολογιστεί η δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί και το μηχανικό κέρδος.



Εικόνα 5.11: Υπολογισμός δυνάμεων στο πολύσπαστο

Λύση:

Και για τις 3 τροχαλίες (τις δυο κινητές και τη μία ακίνητη) έχουμε την απαίτηση:

- η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι ίση με το μηδέν.
- η συνισταμένη των ροπών να είναι επίσης μηδέν (γιατί;).

Στην εικ. 5.11 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις F_1, F_2 και F και οι αντιδράσεις τους F_1', F_2'. Ελέγξτε γιατί έχουμε ίσες δυνάμεις σε κάθε τροχαλία. Τελικά η ασκούμενη δύναμη F είναι ίση με την αντίδραση F_2' της F_2.

Είναι εύκολο να γράψουμε: $F_1 = \frac{B}{2}$, $F_2 = \frac{F}{2}$ και, επομένως $F = F_2' = \frac{B}{4}$.

Επομένως, το μηχανικό κέρδος είναι $\frac{B}{F} = 4$, η "ζημιά" στις μετατοπίσεις

είναι: $\frac{h}{s} = \frac{F}{B} = \frac{1}{4}$ (προκύπτει από το χρυσό κανόνα της Μηχανικής:

$W_B = W_F$ ή Bh = Fs).

5.3.3: Έργο τριβής: ποσότητα μόνιμα αρνητική.

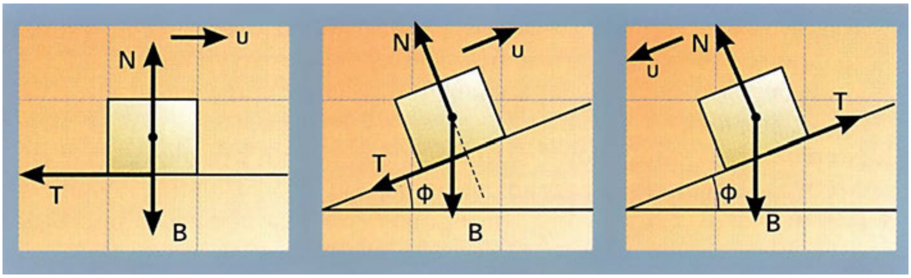
Σε αντίθεση με το βάρος, που έχει πάντα την ίδια διεύθυνση (κατακόρυφη) και φορά (προς το κέντρο της γης), η τριβή έχει διεύθυνση και φορά οι οποίες εξαρτώνται από την κατεύθυνση της κίνησης. Όπως έχουμε δει (Κεφάλαιο 4), η φορά της τριβής είναι αντίθετη από αυτήν της ταχύτητας. Η σχέση (5.2) παίρνει "μονότονη" μορφή, όταν αφορά το έργο W_T της τριβής, αφού πάντα φ=180° και:

$$W_T = T s \text{συν}\varphi$$

ή

$$\boxed{W_T = -Ts} \tag{5.5}$$

Το αρνητικό (-) πρόσημο σημαίνει έργο καταναλισκόμενο από την τριβή και αυτό είναι ανεξάρτητο από το είδος της επιφάνειας κίνησης (οριζόντιας ή πλάγιας) και από τη φορά κίνησης, προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά στην εικ. 5.12(α), προς τα πάνω ή προς τα κάτω στις εικ. 5.12(β, γ).

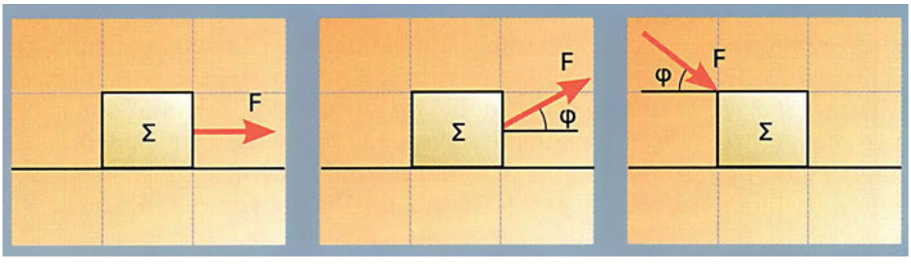


(α) (β) (γ)

Εικόνα 5.12: Έργο τριβής

Όταν η απλή σκέψη συμβαδίζει με τη φυσική εξήγηση.

Το σώμα Σ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση δύναμης οριζόντιας (α), πλάγιας προς τα πάνω (β) και προς τα κάτω (γ) με κλίση φ, εικόνα 5.13. Επιδιώκουμε να συγκρίνουμε τα έργα της τριβής στις τρεις περιπτώσεις (για ίδια οριζόντια μετατόπιση).



(α) (β) (γ)

Εικόνα 5.13: Η τιμή της δύναμης τριβής εξαρτάται και από τον προσανατολισμό της δύναμης που ασκούμε στο σώμα.

Σκεφτόμαστε απλά: Η τριβή γίνεται μεγαλύτερη, όταν το σώμα πιέζεται περισσότερο προς την επιφάνεια στήριξης. Περιμένουμε, λοιπόν, τη σχέση: Τγ > Τα > Τβ (και Wγ > Wα > Wβ) για τις τιμές της τριβής και του έργου της στις περιπτώσεις (α), (β) και (γ).

Επιβεβαιώνουμε: Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις για τις τρεις περιπτώσεις. Από τη σχέση $\Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$ για τις δυνάμεις του κατακόρυφου άξονα y βρίσκουμε τις σχέσεις για τις αντιδράσεις $\vec{N}_\alpha$, $\vec{N}_\beta$, $\vec{N}_\gamma$ (κατακόρυφες) του επιπέδου στο σώμα. Ύστερα φτάνουμε στις σχέσεις: $T = \eta\ N$, $W = -\ T\ s$ (η = συντελεστής τριβής ολίσθησης, ίδιος για τις τρεις περιπτώσεις). Επαληθεύονται οι προβλέψεις μας; Αξίζει να προσπαθήσουμε...

Πώς λύνουμε τις ασκήσεις του έργου: Σε όλες ανεξαιρέτως τις ασκήσεις έργου δυνάμεων η διαδικασία επίλυσής τους είναι η παρακάτω:

- Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις, που ασκούνται στο σώμα (ή στα σώματα) που περιλαμβάνει η άσκηση. Θυμόμαστε ότι έχουμε δυνάμεις βαρύτητας και δυνάμεις επαφής. Οι δυνάμεις επαφής περιλαμβάνουν εκείνες που είναι κάθετες στην επιφάνεια επαφής και τις συμβολίζουμε με το γράμμα N, και τις τριβές, που τις συμβολίζουμε με το γράμμα T.
- Ελέγχουμε την κατεύθυνση κίνησης του σώματος ή των σωμάτων. Αυτό μας βοηθάει:

1. Να επιλέγουμε τους άξονες x (άξονας κίνησης) και y (κάθετος στον x).
2. Να σχεδιάζουμε τις τριβές, με αντίθετη φορά από εκείνη της κίνησης.

- Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις στους δύο άξονες x, y που επιλέξαμε. Για όλες αυτές τις συνιστώσες το έργο βρίσκεται από τη σχέση (5.2) με συνφ = ± 1, αφού η γωνία φ θα ισούται με 0° ή με 180°.

5.4. Ρυθμοί έργου

Για να αξιολογήσουμε μηχανήματα και συσκευές, δεν μπορούμε να βασιστούμε μόνο στο έργο που παράγουν. Ποιος εμποδίζει, π.χ., τον κινητήρα μιας “σακαράκας” να παράγει ίδιο ή και μεγαλύτερο έργο σε σχέση με το αντίστοιχο ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου; Αρκεί ο πρώτος να δουλέψει πολλαπλάσιο χρόνο από το δεύτερο. Για να εκτιμηθεί η “δύναμη” του κινητήρα, πρέπει να κριθεί με το **ρυθμό** παραγωγής έργου. Η λέξη “ρυθμός” δημιουργεί μια αρκετά μεγάλη, σε αξία και ποικιλία, κατηγορία φυσικών μεγεθών, τα οποία δείχνουν τη μεταβολή στη μονάδα χρόνου ενός άλλου μεγέθους: Η σχέση: $X = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$ δηλώνει ότι το μέγεθος X είναι ρυθμός μεταβολής του μεγέθους A. Αν στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1 = t - 0 = t$ το μέγεθος A αυξήθηκε από 0 σε A με σταθερό τρόπο, μπορούμε να γράψουμε:

$X = \frac{A}{t}$. (*Ας θυμηθούμε μεγέθη–ρυθμούς από την έως τώρα εμπειρία μας*).

Ο ρυθμός παραγωγής ή κατανάλωσης έργου $\left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \text{ ή } \frac{W}{t}\right)$ εκφράζεται με την **ισχύ** P.

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W}{t}} \tag{5.3}$$

Από τις σχέσεις (5.1) και (5.3) προκύπτει: $P = \frac{F \cdot s}{t}$ ή

$$\boxed{P = F \cdot \upsilon} \tag{5.4}$$

Προσοχή: Τα διανύσματα $\vec{F}$ και $\vec{\upsilon}$ στη σχέση (5.4) είναι συγγραμμικά. Μιλάμε, δηλαδή, για τη δύναμη που έχει ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα.

Η ισχύς είναι μέγεθος μονόμετρο, με μονάδα στο S.I.:

$$1W(\text{Watt}) = 1\frac{\text{Joule}}{s} = 1\frac{J}{s} .$$

Το **Watt** είναι, δηλαδή, ο ρυθμός λειτουργίας συστήματος το οποίο παράγει ή καταναλώνει με σταθερό τρόπο 1J σε χρόνο 1s. Η μονάδα 1kWh, που αναφέρθηκε πιο πάνω, αντιστοιχεί στο έργο που προκύπτει σε 1h από σύστημα σταθερής ισχύος 1kW.

Έχουμε και για την ισχύ τις πρακτικές μονάδες, τις οποίες επιβάλλουν οι παραδόσεις. Είναι:

1H.P. (Horse Power) = 746 W

1 C.V. (Cheval Vapeur) = 736 W

Οι όροι σημαίνουν: “ισχύς αλόγου”. Δε μοιάζει όμως κάπως “θολή” αυτή η φράση; Για ποιο άλογο μιλάμε; Γι’ αυτό στο κάρο του πλανόδιου μανάβη ή για το αγωνιστικό του ιππόδρομου; Τελικά, η απάντηση είναι: Για κανένα από τα δύο αλλά για ένα “μέσο” άλογο. Άρα, 1H.P. είναι η ισχύς ενός μέσου αλόγου που παράγει 550 ft.lb έργο σε 1s. (1ft.lb = 1,356Joules).

Έργο από δύναμη μεταβλητού μέτρου - Μεταβλητή ισχύς

Έως τώρα δεχτήκαμε ότι η δύναμη ή η ισχύς που συνδέεται με έργο έχουν σταθερή τιμή. Είναι μια παραδοχή βολική μεν, περιορισμένης εγκυρότητας δε, για τις περιπτώσεις στις οποίες το μήκος ή η διάρκεια της μετατόπισης δεν είναι στοιχειώδη. Είναι σχεδόν αδύνατο να επιχειρούμε μεγάλες μετατοπίσεις ασκώντας, εμείς ή η μηχανή που χρησιμοποιούμε, σταθερή δύναμη. Ή πάλι είναι σχεδόν αδύνατο να λειτουργεί κινητήρας παράγοντας συνεχώς την ίδια ισχύ. (Ας προσέξουμε, π.χ., ότι στα εγχειρίδια λειτουργίας των αυτοκινήτων αναγράφεται κάποια τιμή μέγιστης ισχύος για κάποια τιμή στροφών του κινητήρα).

Οι περιπτώσεις εφαρμογών στις οποίες η δύναμη μεταβάλλεται με τη μετατόπιση και η ισχύς με το χρόνο είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσες και πολυάριθμες. Η μαθηματική επεξεργασία, όμως, των περιπτώσεων αυτών είναι χρονοβόρα και ξεφεύγει από τους στόχους του βιβλίου.

Η μόνη περίπτωση έργου μεταβλητής δύναμης που θα αναφέρουμε ενδεικτικά είναι η παραμόρφωση (επιμήκυνση ή συσπείρωση) ιδανικού ελατηρίου. Το φαινόμενο μελετήθηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2. Το έργο για την παραμόρφωση του ελατηρίου κατά x δίνεται από τη σχέση:

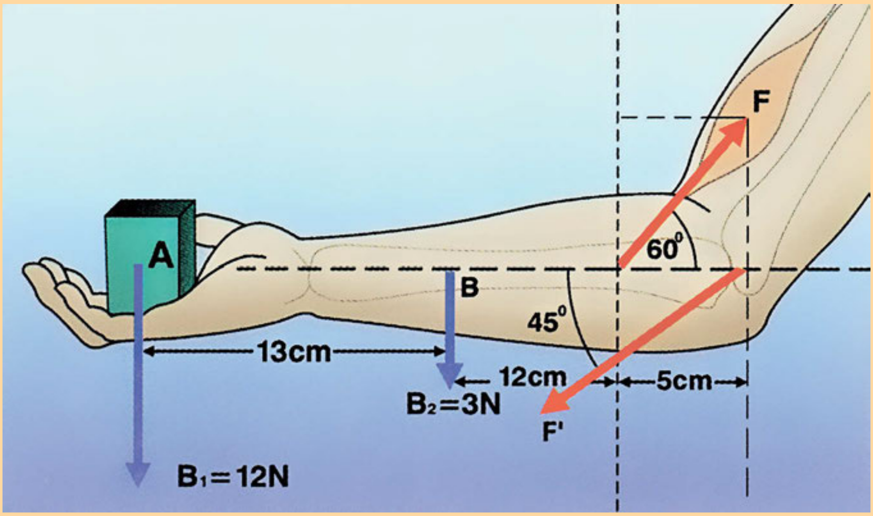
$$\boxed{W = \frac{1}{2} k \cdot x^2} \tag{5.5}$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση αυτή, στην επιμήκυνση (x>0) και στη συσπείρωση (x<0) το έργο είναι θετικό. (Ας θυμηθούμε τι σημαίνει αυτό).

Προσέξτε και αυτό...

5.5. Ανθρώπινος οργανισμός: η σχεδόν τέλεια μηχανή.

Το ανθρώπινο σώμα είναι μια πολύπλοκη μηχανή: θερμική, χημική, ηλεκτρική, παραγωγική και αναπαραγωγική για κάποια από τα συστατικά του (τομές ξανακλείνουν, τραύματα επουλώνονται, αυτοθεραπεία μπορεί να γίνει...). Ο ανθρώπινος σκελετός είναι γεμάτος από μοχλούς, οι οποίοι ενεργοποιούνται από τους μύες. Όλοι οι μύες έχουν αποθηκευμένη χημική ενέργεια και την αποδίδουν άλλοτε αυξάνοντας το μήκος τους και άλλοτε ελαττώνοντάς το ή διατηρώντας το σταθερό. Οι μυϊκές δυνάμεις μεταφέρονται ή μετασχηματίζονται από οστά και από αρθρώσεις, και δίνεται κίνηση στα μέλη του σώματος. Μηχανή παραγωγής έργου για τον οργανισμό είναι η καρδιά με τους 70 κτύπους ανά min κατά μέσο όρο και τα 1,3J ανά κτύπο. (*Για πόσο έργο ανά 24ωρο μιλάμε αλήθεια;*).



Εικόνα 5.14: Το ανθρώπινο χέρι ως μοχλός

Το χέρι της εικόνας 5.14 μοιάζει με το μοχλό της εικ. 5.7(α) με το υπομόχλιο έξω από τα σημεία εφαρμογής δύναμης $\vec{F}$ και φορτίου ($\vec{B}_1$). Με μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος των ροπών ως προς το υπομόχλιο βρίσκουμε πως η $\vec{F}_1$ είναι πολύ μεγαλύτερη από το φορτίο. (*Δοκιμάστε, με την ευκαιρία, να βρείτε τις δυνάμεις F, F΄*).

Γιατί, τότε, θεωρούμε "έξυπνη" μηχανή το σώμα μας, αφού απαιτεί δυνάμεις μεγαλύτερες από τα φορτία; Υπάρχει φυσική και βιολογική εξήγηση.

Η φυσική εξήγηση βρίσκεται στο χρυσό κανόνα της Μηχανικής: κερδίζουμε σε μετατοπίσεις. Ενώ ο μυς συσπάται δηλαδή μετακινείται λίγο (μέχρι το πολύ 30% του μήκους του), τα άκρα μπορούν να μετατοπίζονται αρκετά.

Η βιολογική εξήγηση είναι ότι οι μύες μπορούν να βρίσκονται πολύ κοντά και σχεδόν παράλληλα με τα οστά. Γι' αυτό τα άκρα μας (χέρια και πόδια) μπορούν να είναι σχετικά λεπτά.

Πηγή ενέργειας του ανθρώπινου οργανισμού είναι η διατροφή. Μέρος της ενέργειας εμφανίζεται ως ανθρώπινη δραστηριότητα με όλες τις μορφές της, ενώ το υπόλοιπο αποβάλλεται ως θερμότητα. Κατά μέσο όρο ο άνθρωπος καταναλώνει 2.500 θερμίδες (2.500 kcal) την ημέρα. Ως **μέσος ρυθμός μεταβολισμού** ορίζεται η ισχύς κατανάλωσης. Θυμηθείτε τη σχέση του 1 cal με το Joule και τα 86400s που αποτελούν το 24ωρο. Θα βρείτε μέσο ρυθμό μεταβολισμού 121W για τον άνθρωπο, στον οποίο και αναφερόμαστε. Μέγεθος που κατεβαίνει στα 75W, όταν κοιμόμαστε, και ανεβαίνει στα 400W, όταν κάνουμε "τζόκινγκ". (Για το διάβασμα η τιμή μεταβολισμού έχει να κάνει με το βαθμό προσήλωσης του αναγνώστη στο κείμενο και με το βαθμό δυσκολίας του κειμένου).

Πρόταση: Συμβουλευτείτε θερμιδομετρητή για τις τροφές που καταναλώσατε κάποια μέρα. Βάλτε κάτω και τις δραστηριότητες της ίδιας μέρας και "κοστολογήστε" τες ως προς τις θερμίδες. Να συγκρίνετε τις δύο τιμές (κατά προσέγγιση). Οι παρακάτω πίνακες ίσως σας φανούν χρήσιμοι, αν το μενού της διατροφής σας περιλαμβάνεται στη λίστα (Πίνακας Ι).

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι: Θερμιδική αξία κάποιων γνωστών τροφών και ποτών.

Τροφές - ποτά	Θερμίδες kcal/100g	Τροφές - ποτά	Θερμίδες kcal/100g
Ψωμιά διάφορα	65-85	Γλυκά	200-700
Γάλα αποβουτυρωμένο	40	Λαχανικά	10-300
Γάλα ζαχαρούχο	560	Ξηροί καρποί	200-700
Γάλα σοκολατούχο	80	Τυριά	150-500
Γιαούρτι πρόβειο	100	Καφές ελλην. σκέτος	0
Γιαούρτι στραγγιστό	130	Χυμοί φυσικοί	20-50
Σαντιγί	660	Ποτά	50-300
Αρνί ψητό	320	Φρούτα	30-300
Μοσχαρίσια μπριζόλα	206	Ψάρια	30-400
Χοιρινό φιλέτο	300	Ζαμπόν	350

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ: Ανθρώπινες δραστηριότητες και οι αντίστοιχες θερμίδες

Δραστηριότητα	O_2 (ml/s)	P (W)
Ύπνος	4	85
Ανάπαυση	55	120
Παρακολούθηση μαθήματος	100	210
Αργό βάδισμα	120	266
Ποδηλασία	190	400
Κολύμπι	230	480
Ανέβασμα σκάλας (2σκαλιά/s)	330	686
Αγώνας δρόμου 5km	605	1230

Στον πίνακα ΙΙ αναγράφονται κάποιες ανθρώπινες δραστηριότητες, η μέση κατανάλωση οξυγόνου στις καύσεις και ο αντίστοιχος μέσος μεταβολισμός.

Επειδή, ο πίνακας είναι ελλιπής, υπολογίστε με δική σας εκτίμηση, τις τιμές του O_2 και του P για άλλες δραστηριότητες (διάβασμα, παρακολούθηση TV, αναμονή στη στάση λεωφορείου κτλ.). Δε θα κριθείτε αυστηρά για τις εκτιμήσεις σας. Ειδικοί δεν είστε...

Παράδειγμα: Η προσπάθεια να "κάψουμε" τις θερμίδες.
Μαθητής γευμάτισε τρώγοντας: μοσχαρίσια μπριζόλα 200gr, ψωμί 100gr, σαλάτα 80gr, φρούτα 150gr με συνοδεία 200gr γνωστού αναψυκτικού - χωνευτικού. Έπειτα αναπαύθηκε για 1h, διάβασε για 2h και ύστερα πήγε πεζοπορία 10min μέχρι το γυμναστήριο. Πόσες ανυψώσεις βάρους 500N πρέπει να επιχειρήσει σε ύψος 2m, για να "κάψει" τις θερμίδες που πήρε στο γεύμα;

Λύση:
Κατανάλωση θερμίδων:

Μπριζόλα: $Q_1 = 200\text{gr}\cdot 206\,\dfrac{\text{kcal}}{100\text{gr}} = 412\text{kcal}$

Ψωμί: $Q_2 = 100\text{gr}\cdot 70\,\dfrac{\text{kcal}}{100\text{gr}} = 70\text{kcal}$

Σαλάτα: $Q_3 = 80\text{gr}\cdot 50\,\dfrac{\text{kcal}}{100\text{gr}} = 40\text{kcal}$

Φρούτα: $Q_4 = 150\text{gr}\cdot 100\,\dfrac{\text{kcal}}{100\text{gr}} = 150\text{kcal}$

Αναψυκτικό: $Q_5 = 250gr \cdot 100 \dfrac{kcal}{100gr} = 250kcal$

Συνολικά πήρε: Q=922kcal. (Όπως διαπιστώνετε, η θερμιδική αξία κάθε είδους υπολογίστηκε κατά προσέγγιση (με τη βοήθεια του πίνακα Ι).

Παραγωγή ενέργειας:

Ανάπαυση: $W_1 = P_1t_1 = 120W \cdot 1h = 120Wh$

Διάβασμα: $W_2 = P_2t_2 = 200W \cdot 2h = 400Wh$

Πεζοπορία: $W_3 = P_3t_3 = 300W \cdot 10min = 300W \cdot \dfrac{1}{6} h = 50Wh$

Συνολικά κατανάλωσε μέχρι το γυμναστήριο:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 570Wh$$

Αλλά $1\ Wh = 1 \dfrac{J}{s} \cdot 3600s = 3600J = \dfrac{3600}{4,18} cal \approx 900cal.$

Από τα 922 kcal, λοιπόν, έκαψε πριν από τη γυμναστική τα 900 cal, δηλαδή περίπου 1 kcal. Μένουν 921 kcal. Κάθε ανύψωση του βάρους αντιστοιχεί σε έργο:

$$W' = mgh = 500N \cdot 2m = 10^3 J \approx 250cal.$$

Για να “φύγουν” λοιπόν τα 921 kcal, ο μαθητής πρέπει να επιχειρήσει... 36.103 ανυψώσεις. Χαρά στο κουράγιο του!

Συμπέρασμα:

Ο μαθητής πρέπει ή να τρώει λιγότερο ή να επιλέξει άθλημα πιο θερμιδοφάγο...

5.6. Έργο και ενέργεια: οι δυο όψεις του ίδιου νομίσματος

Στις προηγούμενες σελίδες αναφερθήκαμε σε όλα όσα αφορούν το έργο. Πίσω από την έννοια “έργο” βρίσκεται η σημαντικότερη, ίσως, ιδιότητα της ύλης: η ενέργεια.

Η ενέργεια εμφανίζεται με πολλές μορφές. Οι πιο συνηθισμένες μορφές της είναι: η μηχανική, η ηλεκτρική, η θερμική, η φωτεινή, η ηλιακή, η ακουστική, η ατομική, η πυρηνική. Από την ονομασία τους και μόνο μπορεί κάποιος να αντιληφθεί το είδος του φαινομένου που βρίσκεται πίσω από κάθε ενέργεια. Τελικά, κάθε διαδικασία ζωής και εξέλιξης συνοδεύεται από κάποια ενεργειακή διαδικασία. Σε όλα τα φυσικά φαινόμενα μια μορφή ενέργειας μεταβάλλεται ή μετατρέπεται σε άλλη ενέργεια. Η μακρόχρονη εμπειρία επιτρέπει τη διατύπωση του νόμου διατήρησης της ενέργειας:

Η ενέργεια δεν παράγεται από το μηδέν ούτε οδηγείται στο μηδέν (δεν εξαφανίζεται). Μπορεί μόνο να μετατρέπεται από μια μορφή σε μια άλλη.

Ας αναφερθούμε συνοπτικά στα πιο γνωστά είδη ενέργειας, εξετάζοντας κυρίως τα αίτια και το ρόλο τους.

Μηχανική είναι η ενέργεια που εμφανίζεται στα μηχανικά φαινόμενα (κινήσεις, παραμορφώσεις, μετατοπίσεις σε διάφορα επίπεδα ως προς το έδαφος). Διακρίνεται σε δύο μορφές: σε **κινητική** και σε **δυναμική.**

● **Κινητική ενέργεια** είναι εκείνη που οφείλεται στην κίνηση υλικού σημείου ή σώματος και συνδέεται με την ταχύτητά του (με τη γενική σημασία που έχει ο όρος “ταχύτητα”). Μια απλή και συνηθισμένη περίπτωση εμφάνισης της κινητικής ενέργειας είναι το σώμα της 1^{ης} από τις παρακάτω εικόνες. Δεχόμαστε λείο επίπεδο και σώμα αρχικά σε ηρεμία. Το έργο W της συνισταμένης δύναμης μπορεί να εκφραστεί με μια σχέση “εύχρηστη”, αν αξιοποιήσουμε τις εξισώσεις:

$$W = F_{Ολ}s, \qquad F_{Ολ} = mα, \qquad υ = αt \qquad s = \frac{1}{2}αt^2$$

Καταλήγουμε: $$W = \frac{1}{2}m(αt)^2$$

ή τελικά, $$W = \frac{1}{2}mυ^2.$$

Η παράσταση $\frac{1}{2}mυ^2$ εκφράζει την κινητική ενέργεια του κινητού:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mυ^2} \qquad (5.6)$$

Έργο και μεταβολή κινητικής ενέργειας

Η μελέτη της κίνησης σώματος δεν αρχίζει πάντα από τη φάση της ηρεμίας. Αν, π.χ., για t = 0 το σώμα έχει ταχύτητα $\vec{υ}_0 = 0$, έχουμε κάποιες διαφοροποιήσεις στις σχέσεις μας. Οι σχέσεις κίνησης είναι τώρα:

$$υ = υ_0 + αt \text{ και } s = υ_0 t + \frac{1}{2}αt^2$$

και ο συνδυασμός τους: $s = \dfrac{υ^2 - υ_0^2}{2α}$ (λύσαμε ως προς t τη 1η σχέση και βρήκαμε: $t = \dfrac{υ - υ_0}{α}$. Τη σχέση αυτή του t την αντικαταστήσαμε στην εξίσωση του s). Τώρα έχουμε: $$W = F_{Ολ} \cdot s = m \cdot α \cdot \frac{υ^2 - υ_0^2}{2α}$$

ή $$\boxed{W = \frac{1}{2}m \cdot υ^2 - \frac{1}{2}m \cdot υ_0^2} \qquad (5.7)$$

Έτσι, φτάσαμε στο **θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:**

Το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται σε σώμα κατά τη μετακίνησή του μεταξύ δύο θέσεων ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του.

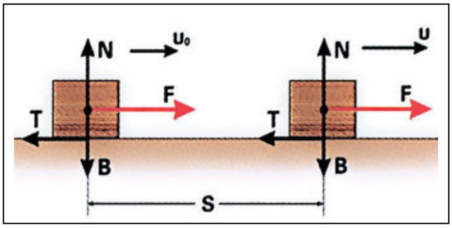
Λύση - κλειδί: Το θεώρημα αυτό μας λύνει τα χέρια, σε περιπτώσεις στις οποίες με την κινηματική απαιτείται χρήση συνδυασμού σχέσεων. Ας δούμε το σώμα της 2^{ης} εικόνας, π.χ., όπου το έργο αντιστοιχεί τελικά μόνο στην τριβή: $W_T = -Ts = -ηNs$.

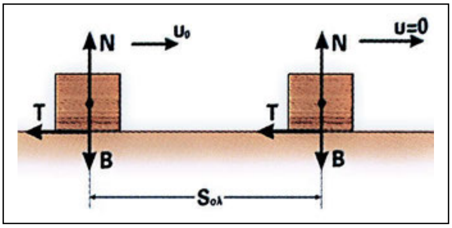
Η απόσταση σταματήματος $s_{O\lambda}$ είναι εκείνη για την οποία έχουμε τελική ταχύτητα $\upsilon = 0$. Η σχέση (5.7) γράφεται τότε:

$$W_T = -\frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

ή $$-\eta m g s_{O\lambda m} = -\frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

Άρα $$\boxed{s_{O\lambda m} \frac{\upsilon_0^2}{2\eta g}} \qquad (5.8)$$





Συγκρίσεις: *Ας επιχειρήσουμε να βρούμε τη σχέση (5.8) αξιοποιώντας τις εξισώσεις της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης. Είχαμε κάνει σχετική νύξη στο Κεφάλαιο 4, το οποίο αναφέρεται στις τριβές. Ας τα θυμηθούμε:*

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t, \qquad s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2, \qquad \upsilon = 0, \qquad \alpha = \frac{T}{m}, \qquad T = \eta m g$$

Ας εφαρμόσουμε: Προσπαθούμε να βρούμε το ύψος h_m που φτάνει σώμα, αν το ρίξουμε κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Αξιοποιούμε τη σχέση (5.7). Επαναλαμβάνουμε την προσπάθεια για την κάθοδο του σώματος και βρίσκουμε με ποια ταχύτητα γυρίζει στα χέρια μας το σώμα. Ευκαιρία να θυμηθούμε ότι το βάρος είναι συντηρητική δύναμη. (Αντιστάσεις αέρα αμελητέες).

● **Δυναμική ενέργεια:** είναι εκείνη που οφείλεται στη **θέση** του σώματος ή στην **κατάσταση** στην οποία βρίσκεται. Θα πρέπει να αποσαφηνίσουμε από την αρχή: η δυναμική ενέργεια είναι μέγεθος με σχετική αξία. Μοιάζει με την “οικονομική επιφάνεια”. Για τις εξελίξεις που προκαλούν και οι δύο ενδιαφέρουν μόνο οι μεταβολές της τιμής τους και όχι το πόσο μεγάλο ή μικρό είναι το μέγεθός τους.

Δυναμική ενέργεια λόγω θέσης είναι, π.χ., η βαρυτική, η οποία έχει ως αιτία το έργο του βάρους. Αν ανεβάσουμε κάποιο σώμα κατά h, καταναλώνουμε έργο: W=Bh. Αν αφήσουμε ελεύθερο το σώμα, μπορεί να παραγάγει ισοδύναμο έργο (οι αντιστάσεις του αέρα παραλείπονται). Αυτό σημαίνει ότι το σώμα στην υψηλότερη θέση έχει δυναμική ενέργεια σε σχέση με τη χαμηλότερη θέση ίση με:

$$\boxed{U = Bh = mgh} \qquad (5.9)$$

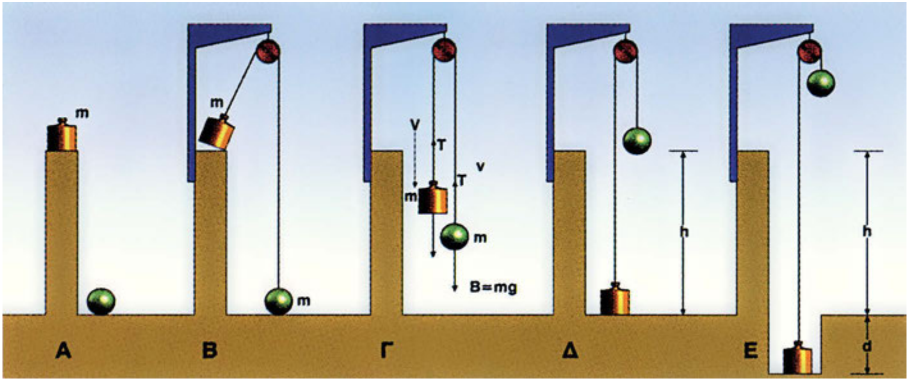
Λίγα λόγια για το πρόσημο της U. Έχουμε:

*U=0: στο επίπεδο όπου δεχόμαστε h = 0. Η επιλογή έχει μια αυθαιρεσία (ή, τουλάχιστον, φαίνεται ότι έχει). Δεν είναι όμως έτσι. Επίπεδο αναφοράς (h = 0) θεωρείται το χαμηλότερο για τη διαδικασία που μελετούμε. Συνήθως, αλλά όχι πάντα, ως τέτοιο επίπεδο λαμβάνεται το έδαφος.

*U>0: σε όλα τα επίπεδα πάνω από το “επίπεδο αναφοράς”.

*U<0: για τα επίπεδα που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο αναφοράς.

Στην εικ. 5.15 φαίνεται σύστημα τροχαλίας και σωμάτων που τους αλλάζουμε θέση. Συγκρίνετε τις δυναμικές ενέργειες των σωμάτων με επίπεδο αναφοράς το έδαφος.



Εικόνα 5.15: Σύγκριση δυναμικών ενεργειών

Δυναμική ενέργεια λόγω κατάστασης είναι εκείνη που εμφανίζεται, όταν σώμα ή σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση που επιτρέπει παραγωγή έργου. Η παραμόρφωση είναι η πιο χαρακτηριστική περίπτωση. Το ελατήριο, π.χ., στη θέση επιμήκυνσης κατά x έχει δυναμική ενέργεια ίση με το έργο που δαπανήσαμε, για να το φέρουμε από το φυσικό μήκος σε αυτή τη θέση. Άρα:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2} \qquad (5.10)$$

Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι το ελατήριο αποδίδει το έργο που του δώσαμε για να το επιμηκύνουμε.

Γενικά: **Η δυναμική ενέργεια λόγω θέσης ή κατάστασης ισούται με το έργο της δύναμης που ευθύνεται για την αλλαγή αυτής της θέσης ή της κατάστασης.**

Αμοιβαίες μετατροπές κινητικής και δυναμικής ενέργειας

Η μηχανική ενέργεια είναι, το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Αυτή είναι η ποσότητα που διατηρείται σταθερή και όχι οι επιμέρους ποσότητες, δηλαδή η κινητική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια.

Η μηχανική ενέργεια σώματος που εκτοξεύεται από το έδαφος με ταχύτητα προς τα πάνω ισούται με:

$$E_M = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

Στο ανώτερο σημείο που φτάνει το σώμα έχουμε:

$$E'_M = K_2 + U_2 = 0 + mgh_m$$

όπου h_m= κατακόρυφη απόσταση του υψηλότερου σημείου από το έδαφος (όπου $\upsilon = 0$).

Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα, το έργο κατά την άνοδο του σώματος προέρχεται μόνο από το βάρος: $W = - mgh_m$. Η σχέση (5.7) οδηγείται στο αποτέλεσμα:

$-mgh_m = - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$, σχέση που δείχνει ότι οι δύο τιμές E_M, E'_M της μηχανικής ενέργειας στα δύο σημεία είναι ίσες:

$$\boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2} \qquad (5.11)$$

Η σχέση (5.11) είναι έκφραση του θεωρήματος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας η οποία συνδέεται με δυνάμεις “μηχανικές”, όπως το βάρος και η δύναμη Hooke (δηλαδή δυνάμεις που το έργο τους συνδέεται με μετατροπές της μηχανικής ενέργειας). Όταν εμφανίζονται δυνάμεις που έχουν σχέση με άλλες μορφές ενέργειας, το θεώρημα οδηγείται σε μετατροπές της μηχανικής ενέργειας και λέγεται **θεώρημα διατήρησης ολικής ενέργειας.** Τέτοια δύναμη είναι η τριβή, της οποίας το έργο γίνεται θερμότητα.

Είναι φανερό ότι αν υπάρχουν μόνο μηχανικές δυνάμεις, η κινητική και η δυναμική ενέργεια λειτουργούν ανταγωνιστικά, αφού η αύξηση της μιας προκαλεί μείωση της άλλης. Πρακτικά αυτό φαίνεται στις κινήσεις σώματος στον αέρα ή με τη βοήθεια ελατηρίου. Άνοδος του σώματος οδηγεί σε αύξηση της δυναμικής ενέργειάς του ως προς το έδαφος με σύγχρονη ελάττωση της κινητικής. Σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου που επιμηκύνεται, κινείται με μικρότερη ταχύτητα όσο μεγαλώνει η επιμήκυνση. Αυτό συμβαίνει επειδή η αύξηση στην επιμήκυνση αυξάνει τη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης σε βάρος της κινητικής ενέργειας του σώματος. (Δοκιμάστε με ένα ελατήριο και ένα σώμα).

Πώς λύνουμε τις ασκήσεις ενέργειας: Προηγείται η διαδικασία που περιγράψαμε για τις ασκήσεις του έργου (σχεδίαση όλων των δυνάμεων, ανάλυση στους άξονες x, y και υπολογισμός όλων των συνιστωσών). Μετά ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

● Βρίσκουμε το συνολικό έργο $W_{Ολ}$ των δυνάμεων, δηλαδή το έργο της συνισταμένης ΣF_x στον άξονα της κίνησης για τη μετακίνηση από το αρχικό στο τελικό σημείο. Το έργο αυτό ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας: $\Delta K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$. Έτσι, αν μας δοθεί η μια ταχύτητα, μπορούμε να βρούμε την άλλη.

● Γράφουμε τις εκφράσεις για τη μηχανική ενέργεια (κινητική + δυναμική) στο αρχικό και στο τελικό σημείο της διαδρομής. Για τις δύο αυτές εκφράσεις ισχύουν τα εξής:

1. Είναι ίσες, αν δεν εμφανίζονται δυνάμεις τριβής: $E_M^{αρχ} = E_M^{τελ}$.
2. Η μεταβολή της είναι ίση με το έργο της τριβής: $ΔE_M = W_T$.
Όποια από τις δύο περιπτώσεις και να συναντήσουμε, θα γράψουμε την ισότητα και θα βρούμε το άγνωστο μέγεθος.

Παράδειγμα
Το σώμα της εικ. 5.6 εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{υ}_0 = 10\ \frac{m}{s}$ από τη βάση ανηφόρας κλίσης 30°. α) Πόσο διάστημα διανύει ανεβαίνοντας, αν το επίπεδο θεωρείται λείο; β) Να βρεθεί το ίδιο διάστημα, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι 0,2, και να υπολογιστεί η απώλεια μηχανικής ενέργειας, αν η μάζα του σώματος είναι 1kg. γ) Με ποια ταχύτητα επιστρέφει το σώμα στη βάση του για τις παραπάνω περιπτώσεις;

$$\left(g = 10\frac{m}{s^2}\right) \quad \sqrt{3} \cong 1,7$$

Λύση:
Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στο σώμα και στις δύο περιπτώσεις και τις αναλύουμε στους άξονες x (παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο) και y (κάθετο στον x).

α) Χρησιμοποιούμε τη σχέση (5.7): $W = \frac{1}{2}\ mυ^2 - \frac{1}{2}\ mυ_0^2$.

Έργο W καταναλίσκει μόνο η συνιστώσα $\vec{B}_x$ του βάρους $\vec{B}$.

Άρα: $$-B_x s = -Bημφs = -\frac{1}{2}\ mυ_0^2$$

ή $$s = \frac{υ_0^2}{2gημφ} = \frac{100\,m^2/s^2}{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2}} = 10m.$$

β) Πριν από την επεξεργασία σκεφτόμαστε πρακτικά: η διαδρομή σε μη λείο επίπεδο πρέπει να είναι μικρότερη. (Ή όχι; Και γιατί;).
Τώρα έχουμε και το έργο της τριβής:
$$W_T = -T \cdot s = -ηNs = -ηB_y s = -ηBσυνφs.$$

Άρα: $$W_{ολ} = W_{Bx} + W_T = -\frac{1}{2}\ mυ_0^2 \text{ (πάλι } υ=0\text{)}.$$

Επομένως: $$s = \frac{υ_0^2}{2g(ημφ + ησυνφ)}.$$

Βρίσκουμε:

$$s=\frac{100\,m^2/s^2}{2\cdot 10\frac{m}{s}\left(\frac{1}{2}+0,2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{100}{20\cdot(0,5+0,17)}m=\frac{10}{1,34}m\cong 7,6m$$

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας $\Delta E_{μηχ.}$ ισούται με το έργο της τριβής W_T:

$$\Delta E_{μηχ.}=W_T=\text{-}ημgσυνφs=\text{-}0,2\cdot 1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7,6m=\text{-}13,75J$$

γ) Στην περίπτωση του λείου επιπέδου, η μόνη δύναμη που έχει σχέση με το έργο είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, όπως είπαμε, με αποτέλεσμα να μην έχουμε συνολικό έργο στην κλειστή διαδρομή: $W_{ολ}=0$. Άρα το σώμα επιστρέφει με την ίδια ταχύτητα $υ_0$ στη βάση.

Για το μη λείο επίπεδο τα έργα των $\vec{B}_x$ και $\vec{T}$ εκφράζονται με τις ίδιες σχέσεις, που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Τώρα, όμως, το έργο της B_x είναι θετικό (γιατί;).

Άρα: $W'=\frac{1}{2}mυ'^2-\frac{1}{2}mυ'^2_0=W_{B_x}+W_T$ και $υ_0'=0$

Επομένως: $mgημφs-ημgσυνφs=\frac{1}{2}mυ'^2$

και: $υ'^2=2gs(ημφ-ησυνφ)$.

Τελικά: $υ'^2=\sqrt{2gs(ημφ-ησυνφ)}$.

Βρίσκουμε: $υ'^2=\sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 7,6m\left(\frac{1}{2}-0,2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\cong 7\frac{m}{s}$.

Παράδειγμα:

Από την κορυφή παραθαλάσσιου βράχου ύψους 25m νεαρός πετά (για εκτόνωση) πέτρες με αρχική ταχύτητα $υ_0=20\frac{m}{s}$ σε όλες τις δυνατές διευθύνσεις (οριζόντια, κατακόρυφα προς τα πάνω ή προς τα κάτω, πλάγια σε διάφορες διευθύνσεις). Οι πέτρες έχουν διαφορετική μάζα και πέφτουν στη θάλασσα. α)Να βρεθεί η ταχύτητά τους, όταν φτάνουν στο νερό. β)Σε ποιο ύψος η δυναμική τους ενέργεια είναι το 1/3 της αντίστοιχης κινητικής ενέργειάς τους; (Η αντίσταση του αέρα παραλείπεται). Δίνεται: $g=10m/s^2$

Λύση:

α) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, γράφουμε για το αρχικό σημείο 1 και για το τελικό 2: $K_1+U_1=K_2+U_2$.

Άρα: $$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0$$

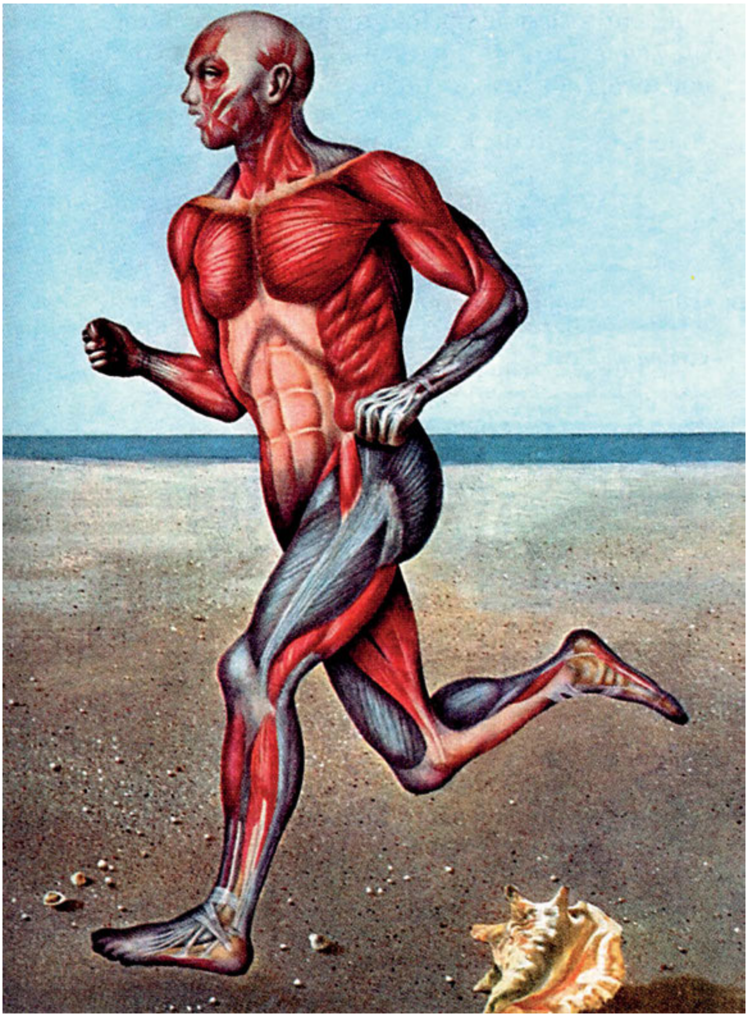
(επίπεδο αναφοράς η επιφάνεια της θάλασσας).

Τελικά: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$ οπότε $\upsilon = 30m/s$

β) Σχόλιο: Το γεγονός ότι η δυναμική ενέργεια είναι το 1/3 της κινητικής, σημαίνει ότι η μηχανική ενέργεια μοιράζεται κατά τα ¾ της σε κινητική και κατά το ¼ σε δυναμική

$$U = \frac{1}{4}E_M \quad \text{ή} \quad mgh' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh\right) \quad h' = \frac{1}{8}\frac{\upsilon_0^2}{g} + \frac{1}{4}h.$$

Τελικά: $h' = 11{,}25m.$



Άνθρωπος με κινητική ενέργεια

* 5.7. Οι “άλλες” μορφές ενέργειας και ο άνθρωπος

Όσον αφορά τις ανθρώπινες δραστηριότητες η μηχανική ενέργεια είναι ίσως, η πιο διαδεδομένη, αλλά όχι βέβαια και η μόνη μορφή ενέργειας. Ας δούμε μερικές από τις υπόλοιπες μορφές ενέργειας.

● **Εσωτερική ενέργεια οργανισμού:** είναι το σύνολο των κάθε μορφής ενεργειών που διαθέτουν τα μόρια σώματος. Είναι στην πραγματικότητα μηχανική αφού οφείλεται στην κίνηση, στην ταλάντωση, στην έλξη και στην άπωση των μορίων. Εξαρτάται κυρίως από τη θερμοκρασία και είναι μια μορφή ενέργειας που αποθηκεύεται (σε αντίθεση με τη θερμότητα π.χ. η οποία προσφέρεται στο σώμα ή αποβάλλεται από αυτό).

Σχόλιο: Το ζεστό σώμα έχει μεγάλη, σχετικά, εσωτερική ενέργεια και όχι μεγάλη θερμότητα (όπως συνήθως ακούγεται).

● **Θερμική ενέργεια:** είναι εκείνη που ρέει από κάποια περιοχή σε άλλη (ή από σώμα σε άλλο) λόγω διαφοράς θερμοκρασίας ανάμεσά τους. Ο κλάδος της Φυσικής που ασχολείται με τη σχέση έργου με θερμότητα λέγεται Θερμοδυναμική. Πηγές θερμότητας είναι τα καύσιμα, οι καταναλωτές στον ηλεκτρισμό, η τριβή στη μηχανική κ.ά.

● **Ο Ήλιος ως πηγή ενέργειας:** Στον Ήλιο πραγματοποιείται μια κατηγορία αντιδράσεων, που λέγονται θερμοπυρηνικές ή αντιδράσεις σύντηξης. Σε υψηλές θερμοκρασίες ισότοπα του H_2 μετατρέπονται σε πυρήνες He και παράγεται ενέργεια. Με τον τεράστιο αριθμό ατόμων που συντήκονται η ενέργεια φτάνει σε πολύ υψηλές τιμές και μικρό μέρος της αντιστοιχεί σε ορατό φως. Είναι ενέργεια καθοριστική για τη διατήρηση και την ανάπτυξη της ζωής στον πλανήτη μας. Ένα μικρό αλλά σημαντικό ποσοστό της ηλιακής ενέργειας αντιστοιχεί στην υπεριώδη ακτινοβολία, η οποία είναι επικίνδυνη για τον άνθρωπο λόγω της χημικής δράσης της (είναι αυτή που απορροφάται από το όζον της ατμόσφαιρας. Να γιατί, όταν αναφερόμαστε στην “τρύπα του όζοντος” προβάλλουμε έντονα τους κινδύνους που διατρέχουμε από αυτήν.

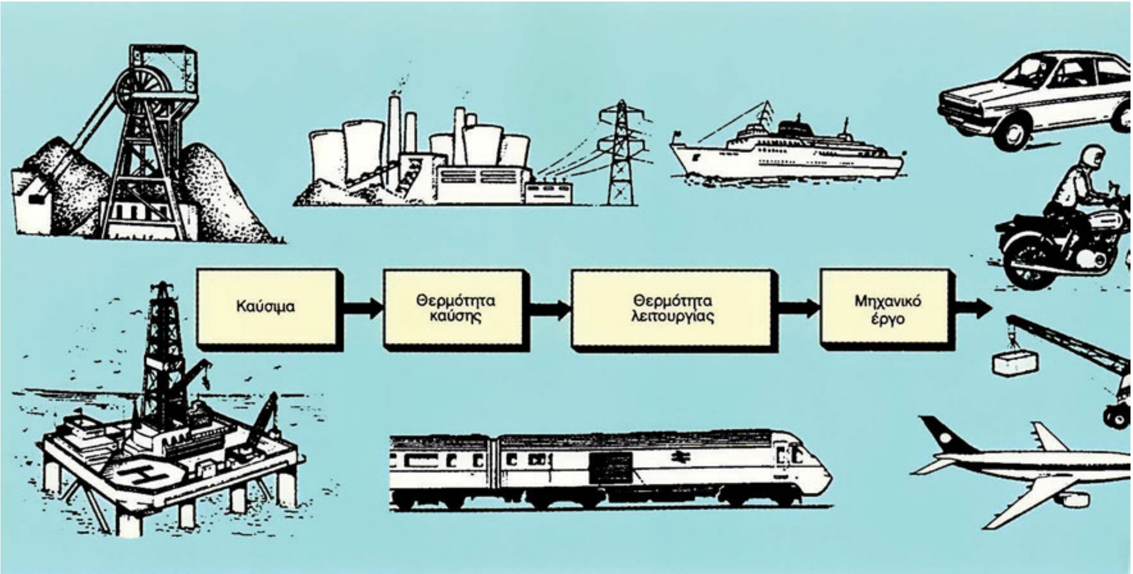
● **Ηλεκτρική ενέργεια:** Παράγεται στα εργοστάσια που μετατρέπουν άλλη μορφή ενέργειας σε ηλεκτρισμό. Τα εργοστάσια αυτά διακρίνονται σε θερμικά, σε υδροηλεκτρικά, σε πυρηνοηλεκτρικά και σε γεωθερμικά. Τελευταία έχει αρχίσει η συστηματική αξιοποίηση των ανεμογεννητριών και των φωτοβολταϊκών μονάδων.

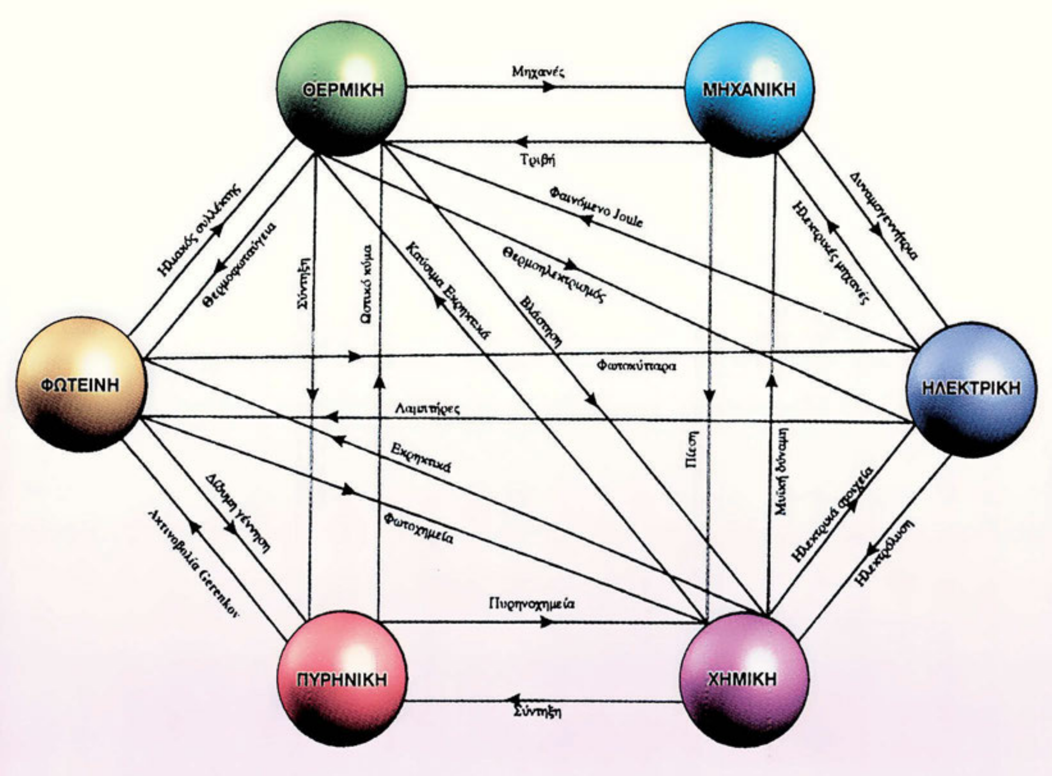
● **Πυρηνική ενέργεια:** Παράγεται από τις αντιδράσεις σχάσεως με “πρώτη ύλη” βαρείς πυρήνες (π.χ. ουράνιο) και πηγή δράσης νετρόνια με κατάλληλη ταχύτητα. Αξιοποιείται στους αντιδραστήρες, στα πυρηνικά υποβρύχια και στα πυρηνοηλεκτρικά εργοστάσια.

Για όλες αυτές τις μορφές ενέργειας ισχύει μια γενική αρχή με τον ανεπίσημο τίτλο: **“αρχή της ελάχιστης ενέργειας”.** Σύμφωνα με την αρχή αυτή το **οποιοδήποτε φυσικό σύστημα είναι τόσο σταθερότερο, όσο μικρότερη ενέργεια διαθέτει. Η κατάσταση, μάλιστα, θεωρείται ευσταθής και μόνιμη, όταν το φυσικό σύστημα διαθέτει την ελάχιστη ενέργεια**

για τις συνθήκες που επικρατούν. Το βιβλίο μας, π.χ., στο θρανίο πάνω στο οποίο το έχουμε αφήσει, βρίσκεται σε κατάσταση ευστάθειας, επειδή έχει ελάχιστη δυναμική ενέργεια. Αν το βιβλίο, όμως, μετακινηθεί σε σημείο του αέρα στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το θρανίο, η κατάσταση παρουσιάζει αστάθεια, αφού το βιβλίο μπορεί να μετακινηθεί σε σημεία με μικρότερη δυναμική ενέργεια (π.χ. στο έδαφος)

Στην αρχή αυτή οφείλονται πολλά φυσικά φαινόμενα, όπως η εκπομπή ενέργειας από πυρήνες ατόμων που τους έχουμε διεγείρει (γνωστή ως ραδιενέργεια), η δημιουργία σεισμού από τη συσσωρευμένη ενέργεια σε περιοχή του υπεδάφους κ.ά.





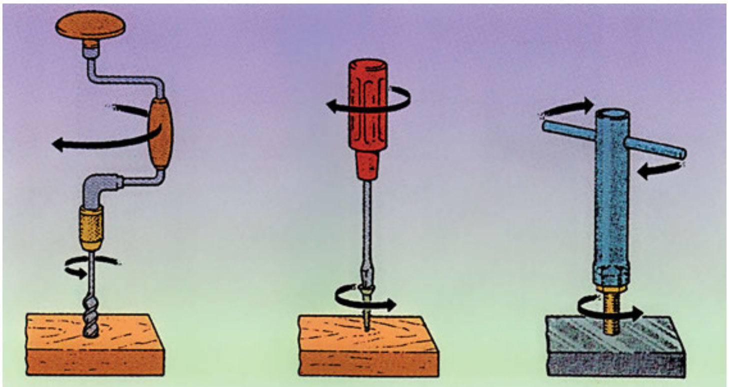
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ- ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ- ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1. Επιχειρήστε, αν δεν το έχετε ήδη κάνει, να απαντήσετε στα ερωτήματα που θέτει, άμεσα ή έμμεσα, το κείμενο του κεφαλαίου.

5.2. Παρατηρήστε τις εικόνες του κεφαλαίου και σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα που απεικονίζονται σ’ αυτές και βρίσκονται σε οριζόντιο ή σε πλάγιο επίπεδο. Θεωρήστε το επίπεδο πρώτα λείο (όπου αυτό είναι εφικτό) και μετά με τριβή. Αφού σχεδιάσετε τις δυνάμεις, γράψτε τις σχέσεις για το έργο καθεμιάς.

5.3. Να συμπληρώσετε τα κενά στο παρακάτω κείμενο:

“Έτσι αναγκάστηκα να βάλω λοστό κάτω από τη μεγάλη πέτρα, για να την ανασηκώσω. Ο λοστός δούλεψε σαν............και βοήθησε αρκετά. Έσπρωξα την πέτρα μέχρι την άκρη του γκρεμού και ελάχιστα ακόμα. Το............επίπεδο βοήθησε στην ολίσθησή της ως το βάθος της χαράδρας. Βοήθησε το έργο του ...., ενώ αντιδρούσε το έργο της..........Η πέτρα κτύπησε σε βράχο στο τέλος της κατηφόρας με..........ενέργεια ίση με τη..........των δύο αυτών έργων. Αν ο γκρεμός ήταν πιο απότομος, η πέτρα θα κτύπαγε με ....ορμή στο βράχο. Αυτό, επειδή το βοηθητικό έργο θα ήταν ...., ενώ το “αντιδραστικό” έργο θα ήταν...........”



Εικόνα 5.16: Συνηθισμένες, απλές “μηχανές”

5.4. “Παίξτε” με τις μηχανές της εικ. 5.16. Εξηγήστε το ρόλο των εργαλείων με τη βοήθεια του χρυσού κανόνα της Μηχανικής.

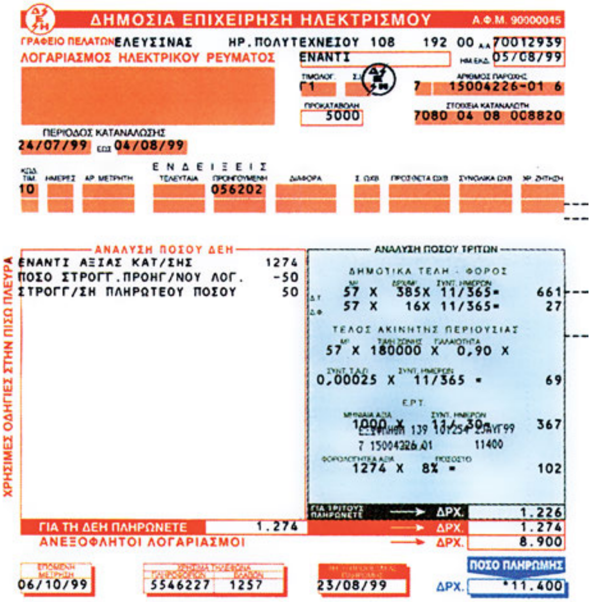
5.5. Βρείτε τις τιμές που λείπουν:

Μέγιστη ισχύς κινητήρα 110H.P. =....kW

Τριμηνιαία οικιακή ηλεκτρική κατανάλωση 1100Wh =.... J

Θέρμανση φαγητού 120kcal =.... J =.... kWh

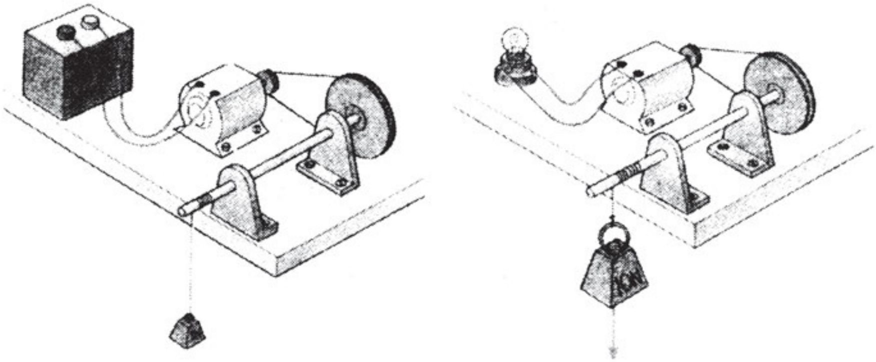
5.6. Προσέξτε το λογαριασμό ηλεκτρικού ρεύματος για οικιακή κατανάλωση, εικόνα 5.17. Βρείτε τα φυσικά μεγέθη που αναγράφονται, εξηγώντας τι σημαίνει καθένα από αυτά. Υπολογίστε τις τιμές τους στο S.I. *(Για ό,τι δεν ξέρετε, ρωτήστε τους γύρω σας. Έτσι κι αλλιώς πρέπει να ξέρουμε τι πληρώνουμε).*


ΔΗΜΟΣΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΠΕΛΑΤΩΝ ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ ΗΡ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 108 192 00 70012939
ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΕΝΑΝΤΙ 05/08/99
Γ1 7 15004226-01 6
ΠΡΟΚΑΤΑΒΟΛΗ 5000
7080 04 08 008820
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ
24/07/99 έως 04/08/99
ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ
10 056202
ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΣΟΥ ΔΕΗ
ΕΝΑΝΤΙ ΑΞΙΑΣ ΚΑΤ/ΣΗΣ 1274
ΠΟΣΟ ΣΤΡΟΓΓ.ΠΡΟΗΓ/ΝΟΥ ΛΟΓ. -50
ΣΤΡΟΓΓ/ΣΗ ΠΛΗΡΩΤΕΟΥ ΠΟΣΟΥ 50
ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΣΟΥ ΤΡΙΤΩΝ
ΔΗΜΟΤΙΚΑ ΤΕΛΗ - ΦΟΡΟΣ
57 Χ 385Χ 11/365= 661
57 Χ 16Χ 11/365= 27
ΤΕΛΟΣ ΑΚΙΝΗΤΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΣ
57 Χ 180000 Χ 0,90 Χ
0,00025 Χ 11/365 = 69
ΕΡΤ
367
1274 Χ 8% = 102
ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΣΤΗΝ ΠΙΣΩ ΠΛΕΥΡΑ
ΓΙΑ ΤΡΙΤΟΥΣ ΠΛΗΡΩΝΕΤΕ ΔΡΧ. 1.226
ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΗ ΠΛΗΡΩΝΕΤΕ 1.274 ΔΡΧ. 1.274
ΑΝΕΞΟΦΛΗΤΟΙ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ ΔΡΧ. 8.900
ΠΟΣΟ ΠΛΗΡΩΜΗΣ
06/10/99 5546227 1257 23/08/99 ΔΡΧ. *11.400

Εικόνα 5.17: Λογαριασμός της Δ.Ε.Η.

5.7. Λέμε συχνά πως ο σημερινός τρόπος ζωής με τα “αφύσικά” του (την παρατεταμένη καθιστική ζωή, τη μόνιμη χρήση μεταφορικού μέσου για όλες σχεδόν τις μετακινήσεις μας, τους γαστρονομικούς πειρασμούς στους οποίους υποκύπτουμε κτλ.) προκάλεσε στις μέρες μας την εμφάνιση μιας νέας - γνωστής σε όλους μας - επιδημίας, της παχυσαρκίας. Αναλύστε ενεργειακά αυτή την άποψη.

5.8. Ποιες ενεργειακές μετατροπές βλέπετε στα συστήματα της εικ. 5.18;



Εικόνα 5.18: Ενεργειακές μετατροπές

5.9. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

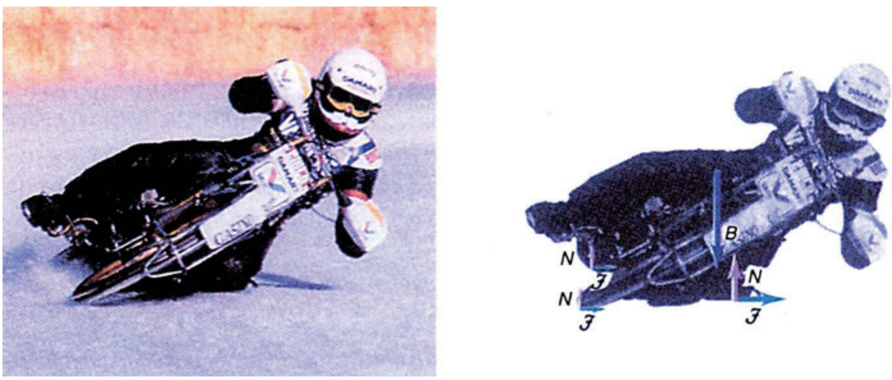
α: Η ισχύς του βάρους σώματος είναι σταθερή, όσο το σώμα πέφτει κατακόρυφα.

β. Ο κινητήρας αγωνιστικού αυτοκινήτου παρέχει μεγαλύτερη ισχύ από την αντίστοιχη κοινού Ι.Χ.

γ. Αδυνατίζουμε, όταν καταναλώνουμε περισσότερη ενέργεια από όση παίρνουμε με τις τροφές.

δ. Κατά την πτώση σώματος στον αέρα, στο μισό ύψος έχει διπλάσια ταχύτητα.

5.10. Διατηρείται η μηχανική ενέργεια στο ντεραπάρισμα (πλάγια εξολίσθηση) της μοτοσικλέτας της εικ. 5.19;

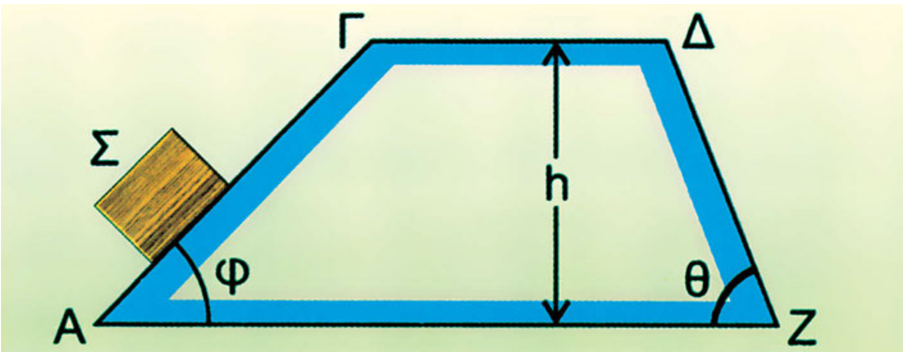


Εικόνα 5.19: Προσοχή στις στροφές. Κίνδυνος ντεραπαρίσματος...

5.11. Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα (που αφορά σώμα με μάζα 1kg που πέφτει ελεύθερα. Το ύψος h μετριέται από το έδαφος g=10m/s^2).

h (m)	υ (m/s)	U J	K J	Εμηχ J
10	0	–	–	–
8	–	–	–	–
–	10	–	–	–
–	–	60	–	–
–	–	–	80	–
–	–	–	0	–
–	–	0	–	–

5.12. Να συγκρίνετε το έργο του βάρους για τις διαδρομές ΑΓ, ΔΖ της εικ. 5.20. Να κάνετε το ίδιο και για το έργο της τριβής. (Θεωρήστε ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης για όλα τα επίπεδα).



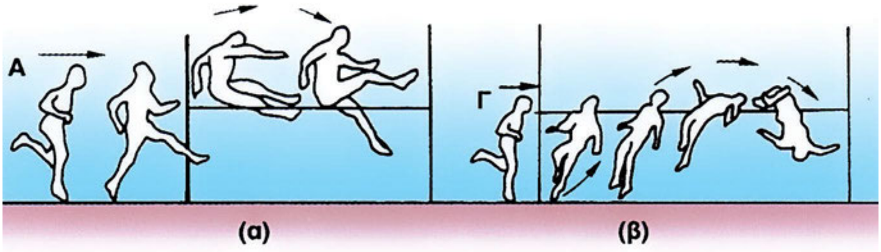
Εικόνα 5.20: Συγκρίσεις έργου δυνάμεων

5.13. Για να ανεβάσουμε μια βαριά εργαστηριακή συσκευή από το πάτωμα στον πάγκο ασκήσεων μπορούμε να επιλέξουμε μια από τις παρακάτω λύσεις:
α) κατακόρυφο χειρωνακτικό ανέβασμα β) κινητή τροχαλία γ) ακίνητη τροχαλία δ) ολίσθηση σε πλάγια λεία λαμαρίνα κλίσης 30º. Ποια λύση είναι συμφερότερη ενεργειακά και από άποψη μηχανικού κέρδους;

5.14. Κλιματιστικό(air condition) δωματίου έχει ισχύ εισόδου (ηλεκτρική) 21000 B.t.u./h και μέγιστη ωφέλιμη ισχύ 9000 B.t.u./h. Βρείτε τις αντίστοιχες τιμές στο S.I. Αν το κλιματιστικό εργάστηκε σε μέρα καύσωνα για 5h με τη μέγιστη ισχύ του και 7h με τη μισή της μεγίστης ισχύος του, πόσες kWh κατανάλωσε από το δίκτυο και σε τι κόστος αντιστοιχούν;
(1kWh=25δραχ.). Δεχτείτε σταθερή απόδοση α $\left(\alpha = \dfrac{P_{ΩΦ}}{P_{ΔΑΠ}}\right)$ για το κλιματιστικό.

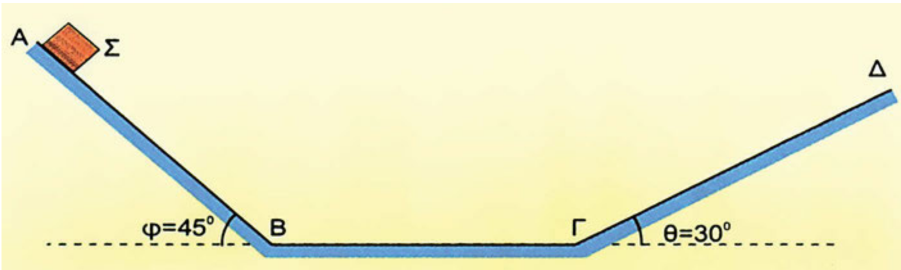
5.15. Δικαιολογήστε τις τρεις καταστάσεις ισορροπίας (ευσταθή, ασταθή και αδιάφορη), που μάθατε στο κεφάλαιο 3, με τη βοήθεια της αρχής της ελάχιστης ενέργειας.

5.16. Γιατί επικράτησε το στιλ Φώλσμπερυ (Faulsbery) στο άλμα εις ύψος αντί του κλασικού, εικόνα 5.21;



Εικόνα 5.21: Τα δυο στυλ άλματος σε ύψος

5.17 Σώμα Σ αφήνεται από σημείο Α σε σύστημα λείων επιπέδων, εικ.5.22. Αν ΑΒ=10cm,
α) Να βρεθεί το μήκος ΓΔ, (όπου Δ το σημείο στο οποίο σταματά στιγμιαία)
β) Να συγκριθούν αρχικό και τελικό ύψος από το έδαφος. Πώς εξηγείτε το αποτέλεσμά σας;



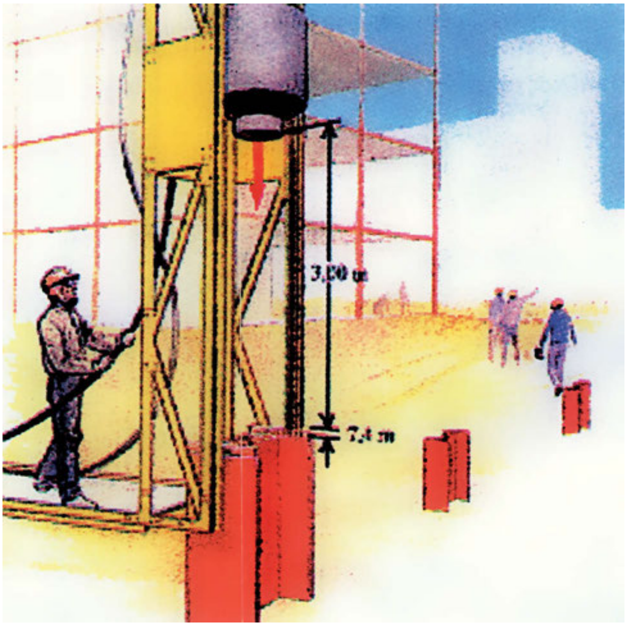
Εικόνα 5.22: Διατήρηση μηχανικής ενέργειας

5.18. Σώμα αφήνεται από σημείο Α κατηφόρας κλίσης 30°, φτάνει στη βάση της Γ και προχωρά μέχρι το σημείο Δ οριζόντιου δρόμου. Αν τα μήκη ΑΓ, ΓΔ είναι ίσα και τα δύο επίπεδα έχουν με το σώμα ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης η.
α) Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής η
β) ποιο ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος μετατράπηκε σε έργο τριβής;
γ) Να συγκριθούν τα έργα της τριβής στα δύο επίπεδα.

5.19. Τετραμελής οικογένεια (γονείς, γιος και κόρη) επιχειρεί να ζυγιστεί σε ζυγαριά μπάνιου που λειτουργεί με κατακόρυφο σκληρό ελατήριο. Πρώτος ανεβαίνει ο πατέρας και ο δείκτης φτάνει στην ένδειξη 82kp, ενώ το ελατήριο συμπιέζεται κατά 2cm. Μετά τη ζύγιση αυτή διαπιστώνεται βλάβη του δείκτη, αλλά το ελατήριο συμπεριφέρεται σωστά. Μετά το ανέβασμα των 3 υπολοίπων μελών διαπιστώνεται συμπίεση 1,5cm για τη μητέρα, 1,2cm για το γιο και 1,1cm για την κόρη. Να βρεθούν:

α) Η σταθερά k του ελατήριου
β) Πόσο ζυγίζουν τα τρία μέλη, και
γ) Πόσο έργο παράγεται στο ελατήριο από κάθε μέλος της οικογένειας.

5.20. Το σύστημα της εικ. 5.23 χρησιμοποιείται για το κατακόρυφο βύθισμα δοκαριών και πασσάλων στο έδαφος. Η σφύρα έχει μάζα 250kg, ανυψώνεται κατά 3m πάνω από το ανώτερο άκρο του δοκαριού και αφήνεται ελεύθερη. Αφού κτυπήσει στο δοκάρι, το βυθίζει κατά 10,5cm στο έδαφος. Η ολίσθηση της σφύρας στους οδηγούς δημιουργεί τριβή 80Ν. Να βρεθούν:
α) Η ταχύτητα πρόσκρουσης της σφύρας στο δοκάρι.
β) Η μέση αντίσταση του εδάφους στο βύθισμα του δοκαριού.
Δίνεται: $g=10m/s^2$



Εικόνα 5.23: Τεχνολογική εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6°
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ-ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

6.1 Ομαλή κυκλική κίνηση

Στο κεφάλαιο 4 ασχοληθήκαμε με τις ευθύγραμμες κινήσεις και τα πιο απλά είδη τους. Αν, όμως, ρίξουμε μια ματιά γύρω μας θα δούμε ότι οι κινήσεις δεν είναι όλες ευθύγραμμες. Το αυτοκίνητο κινείται και σε στροφές δρόμου. Ο αθλητής των 400m (με ή χωρίς εμπόδια) διαγράφει μια λωρίδα του κυκλικού στίβου. Ο τροχός του ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από κάποιον άξονα. Τα παιδιά περιστρέφονται στον τροχό του λούνα - παρκ. Ακόμα και εμείς την ώρα που στεκόμαστε ή καθόμαστε ή κινούμαστε ευθύγραμμα συμμετέχουμε στη διπλή περιστροφή της Γης γύρω από τον Ήλιο και γύρω από τον άξονά της.

Υπάρχουν λοιπόν, και οι **καμπυλόγραμμες κινήσεις.** Εκδηλώνονται με δύο τρόπους: με **περιφορά** και με **περιστροφή.** Στην πρώτη περίπτωση το σώμα, σαν να είναι υλικό σημείο, διαγράφει μια καμπύλη τροχιά γύρω από κάποιο σταθερό σημείο. Το αυτοκίνητο και ο αθλητής των παραπάνω παραδειγμάτων ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε να κάνουμε με σώμα το οποίο δεν αντιμετωπίζεται ως υλικό σημείο. Ο τροχός του ποδηλάτου και ο αντίστοιχος του λούνα - παρκ είναι σώματα περιστρεφόμενα. (Βεβαίως, το παιδί για περιστρεφόμενο σύστημα του τροχού εμφανίζεται ως σημείο).

Οι καμπυλόγραμμες κινήσεις δεν είναι απλές, επειδή μια τυχαία καμπύλη δεν έχει συγκεκριμένο κέντρο. Εδώ, λοιπόν, θα μελετήσουμε τις πιο απλές καμπυλόγραμμες κινήσεις, τις **κυκλικές.**

Η κίνηση που θα μας απασχολήσει είναι η **ομαλή κυκλική,** κατά την οποία το κινητό σε **ίσους χρόνους διαγράφει ίσα τόξα, καθώς κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου.** Η κίνηση, δηλαδή, χαρακτηρίζεται από σταθερό μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$.

Ο ορισμός του μέτρου της $\vec{\upsilon}$ είναι ίδιος με αυτόν της ευθύγραμμης ομαλής:

$\upsilon = \frac{s}{t}$. Τώρα το s είναι το μήκος του τόξου που διανύει το σημείο σε χρόνο t.

Στην εικόνα 6.1(α), π.χ., το σημείο διατρέχει ομαλά την περιφέρεια ενός κύκλου σε οριζόντιο επίπεδο Π. Αν το κινητό συνεχίζει για αρκετό χρόνο την κίνηση, μπορεί να διαγράφει περισσότερους του ενός κύκλους. Χρειαζόμαστε, λοιπόν, κάποιο μέγεθος που να δείχνει πόσο γρήγορα διαγράφονται οι κύκλοι (ρυθμός). Το μέγεθος αυτό είναι η **συχνότητα f.** Ισούται με τον αριθμό Ν των περιστροφών που διαγράφονται στη μονάδα του χρόνου.

$$\boxed{f = \frac{N}{t}} \qquad (6.1)$$

Το μονόμετρο (βαθμωτό) αυτό μέγεθος εμφανίζεται και σε άλλα φυσικά φαινόμενα που έχουν κάτι κοινό με την ομαλή κυκλική κίνηση: επαναλαμβάνονται με ίδιο ακριβώς τρόπο σε τακτά χρονικά διαστήματα. Καθένα από αυτά τα διαστήματα λέγεται **περίοδος** Τ. Γι' αυτό όλα αυτά τα φαινόμενα λέγονται **περιοδικά.** Στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης **περίοδος είναι ο χρόνος μιας περιφοράς του κινητού.** Αν, λοιπόν, στη σχέση (6.1) θεωρήσουμε χρόνο μιας περιόδου t = T, τότε N = 1.

Άρα
$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \qquad (6.2)$$

Από τις σχέσεις (6.1) και (6.2) φαίνεται ότι μονάδα συχνότητας στο S.I. είναι ο $\frac{1\text{κύκλος}}{s}$ ή $1\ \frac{c}{s}$ ή $1\ s^{-1}$, την οποία ονομάζουμε **1Hertz (1Hz).**

Επομένως, 1 Hz είναι η συχνότητα περιφοράς σημείου το οποίο σε 1s διαγράφει μια περιφέρεια κύκλου.

Πολλαπλάσια του Hz είναι:

$1kHz = 10^3\,Hz$

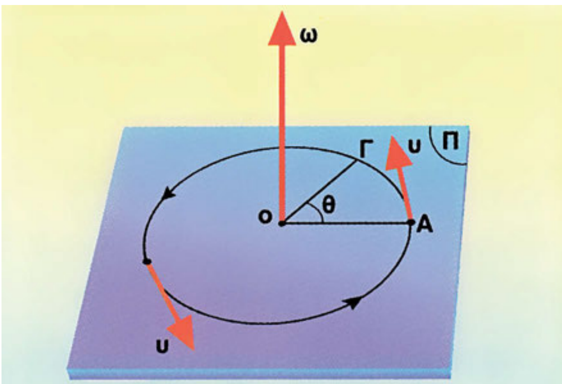
$1MHz = 10^6\,Hz$

Σε περιοδικά φαινόμενα άλλων περιοχών της Φυσικής μιλάμε για συχνότητες οι οποίες εκφράζονται μόνο με αυτά τα πολλαπλάσια του Hz. Λέμε, π.χ., ότι "ακούμε το ραδιοφωνικό σταθμό Χ στους 93,6 μεγάκυκλους".

Η σωστή τιμή, βέβαια, είναι 93.6 $\frac{Mc}{s}$ ή 93,6 MHz και υπονοείται ότι η κεραία του σταθμού στέλνει 93,6 εκατομμύρια ($93{,}6\cdot10^6$) κύματα το δευτερόλεπτο.

Στο στροφόμετρο του αυτοκινήτου αναγράφεται η ένδειξη rpm, που σημαίνει στροφές ανά λεπτό (rounds per minute).

Ας κοιτάξουμε τα ρολόγια μας (όσοι έχουμε ρολόι με δείκτες). Προσέχουμε πόσο χρόνο θέλει ο δευτερολεπτοδείκτης, για να διαγράψει τον κύκλο του ρολογιού. Κάνουμε το ίδιο για το λεπτοδείκτη και μετά για τον ωροδείκτη. Βρίσκουμε, έτσι, την περίοδο περιφοράς κάθε δείκτη και επιβεβαιώνουμε τις συχνότητές τους στον πίνακα 6.1.



Εικόνα 6.1. (α): Για τη μελέτη της ομαλής κυκλικής κίνησης

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1 Παραδείγματα συχνοτήτων

Παραδείγματα	**f Hz**
Γη (γύρω από τον άξονά της)	$115\cdot10^{-7}$
Ωροδείκτης	$23\cdot10^{-6}$
Λεπτοδείκτης	$28\cdot10^{-5}$
Δευτερολεπτοδείκτης	$17\cdot10^{-3}$
Τροχός οχήματος (70km/h)	$9\cdot10^{-1}$
Δίσκος πικάπ (78στρ/min)	1,3
Έλικας πλοίου	2,7
Ηλεκτροκινητήρας	20-50
Δίκτυο Δ.Ε.Η.	50
Φυγοκεντρική συσκευή	2500
Σταθμός ραδιοφώνου FM	$\sim10^{6}$

Στην κυκλική κίνηση, που είναι η βάση για όλα αυτά, η ταχύτητα δεν είναι χαρακτηριστικό μέγεθος κίνησης. Αυτό, διότι, αν πάρουμε διάφορα σημεία της ίδιας ακτίνας, π.χ. ΟΑ της εικ. 6.1(α), θα διαπιστώσουμε ότι στον ίδιο χρόνο θα διαγράψουν άνισα τόξα. Θα έχουν, λοιπόν, διαφορετική ταχύτητα.

Αν, τώρα, μελετήσουμε την κυκλική κίνηση του σημείου Α για χρόνο $t = T$, το σημείο έχει διαγράψει τόξο ίσο με το μήκος της περιφέρειας, δηλαδή $s = 2\pi r$ (r = ακτίνα).

Άρα:
$$\boxed{\upsilon = \frac{2\pi r}{T}} \qquad (6.3)$$

Η ταχύτητα είναι διάνυσμα εφαπτόμενο στην τροχιά, το μέτρο της είναι σταθερό και δίνεται από την παραπάνω σχέση (6.3).

Όταν καθόμαστε, είμαστε ακίνητοι; Αν δεχτούμε μέση ακτίνα της Γης $R_Γ = 6400$km και θυμηθούμε πως η Γη κάνει μια περιστροφή σε 24 h ($T = 24$ h $= 86400$s), βρίσκουμε:

$$\upsilon = \frac{2\pi R_Γ}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}4\cdot 10^3\,\text{km}}{24\text{h}} = 1{,}67\cdot 10^3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ ή } 46{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

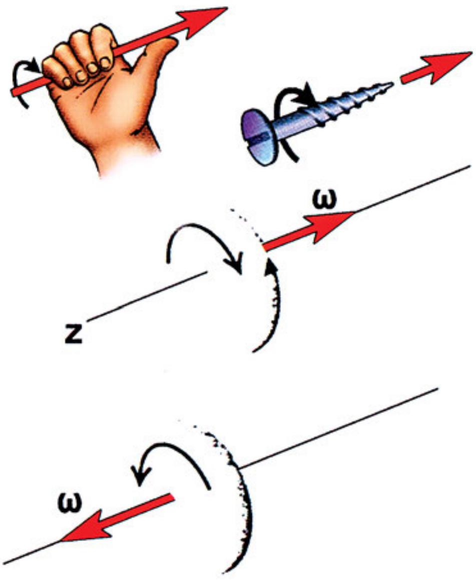
Αφού, λοιπόν, η ταχύτητα δεν είναι ίδια για τα σημεία της ακτίνας ΟΑ, που αναφέρθηκε παραπάνω, πρέπει να εισάγουμε νέο μέγεθος χαρακτηριστικό της κυκλικής κίνησης, το οποίο να είναι σταθερό για όλα τα σημεία της ακτίνας.

Το μέγεθος είναι η **γωνιακή ταχύτητα** $\vec{\omega}$ με μέτρο:

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}} \qquad (6.4)$$

(θ= η γωνία που διαγράφει η ακτίνα σε χρόνο t) και μονάδα το 1 rad/s, αφού η γωνία στη Φυσική μετριέται σε rad. *(Ας θυμηθούμε: 360^{o}=2π rad).*

Η γωνιακή ταχύτητα παριστάνεται με διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής και με φορά ανάλογα με τη φορά περιστροφής. (Θυμηθείτε όσα είπαμε και για τη ροπή δύναμης στο κεφ. 3). Στην εικόνα 6.1 (β) φαίνεται ο τρόπος προσδιορισμού της φοράς για την ω με τη βοήθεια του δεξιού χεριού ή της βίδας.



Εικόνα 6.1 (β): Για τον προσδιορισμό της φοράς της γωνιακής ταχύτητας

Αν, πάλι, αναφερθούμε σε χρόνο t = T, η γωνία που διαγράφει η ακτίνα (που συνοδεύει το κινητό) είναι 360° ή 2π.

Άρα, η σχέση (6.4) γράφεται:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi f} \qquad (6.5)$$

Μετά την αναφορά μας στη γωνιακή ταχύτητα μπορούμε να ονομάσουμε την ταχύτητα υ (για να τις διακρίνουμε) **γραμμική ταχύτητα.** Η ονομασία τους είναι ευνόητη, αφού η μία συνδέεται με γωνία και η άλλη με γραμμή (τόξο).

Ανάμεσα στα δύο μεγέθη υπάρχει σχέση, η οποία προκύπτει από συνδυασμό των (6.3) και (6.5):

$$\boxed{\upsilon = \omega r} \qquad (6.6)$$

Παράδειγμα. Ο τροχός του οχήματος στον πίνακα 6.1 έχει διάμετρο 70cm. Να βρεθούν α) η γωνιακή ταχύτητα του τροχού, β) η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειάς του.

Λύση

Από τον πίνακα 6.1. βλέπουμε ότι f = 0.9Hz. Από τη σχέση (6.5)

βρίσκουμε: $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}9\frac{rad}{s} = 5{,}65\frac{rad}{s}$.

Εξάλλου η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας είναι $\upsilon = \omega r$

και $r = \frac{\delta}{2} = 35cm = 0{,}35m$ (δ = διάμετρος).

Άρα: $\upsilon = 5{,}65\frac{rad}{s} \cdot 0{,}35m = 1{,}98\frac{m}{s}$.

(Ας έχουμε υπόψη ότι η γωνία σε rad θεωρείται καθαρός αριθμός και στην επεξεργασία (πράξεις) του rad με άλλες μονάδες παραλείπεται. Λέμε, π.χ., 5,65 $\frac{rad}{s} \cdot m$ *, αλλά γράφουμε:* $\frac{rad}{s} \cdot m = \frac{m}{s}$*).*

Ας προσπαθήσουμε: Αν εκτιμήσουμε το μήκος της ακτίνας στην οθόνη (καντράν) του ρολογιού, μπορούμε να βρούμε γωνιακή και γραμμική ταχύτητα για τους τρεις δείκτες του (αν έχει...).

6.2 Επιτάχυνση και δύναμη στην ομαλή κυκλική κίνηση

Μπορούμε να μιλάμε για επιτάχυνση σε κίνηση ομαλή; Για τις ευθύγραμμες κινήσεις η απάντηση είναι όχι. Στις καμπυλόγραμμες κινήσεις, όμως, ακόμα και αν το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, αλλάζει συνεχώς η διεύθυνσή της. Ως διάνυσμα, λοιπόν, η ταχύτητα μεταβάλλεται και, επομένως, υπάρχει επιτάχυνση. (Θυμηθείτε: η επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$). Όμως, στην ομαλή κυκλική κίνηση η επιτάχυνση δεν μπορεί να έχει τυχαία διεύθυνση και φορά. Πρέπει η δύναμη που την προκαλεί να είναι κάθετη στην ταχύτητα, ώστε να μην αντιστοιχεί σε έργο (§ 5.1). Χωρίς έργο η κινητική ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο διατηρείται σταθερή, άρα και το μέτρο της $\vec{\upsilon}$).

Η επιτάχυνση, λοιπόν, στην ομαλή κυκλική κίνηση (εικόνα 6.2 α) είναι διάνυσμα κάθετο στην ταχύτητα, σε κάθε θέση του κινητού, έχει φορά προς το κέντρο Ο του κύκλου και μέτρο:

$$\boxed{\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}} \quad (6.7)$$

Η σχέση (6.7) μπορεί να συνδυαστεί με τις προηγούμενες (6.5) και (6.6), οπότε:

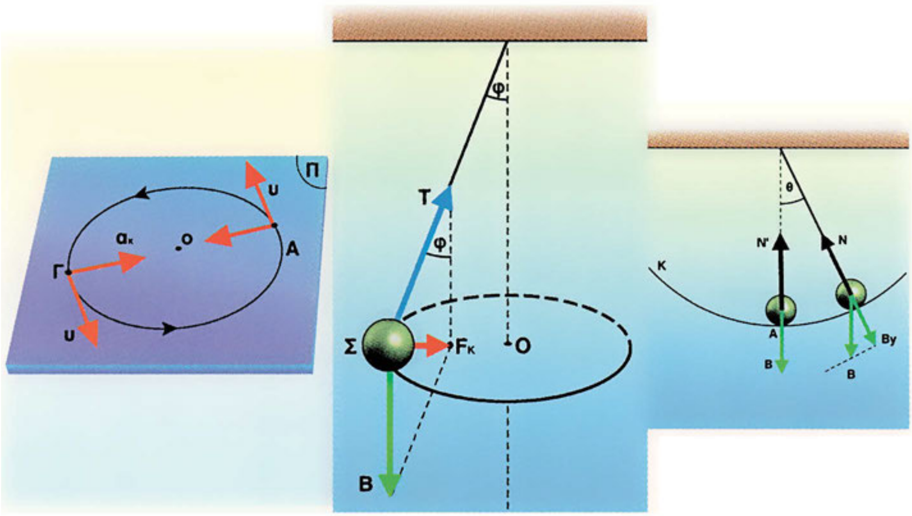
$$\boxed{\alpha_\kappa = \omega^2 r} \tag{6.8}$$

$$\boxed{\alpha_\kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} r} \tag{6.9}$$

$$\boxed{\alpha_\kappa = 4\pi^2 f^2 r} \tag{6.10}$$

Αν θυμηθούμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα, "πίσω" από την κεντρομόλο επιτάχυνση α_κ βρίσκεται κάποια δύναμη που τη λέμε **κεντρομόλο δύναμη** F_κ.

Παρατήρηση: **Η κεντρομόλος δεν είναι μια επιπλέον δύναμη η οποία ασκείται στο σώμα. Είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα κατά τη διεύθυνση της ακτίνας περιφοράς.**



(α) (β) (γ)

Εικόνα 6.2: Η κεντρομόλος δύναμη είναι η ακτινική συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

Αυτό φαίνεται στα παραδείγματα των εικόνων 6.2(β) και (γ).

Στην εικόνα 6.2(β) η σφαίρα διαγράφει οριζόντιο κύκλο. Οι δυνάμεις (βάρος Β και τάση του νήματος Τ) μπορούν να δώσουν συνισταμένη στη διεύθυνση της ακτίνας και αυτή είναι, φυσικά, η κεντρομόλος δύναμη F_κ.

Στην εικόνα 6.2(γ) η σφαίρα περιφέρεται πάνω σε κατακόρυφη ημισφαιρική επιφάνεια. Οι δυνάμεις (αντίδραση Ν και βάρος Β) έχουν συνισταμένη, η οποία δεν έχει φορέα την ακτίνα. Γι’ αυτό, τώρα, η κεντρομόλος είναι η συνισταμένη των Ν και B_y (συνιστώσας του βάρους στη διεύθυνση της ακτίνας)

Για την κεντρομόλο δύναμη μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{F_κ = m\frac{υ^2}{r}} \qquad (6.11)$$

$$\boxed{F_κ = mω^2 r} \qquad (6.12)$$

$$\boxed{F_κ = m\frac{4π^2}{T^2}r} \qquad (6.13)$$

και $$\boxed{F_κ = m4π^2 f^2 r} \qquad (6.14)$$

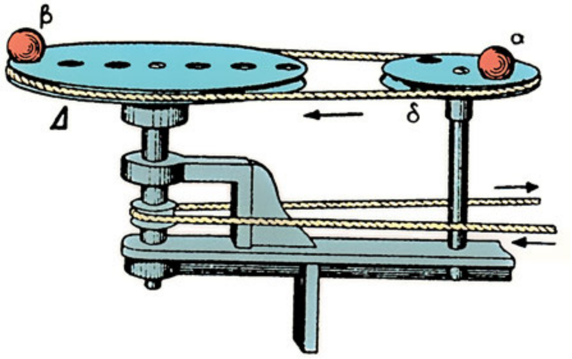
Αν προσέξει κάποιος τις σχέσεις για την κεντρομόλο επιτάχυνση $α_κ$ και για την κεντρομόλο δύναμη $F_κ$, θα διαπιστώσει πως ο ρόλος της ακτίνας r μοιάζει αντιφατικός. Είναι όμως; Βλέπουμε, ας πούμε, από τις σχέσεις (6.7) και (6.11) ότι όσο μεγαλώνει η ακτίνα r περιφοράς, μικραίνουν τα $α_κ$, $F_κ$. Από τις σχέσεις, πάλι, (6.8) και (6.12) αλλά και από τις υπόλοιπες φαίνεται ότι όσο μεγαλώνει η r, μεγαλώνουν τα $α_κ$, $F_κ$.

Η απάντηση του διλήμματος είναι απλή: πρέπει, πριν καταλήξουμε σε τέτοια συμπεράσματα, να διερευνήσουμε αν το περιστρεφόμενο σημείο συμμετέχει σε σύστημα σταθερής τιμής υ ή σταθερής τιμής ω.

Από τον προβληματισμό αυτό οδηγούμαστε στους δύο κύριους τύπους περιστρεφόμενων συστημάτων.

Τύπος Ι (Περιφερειακή μετάδοση κίνησης)

Είναι τα συστήματα στα οποία η κίνηση μεταδίδεται περιφερειακά από ένα τμήμα τους σε κάποιο άλλο. Τέτοια συστήματα είναι όσα λειτουργούν με ιμάντα, με αλυσίδα ή με οδοντωτούς τροχούς. Σε αυτά οι περιστρεφόμενοι τροχοί επικοινωνούν «εφαπτομενικά», άρα έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα (εικόνα 6.3).



Εικόνα 6.3: Περιφερειακή μετάδοση κίνησης

Αν θέλουμε, λοιπόν, να συγκρίνουμε τις κεντρομόλες επιταχύνσεις και δυνάμεις των όμοιων σφαιρών α και β, πρέπει να καταφύγουμε στις σχέσεις (6.7) και (6.11). Άρα, η σφαίρα α δέχεται μεγαλύτερη κεντρομόλο δύναμη από τη σφαίρα β, επειδή αντιστοιχεί σε μικρότερη ακτίνα.

Στα συστήματα αυτά μπορούμε να αξιοποιήσσυμε τη σχέση $υ = ωr$. Αν $ω_1$, $ω_2$ οι γωνιακές ταχύτητες για τις σφαίρες α, β, μπορούμε να γράψουμε:

$$υ = ω_1 r_1 = ω_2 r_2$$

Άρα:
$$\boxed{\frac{ω_1}{ω_2} = \frac{r_2}{r_1}} \qquad (6.15)$$

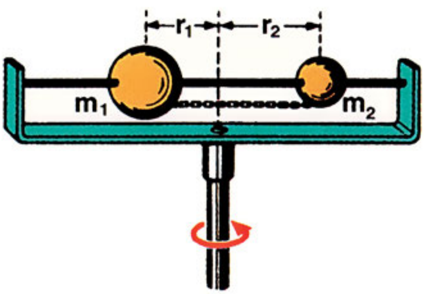
Ας προσέξουμε: Η κίνηση δίνεται στο δίσκο με μεγάλη ακτίνα και μεταφέρεται στο δίσκο με μικρή ακτίνα. Αυτό, σύμφωνα με τη σχέση (6.15), σημαίνει ότι δίνουμε μικρή γωνιακή ταχύτητα στο δίσκο μεγάλης ακτίνας και δημιουργούμε μεγάλη γωνιακή ταχύτητα στον άλλο με τη μικρή ακτίνα.

Συμπέρασμα: Στα συστήματα περιφερειακής μετάδοσης επεμβαίνουμε στους τροχούς μεγάλης ακτίνας και πολλαπλασιάζουμε τη γωνιακή ταχύτητα (και συχνότητα) για τους τροχούς μικρής ακτίνας.

Ας θυμηθούμε: Στο ποδήλατο περιστρέφουμε με κάποια συχνότητα το πεντάλ (πετάλι) και το μεγάλο δίσκο. Με τη βοήθεια της αλυσίδας προκαλούμε μεγαλύτερη συχνότητα στο μικρό δίσκο, που βρίσκεται στο κέντρο του πίσω τροχού.

Τύπος ΙΙ (Ομοαξονική ή ομοκεντρική μετάδοση κίνησης)

Είναι τα συστήματα στα οποία η κίνηση γίνεται γύρω από τον ίδιο άξονα και το ίδιο κέντρο περιστροφής. Σε αυτά τα συστήματα έχουμε σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η κεντρομόλος δύναμη σχολιάζονται με τη βοήθεια των σχέσεων (6.8) και (6.12). Στην εικόνα (6.4) φαίνεται ομοαξονικό σύστημα με δύο μάζες. Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η κεντρομόλος δύναμη έχουν μεγαλύτερες τιμές για τη σφαίρα με μάζα m_2, όπου η ακτίνα είναι μεγαλύτερη.



Εικόνα 6.4: Ομοαξονική μετάδοση κίνησης

Αξιοποιούμε πάλι τη σχέση υ = ωr και γράφουμε:

$$\upsilon_1=\omega r_1$$

$$\upsilon_2=\omega r_2$$

Άρα:

$$\boxed{\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{r_1}{r_2}} \qquad (6.16)$$

Στα συστήματα αυτά επεμβαίνουμε σε τροχούς με μικρή ακτίνα, οπότε η γραμμική ταχύτητα μπορεί να έχει μικρές τιμές. Δημιουργούμε κίνηση σε τροχούς με μεγάλη ακτίνα, οπότε προκύπτει μεγάλη γραμμική ταχύτητα.

Συμπέρασμα: Στη μάζα m_2 της εικόνας 6.4 έχουμε μεγαλύτερη ακτίνα ($r_2 > r_1$), άρα μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα ($\upsilon_2 > \upsilon_1$), μεγαλύτερη κεντρομόλο επιτάχυνση και κεντρομόλο δύναμη σε σχέση πάντα με τα αντίστοιχα μεγέθη της m_1.

Ας σκεφτούμε: Από το μικρό δίσκο (που αναφέραμε πιο πάνω) η κίνηση μεταδίδεται στον οπίσθιο τροχό του ποδηλάτου με την πολύ μεγαλύτερη ακτίνα. Ποιο μέγεθος αυξάνεται τώρα;

Παράδειγμα:

Σε ποδήλατο η αλυσίδα γυρίζει γύρω από δύο δίσκους, που είναι κάθετοι στον άξονα περιστροφής του πεντάλ. Ο μπροστινός δίσκος έχει ακτίνα 9cm, ενώ ο πίσω (που είναι ομόκεντρος με τον πίσω τροχό) έχει ακτίνα 3cm. Ο ποδηλάτης περιστρέφει τα πετάλια με συχνότητα 3Hz και οι ρόδες έχουν ακτίνα 20cm. Ο ποδηλάτης διαγράφει τον κυκλικό στίβο σε 1min. Να βρεθούν: α) ποιες μετατροπές μεγεθών εμφανίζονται στη διαδικασία και πόσες φορές αυξάνεται κάθε μέγεθος, β) η συχνότητα περιστροφής τροχών και ποδηλάτου.

Λύση

Η μετάδοση κίνησης από το πεντάλ και από το μεγάλο δίσκο στο μικρό είναι περιφερειακή.

Η σχέση (6.15) μπορεί να γραφεί: $\frac{f_1}{f_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{\delta_2}{\delta_1}$, με f_1=3Hz

δ_1=9cm και δ_2=3cm. Άρα, ο πίσω μικρός δίσκος περιστρέφεται με συχνότητα f_2=9Hz. (Το κέρδος στη συχνότητα είναι, λοιπόν, ίσο με 3). Με την ίδια συχνότητα περιστρέφεται και ο πίσω τροχός του ποδηλάτου.

Η μετάδοση κίνησης από το μικρό δίσκο στον πίσω τροχό (ομοαξονική) μάς οδηγεί στη σχέση (6.16). Η γραμμική ταχύτητα του μικρού δίσκου είναι $\upsilon_2 = 2\pi f_2 r_2 = 6{,}1\frac{km}{h}$.

Η γραμμική ταχύτητα $υ_3$ του τροχού είναι:

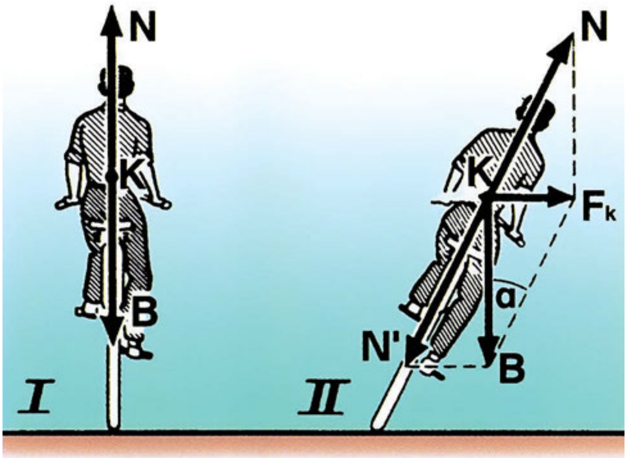
$υ_3 = υ_2 \frac{r_3}{r_2} = 40,7 \frac{km}{h}$ περίπου. (Ας δοκιμάσουμε να επιβεβαιώσουμε τις παραπάνω μετατροπές μονάδων).

β) Η συχνότητα περιστροφής των τροχών είναι, βέβαια, η f_2=9Hz. Η συχνότητα περιφοράς του ποδηλάτου είναι:

$f = \frac{1}{T}$, όπου T=1min η περίοδος περιφοράς. Άρα: $f = 1min^{-1}$.

6.3 Εφαρμογές της κεντρομόλου δύναμης

Πολλές είναι οι εφαρμογές της κεντρομόλου δύναμης και με μεγάλη πρακτική αξία.



Εικόνα 6.5: Κεντρομόλος δύναμη σε ποδηλάτη

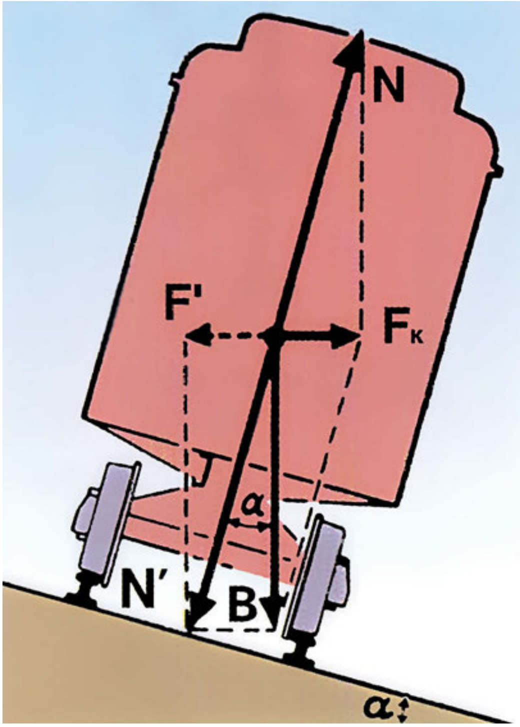
1. Ο ποδηλάτης (εικόνα 6.5): Όταν ο ποδηλάτης βρίσκεται στη στροφή του σταδίου, περιφέρεται κυκλικά. Η απαραίτητη για την κυκλική κίνηση κεντρομόλος $F_κ$ δημιουργείται από τις υπαρκτές δυνάμεις. Όπως έχουμε αναφέρει, αυτές είναι για κάθε σώμα που στηρίζεται στο έδαφος: το βάρος Β και η αντίδραση Ν. Η τελευταία είναι πάντα κάθετη στην επιφάνεια επαφής. Αν ο ποδηλάτης τρέχει στη στροφή σε κατακόρυφη "στάση", (εικόνα 6.5.Ι) η συνισταμένη των Β, Ν θα είναι μηδέν. Η δημιουργία της κεντρομόλου απαιτεί την πλάγια θέση του ποδηλάτη. Τότε το βάρος μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες: τη Ν΄, που εξουδετερώνει την αντίδραση Ν, και την οριζόντια, η οποία θα παίξει το ρόλο της κεντρομόλου $F_κ$. Η κλίση του ποδηλάτου εκφράζεται από τη γωνία α. Με τις γνώσεις μας από την τριγωνομετρία βρίσκουμε ότι:

$$εφα = \frac{F_κ}{B} = \frac{m\frac{υ^2}{r}}{mg}.$$

Τελικά:

$$\boxed{\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\upsilon^2}{rg}} \qquad (6.17)$$

2. Κλίση στο εθνικό οδικό και σιδηροδρομικό δίκτυο (εικόνα 6.6): Πολλές φορές έχουμε ακούσει για περιπτώσεις "ντεραπαρίσματος" σε στροφές του εθνικού οδικού δικτύου. Εκεί υποτίθεται ότι έχει δοθεί η κατάλληλη κλίση ανάλογα με το όριο ταχύτητας που επιτρέπεται σε αυτό το σημείο και ανάλογα με την καμπυλότητα του δρόμου. Η διαδικασία είναι ίδια με την αντίστοιχη του ποδηλάτη και εκφράζεται με τη σχέση (6.17).



Εικόνα 6.6: Κλίση σε σιδηροτροχιές και όριο ταχύτητας

Παράδειγμα: **Ποιο πρέπει να είναι το όριο ταχύτητας του σιδηροδρομικού βαγονιού της εικόνας 6.6 για στροφή δρόμου ακτίνας 400m και κλίση 10%;**

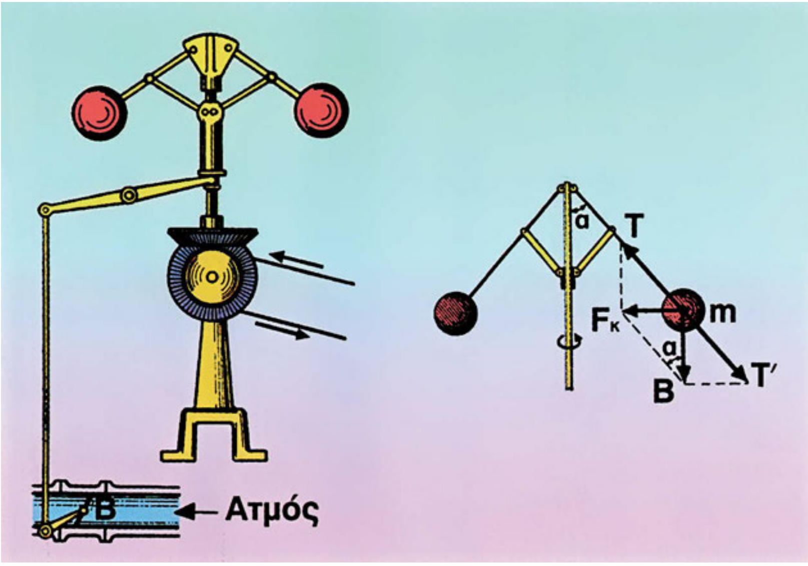
Όταν οι μηχανικοί αναφέρουν κλίση 10% (ή 0,1), εννοούν ότι για 100m δρόμου έχουμε ανύψωση 10m. Στη Φυσική, κλίση θεωρούμε την εφαπτομένη (εφα) της γωνίας που σχηματίζει η ανηφόρα με το οριζόντιο επίπεδο. Από τη σχέση (6.17) βρίσκουμε:

$$\upsilon = \sqrt{gr\varepsilon\varphi\alpha}.$$

Άρα:

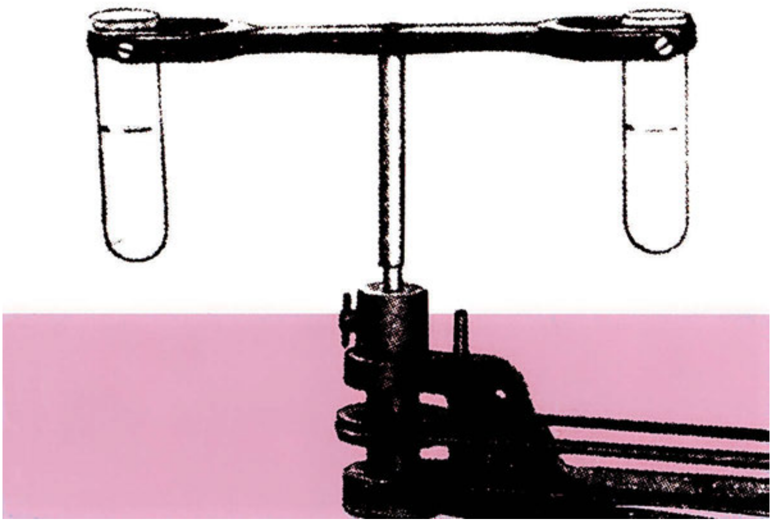
$$\upsilon = \sqrt{10\frac{m}{s^2}400m\cdot 0{,}1} = 20\frac{m}{s} \quad \text{ή} \quad 72\frac{km}{h}.$$

Αν η σιδηροτροχιά δεν έχει την κατάλληλη κλίση ή αν ο οδηγός παραβιάσει το όριο ταχύτητας, το τρένο εκτροχιάζεται.



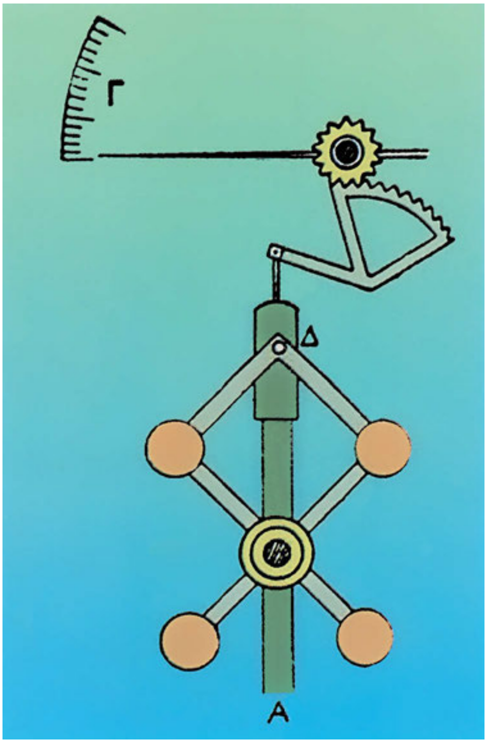
Εικόνα 6.7: Ρυθμιστής του Watt

3. Ρυθμιστής του Watt και φυγοκεντρικός διαχωριστήρας: Η διάταξη Watt χρησιμεύει για εισαγωγή υγρών ή αερίων σε μηχανές εσωτερικής καύσης, εικόνα 6.7. Πάνω στην ίδια ιδέα στηρίζεται και ο διαχωριστήρας υγρών της εικόνας 6.8. Ίσως να το έχετε δει σε μικροβιολογικό εργαστήριο. Χρησιμοποιείται για διαχωρισμούς των συστατικών διαλύματος που έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από τα υπόλοιπα. Υγρά που χρειάζονται τέτοιο διαχωρισμό είναι το γάλα και το αίμα, οπότε τα άλατα και τα άλλα βαριά συστατικά πέφτουν στον πυθμένα. Προϋποθέτει μεγάλη συχνότητα περιστροφής.



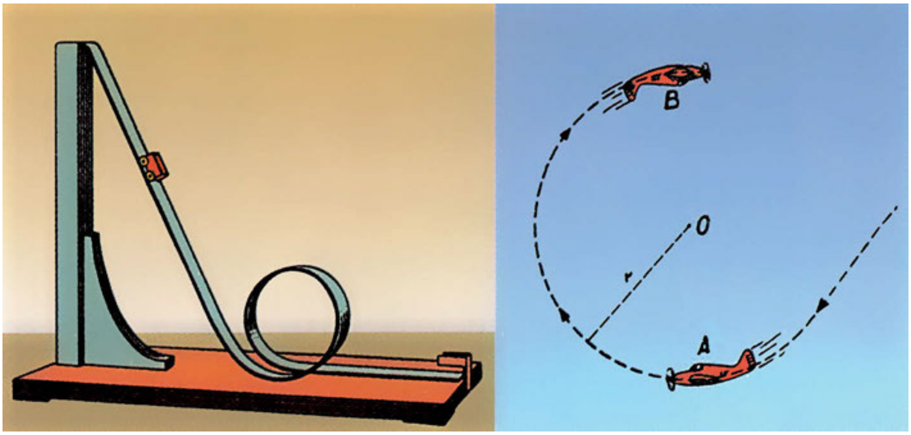
Εικόνα 6.8: Διαχωριστήρας υγρών

4. Το ταχύμετρο (κοντέρ) (εικόνα 6.9): Η αρχή λειτουργίας του ταχύμετρου είναι η ίδια με την αντίστοιχη του ρυθμιστή Watt. Ο άξονας Α περιστρέφεται και, όσο μεγαλώνει η συχνότητα περιστροφής, οι σφαίρες απομακρύνονται από αυτόν. Τότε, ο δρομέας Δ κατεβαίνει και ο δείκτης στην κλίμακα μετακινείται σε μεγαλύτερες τιμές.



Εικόνα 6.9: Αρχή λειτουργίας του ταχύμετρου (κοντέρ) στο αυτοκίνητο

5. Ανακυκλώσεις (εικόνα 6.10): Είναι η κατακόρυφη κυκλική κίνηση όπου επιδιώκεται να φτάσει το κινητό στο ανώτατο σημείο χωρίς να πέσει.



Εικόνα 6.10: Ανακύκλωση και αεροπορικοί ελιγμοί

Πώς λύνουμε ασκήσεις ομαλής κυκλικής κίνησης: Οι σχέσεις που αφορούν την ομαλή κυκλική κίνηση είναι αρκετές. Για το ίδιο μέγεθος, όπως είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση και δύναμη, έχουμε περισσότερες από μια σχέσεις. Γι' αυτό ακολουθούμε την εξής πορεία:

- Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.
- Βρίσκουμε τη συνισταμένη τους στη διεύθυνση της ακτίνας. Αν οι ίδιες οι δυνάμεις δε δίνουν συνισταμένη σε αυτή τη διεύθυνση, τις αναλύουμε σε δύο άξονες: τον x, παράλληλο προς την ακτίνα, και τον y, κάθετο στον x. Γράφουμε: $\Sigma F_x = F_\kappa$ (F_κ = κεντρομόλος δύναμη).
- Αξιοποιούμε κάποια από τις σχέσεις (6.11) μέχρι (6.14) ανάλογα με το βασικό μέγεθος το οποίο δίνεται ή ζητείται να υπολογιστεί.

Παράδειγμα οριζόντιας περιφοράς: (το σώμα εκτελεί οριζόντια, ομαλή κυκλική κίνηση)

Το νήμα στην εικ. 6.2 (β) έχει μήκος 20cm και σχηματίζει 60^{o} με την κατακόρυφη. Με ποια γωνιακή ταχύτητα περιφέρεται η σφαίρα;

Λύση:

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα. Αυτές είναι το βάρος Β και η τάση Τ του νήματος. Η συνισταμένη τους έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και ισούται με την κεντρομόλο δύναμη.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο βρίσκουμε: $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{F_\kappa}{B}$.

Αλλά $F_\kappa = m\omega^2 r = m\omega^2 \ell\eta\mu\varphi$.

Άρα, προκύπτει : $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{m\omega^2\ell\eta\mu\varphi}{mg}$ ή $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}}$.

Βρίσκουμε : $\omega = 10\dfrac{rad}{s}$.

Παράδειγμα κατακόρυφης περιφοράς *(για να θυμηθούμε και την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας):*

Η σφαίρα στην εικόνα 6.2 (γ) αφήνεται από την κορυφή Κ λείας ημισφαιρικής επιφάνειας. Ζητείται η αντίδραση Ν΄ που δέχεται η σφαίρα στο κατώτερο σημείο Α. Δίνονται: m=1kg, $g = 10\dfrac{m}{s^2}$.

Λύση:

Στο σημείο Α η συνισταμένη των δυνάμεων Ν΄ και Β ισούται με την κεντρομόλο δύναμη F_κ. Άρα, $F_\kappa = N' - B = m\dfrac{\upsilon^2}{r}$ (1)

Η μηχανική ενέργεια στα σημεία Κ και Α είναι ίδια, αφού δεν εμφανίζονται τριβές.

$E_M^{\alpha\rho\chi.} = E_M^{\tau\varepsilon\lambda}$ Άρα:

$K_K + U_K = K_A + U_A$ ή $0 + mgh = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 + 0$

Επομένως: $υ^2 = 2gh = 2gr$ (αφού το ύψος του σημείου Κ από το Α ισούται με την ακτίνα r της σφαιρικής επιφάνειας). Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί:

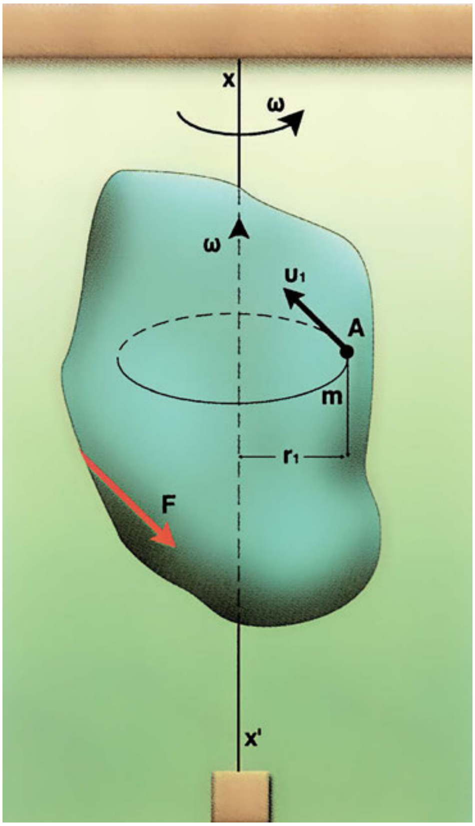
$N' = B + m\frac{2gr}{r}$ 3mg. Βρίσκουμε: $N' = 30N$.

6.4 Περιστροφή στερεού

Κάθε στερεό σώμα, οποιουδήποτε σχήματος ή όγκου μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνά από τυχαίο σημείο του. Το στερεό, π.χ., της εικόνας 6.11 περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα xx΄.

Όπως έχουμε συζητήσει σε προηγούμενη ενότητα, τα χαρακτηριστικά της περιστροφής αυτής είναι δύο:

- Αιτία της περιστροφής είναι κάποια ροπή δύναμης (όπως π.χ. η $\vec{F}$).
- Τα σημεία του στερεού έχουν κοινό μέγεθος τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{ω}$, αλλά διαφέρουν ως προς τη γραμμική ταχύτητα $\vec{υ}$.



Εικόνα 6.11: Περιστροφή στερεού

Ας εξετάσουμε μικρό κομμάτι του στερεού (όσο μικρό μπορούμε να φανταστούμε) γύρω από το σημείο Α. Το κομμάτι έχει μάζα m_1 και περιφέρεται σε κύκλο με ακτίνα r_1. Ο κύκλος βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και η δυναμική ενέργεια του κομματιού παραμένει σταθερή (όποιο επίπεδο αναφοράς και να δεχτούμε). Το κομμάτι διαθέτει κινητική ενέργεια K_1 ίση με:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2$$

ή

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 ω_1^2 r_1^2$$

Η αντικατάσταση: $υ_1 = ωr_1$ έγινε, για να εμφανιστεί στη σχέση η γωνιακή ταχύτητα ω, κοινό μέγεθος για όλα τα σημεία του στερεού.

Επεκτείνοντας τη διαδικασία για τα υπόλοιπα τμήματα του στερεού, βρίσκουμε:

$$K = K_1 + K_2 + ... = \frac{1}{2}\, m_1\omega^2 r_1^{\,2} + \frac{1}{2}\, m_2\omega^2 r_2^{\,2} + ...$$

Τελικά:

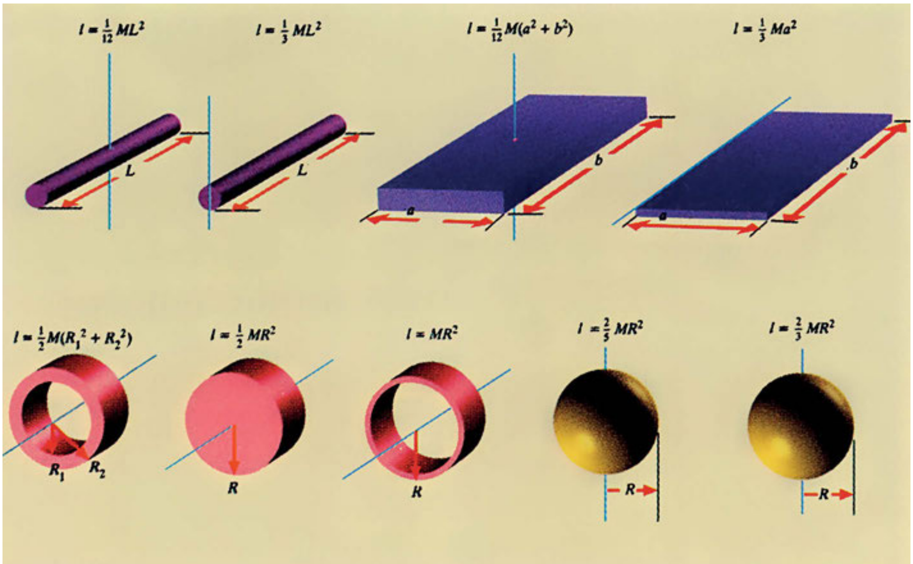
$$\boxed{K = \frac{1}{2}\,(m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + ...)\omega^2} \qquad (6.18)$$

Η ... ατέλειωτη σειρά όρων της παρένθεσης μοιάζει να είναι πολύ σημαντική για το στερεό, επειδή σχετίζεται όχι μόνο με τη μάζα του αλλά και με τον τρόπο κατανομής της γύρω από τον άξονα περιστροφής. Η διαπίστωση αυτή μας οδήγησε στην αντικατάσταση:

$$I = m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + ...$$

Το μέγεθος Ι, γνωστό ως **ροπή αδράνειας**, χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω:

- Είναι μονόμετρο μέγεθος.
- Έχει μονάδα το $kg{\cdot}m^2$ στο S.I.
- Εκφράζει την αδράνεια του στερεού, όταν προσπαθούμε να το περιστρέψουμε (αντίστοιχο της μάζας για τη μεταφορική κίνηση).
- Η τιμή εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής που έχουμε επιλέξει.
- Η ακριβής σχέση για τη ροπή αδράνειας εξαρτάται από το σχήμα του στερεού, όπως φαίνεται στην εικόνα 6.12. Η μαθηματική διαδικασία για την απόδειξη των σχέσεων που φαίνονται είναι πολύπλοκη και δε θα μας απασχολήσει εδώ.



Εικόνα 6.12: Σχέσεις για τη ροπή αδράνειας στερεών με γνωστά σχήματα

Προβληματισμοί: Ας μας απασχολήσουν λίγο τα χαρακτηριστικά της ροπής αδράνειας Ι και ας προσπαθήσουμε να βρούμε - βασιζόμενοι σε αυτήν - τι σημαίνουν τα παρακάτω (και αν είναι σαφή):

- Το σώμα Α περιστρέφεται δυσκολότερα από το σώμα Β.
- Η ροπή αδράνειας στερεού είναι $10 kgm^2$.
- Η ρόδα αγωνιστικού αυτοκινήτου έχει μικρότερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής από την αντίστοιχη κοινού Ι.Χ. (Δεχτείτε ισοβαρείς τους δυο τροχούς).

Η ολική κινητική ενέργεια περιστροφής Κ του στερεού μπορεί να γραφεί λοιπόν:

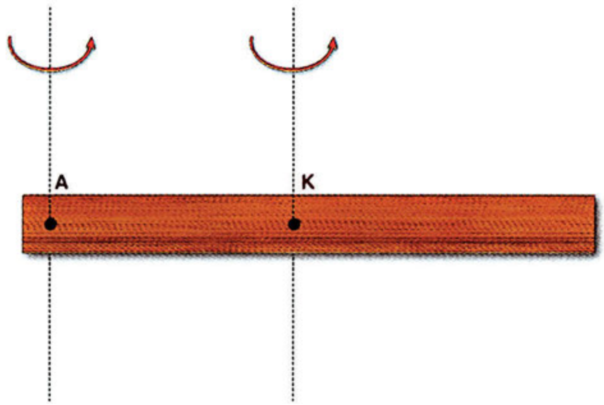
$$\boxed{K = \frac{1}{2} I\omega^2} \qquad (6.19)$$

Προς το παρόν ασχολούμαστε με σώμα που περιστρέφεται μόνο. *(Καλό παράδειγμα είναι το γνωστό θύμα των πασχαλινών εθίμων μας, ο οβελίας. Εδώ, μάλιστα, η διαδικασία θυμίζει βαρούλκο).*

Το σημαντικότερο ερώτημα προκύπτει με την παρατήρηση του παραπάνω πίνακα. Οι σχέσεις της Ι για τα στερεά αναφέρονται σε περιστροφή γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο βάρους τους Κ ("κύριος" άξονας). Τα στερεά δεν περιστρέφονται πάντα, όμως, γύρω από αυτό τον άξονα. Η σκάλα, π.χ., ανατρέπεται με περιστροφή γύρω από άξονα που περνά από το άκρο της, η καρέκλα το ίδιο κτλ. Τι κάνουμε τότε;

Υπάρχει μια χρήσιμη σχέση γνωστή ως **τύπος του Steiner** (ή ως θεώρημα παράλληλων αξόνων), που βοηθά να βρίσκουμε σχέση για τη ροπή αδράνειας I_A ως προς άξονα που περνά από τυχαίο σημείο Α και είναι παράλληλος με αυτόν που διέρχεται από το Κ, εικόνα 6.13. Υποτίθεται ότι η αντίστοιχη σχέση για τη ροπή αδράνειας I_K ως προς κύριο άξονα είναι γνωστή (σχέσεις πίνακα). Είναι:

$$\boxed{I_A = I_K + m(AK)^2} \qquad (6.19)$$



Εικόνα 6.13: Θεώρημα του Steiner

Εφαρμογή: Η ροπή αδράνειας πρισματικής και ομογενούς ράβδου ως προς τον κύριο άξονά της (εικόνα 6.13) είναι: $I_K = \frac{1}{12}m\ell^2$. Η αντίστοιχη για άξονα που είναι παράλληλος προς τον κύριο άξονα και περνά από το άκρο της Α είναι:

$$I_A = I_K + m(AK)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Παρατηρήστε ότι η ροπή αδράνειας I_K ως προς τον κύριο άξονα είναι μικρότερη από την αντίστοιχη I_A, ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Α.

Συμπερασματικά:

- Το σώμα περιστρέφεται ευκολότερα γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο βάρους του παρά γύρω από οποιοδήποτε άλλο άξονα.
- Όσα σημεία είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο βάρους αντιστοιχούν σε ίδια τιμή ροπής αδράνειας της ράβδου (ως προς τους άξονες που περνάνε από αυτά τα σημεία και είναι παράλληλοι μεταξύ τους).

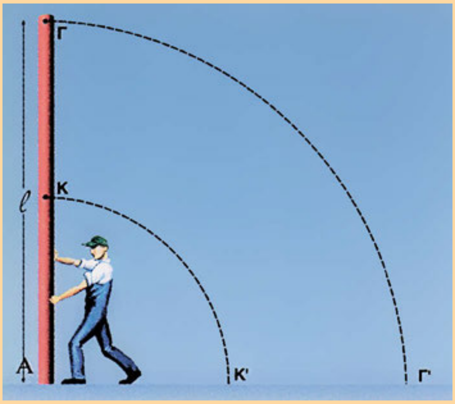
Παράδειγμα:

Υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας στην περιστροφή (με τη βοήθεια και της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας).

Κολόνα της Δ.Ε.Η. με ύψος ℓ=7.5m συγκρατείται όρθια από εργάτη, πριν στερεωθεί μόνιμα. Από απροσεξία του, η κολόνα πέφτει στο έδαφος. Στην όρθια θέση η μηχανική ενέργεια ισούται με τη δυναμική ως προς το έδαφος.

$$E_M = U_1 = mgh = mg\frac{\ell}{2}$$

(αφού η μάζα m της κολόνας θεωρείται συγκεντρωμένη στο κέντρο βάρους της Κ). Λίγο πριν κτυπήσει στο έδαφος, η μηχανική ενέργεια E'_M εμφανίζεται ως κινητική: $E'_M = \frac{1}{2}I_A\omega^2$.



Εικόνα 6.14: Περιστροφή κολώνας γύρω από το άκρο της.

Η ροπή αδράνειας αναφέρεται στον άξονα περιστροφής που περνά από το Α (εικόνα 6.14). Όπως είδαμε πιο πάνω: $I_A = \frac{1}{3}m\ell^2$.

Τελικά: $$E_M = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\omega^2.$$

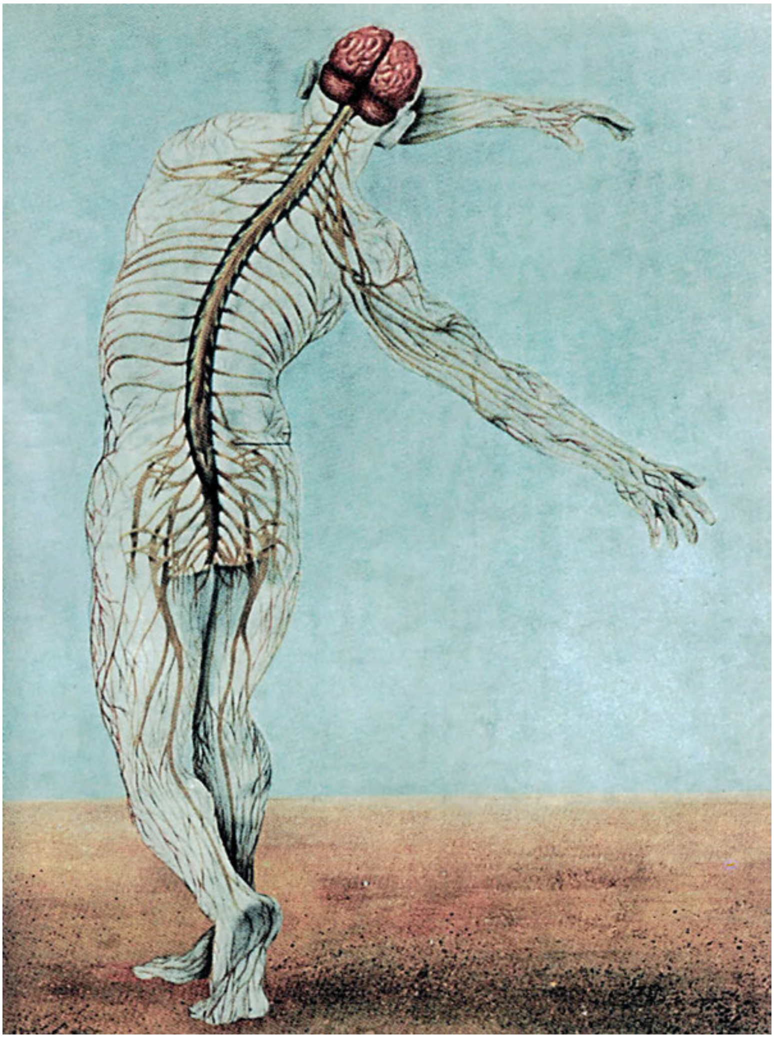
Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας σημαίνει:

$E_M^{\text{αρχική}} = E_M^{\text{τελική}}$ και $mg\dfrac{\ell}{2} = \dfrac{1}{6}m\ell^2\omega^2$, οπότε $\omega = 2\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$ στην τελική (οριζόντια θέση) (ω = γωνιακή ταχύτητα περιστροφής που είναι ίδια για όλα τα σημεία της). Έτσι:

Σημείο Α $(r_A = 0)$: $\upsilon_A = \omega r_A = 0$

Σημείο Κ $\left(r_K = \dfrac{\ell}{2}\right)$: $\upsilon_K = \omega r_K = \omega\dfrac{\ell}{2} = 7{,}5\,\text{m/s}$

Σημείο Γ $(r_\Gamma = \ell)$: $\upsilon_\Gamma = \omega\cdot\ell = 15\,\text{m/s}$.

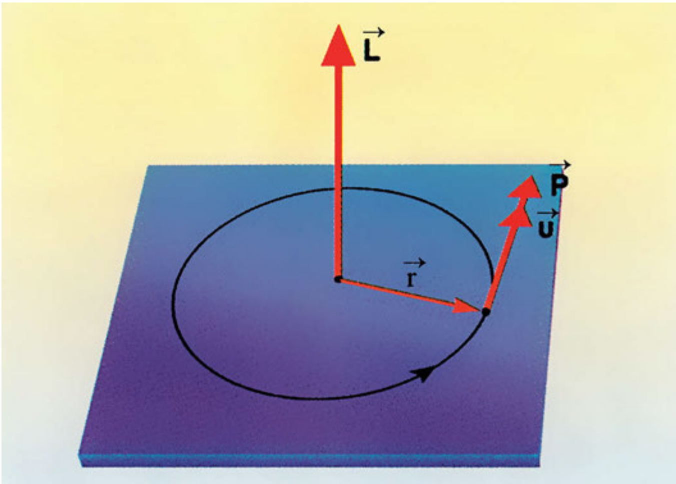


Αθλητής σε περιστροφική κίνηση

6.5 Διατηρήσιμη ποσότητα στην περιστροφή

Ο όρος «διατηρήσιμη ποσότητα» αναφέρεται σε κάθε μέγεθος που μπορεί να διατηρείται σταθερό κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Στη μελέτη της περιστροφής στερεού δεν έχουμε ακόμα αναφερθεί σε μέγεθος συνδυαστικό, το οποίο να αποτελεί, δηλαδή, συνδυασμό ενός αδρανειακού και ενός κινηματικού μεγέθους, όπως είναι η ορμή ($\vec{P} = m \cdot \vec{\upsilon}$) στη μεταφορική κίνηση.

Στην περιστροφική κίνηση το αντίστοιχο μέγεθος, ας το πούμε Χ προς το παρόν, πρέπει να ισούται με: Χ = Ιω, αφού τώρα το χαρακτηριστικό κινηματικό μέγεθος είναι η γωνιακή ταχύτητα ω και η αδράνεια εκφράζεται με τη ροπή αδράνειας Ι. Η παράλληλη λογική φαίνεται στην εικόνα 6.15.



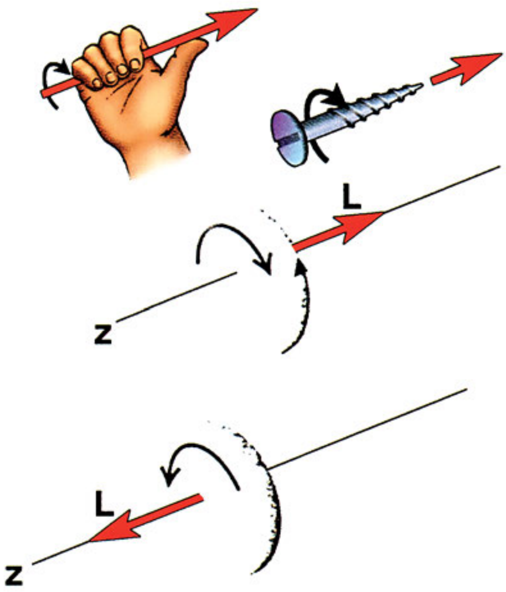
Εικόνα 6.15: Στροφορμή υλικού σημείου

Το σωματίδιο μάζας m έχει ταχύτητα υ και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε κύκλο ακτίνας r. Η ορμή του P = mυ δεν αρκεί για να περιγράψουμε την κίνηση, επειδή το αποτέλεσμα επηρεάζεται και από την ακτίνα περιφοράς του σωματιδίου. Δημιουργούμε νέο μέγεθος, τη **στροφορμή** $\vec{L}$, η οποία εκφράζεται από τη σχέση:

$$\boxed{L = m\upsilon r} \qquad (6.20)$$

Η στροφορμή έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

● Είναι διανυσματικό μέγεθος κάθετο στο επίπεδο στο οποίο ανήκουν η ορμή $m\vec{\upsilon}$ και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$. Η φορά της καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (εικόνα 6.16). Τα 4 δάκτυλα δείχνουν τη φορά περιστροφής και ο αντίχειρας τη στροφορμή. (Παρατηρήστε την αναλογία των εικόνων 6.1(β) και 6.16 και βγάλτε συμπεράσματα...)



Εικόνα 6.16: Για τον προσδιορισμό του διανύσματος της στροφορμής

● Μονάδα της L στο S.I. είναι το $1\text{kg}\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

● Με την αντικατάσταση: υ = ωr, η L γράφεται: $L = m\omega r^2$ ή

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}} \tag{6.21}$$

και ικανοποιεί τη σύνδεση κινηματικού ($\vec{\omega}$) με αδρανειακό μέγεθος (I).

Μπορούμε να εκφράσουμε και στην περιστροφή το 2ο νόμο του Νεύτωνα με σχέση αντίστοιχη της: $\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$, την οποία μελετήσαμε στο κεφάλαιο 4.

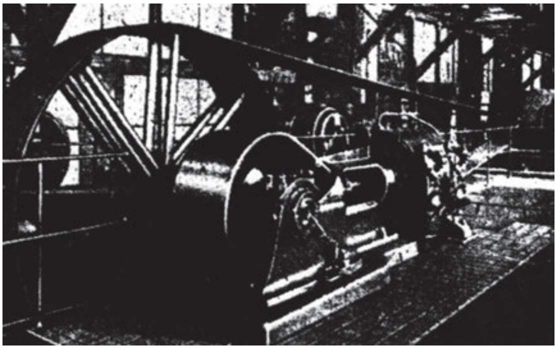
Είναι η σχέση ανάμεσα στη ροπή $\vec{M}$ δύναμης και τη στροφορμή:

ή
$$\boxed{\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}} \tag{6.22}$$

ή
$$\boxed{\vec{M} = I\cdot\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}} \tag{6.23}$$

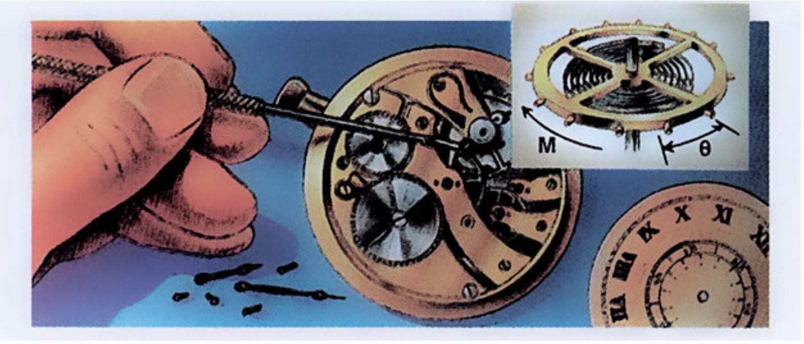
Η σχέση (6.22) ή (6.23) αποτελεί το **θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση.**

Το προνόμιο της μεγάλης ροπής αδράνειας: Αν δοκιμάσουμε ίδια ροπή M σε διάφορα στερεά, εκείνο που έχει μεγάλη ροπή αδράνειας I θα αντιστοιχεί σε μικρό ρυθμό $\left(\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}\right)$ μεταβολής της γωνιακής ταχύτητάς του. Αν, πάλι, επιδιώκουμε ίδιο ρυθμό μεταβολής της ω, η μεγάλη ροπή αδράνειας αντιστοιχεί σε μεγάλη ροπή. Διατάξεις με μεγάλη ροπή αδράνειας, λοιπόν, έχουν την ικανότητα να κρατάνε σχεδόν σταθερή τη γωνιακή τους ταχύτητα. Σε ένα κινητήρα, π.χ., ακόμα και αν η ροπή που την παράγει αυξομειώνεται ελαφρά, οι «στροφές» παραμένουν ίδιες.



Εικόνα 6.17: Σφόνδυλος μηχανών

Μια τέτοια διάταξη είναι ο σφόνδυλος των μηχανών (εικόνα 6.17). Είναι ένας μεγάλος τροχός, του οποίου όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια. Αυτό βοηθά να έχουν όλα τα σημεία του την ίδια και μάλιστα μεγάλη ροπή αδράνειας. Είναι το σχήμα του στερεού, του οποίου η σχέση της ροπής αδράνειάς έχει αριθμητικό συντελεστή 1 ($I = mR^2$). Σφονδύλους βρίσκουμε σε πολλές μηχανές και διατάξεις σε ποικίλα μεγέθη, και ο ρόλος τους είναι σημαντικός. Κάθε τροχός και στεφάνι συμπεριφέρεται ως σφόνδυλος. Ακόμα και μικροδιατάξεις, όπως το ρολόι π.χ. (εικόνα 6.18), διαθέτουν σφόνδυλο.



Εικόνα 6.18: Ο σφόνδυλος μέσα στο ρολόι μας

Εδώ ο σφόνδυλος κρατά σταθερή τη γωνιακή ταχύτητα (άρα και τη συχνότητα) ταλάντωσής του και του ελατήριου ("τρίχα" ρολογιού) που τον συνοδεύει.

Προτροπή: Ας προσπαθήσουμε να αναγνωρίσουμε και άλλους σφονδύλους σε μηχανές ή διατάξεις που συναντάμε στην καθημερινή ζωή μας...

Διατήρηση στροφορμής: το τρίτο βασικό στήριγμα των φυσικών εξελίξεων.

Έως τώρα ασχοληθήκαμε με δυο αρχές διατήρησης: της μηχανικής ενέργειας και της ορμής. Τα φυσικά φαινόμενα διέπονται και από μια τρίτη αρχή. Ας δούμε λίγο τη σχέση (6.22). Από τη σχέση προκύπτει ότι:

"Σε κάθε σώμα ή σύστημα το οποίο δε δέχεται συνολικά ροπή, η στροφορμή του παραμένει σταθερή διανυσματικά".

Η παραπάνω διατύπωση αποτελεί την **αρχή διατήρησης της στροφορμής,** που μαζί με τις δύο προηγούμενες δημιουργούν το σύνολο των αρχών πάνω στις οποίες στηρίζεται η φυσική έρευνα.

Ροπή ίση με μηδέν έχουμε σε δύο περιπτώσεις:

- Όταν δεν εμφανίζεται κάποια εξωτερική ροπή στο σύστημα, και
- Όταν οι εξωτερικές για το σύστημα ροπές έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν.

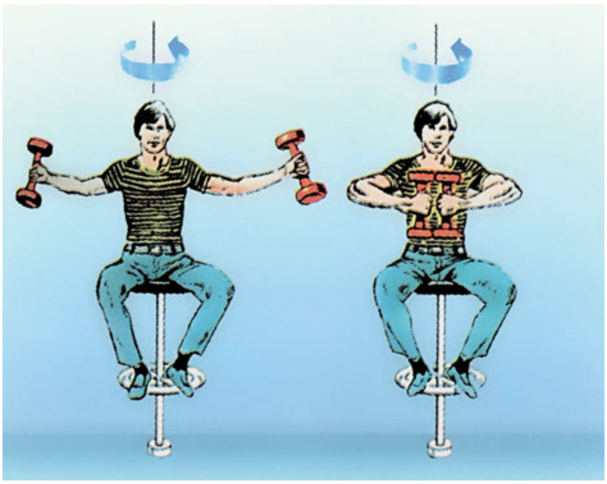
Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε αυτό που ονομάζουμε **μονωμένο ή κλειστό σύστημα.** Είναι κάθε σύστημα σωμάτων (μπορεί να είναι και μόνο του κάποιο σώμα), στο οποίο δεν επενεργούν εξωτερικές ροπές και στο οποίο οι όποιες τριβές (που συνήθως δε λείπουν) θεωρούνται αμελητέες για την περιστροφή.

Η διατήρηση της στροφορμής γράφεται: $L_1 = L_2$. Άρα:

$$\boxed{I_1\omega_1 = I_2\omega_2} \qquad (6.24)$$

Η σχέση (6.24) δείχνει ότι το γινόμενο $I\cdot\omega$ διατηρείται σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι τα μεγέθη I, ω "δουλεύουν" το ένα σε βάρος του άλλου. Όσο μεγαλώνει δηλαδή η ροπή αδράνειας I, μικραίνει η γωνιακή ταχύτητα ω, και αντίστροφα. Ο άνδρας, π.χ. της εικόνας 6.19 περιστρέφεται κρατώντας σε οριζόντια τεντωμένα χέρια δύο βάρη. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του είναι ω_1. Όταν μαζεύει τα χέρια του, η γωνιακή ταχύτητα ω_2 γίνεται μεγαλύτερη. Βασιστείτε στη σχέση (6.24), για να εξηγήσετε το φαινόμενο.

Ας σκεφτούμε δύο ακόμα ενδεικτικά παραδείγματα...



Εικόνα 6.19: Για την επιβεβαίωση της διατήρησης της στροφορμής

α) Οι παγοδρόμοι περιστρέφονται σε παγωμένη πίστα με κάποια γωνιακή ταχύτητα. Κάποια στιγμή συσπειρώνονται και η περιστροφή γίνεται γρηγορότερη.

β) Καθόμαστε σε περιστρεφόμενη πολυθρόνα και κρατάμε μία σφαίρα σε κάθε τεντωμένο οριζόντια χέρι μας. Μαζεύουμε απότομα τις σφαίρες στο στήθος και η περιστροφή γίνεται πιο γρήγορη. Ο ίλιγγος παραμονεύει...

γ) Ισχυρίζονται πολλοί ότι μπορούν να διακρίνουν το βρασμένο από το άβραστο αβγό περιστρέφοντάς το πάνω σε τραπέζι. Εξηγήστε...

Πίνακας 6.2: Αντιστοιχία μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης

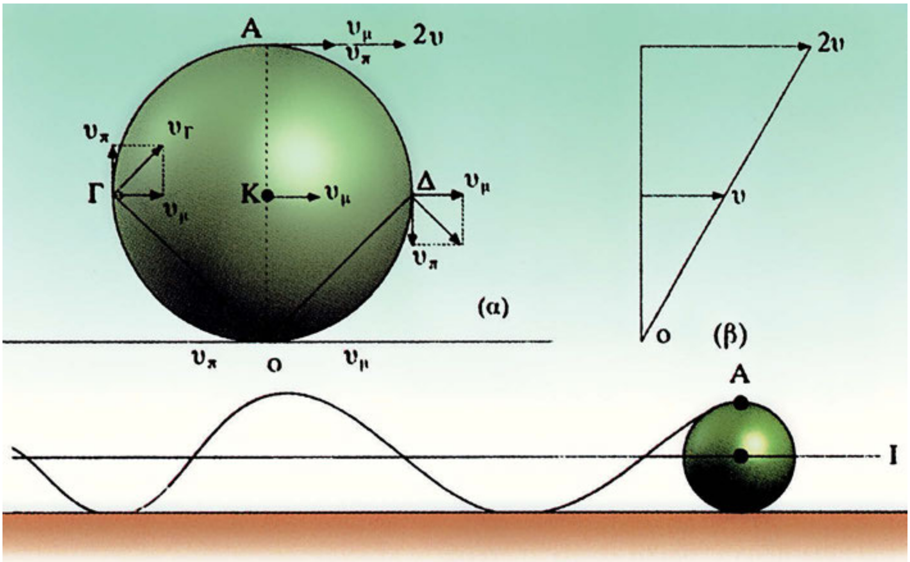
Μεταφορική κίνηση		**Περιστροφική κίνηση**	
Μέγεθος	**Σχέση**	**Μέγεθος**	**Σχέση**
Μετατόπιση s		Γωνία θ	$s = \theta \cdot r$
Ταχύτητα υ		Γωνιακή ταχύτητα ω	$\upsilon = \omega \cdot r$
		Κεντρομόλος επιτάχυνση	$\alpha_\kappa = \omega^2 \cdot r$
Μάζα m		Ροπή αδράνειας I	$I = m \cdot r^2$
Δύναμη F	$F = m \cdot \Delta\upsilon/\Delta t$	Ροπή M	$M = I \cdot \Delta\omega/\Delta t$
Ορμή P	$P = m \cdot \upsilon$	Στροφορμή L	$L = I \cdot \omega$
Κινητική ενέργεια K	$K = ½\, m \cdot \upsilon^2$	Κινητική ενέργεια K	$K = ½\, I \cdot \omega^2$
Αρχή της διατήρησης της ορμής: $\vec{F} = 0,\ \vec{P} = \sigma\tau\alpha\theta.$		Αρχή της διατήρησης της στροφορμής: $\vec{M} = 0,\ \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta.$	

6.6 Κύλιση: Συνύπαρξη μεταφοράς και περιστροφής

Πολλές φορές τα στερεά συμμετέχουν συγχρόνως σε μεταφορική και σε περιστροφική κίνηση. Η σύνθετη κίνηση, η **κύλιση**, έχει αναφερθεί κατά τη μελέτη του ρόλου της τριβής στα φυσικά φαινόμενα. Θυμίζουμε ότι η παρουσία της στατικής τριβής είναι απαραίτητη, για να κυλήσει κάποιο σώμα.

Ας σκεφτούμε: Παράδειγμα στερεού που μπορεί να μετακινείται, να περιστρέφεται και να κυλίεται είναι ο τροχός του αυτοκινήτου.

- Όταν τα φρένα μπλοκάρουν τον τροχό, αυτός ολισθαίνει στο δρόμο. Θυμηθείτε, με τα πρωτοβρόχια και το βρέξιμο του δρόμου, πόσο συχνά γλιστράνε οι τροχοί με τις γνωστές συνέπειες. *(Αναλύστε, με την ευκαιρία, το φαινόμενο. Γιατί τα λάδια που είναι χυμένα στο δρόμο επιδεινώνουν τα πράγματα;).*
- Όταν ο τεχνίτης ανεβάζει το αμάξι σε “γρύλο”, για να ελέγξει, π.χ., το δάπεδο ή την εξάτμισή του οι τροχοί είναι στον αέρα. Τότε μπορούν μόνο να περιστρέφονται.
- Όταν κυκλοφορεί το αυτοκίνητο, κάθε τροχός μετακινείται και περιστρέφεται. Άρα κυλίεται.



Εικόνα 6.20: Μελέτη της συμπεριφοράς του κυλιόμενου τροχού

Η συμπεριφορά του κυλιόμενου τροχού φαίνεται στην εικόνα 6.20. Στην ομαλή κίνηση του αυτοκινήτου ο τροχός χαρακτηρίζεται από δύο ταχύτητες: την $\vec{υ}_μ$ της μεταφορικής κίνησης και την $\vec{υ}_π$ της περιστροφικής. Η ταχύτητα $\vec{υ}_μ$ είναι σταθερή διανυσματικά και κοινή για όλα τα σημεία του τροχού.

Η ταχύτητα $\vec{υ}_π$ έχει σταθερό μέτρο $υ_π = ωr$ και είναι εφαπτόμενη σε κάθε σημείο του τροχού. Το μόνο σημείο που δεν περιστρέφεται (άρα έχει $\vec{υ}_π= 0$) είναι το κέντρο Κ του τροχού.

Κάθε στιγμή υπάρχει κάποιο σημείο Ο του τροχού που ακουμπά στο έδαφος. (Στην πραγματικότητα ο τροχός εφάπτεται στο έδαφος με κάποια πολύ μικρή επιφάνειά του, που μπορεί να θεωρηθεί ευθεία. Η κάτοψη της ευθείας είναι το σημείο Ο). Το Ο εκείνη τη στιγμή έχει συνολική ταχύτητα μηδέν (όπως και το έδαφος).

Άρα: $\vec{\upsilon}_\mu + \vec{\upsilon}_\pi = \vec{0}$, οπότε: $\upsilon_\mu = \upsilon_\pi = \upsilon$.

Η σχέση αυτή επιδρά στη συνολική ταχύτητα και των άλλων σημείων του τροχού. Δείτε τα σημεία Κ, Α, Γ, και Δ:

Σημείο Κ (κέντρο του τροχού): $\upsilon_K = \upsilon_\mu = \upsilon$

Σημείο Α (το ανώτερο σημείο του τροχού): $\upsilon_A = \upsilon_\mu + \upsilon_\pi = 2\upsilon$

Σημεία Γ, Δ (άκρα οριζόντιας διαμέτρου): $\upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_\mu^2 + \upsilon_\pi^2} = \upsilon\sqrt{2}$.

Η παραπάνω εξομοίωση μετατρέπει τη σύνθετη κίνηση (κύλιση) σε απλή (περιστροφική) γύρω από τον άξονα που περνά από το Ο **(στιγμιαίος άξονας).** Ας δούμε στην εικόνα 6.20 (β) την κατανομή των ταχυτήτων στα διάφορα σημεία του τροχού. Παρατηρήστε, ακόμα, πώς κινείται το Α, π.χ., στο χώρο. Η κίνηση θυμίζει την ελικοειδή διάταξη μιας βίδας της οποίας, επίσης, κάθε σημείο μετακινείται και περιστρέφεται.

Με βάση την παραπάνω προσέγγιση, ερμηνεύεται η συμπεριφορά των τροχών. Ίσως γνωρίζετε τι σημαίνει αυτό που λέμε "ζυγοστάθμιση οπίσθιων τροχών". Γίνεται, όταν δούμε τους οπίσθιους τροχούς να "τρικλίζουν" (λέμε ότι κάνουν "οκτάρια") ύστερα από την καταπόνησή τους σε πεζοδρόμια, σε λακκούβες και από κτυπήματα. Στο συνεργείο ζυγοσταθμίσεων τοποθετούν τον τροχό σε περιστρεφόμενη βάση και παρακολουθούν τη συμπεριφορά του. Αν χρειαστεί, στερεώνουν μολυβένια τακάκια σε επιλεγμένα σημεία του τροχού. Σκεφτείτε ή ρωτήστε γιατί γίνονται όλα αυτά...

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην κύλιση

Αναφερθήκαμε παραπάνω στις δύο κινήσεις που περιέχονται μέσα στην κύλιση. Άρα και σε δυο κινητικές ενέργειες: σ' αυτήν της μεταφορικής, $K_\mu = \frac{1}{2}m\upsilon^2$, και στην αντίστοιχη της περιστροφικής, $K_\pi = \frac{1}{2}I\omega^2$. Επομένως, στην κύλιση η συνολική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{o\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (6.25)$$

Όταν μελετάμε την κίνηση σώματος που προσφέρεται για κύλιση (σφαίρας, κυλίνδρου κτλ.), μπαίνει το ερώτημα αν οι συνθήκες του επιτρέπουν να κυλίεται.

- Όταν μιλάμε για λείο δάπεδο ή, γενικά, επίπεδο, η έλλειψη τριβής έχει συνέπεια την απουσία κύλισης. Το σώμα απλώς ολισθαίνει.
- Όταν υπάρχει τριβή (που είναι και το φυσιολογικό), το σώμα κυλίεται. Το πιο ενδιαφέρον και χρήσιμο είναι το γεγονός **ότι το έργο της τριβής είναι μηδέν.** Αυτό συμβαίνει, επειδή η τριβή ολίσθησης δεν έχει την ευκαιρία να καταναλώνει έργο, αφού η επιφάνεια επαφής σώματος – επιπέδου αλλάζει

συνεχώς. Έχουμε, δηλαδή, κύλιση χωρίς ολίσθηση. Έτσι, η τριβή δεν "προλαβαίνει να κάνει τη ζημιά" της.

Πώς λύνουμε ασκήσεις κίνησης στερεού: Οι ασκήσεις της περιστροφής στερεού χωρίζονται σε τρεις γενικές κατηγορίες:

● **Ασκήσεις περιστροφικής κίνησης.** Το σώμα έχει κινητική ενέργεια, περιστροφής: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Με την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής σε κάποια θέση του στερεού.

● **Ασκήσεις κύλισης στερεού.** Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με: $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. Η σχέση $\upsilon = \omega r$ βοηθά στο να έχουμε σχέση μόνο με τη γωνιακή ταχύτητα, την οποία μπορούμε να βρούμε.

● **Ασκήσεις μονωμένου συστήματος σωμάτων.** Η διατύπωση της άσκησης πρέπει να αναφέρει τη φράση: “χωρίς εξωτερική παρέμβαση” ή κάποια παρόμοια. Τότε αξιοποιούμε την αρχή της διατήρησης της στροφορμής και βρίσκουμε τη σχέση των γωνιακών ταχυτήτων για τις δυο καταστάσεις του συστήματος.

Εφαρμογή: Κύλινδρος $\left(I_K = \frac{1}{2}mR^2\right)$ αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου ύψους h. Με ποια ταχύτητα φτάνει στη βάση της κατηφόρας, αν το επίπεδο: α) είναι λείο, β) εμφανίζει τριβή με το σώμα;

Λύση:

Στην περίπτωση (α) ο κύλινδρος όπως είπαμε ολισθαίνει. Η διατήρηση της ενέργειας για τα σημεία Α (κορυφή κατηφόρας) και Γ (βάση) γράφεται:

$$K_A+U_A= K_r+U_r$$

ή

$$0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0$$

(επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας θεωρείται το αντίστοιχο του Γ).

Άρα: $$\upsilon = \sqrt{2gh}$$

Στην περίπτωση (β) το σώμα κυλίεται και η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας γράφεται $0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I_K\omega^2 + 0$.

Αν αντικαταστήσουμε: $I_K = \frac{1}{2}mR^2$ και $\omega = \frac{\upsilon}{R}$ (υ = ταχύτητα του κέντρου βάρους), βρίσκουμε: $mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{\upsilon^2}{R^2}$.

Άρα: $$\upsilon = \sqrt{\frac{4}{3}gh}\,.$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η τελική ταχύτητα είναι μικρότερη στην κύλιση παρά στην ολίσθηση. Αξίζει να το σχολιάσουμε σε συνδυασμό με την απορία: "Γιατί έχουμε, παρ' όλα αυτά, τροχούς στρογγυλούς, που κυλίονται, και όχι, π.χ., ορθογώνιους, που ολισθαίνουν μόνο; "

Ας επεκτείνουμε: Δοκιμάζουμε την παραπάνω διαδικασία για στερεά άλλων σχημάτων (π.χ. σφαίρα, τροχό κτλ.), Βρίσκουμε ποιο από όλα φτάνει με μεγαλύτερη ταχύτητα στη βάση της κατηφόρας. Παρατηρούμε ότι η μάζα m και η ακτίνα R του στερεού δεν εμφανίζονται στη σχέση της υ. Πώς μπορούμε να το εξηγήσουμε;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ -ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ- ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.1. Επεξεργαστείτε τα ερωτήματα και τους προβληματισμούς που είναι διάσπαρτα στο κείμενο του κεφαλαίου.

6.2. Συμπληρώστε τις λέξεις που λείπουν στις παρακάτω φράσεις:

α: Στην ομαλή κυκλική κίνηση η .... επιτάχυνση είναι .... στη γραμμική ταχύτητα.

β: Στα ομοαξονικά συστήματα έχουμε σταθερή .... ταχύτητα και η .... ταχύτητα αυξάνεται όσο .... η απόσταση από τον άξονα περιστροφής..

γ: Η κλίση του δρόμου στις στροφές καθορίζει το όριο .... των οχημάτων για δεδομένη .... καμπυλότητας.

6.3. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και γιατί;

α: Σε κάθε ομαλή κίνηση η επιτάχυνση είναι μηδέν.

β: Η κεντρομόλος επιτάχυνση περιστρεφόμενου τροχού στα περιφερειακά σημεία είναι μεγαλύτερη απ' ότι στα άλλα.

γ: Στα συστήματα περιφερειακής μετάδοσης περιστροφής η κίνηση δίνεται στον τροχό με μεγάλη ακτίνα.

δ: Τα ποδηλατοδρόμια έχουν στίβο με κλίση, για να διευκολύνεται η κυκλική κίνηση.

6.4. Σε ποδήλατο οι ακτίνες των δύο δίσκων είναι r και 3r, ενώ ο οπίσθιος τροχός έχει ακτίνα 10r. Να συγκριθούν οι γωνιακές και οι γραμμικές ταχύτητές τους.

6.5. Ο δίσκος του συμπλέκτη (ο οποίος συνήθως αναφέρεται με τους γαλλικούς όρους αμπραγιάζ ή ντεμπραγιάζ) επικοινωνεί με τους αντίστοιχους των ταχυτήτων εφαπτομενικά. Το "ανέβασμα" της ταχύτητας από την 1η προς την 5η επιτρέπει μεγαλύτερες επιδόσεις; Σε τι πιστεύετε ότι οφείλεται αυτό; Ρωτήστε τι σημαίνει η πληροφορία: "η 1η ταχύτητα και η όπισθεν έχουν σχέση 3,909, ενώ η 5η 0,967";

6.6 Θεωρείτε σωστές και πλήρεις τις παρακάτω προτάσεις; Αν όχι, διορθώστε τες ή συμπληρώστε τες.

α: Η ροπή αδράνειας σώματος είναι $50kgm^2$.

β: Ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής τροχού βοηθά την κύλιση να "φαίνεται" σαν περιστροφή.

γ: Η τριβή μετατρέπει έργο σε θερμότητα.

δ: Σε μονωμένο σύστημα η στροφορμή διατηρείται σταθερή.

6.7 Σημειώστε τις αντιστοιχίες μεγεθών μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης με τις αναφερόμενες μονάδες S.I.

Μονάδες S.I.	Μεταφορική κίνηση		Περιστροφική κίνηση	
kgm^2	Μάζα	m	Ροπή	M
Nm	Μετατόπιση	s	Στροφορμή	L
rad/s	Ταχύτητα	υ	Γωνία	θ
kg m/s	Επιτάχυνση	α	Γωνιακή ταχύτητα	ω
m/s^2	Ορμή	P	Ροπή αδράνειας	I
kgm^2/s	Δύναμη	F	Κεντρομόλος επιτάχυνση	$α_κ$

6.8. Συμπληρώστε τις λέξεις που λείπουν στο παρακάτω κείμενο:

Το αίτιο κάθε περιστροφής στερεού είναι η .... .Όταν το σώμα έχει .... ροπή αδράνειας περιστρέφεται δύσκολα. Η ροπή αδράνειας στερεού εξαρτάται από τον ...., γύρω από τον οποίο .... Ο άξονας που αντιστοιχεί στη .... ροπή αδράνειας είναι αυτός που περνά από το .... βάρους του στερεού.

6.9. Εξηγήστε γιατί, μετά τις χορευτικές φιγούρες περιστροφής στο καλλιτεχνικό πατινάζ, οι χορευτές ανοίγουν οριζόντια τα χέρια τους, ώστε να σταματήσουν τελικά;

6.10. Εξηγήστε πότε η μελέτη ενός φαινομένου βασίζεται στη διατήρηση της ορμής και πότε στην αντίστοιχη της στροφορμής.

6.11. Όταν το ρολόι δείχνει 12h 0min 0sec, οι 3 δείκτες συμπίπτουν. Ποια ώρα μετά τις 12 ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης θα γίνουν κάθετοι για πρώτη φορά;

6.12 Δύο αθλητές των 400m έχουν επιδόσεις 48,2 s και 48,8s αντίστοιχα. α) Ποια μέση ταχύτητα αναπτύσσει καθένας; β) Πόσο θα απέχουν, όταν τερματίσει ο πιο γρήγορος; γ) Αν θεωρήσουμε ότι το στάδιο έχει μέγεθος και σχήμα τέτοιο, ώστε τα 400m να αντιστοιχούν σε μια περιφέρεια, να βρείτε τις γωνιακές ταχύτητές τους. *Αλήθεια, γιατί οι αθλητές στίβου παραπονιούνται συχνά: "Με έβαλαν να τρέξω σε δύσκολο διάδρομο (κουλουάρ)..."; Τι εννοούν και πώς εξηγείτε το παράπονό τους;*

6.13. Στους αγώνες στίβου "Βενιζέλεια" η καλύτερη Ελληνική επίδοση στο δρόμο 800m γυναικών γράφτηκε στο φωτεινό πίνακα έτσι: 2:10:54. Γράψτε σε μονάδες της Φυσικής την επίδοση αυτή. Αν δεχτούμε πως η περιφέρεια του στίβου αντιστοιχεί σε 400m, να βρεθούν για την αθλήτρια οι μέσες τιμές για τα παρακάτω μεγέθη: περίοδος περιφοράς, συχνότητα, γωνιακή και γραμμική ταχύτητα, κεντρομόλος επιτάχυνση και κεντρομόλος δύναμη (στην τελευταία ζύγιση η αθλήτρια βρέθηκε με βάρος 50kp).

6.14. Να υπολογίσετε όλα τα μεγέθη για τη συμμετοχή σας στην περιφορά της Γης γύρω από τον άξονά της (συχνότητα, ταχύτητες, επιτάχυνση και κεντρομόλο δύναμη. *Τη μάζα σας την ξέρετε καλύτερα από τον καθένα...*). Να συγκρίνετε, ύστερα, την κεντρομόλο δύναμη με το βάρος σας. ($R_Γ$ = 6400km, γεωγραφικό πλάτος 37^o βόρειο).

6.15. Υποθέτουμε ότι η Γη περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Η μέση ακτίνα της τροχιάς υπολογίστηκε $1,49.10^{11}$m και η τροχιά (όπως ξέρουμε) διανύεται σε 365 μέρες. Να βρεθούν τα μεγέθη της ομαλής κυκλικής κίνησης και να συγκριθούν με τα αντίστοιχα της προηγούμενης άσκησης.

6.16. Ο μεγάλος κατακόρυφος τροχός του λούνα-παρκ ακτίνας 14m περιφέρεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του. Η γραμμική ταχύτητα παιδιού με μάζα 40kg είναι 8m/s. Να βρεθούν τα μεγέθη της ομαλής κυκλικής κίνησης *(έχουν αναφερθεί στις προηγούμενες ασκήσεις).*

6.17. Η σφαίρα της εικόνας 6.2 (β), με μάζα 1kg, περιφέρεται σε οριζόντιο κύκλο με τη βοήθεια του νήματος μήκους ℓ=20cm, που σχηματίζει 60^o με την κατακόρυφο. Να βρεθούν: η γωνιακή ταχύτητα, η περίοδος, η συχνότητα, η κεντρομόλος επιτάχυνση και δύναμη. Επιλέξτε κάποια από τις σχέσεις, που χρησιμοποιήσατε, για να δείξετε ότι: "όσο πιο γρήγορα περιφέρεται η σφαίρα, τόσο πιο ψηλά ανεβαίνει ο κύκλος περιφοράς" *(Θυμηθείτε από την Τριγωνομετρία: όσο μεγαλώνει η γωνία, μικραίνει το συνημίτονό της).*

6.18. **Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου αφήνεται μια σφαίρα $\left(I_K = \frac{2}{5}mR^2\right)$ και ένας τροχός $\left(I_K = \frac{1}{2}m\ell^2\right)$. Να συγκριθούν οι ταχύτητές τους, όταν φτάνουν στη βάση της κατηφόρας, αν το επίπεδο: α) είναι λείο, β) παρουσιάζει τριβή.**

6.19. **Ο τροχός της προηγούμενης άσκησης έχει μάζα 35kg και ακτίνα 60cm και το ύψος, από το οποίο αφήνεται, είναι 15m. Να βρεθούν: α) η ταχύτητα με την οποία φθάνει στη βάση, β) η κινητική ενέργειά του, γ) η τελική συχνότητα περιστροφής. ($g=10m/s^2$).**

6.20. **Ράβδος περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο βάρους της $\left(I_\kappa = \frac{1}{12}m\ell^2\right)$. Χωρίς εξωτερική επέμβαση η ράβδος κάποια στιγμή αλλάζει άξονα περιστροφής και περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο της $\left(I_A = \frac{1}{3}m\ell^2\right)$. Να συγκριθούν α) οι γωνιακές ταχύτητες, β) οι κινητικές ενέργειες για τις δύο περιπτώσεις.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο
ΡΕΥΣΤΑ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Τα φυσικά φαινόμενα δεν αφορούν μόνο στερεά σώματα. Βέβαια, η παρουσία και η συμμετοχή των στερεών είναι καταλυτική, αφού η σταθερότητα στη δομή και στη συμπεριφορά τους ρυθμίζει την πλειονότητα των φυσικών εξελίξεων.

Εκτός από τα στερεά, καθοριστικό ρόλο σε όλα όσα συμβαίνουν γύρω μας παίζουν τα σώματα που ονομάζουμε **ρευστά.** Είναι όσα δεν έχουν ταυτόχρονα και τις τρεις παρακάτω ιδιότητες:

- σταθερό σχήμα
- σταθερό όγκο
- ελεύθερη επιφάνεια.

"Τα πάντα ρει". (Ηράκλειτος)
"Η κατάσταση είναι ρευστή". (Από τις εφημερίδες)

Μια από τις παραπάνω ιδιότητες αν λείπει από κάποιο σώμα, σημαίνει ότι το σώμα ανήκει στην κατηγορία των ρευστών. Οι κυριότερες κατηγορίες των ρευστών είναι:

α) Τα υγρά:

- Έχουν μεταβλητό σχήμα, αφού προσαρμόζονται στο σχήμα του δοχείου που τα περιέχει. Γι' αυτό λέμε ότι τα υγρά εμφανίζουν **ελαστικότητα σχήματος**.
- Έχουν (σχεδόν) σταθερό όγκο, αφού, για να τον μεταβάλουμε πρέπει να καταβάλουμε πολύ μεγάλη προσπάθεια. Γι' αυτό λέμε ότι τα υγρά είναι **ασυμπίεστα** στην πράξη.
- Έχουν ελεύθερη επιφάνεια.

β) Τα αέρια:

- Έχουν μεταβλητό σχήμα, ανάλογο με τον αντίστοιχο του δοχείου που τα δέχεται.
- Έχουν μεταβλητό όγκο, ίδιο πάντα με εκείνο του δοχείου που τα περιέχει. Γι' αυτό λέμε ότι τα αέρια εμφανίζουν **ελαστικότητα όγκου**.
- Δεν παρουσιάζουν ελεύθερη επιφάνεια.

Ας αναρωτηθούμε για λίγο: Τι θα συνέβαινε, αν τα υγρά είχαν ελαστικότητα όγκου; Αν δηλαδή μπορούσαμε εύκολα να αλλάξουμε τον όγκο υγρού με δεδομένη μάζα. Θα ήταν σωστό, τότε, να γίνονται οι αγοραπωλησίες των καυσίμων, π.χ., με βάση τον όγκο (lit) τους;

Όσον αφορά τα παραπάνω χαρακτηριστικά των ρευστών πρέπει να επισημανθούν τα εξής:

- Οι διαφορές των ρευστών (ανάμεσα στα υγρά και στα αέρια) και οι διαφορές τους με τα στερεά βασίζονται αποκλειστικά στην κατασκευή (δομή) της ύλης. Ανάλυση για όλα αυτά έγινε στο κεφάλαιο 2. Εδώ θα επαναλάβουμε απλώς τα βασικά.
- Στα στερεά η διάταξη των ατόμων είναι κανονική και μόνιμη. Έχουν, γι' αυτό το λόγο, σταθερό σχήμα και όγκο.
- Στα υγρά υπάρχει κάποια διάταξη ατόμων αρκετά χαλαρή, ώστε εύκολα να της αλλάζουμε σχήμα, και αρκετά ισχυρή, ώστε πολύ δύσκολα να μεταβάλλουμε τον όγκο της.
- Στα αέρια υπάρχει αταξία. Τα άτομα ή τα μόριά τους κινούνται σχεδόν ελεύθερα, και κάθε προσπάθεια "χειραγώγησης" του όγκου ή του σχήματός τους αποδεικνύεται μάταιη.

Η διάκριση των υλικών στις κατηγορίες (στερεά, υγρά και αέρια) συχνά αποδεικνύεται σχετική. Η πίσσα και τα πλαστικά, π.χ., εύκολα ρευστοποιούνται ή στερεοποιούνται, ενώ ο υγρός υδράργυρος (Hg) του θερμομέτρου πέφτει με μορφή μικρών σφαιρών, αν τύχει και σπάσει ο γυάλινος σωλήνας που τον περιέχει.

Υπάρχει και τρίτη κατηγορία ρευστού: το **πλάσμα**. Είναι το αέριο σε πάρα πολύ υψηλές θερμοκρασίες. Τότε τα άτομά του έχουν χάσει όλα τα ηλεκτρόνιά τους. Το πλάσμα εμφανίζεται σε ειδικές ηλεκτρονικές διατάξεις και στον Ήλιο, εκεί όπου τα αέρια συμμετέχουν στις αντιδράσεις σύντηξης (θερμοπυρηνικές). Η κατασκευή της "βόμβας υδρογόνου" από κάπου εδώ ξεκινά...

7.1 Η πυκνότητα και το ειδικό βάρος

Η μάζα σώματος θεωρείται χαρακτηριστικό μέγεθος για το ίδιο το σώμα, όχι όμως και για το υλικό από το οποίο αποτελείται. Για να χαρακτηρίσουμε ένα υλικό ως πυκνό ή ως αραιό, χρειαζόμαστε κάποιο μέγεθος διαφορετικό από τη μάζα, το οποίο να μην επηρεάζεται από τις διαστάσεις του αντικειμένου, όπως συμβαίνει με τη μάζα.

Η **πυκνότητα** ρ του σώματος ορίζεται ως το πηλίκο της μάζας του m προς τον όγκο V:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \qquad (7.1)$$

Είναι φανερό ότι η πυκνότητα ρ:

- Εκφράζει αριθμητικά τη μάζα που αντιστοιχεί στη μονάδα όγκου.
- Είναι κριτήριο για το πόσο πυκνό ή αραιό είναι το υλικό του σώματος. Αυτό, διότι συγκρίνουμε μάζες για ίδιο όγκο των υλικών (το 1 m^3 π.χ.).
- Έχει μονάδα μέτρησης στο S.I. το $1\frac{kg}{m^3}$. Συνηθισμένη πρακτική μονάδα είναι το $1\frac{g}{cm^3}$, που ισοδυναμεί με $10^3\ \frac{g}{cm^3}$ *(Δείτε γιατί).*
- Είναι μονόμετρο μέγεθος.

Η πυκνότητα του υλικού επηρεάζεται, λίγο ή πολύ, από τη θερμοκρασία του. Αυτό είναι πιο έντονο στα ρευστά, ενώ στα στερεά η επίδραση της θερμοκρασίας θεωρείται σχεδόν αμελητέα (εκτός αν πλησιάζουμε τη θερμοκρασία υγροποίησής τους). Στα αέρια, επίσης, η πυκνότητα επηρεάζεται και από την πίεση που δέχονται.

Στον πίνακα 7.1 φαίνονται οι πυκνότητες γνωστών υλικών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1: Πυκνότητες γνωστών (και λιγότερο γνωστών) υλικών

Α. ΠΟΛΥ ΥΨΗΛΕΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΕΣ	
Υλικό	ρ kg/m^3
Αστέρας νετρονίων	10^{18}
Αστέρι “Λευκός νάνος”	10^{10}

Β. ΥΛΙΚΑ ΑΡΑΙΟΤΕΡΑ ΑΠΟ ΤΟ ΝΕΡΟ	
Υλικό	ρ kg/m^3
Νερό αποσταγμένο 4°C	$1{,}0 \cdot 10^3$
Πάγος	$0{,}92 \cdot 10^3$
Βενζίνη	$0{,}90 \cdot 10^3$
Οινόπνευμα καθαρό	$0{,}81 \cdot 10^3$
Οξυγόνο (1 atm 20 °C)	1,93
Αέρας (1 atm 20 °C)	1,2
Ήλιο (1 atm 20 °C)	$1{,}79 \cdot 10^{-1}$
Υδρογόνο (1 atm 20 °C)	$8{,}99 \cdot 10^{-2}$

Γ. ΥΛΙΚΑ ΠΥΚΝΟΤΕΡΑ ΑΠΟ ΤΟ ΝΕΡΟ	
Υλικό	ρ kg/m^3
Λευκόχρυσος	$21{,}4 \cdot 10^3$
Χρυσός	$19{,}3 \cdot 10^3$
Υδράργυρος	$13{,}6 \cdot 10^3$
Μόλυβδος	$11{,}3 \cdot 10^3$
Άργυρος	$10{,}5 \cdot 10^3$
Χαλκός	$8{,}9 \cdot 10^3$
Ορείχαλκος	$8{,}6 \cdot 10^3$
Ατσάλι	$7{,}8 \cdot 10^3$
Σίδηρος	$7{,}8 \cdot 10^3$
Αργίλιο	$2{,}7 \cdot 10^3$
Μπετόν	$2{,}0 \cdot 10^3$
Γλυκερίνη	$1{,}26 \cdot 10^3$
Αίμα	$1{,}06 \cdot 10^3$
Θαλασσινό νερό	$1{,}03 \cdot 10^3$

Όπως φαίνεται από τον πίνακα, η περιοχή τιμών για τις πυκνότητες των υλικών είναι πολύ μεγάλη. Για κάποια υλικά πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί, όταν αξιοποιούμε αυτές τις τιμές της πυκνότητας. Στα στερεά πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι δεν έχουν προσμείξεις ή δεν είναι οξειδωμένα (ειδικά τα μέταλλα). Για τα υγρά προέχει ο έλεγχος της καθαρότητας και της θερμοκρασίας τους. Για τα αέρια, τέλος, επιβάλλεται η μέτρηση των συνθηκών στις οποίες τα χρησιμοποιούμε.

Εκτός από την πυκνότητα, χρήσιμο μέγεθος για τα υλικά είναι και το **ειδικό βάρος:**

$$\boxed{\varepsilon = \frac{B}{V}} \qquad (7.2)$$

Β = βάρος υλικού, V= όγκος του.

Το ειδικό βάρος έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το βάρος. Μεταβάλλεται, δηλαδή, με το γεωγραφικό πλάτος και με το ύψος από το έδαφος που βρίσκεται το σώμα (μιλάμε για αξιόλογες μεταβολές υψομέτρου).
- Είναι μέγεθος διανυσματικό.

● Έχει μονάδα μέτρησης, στο S.I., το $1\dfrac{\text{N}}{\text{m}^3}$ και αντίστοιχη πρακτική

το $1\dfrac{\text{p}}{\text{cm}^3}\left(1\dfrac{\text{p}}{\text{cm}^3} = 9{,}81\cdot 10^3\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}^3}, \text{με } g = 9{,}81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$.

● Συνδέεται με την πυκνότητα, αφού: $\varepsilon = \dfrac{B}{V} = \dfrac{mg}{V}$

ή $$\boxed{\varepsilon = \rho \cdot g} \qquad (7.3)$$

Η σχέση (7.3) δείχνει ότι το ειδικό βάρος δεν μπορεί να θεωρηθεί χαρακτηριστικό μέγεθος για το υλικό, αφού εξαρτάται και από την τιμή του g.

Επισημάνσεις: Για το ειδικό βάρος αξίζει να προσέξουμε ότι γίνεται μέγεθος ίσης αξίας με την πυκνότητα, αν είμαστε σε θέση να θεωρήσουμε σταθερό το g (είμαστε στον ίδιο τόπο ή μετατοπιζόμαστε σε μικρό ύψος ή σε γειτονικό τόπο). Δοκιμάστε να αποδείξετε ότι οι τιμές της πυκνότητας ρ του παραπάνω πίνακα (σε kg/m^3) αντιστοιχούν σε ίσες τιμές (σε kp/m^3) για το ειδικό βάρος.

Το αποσταγμένο νερό, π.χ., στους 4 ºC έχει: $\rho = 10^3\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(\text{ή } 1\dfrac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$

και ειδικό βάρος: $\varepsilon = 10^3\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(\text{ή } 1\dfrac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$.

(Θυμηθείτε κάτι: το βάρος σώματος σε kp και η μάζα του σε kg είναι αριθμητικά ίσα...)

Η πυκνότητα και ο έλεγχος καυσίμων: Αξιοποιήστε το ρόλο της πυκνότητας, για να μη σας ξεγελάνε. Μιμηθείτε εκείνον τον ιδιοκτήτη μονοκατοικίας που παράγγειλε 1 tn πετρέλαιο θέρμανσης για το καλοριφέρ. Η δεξαμενή του πετρελαίου είναι κυβική με ακμή 1,2m. Προτού φτάσει το βυτιοφόρο, ο πελάτης βύθισε κατακόρυφα ξύλινο πήχυ στη δεξαμενή. Το βρεγμένο κομμάτι του ξύλου μετρήθηκε ίσο με 16cm στο ύψος. Μετά το τέλος της παροχής και πριν από την πληρωμή, ο πελάτης έκανε την ίδια κίνηση και μέτρησε το νέο ύψος του βρεγμένου ξύλου: 90cm. Δεχτείτε για το πετρέλαιο πυκνότητα ίση με της βενζίνης του πίνακα 7.1 και βρείτε αν τα 1000kg που του ανακοίνωσε ότι έβαλε ο ιδιοκτήτης βυτιοφόρου είναι σωστά. Αν όχι, ποιος ξεγέλασε ποιον, για πόσα kg πετρελαίου διαφορά μιλάμε και για πόσα χρήματα; (Ρωτήστε, για να πληροφορηθείτε, την τιμή ανά tn του πετρελαίου θέρμανσης).

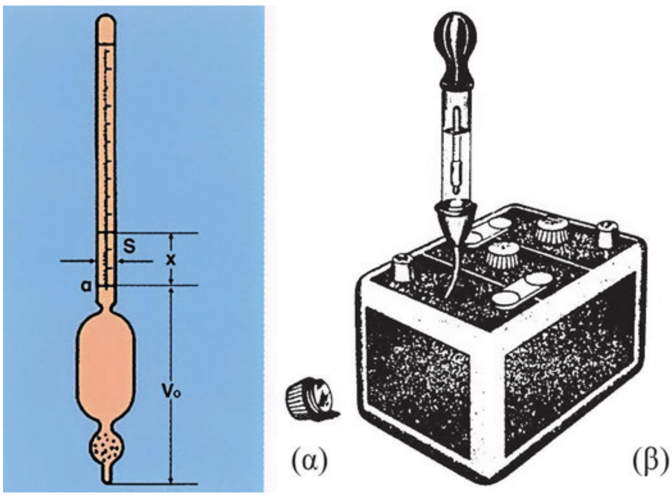
Μέτρηση της πυκνότητας: Η πυκνότητα των υλικών υπολογίζεται με έμμεσο και με άμεσο τρόπο.

Έμμεσα: Η πυκνότητα μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια της σχέσης (7.1), αφού πρώτα μετρηθούν η μάζα και ο όγκος του σώματος. Η μάζα βρίσκεται με ζύγιση και ο όγκος υπολογίζεται πρακτικά ή γεωμετρικά:

Το **στερεό** βυθίζεται σε υγρό μέσα σε ογκομετρικό σωλήνα. Από τη μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού βρίσκεται ο όγκος του στερεού. Αν έχει γεωμετρικό σχήμα (κύβου, κυλίνδρου κτλ.), ο όγκος του στερεού υπολογίζεται με τη βοήθεια γεωμετρικών σχέσεων.

Το **ρευστό** τοποθετείται σε δοχείο γνωστής μάζας και όγκου. Η μάζα του ρευστού είναι ίση με τη διαφορά της μικτής μάζας και της αντίστοιχης του άδειου δοχείου (που βρίσκονται, πάλι, με ζύγιση). Ο όγκος του ρευστού είναι ίσος με τον αντίστοιχο του γεμάτου δοχείου. Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε ογκομετρικό σωλήνα. *(Για τα αέρια, βέβαια, η ζύγιση δεν είναι πάντα εύκολη, αφού η μάζα τους είναι συνήθως μικρή και η ζυγαριά πρέπει να έχει μεγάλη ακρίβεια. Γι' αυτό υπολογίζουμε τη μάζα, αφού πρώτα μετρήσουμε τις συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας στις οποίες βρίσκεται το αέριο και χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωσή τους. Τα αέρια τα θεωρούμε, τότε, ιδανικά).*

Άμεσα: Η μέτρηση της πυκνότητας των υγρών γίνεται με τη βοήθεια οργάνων τα οποία, γενικά, λέγονται **πυκνόμετρα**, εικόνα 7.1(α). Για διευκόλυνση, όσα από αυτά αφορούν υγρά ελαφρύτερα του νερού λέγονται **αραιόμετρα.**



Εικόνα 7.1: Συνηθισμένος τύπος πυκνόμετρου (α) και δοκιμαστής υγρών μπαταρίας αυτοκινήτου (β)

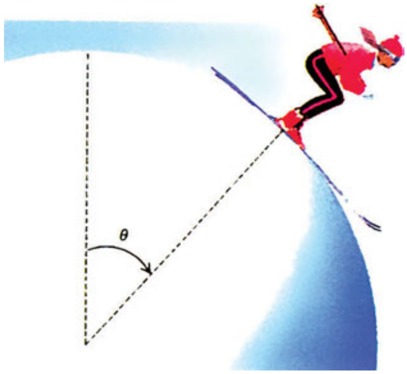
Σκηνή από τρύγο: *Τα σταφύλια από το καφάσι ρίχνονται σε μεγάλο μεταλλικό κουβά. Ο τρυγητής βυθίζει κατακόρυφα ένα γυάλινο όργανο στα υγρά που βγήκαν από τις λιωμένες ρώγες σταφυλιού. Τι προσπαθεί να διαπιστώσει; Έχει σχέση με πυκνόμετρο το όργανο που χρησιμοποιεί; (Άλλα όμοια όργανα είναι το οινοπνευματόμετρο και το γαλακτόμετρο. Υποψιάζεστε τι μετρούν;)*

Δείτε στο εικόνα 7.1. (β) το δοκιμαστή υγρών της μπαταρίας του αυτοκινήτου. (Τελικά όλα αυτά τα όργανα έχουν να κάνουν με την πυκνότητα, η οποία, με τη σειρά της, δείχνει την περιεκτικότητα ενός υγρού σε διάλυμα).

7.2 Η πίεση και τα ρευστά

Σε προηγούμενες ενότητες ασχοληθήκαμε αναλυτικά με τη δύναμη και με το ρόλο της σχετικά με την αλλαγή της κινητικής κατάστασης και σχετικά με τις παραμορφώσεις των σωμάτων. Υπάρχουν, όμως, πολλά φυσικά φαινόμενα στα οποία η δύναμη μοιάζει ανεπαρκής για την περιγραφή και για την εξήγησή τους. Αυτό συμβαίνει, επειδή η ίδια δύναμη προκαλεί διαφορετικά αποτελέσματα, αν ασκείται σε διαφορετικές επιφάνειες. Ας δούμε, π.χ., τους δυο αθλητές της εικ. 7.2.

(α)



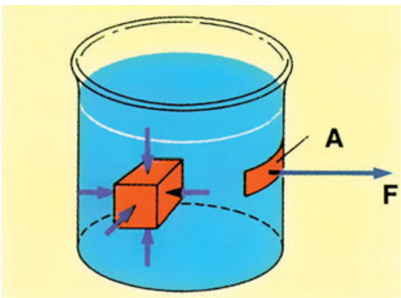
(β)

Εικόνα 7.2: Ο πρώτος αθλητής ασκεί μεγαλύτερη πίεση στο χιόνι από το δεύτερο, αφού στηρίζεται σε μικρότερη επιφάνεια

Ο πρώτος (αθλητής του χόκεϊ σε πάγο) κινείται φορώντας αθλητικά παπούτσια μικρής επιφάνειας. Ο δεύτερος (χιονοδρόμος) κινείται φορώντας τα ειδικά πέδιλα του σκι μεγάλης επιφάνειας βάσης. Ακόμα και αν οι δυο αθλητές έχουν ίδιο βάρος, η επαφή τους προκαλεί διαφορετικά σημάδια στη χιονισμένη επιφάνεια.

Χρειαζόμαστε, λοιπόν, κάποιο μέγεθος συγγενικό με τη δύναμη. Το μέγεθος αυτό είναι η **πίεση** p. Ορίζεται ως το πηλίκο της δύναμης που ασκείται κάθετα σε μια (όσο γίνεται μικρή) επιφάνεια A, προς την επιφάνεια:

$$\boxed{p = \frac{F}{A}} \qquad (7.4)$$



Εικόνα 7.3: Πίεση σε επιφάνεια

Αξίζει να τονίσουμε ότι:

● Η επιφάνεια πρέπει να είναι τόσο μικρή, ώστε (αν η δύναμη είναι διαφορετική στα διάφορα σημεία της επιφάνειας) να μπορούμε να μιλάμε για συγκεκριμένη τιμή δύναμης.

● Αναφερόμαστε σε δύναμη κάθετη στην επιφάνεια, εικ. 7.3., επειδή θεωρούμε ήρεμη την επιφάνεια (πράγμα απαραίτητο στα ρευστά). Μια πλάγια δύναμη, σε σχέση με την επιφάνεια, θα είχε συνιστώσα παράλληλη με αυτήν και η ισορροπία θα ήταν αδύνατη.

● Η πίεση θεωρείται μονόμετρο μέγεθος. (Ο σωστός όρος είναι **τανυστής**).

● Επίσημη μονάδα πίεσης (S.I.) είναι το $1\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$, το οποίο έχει την ονομασία Pascal. $\left(1\text{Pa} = 1\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$. Πρακτική μονάδα είναι το $1\dfrac{\text{kp}}{\text{m}^2}$. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε την **ατμοσφαιρική** πίεση (με την οποία θα ασχοληθούμε παρακάτω). Είναι η πίεση που ασκείται στην επιφάνεια της Γης λόγω του βάρους της γήινης ατμόσφαιρας. Βρέθηκε ότι κάθε 1cm^2 επιφάνειας δέχεται βάρος 1,033kp από τον αέρα που μας περιβάλλει. Ονομάσαμε **φυσική ατμόσφαιρα** ή, απλά, ατμόσφαιρα (1Atm) την: $1\text{Atm} = 1,033\dfrac{\text{kp}}{\text{cm}^3}$.

Για διευκόλυνση στις πράξεις έχουμε εισαγάγει την **τεχνική ατμόσφαιρα** (at) και: $1\text{at} = 1\dfrac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$. Οι μετεωρολόγοι χρησιμοποιούν την μονάδα Bar, που είναι ίση με την τεχνική ατμόσφαιρα: 1bar = 10^5 Pa. Πιο κάτω θα γνωρίσουμε και άλλες πρακτικές μονάδες πίεσης, που βασίζονται στον υδράργυρο. Εδώ αξίζει ακόμα να αναφέρουμε την αγγλοσαξωνική μονάδα psi (pounds per square inch, λίμπρες ανά τετραγωνική ίντσα), μονάδα κυρίαρχη στα ελαστικά των οχημάτων.

Από τα παραπάνω μπορεί κάποιος να βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα, που αφορούν καθημερινές εμπειρίες μας:

* Τα κοπτικά εργαλεία (μαχαίρια, ψαλίδια, χλοοκόπτες κτλ.) είναι πολύ διεισδυτικά. Με μικρή δύναμη προκαλείται μεγάλη πίεση, αφού η επιφάνεια επαφής είναι απειροελάχιστη.
* Ο αθλητής χόκεϊ της εικ. 7.2(α) αφήνει πίσω του αυλάκια στο χιόνι, ενώ ο χιονοδρόμος απλές γραμμές. Αυτό συμβαίνει, επειδή στην περίπτωση του αθλητή χόκεϊ η πίεση είναι πολύ μεγαλύτερη. Το βάρος (ας το δεχθούμε ίδιο για τους δύο αθλητές) ασκείται σε μικρότερη επιφάνεια από τον πρώτο και γι' αυτό οι συνέπειες σ' αυτή την περίπτωση είναι εντονότερες.
* Όταν λέμε στον υπάλληλο του πρατηρίου καυσίμων: "Ελέγξτε τον αέρα στα λάστιχα. Παίρνουν 32 μπροστά και 30 πίσω", τι εννοούμε;

Αυτά τα νούμερα αναφέρονται σε psi, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερπίεση στα μπροστινά λάστιχα είναι $32\dfrac{lb}{in^2}$ *. Λέμε* ***υπερπίεση*** *την παραπάνω από την ατμό-*

σφαιρα, πίεση που έχει ο αέρας στα ελαστικά, αφού το φουσκωμένο λάστιχο πρέπει να έχει μεγαλύτερη πίεση από την ατμοσφαιρική. (Αν λάβετε υπόψη ότι 1 lb = 0,453 kp και 1in = 2,54 cm, βρείτε, με την ευκαιρία, πόσα Pa και πόσες at παραπάνω πίεση έχει ο αέρας στα ελαστικά από την ατμόσφαιρα).

* **Απόσπασμα από το δελτίο καιρού:** “Πάνω από τη χώρα μας θα επικρατήσει βαρομετρικό χαμηλό 990 mbars (1bar~- 1Atm), ενώ στα βόρεια Βαλκάνια προβλέπεται βαρομετρικό υψηλό 1060 mbars. Προβλέπεται πτώση της θερμοκρασίας, αρχικά στη Βόρεια Ελλάδα... ”.

Η κίνηση στα ρευστά έχει, λοιπόν, άλλο κίνητρο από την αντίστοιχη στα στερεά. Τα τελευταία κινούνται αυθόρμητα από σημεία μεγάλης δυναμικής βαρυτικής ενέργειας σε αντίστοιχα μικρής. **Τα ρευστά οδηγούνται από σημεία μεγαλύτερης σε αυτά με μικρότερη πίεση.**
Στον πίνακα 7.2 φαίνονται οι τιμές πίεσης στο περιβάλλον και στον οργανισμό του ανθρώπου.

Πίνακας 7.2 Οι πιέσεις γύρω και μέσα μας

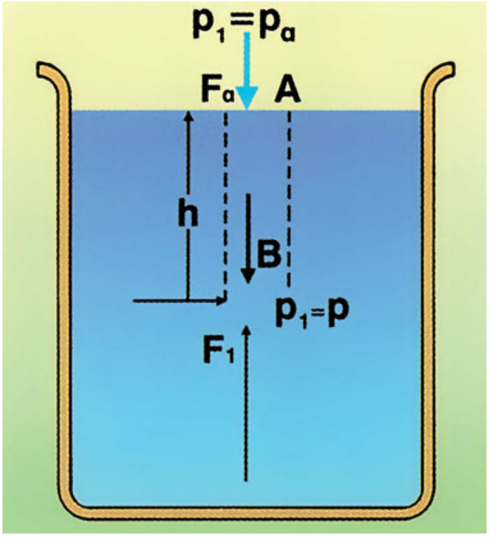
Πεδίο πίεσης	**p (Pa)**
“Μεγάλες” πιέσεις	
Κέντρο Ήλιου	$2 \cdot 10^{16}$
Πυρηνική έκρηξη	$7 \cdot 10^{12}$
Κέντρο Γης	$4 \cdot 10^{11}$
5,5 km βάθος θάλασσας	$6 \cdot 10^{7}$
Νερό πυρηνικού αντιδραστήρα	$1{,}6 \cdot 10^{7}$
“Μικρές” πιέσεις	
Υπερπίεση σε:	**p (Pa)**
Φιάλη O_2	$150 \cdot 10^{5}$
Φιάλη CO_2	$55 \cdot 10^{5}$
Φιάλη διαλύματος C_2H_2	$12 \cdot 10^{5}$
Δίκτυο ύδρευσης	$6 \cdot 10^{5}$
Φιάλη υγραερίου	$5 \cdot 10^{5}$
Ελαστικό αυτοκινήτου	$2 \cdot 10^{5}$
Πίεση σε επιφάνεια θάλασσας	$1 \cdot 10^{5}$
Πίεση σε κέντρο τυφώνα	$2 \cdot 10^{4}$
Υπερπίεση οργανισμού	
Καρδιάς (συστολή)	$1{,}6 \cdot 10^{4}$
Καρδιάς (διαστολή)	$1{,}1 \cdot 10^{4}$
Αρτηρίας	12-14cmHg

7.3 Η υδροστατική πίεση και οι εφαρμογές της

Συνηθίσαμε να την ονομάζουμε υδροστατική πίεση αντί για υγροστατική, για να τιμήσουμε, ίσως, το πιο οικείο σ' εμάς υγρό, δηλαδή το νερό (ύδωρ). Όπως κι αν την ονομάσουμε, εννοούμε την πίεση που ασκούν τα υγρά σε κάθε επιφάνεια με την οποία έρχονται σε επαφή και η οποία οφείλεται στο βάρος τους. Το υγρό βρίσκεται σε ηρεμία και γι' αυτό δε μιλάμε προς το παρόν για άλλα είδη πιέσεων.

Όταν τα υγρά βρίσκονται σε ηρεμία, η ελεύθερη επιφάνειά τους πρέπει να είναι κάθετη στη συνολική δύναμη που δέχονται. Για υγρά μικρής έκτασης και ποσότητας η συνολική δύναμη είναι το βάρος των μορίων τους. Η ελεύθερη επιφάνεια υγρών σε δοχεία, σε δεξαμενές και σε μικρές λίμνες είναι οριζόντια. Μικρή απόκλιση έχουμε, όταν μιλάμε για θάλασσες και για ωκεανούς, αφού πρέπει να συνυπολογίσουμε και την επίδραση από την περιστροφή της Γης. Πάλι, όμως, η επιφάνεια θεωρείται σχεδόν οριζόντια, αφού η επίδραση αυτή είναι αμελητέα σε σχέση με το βάρος.

Στην εικ.7.4 φαίνεται δοχείο με υγρό σε ηρεμία. Ας φανταστούμε κάποιο τμήμα του υγρού με βάση εμβαδού A και με ύψος h. Το τμήμα περιλαμβάνεται ανάμεσα στις εστιγμένες ευθείες (μιλάμε για κάτοψη φυσικά) και δέχεται δυνάμεις από όλες τις πλευρές του. Το τμήμα υγρού ισορροπεί, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται σε κάθε διεύθυνση είναι ίση με μηδέν.



Εικόνα 7.4: Υπολογισμός της πίεσης σε σημείο υγρού

Ας ασχοληθούμε με την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα y. Σε αυτό τον άξονα έχουμε:

* Τη δύναμη $\vec{F}_\alpha$ από την ατμόσφαιρα, με φορά προς τα κάτω και ίση με: $F_\alpha = p_\alpha A$.

* Τη δύναμη $\vec{F}_1$ από τα στρώματα του υγρού που βρίσκονται κάτω από το τμήμα. Η δύναμη αυτή είναι η αντίδραση της αντίστοιχης την οποία δέχονται τα στρώματα αυτά από οτιδήποτε βρίσκεται από πάνω τους (τμήμα υγρού και ατμόσφαιρα). Είναι $F_1 = p_1$ A ή $F_1 = p$ A (αφού θέσαμε: $p_1 = p$).

* Το βάρος $\vec{B}$ του τμήματος, που είναι ίσο με B = ε V (V = όγκος του τμήματος). Το τμήμα έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Άρα: V = A h. Επομένως, B = ε A h.

Η ισορροπία στον άξονα y οδηγεί στη σχέση:

$$F_\alpha + B - F_1 = 0$$

ή

$$p_\alpha A + \varepsilon A h - pA = 0.$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (7.3) καταλήγουμε στην:

$$\boxed{p = p_\alpha + \rho g h} \qquad (7.5)$$

Η σχέση (7.5) εκφράζει το **θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής.** Η σημασία του είναι μεγάλη για τα υγρά, αφού δείχνει ότι στην κατάσταση ηρεμίας τους:

● Η πίεση σε κάθε σημείο καθαρού ομογενούς υγρού εξαρτάται μόνο από το βάθος h του σημείου από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (η Pa θεωρείται σταθερή και γνωστή).

● Η ποσότητα υγρού, που περιέχεται στο δοχείο, και το σχήμα του δοχείου δεν παίζουν ρόλο στην τιμή της p.

● Η διαφορά πίεσης p – p΄ ανάμεσα σε δύο σημεία που βρίσκονται σε βάθη h και h΄ αντίστοιχα βρίσκεται ίση με:

$$\boxed{p - p' = pg(h - h')} \qquad (7.6)$$

Η σχέση (7.6) μπορεί να γραφεί πιο απλά, αν αξιοποιήσουμε το σύμβολο “Δ”, το οποίο, όπως έχουμε αναφέρει, σημαίνει μεταβολή κάποιου μεγέθους:

$$\boxed{\Delta p = pg\Delta h} \qquad (7.7)$$

Η σχέση δείχνει ότι **η μεταβολή πίεσης ανάμεσα σε δυο σημεία υγρού εξαρτάται μόνο από τη διαφορά ύψους τους.**

Η υδροστατική πίεση και η “νόσος των δυτών”. Αν γράψουμε τη σχέση (7.7) έτσι: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho g \frac{\Delta h}{\Delta t}$ και φανταστούμε κινητό που κατεβαίνει κατακόρυφα σε υγρό με ταχύτητα: $\upsilon = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\boxed{\frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho g \upsilon} \qquad (7.8)$$

Από κάπου εδώ ξεκινά το πρόβλημα που αποκαλούμε “νόσο των δυτών”. Όταν ο δύτης, ερασιτέχνης ή επαγγελματίας, καταδύεται με μεγάλη ταχύτητα υ, υποβάλλεται σε μεγάλους ρυθμούς μεταβολής της πίεσης $\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)$. Τα αφτιά πρώτα και ο εγκέφαλος μετά ταλαιπωρούνται, με αποτέλεσμα να προκαλούνται διαταραχές που αρχίζουν από εμφάνιση βαρηκοΐας και φτάνουν σε εγκεφαλικά επεισόδια, σε παράλυση των άκρων και στο θάνατο ακόμα.

Ας εξασκηθούμε

Ψαροντουφεκάς εντόπισε χταπόδι σε βάθος 2m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας. Σε ποια πίεση βρίσκεται, όταν προσπαθεί να το ξεκολλήσει από το βράχο;

Λύση:

Από τη σχέση: $p=p_\alpha+\rho gh$ (με δεδομένα $p_\alpha = 1at = 10^5\frac{N}{m^2}$,$\rho = 10^3\frac{kg}{m^3}$ και $g \cong 10\frac{m}{s^2}$)

βρίσκουμε: $p = 10^5\frac{N}{m^2} + 10^3\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}\cdot 2m = 10^5\frac{N}{m^2} + 2\cdot 10^4\frac{kg}{ms^2}$.

Το $1\frac{kg}{ms^2}$ μπορεί να γράφει: $1\frac{kgm}{m^2s^2} = 1\frac{N}{m^2}$

Επιστρέφουμε στον υπολογισμό της p:

$$p = 10^5\frac{N}{m^2} + 2\cdot 10^4\frac{N}{m^2} = 1,2\cdot 10^5\frac{N}{m^2} 2\cdot 10^5 p_\alpha = 1,2at.$$

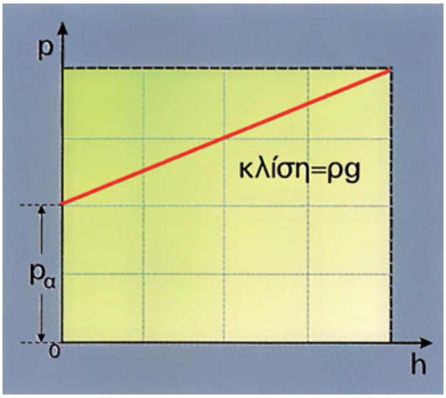
Αντιστρέψτε τώρα το ερώτημα: Σε ποιο βάθος του ωκεανού η πίεση είναι 3at;

Ας σκεφτούμε: Μήπως δεν πρέπει να ρωτάμε: “σε πόσο μεγάλη πίεση αντέχει ο ανθρώπινος οργανισμός;” αλλά: “με ποιους ρυθμούς έφτασε στη μεγάλη αυτή πίεση”; Ισχύει το ίδιο για την ταχύτητα, για τη θερμοκρασία και, γενικά, για όλα τα μεγέθη που καταπονούν τον οργανισμό;

Απόσπασμα από αστυνομικό δελτίο: “Το αυτοκίνητο ιδιωτικής χρήσης τύπου ..... με δύο επιβάτες, για λόγους που δεν εξακριβώθηκαν, ξέφυγε από την πορεία του και έπεσε στη θάλασσα. Παρά τις προσπάθειές τους, δεν κατάφεραν να ανοίξουν τις πόρτες”.

Σχολιάστε...

Ξαναγυρνάμε στη σχέση (7.5). Η γραφική απεικόνισή της (με το h στον άξονα x και το p στον άξονα y) φαίνεται στην εικ.7.5.



Εικόνα 7.5: Μεταβολή της πίεσης με το βάθος

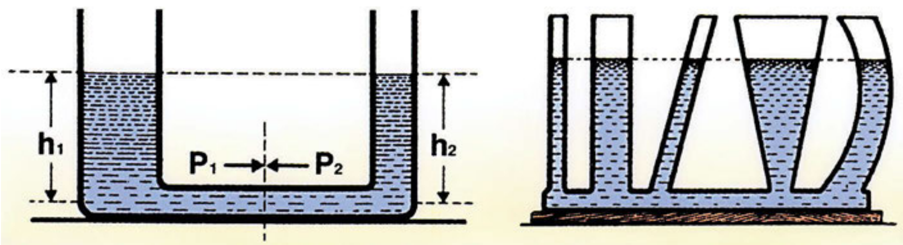
Βλέπουμε ότι, όταν h = 0 (επιφάνεια του υγρού), έχουμε: $p = p_α$. Εξάλλου η κλίση της ευθείας ισούται με την παράσταση: ρ g (*θυμηθείτε όλα όσα είπαμε για τη σχέση $υ = υ_0 + at$ και για την παράσταση της υ με το t*). Όσο μεγαλύτερη πυκνότητα ρ έχει το υγρό, τόσο μεγαλύτερη είναι η κλίση, δηλ. πιο απότομη η ευθεία. Αυτό μπορεί να μας βοηθήσει να σχεδιάσουμε στο ίδιο διάγραμμα τρεις ευθείες πίεσης - βάθους: για το νερό, για το οινόπνευμα και για τη γλυκερίνη (με τη βοήθεια του πίνακα 7.1).

Ας ασχοληθούμε: Ποτήρι είναι γεμάτο μέχρι τη μέση με νερό και το υπόλοιπο με λάδι (εικόνα που θυμίζει το καντήλι στις εκκλησίες). Προσπαθήστε να σχεδιάσετε την παράσταση πίεσης - βάθους για το σύστημα των υγρών. (*Θυμηθείτε: νερό και λάδι δεν αναμειγνύονται*).

7.4 Από το θεμελιώδη νόμο στις αρχές της υδροστατικής

Α. Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων

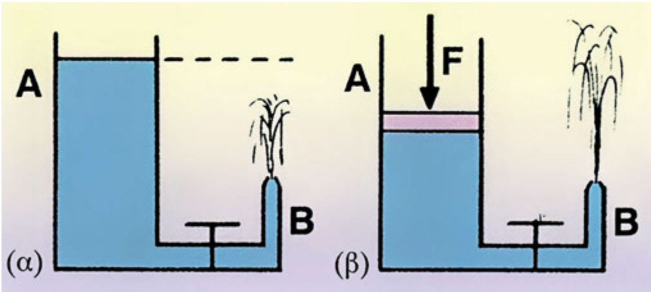
Από τη σχέση (7.6) γίνεται φανερό ότι σε όλα τα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο υγρό και στο ίδιο βάθος h η πίεση p είναι ίδια, εικόνα 7.6(α). Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι **η ελεύθερη επιφάνεια του ίδιου υγρού σε σωλήνες διαφορετικού σχήματος και εμβαδού βάσης βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο,** εικ. 7.6.



Εικόνα 7.6: Συγκοινωνούντα δοχεία με ένα υγρό

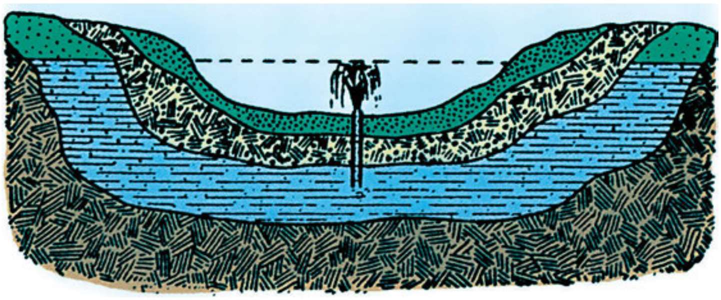
Πραγματικά: $p_1 = p_2$
και $p_\alpha + \rho g h_1 = p_\alpha + \rho g h_2$,
άρα $h_1 = h_2$.

Το παραπάνω συμπέρασμα αποτελεί την **αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων ενός υγρού.** Είναι η πιο απλή εκδήλωση του φαινομένου και βρίσκει εφαρμογή σε πολλές τεχνικές και τεχνολογικές κατασκευές.



Εικόνα 7.7: Δημιουργία πίδακα αυθόρμητα (α) ή με εξαναγκασμό (β)

*** Ο πίδακας** (εικ. 7.7): Το νερό αυθόρμητα (α) ή με εφαρμογή δύναμης F (β) σχηματίζει πίδακα στην προσπάθειά του να φτάσει στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας στη δεξαμενή Δ. Είναι φανερό ότι ο πίδακας στην περίπτωση (β) είναι πιο "πλούσιος" από τον αντίστοιχο της περίπτωσης (α).



Εικόνα 7.8: Αρτεσιανό πηγάδι

*** Τα αρτεσιανά πηγάδια**: Σε κάποιο βάθος κάτω από το έδαφος μπορεί να υπάρχει στρώμα υδροφόρο ανάμεσα σε αδιάβροχα στρώματα πάνω και κάτω από αυτό. Το νερό μπορεί να σχηματίσει πίδακα, αν η ελεύθερη επιφάνεια στο στρώμα είναι ψηλότερα από το σημείο γεώτρησης. Αν όχι, το νερό ανεβαίνει στο έδαφος με αντλία ή με κουβά, που ανεβοκατεβαίνει με τη βοήθεια βαρούλκου (αυτό που λέμε μαγγανοπήγαδο).

> Το παράπονο του αγρότη: "Το καλοκαίρι του '97 έκανα γεώτρηση στο χωράφι μου με κόστος 20 χιλιάδες το μέτρο. Το νερό βρέθηκε στα 20 μέτρα. Και φέτος το νερό βγαίνει γλυφό. Είναι βλέπεις κοντά η θάλασσα. Καλά καλά δεν πρόλαβα να αποσβέσω το κόστος της γεώτρησης". Ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την ατυχία του αγρότη...

*** Το δίκτυο ύδρευσης** (εικ. 7.9): Οι δεξαμενές Δ, που τροφοδοτούν τον οικισμό, το χωριό ή την πόλη, βρίσκονται σε πυλώνα με κάποιο ύψος βολικό (π.χ. 60m). Για τις μονοκατοικίες η μεταφορά του νερού γίνεται χωρίς μηχανική υποστήριξη. Για τις πολυκατοικίες απαιτείται η χρήση υδραντλίας Α. Το σκηνικό συμπληρώνεται με τη λίμνη - αποταμιευτήρα Β, με το διυλιστήριο καθαρισμού νερού Γ και με τις σωληνώσεις.

Εικόνα 7.9: Δίκτυο ύδρευσης

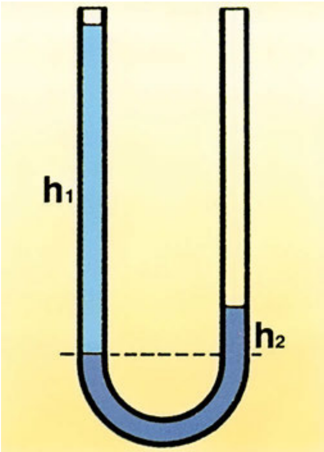
Επιστροφή στα συγκοινωνούντα δοχεία:

Εκτός από τα συγκοινωνούντα δοχεία του ενός υγρού, υπάρχουν και τα αντίστοιχα δύο (ή και περισσότερων) υγρών. Στην εικόνα 7.10 φαίνεται σωλήνας σχήματος U (υοειδής) με δυο υγρά, που έχουν πυκνότητες ρ_1 και ρ_2. Τα υγρά δεν αναμειγνύονται, και στη διαχωριστική επιφάνειά τους (εστιγμένη γραμμή) οι πιέσεις είναι ίσες στα δύο σκέλη: $p_1=p_2$

ή $$p_\alpha + \rho_1 g h_1 = p_\alpha + \rho_2 g h_2.$$

Άρα: $$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}} \qquad (7.9)$$

Η σχέση (7.9) εκφράζει τη **γενική αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων με δύο υγρά** και διατυπώνεται ως εξής:



Εικόνα 7.10: Συγκοινωνούντα δοχεία με δύο υγρά

"Τα ύψη δυο υγρών (που δεν αναμειγνύονται), πάνω από τη διαχωριστική επιφάνειά τους σε συγκοινωνούντα δοχεία, είναι αντίστροφα με τις πυκνότητές τους".

Είναι φανερό ότι για όλα τα παραπάνω πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

* Οι εξωτερικές πιέσεις στο χώρο των συγκοινωνούντων δοχείων να είναι ίσες για όλες τις ελεύθερες επιφάνειες.

* Το υγρό (ή τα υγρά) να βρίσκονται σε ισορροπία και (στην περίπτωση των δύο υγρών) να μην αναμειγνύονται. Η ισορροπία υγρών που δεν αναμειγνύονται, γενικά, οδηγεί σε δημιουργία στρωμάτων, από τα οποία το καθένα αποτελείται από ένα υγρό και η πυκνότητά τους αυξάνεται από πάνω προς τα κάτω. (Θυμηθείτε το νερό και το λάδι στο ποτήρι που αναφέραμε πιο πάνω).

Οικονομία και συγκοινωνούντα δοχεία: Οι οικονομικοί αναλυτές σχολιάζουν: "Η αύξηση της τιμής των καυσίμων θα προκαλέσει αλυσιδωτές ανατιμήσεις σε βασικά είδη. Το σύστημα λειτουργεί όπως τα συγκοινωνούντα δοχεία".

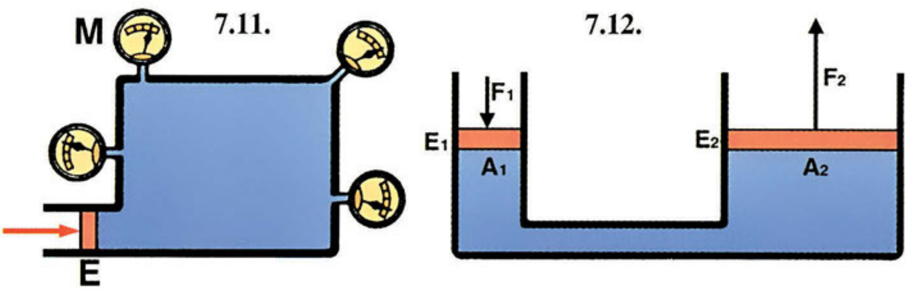
Σχολιάστε τις εκτιμήσεις του ειδικού, ο οποίος παρομοιάζει την τιμή ενός είδους με το ύψος στήλης υγρού.

Β. Η αρχή του Pascal

Αν στη σχέση (7.4) τη θέση της ατμοσφαιρικής πίεσης $p_α$ πάρει κάποια άλλη πίεση (ή αν στην $p_α$ προστεθεί κάποια άλλη πίεση), η μορφή της σχέσης παραμένει ίδια. Αυτό σημαίνει ότι: **"οποιαδήποτε εξωτερική πίεση ασκηθεί σε υγρό που ισορροπεί μεταβιβάζεται αμετάβλητη σε όλα τα σημεία του".**

Η παραπάνω διατύπωση αποτελεί την **αρχή του Pascal** και ισχύει ανεξάρτητα από τη διεύθυνση μετάδοσης.

Η αρχή του Pascal επιβεβαιώνεται πειραματικά με τη διάταξη της εικ.7.11. Τα **μανόμετρα** είναι όργανα μέτρησης της πίεσης (θα αναφερθούμε σ' αυτά πιο κάτω), και με τη βοήθειά τους διαπιστώνουμε ότι οι πιέσεις σε όλα τα σημεία αυξάνονται κατά την ίδια ποσότητα κάθε φορά που αυξάνεται η πίεση στο έμβολο.



Εικόνες 7.11, 7.12: Πειραματική και θεωρητική επιβεβαίωση της αρχής Pascal

Η θεωρητική υποστήριξη: Με τη βοήθεια της εικ. 7.12 μπορούμε να επιβεβαιώσουμε θεωρητικά την αρχή του Pascal. Στο έμβολο E_1 εμβαδού A_1 ασκούμε δύναμη F_1. Το έμβολο μετατοπίζεται κατά ℓ_1 προς τα κάτω αναγκάζοντας το νερό να υποχωρήσει προς τα κάτω στο αριστερό σκέλος και να ανυψωθεί κατά ℓ_2 στο δεξιό.

Στο έμβολο E_2 εμβαδού A_2 ασκείται από το νερό δύναμη F_2 και μετατοπίζεται κατά ℓ_2 επίσης. Δύο **φυσικά μεγέθη διατηρούνται** στη διαδικασία αυτή:

* Ο **όγκος** V του μετατοπιζόμενου υγρού αφού, όπως είπαμε, τα υγρά είναι ασυμπίεστα. Άρα: $V_1=V_2$

ή
$$\boxed{A_1\,\ell_1 = A_2\,\ell_2} \tag{7.10}$$

* Η **ενέργεια** του συστήματος. Θεωρώντας αμελητέες τις τριβές, το έργο των δυνάμεων F_1 και F_2 είναι ίδιο:

$$W_1=W_2$$
ή
$$F_1\,\ell_1=F_2\,\ell_2$$
ή
$$\boxed{p_1A_1\,\ell_1=p_2A_2\ell_2} \tag{7.11}$$

Από τις σχέσεις (10) και (11) φαίνεται ότι:

$$\boxed{p_1 = p_2} \tag{7.12}$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την αρχή του Pascal.

Μετά την αρχή του Pascal...

Η ισότητα (7.12) μπορεί να γραφεί και έτσι:

$$\boxed{\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}} \tag{7.13}$$

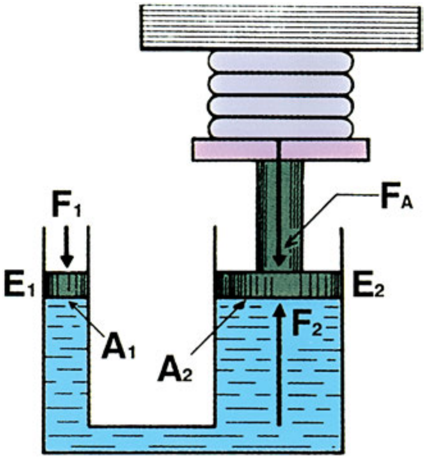
ή
$$\boxed{F_1=F_2\frac{A_2}{A_1}} \tag{7.14}$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι εμφανίζεται ένα μηχανικό κέρδος $\frac{F_2}{F_1}$, που εξαρτάται από τη σχέση των εμβαδών των δύο εμβόλων (αρκεί να έχουμε $A_2>A_1$). Το συμπέρασμα θυμίζει το αντίστοιχο κέρδος στις μηχανές και δείχνει ότι μπορούμε να έχουμε στην τεχνολογία τους λεγόμενους **πολλαπλασιαστές**, τις συσκευές, δηλαδή, που αυξάνουν (πολλαπλασιάζουν) κάποιο φυσικό μέγεθος. Μερικοί από αυτούς είναι:

- τα οπτικά συστήματα που αυξάνουν τις διαστάσεις των αντικειμένων.
- ο σιδερένιος πυρήνας που μεγαλώνει την ένταση μαγνητικού πεδίου.
- ο πολλαπλασιαστής αυτοκινήτου, που αυξάνει την τάση της μπαταρίας.

Βρισκόμαστε, λοιπόν, μπροστά σε εκδήλωση γενικότερου φαινομένου. Ας δούμε τις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές της αρχής Pascal.

Blaise PASCAL *(1623-1662): Γάλλος φιλόσοφος και μαθηματικός με μεγάλη προσφορά στα Μαθηματικά και στη Φυσική (υδροστατική). Μελέτησε συστηματικά τα θέματα της ατμοσφαιρικής πίεσης, αλλά έγινε διάσημος από τις εργασίες του σχετικά με τη* ***μετάδοση της πίεσης*** *στα διάφορα σημεία των ρευστών. Αυτή η τελευταία προσφορά του βρίσκει πολλές τεχνικές και τεχνολογικές εφαρμογές.*



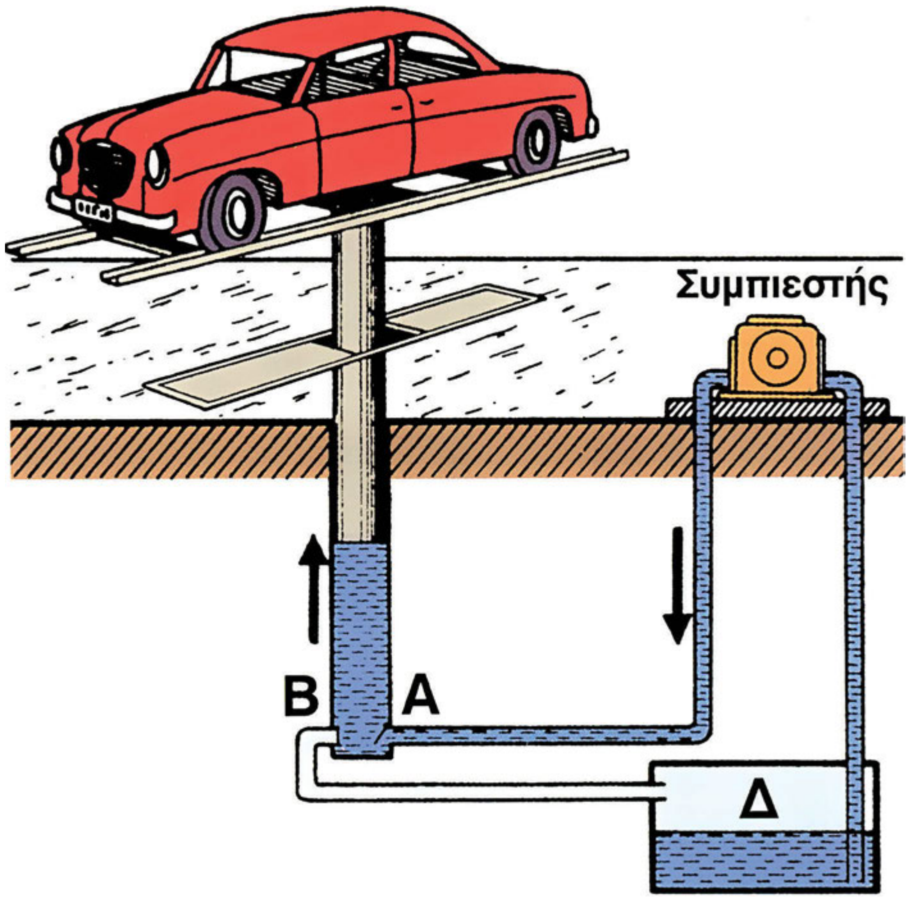
Εικόνα 7.13 Υδραυλικό πιεστήριο

Υδραυλικό πιεστήριο (εικ. 7.13): Η σχέση των εμβαδών A_1, A_2 για τα δύο έμβολα E_1 και E_2 είναι: $\frac{A_2}{A_1} = \lambda$ (λ = θετικός αριθμός πολύ μεγαλύτερος του 1). Από τη σχέση (7.14) διαπιστώνουμε ότι: $F_2>F_1$, γεγονός που φανερώνει μεγάλο μηχανικό κέρδος. Το υδραυλικό πιεστήριο μπορεί να φτάσει και σε τιμές γύρω και πάνω από το 1000 για το μηχανικό κέρδος. (Θυμηθείτε ότι ο "ζημιωμένος" της υπόθεσης είναι η μετατόπιση των εμβόλων. Αυτό συμβαίνει, επειδή η ισότητα των έργων W_1, W_2 αναγκάζει το χειριστή να μετατοπίζει το έμβολο E_1, πολύ περισσότερο από όσο θα μετατοπιστεί το E_2).

* Το υδραυλικό πιεστήριο αξιοποιείται σε γεωργικές και σε βιομηχανικές εφαρμογές. Η συμπίεση του βαμβακιού και η εξαγωγή του λαδιού από την ελιά ανήκουν στην πρώτη κατηγορία. (*Για να ξέρετε: στα ελαιοτριβεία σας προσφέρουν 1kg λαδιού για κάθε 4 ή 5kg ελιάς που τους παραδίνετε, ανάλογα*

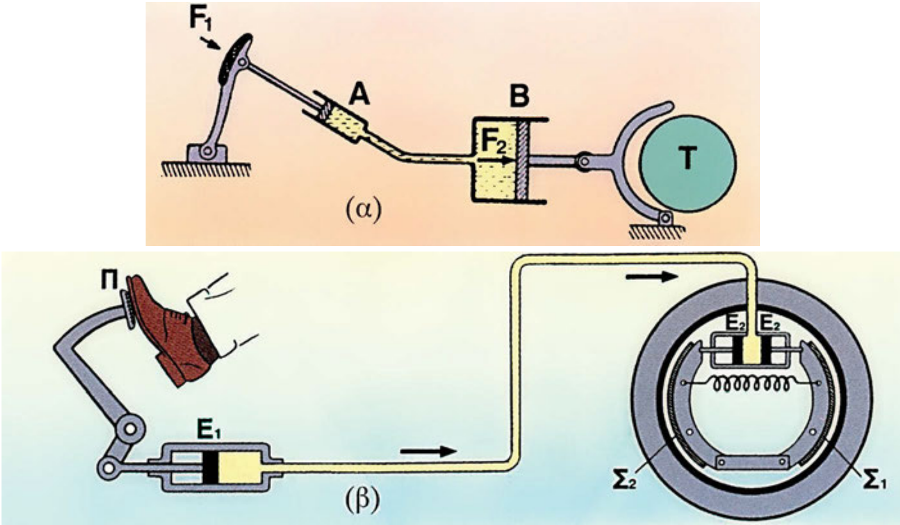
με το είδος και με την ποιότητα της ελιάς). Στα εργοστάσια βαριάς βιομηχανίας αξιοποιείται, συχνά, το υδραυλικό πιεστήριο.

Το υδραυλικό πιεστήριο χρησιμοποιείται και στον **υδραυλικό ανυψωτήρα,** εικ. 7.14. Εδώ η πίεση στο υγρό (λάδι) ασκείται με τη βοήθεια πεπιεσμένου αέρα. Εντοπίστε στο σχήμα τις επιφάνειες στις οποίες ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2, που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Αν διαθέτει η οικογένεια σας αυτοκίνητο, φροντίστε να παραβρεθείτε σε κάποιο service του, για να διαπιστώσετε πώς ανυψώνεται το όχημα για τον έλεγχο της εξωτερικής πλευράς του δαπέδου, της εξάτμισης, του δοχείου καταλύτη (αν έχει) και για το άδειασμα των φθαρμένων λαδιών.



Εικόνα 7.14: Υδραυλικός ανυψωτήρας

Τα υδραυλικά φρένα: Στην εικ. 7.15 (α) φαίνεται η αρχή λειτουργίας των υδραυλικών φρένων αυτοκινήτου με την τυπική διάταξη: μικρή δύναμη F_1 στο έμβολο μικρού εμβαδού Α, μεγάλη δύναμη F_2 στο αντίστοιχο μεγάλου εμβαδού Β. Με το έμβολο Β συνεργάζεται η τροχοπέδη Τ.



Εικόνα 7.15: Η αρχή λειτουργίας (α) και η διάταξη στα υδραυλικά φρένα (β)

Στην εικ. 7.15(β) εμφανίζεται σε κάτοψη μια "ρεαλιστική" εικόνα του συστήματος. Σ' αυτή την περίπτωση είναι δύσκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι το εμβαδόν A_2 των εμβόλων E_2 (σε διεύθυνση που είναι κάθετη στη δύναμη) είναι αρκετά μεγαλύτερο από αυτό του εμβόλου E_1...

Προτού κλείσουμε το τεράστιο θέμα που συνδέεται με την αρχή του Pascal, ας δοκιμάσουμε να κάνουμε κάποιους υπολογισμούς συσχέτισης.

Σε υδραυλικό πιεστήριο ο λόγος των διαμέτρων για τα έμβολα είναι 1:4. Να συγκριθούν:

- οι πιέσεις p_1, p_2
- οι δυνάμεις F_1, F_2
- οι μετατοπίσεις ℓ_1, ℓ_2 και
- τα έργα W_1, W_2 για τα έμβολα E_1, E_2.

Πόσο είναι το μηχανικό κέρδος και τι σημαίνει;

7.5 Το υγρό που ηρεμεί ασκεί δυνάμεις...

Ι) Δυνάμεις στα τοιχώματα του δοχείου

Το υγρό που βρίσκεται σε ηρεμία ασκεί δυνάμεις σε όλα τα τοιχώματα του δοχείου μέσα στο οποίο βρίσκεται. Επειδή σε αυτή την παράγραφο ασχολούμαστε μόνο με τις δυνάμεις αυτές, η ατμοσφαιρική πίεση γίνεται αθέατος παρατηρητής. Αυτό, φυσικά, δε σημαίνει ότι στον υπολογισμό της συνολικής πίεσης θα παραλείπεται η πίεση της ατμόσφαιρας.

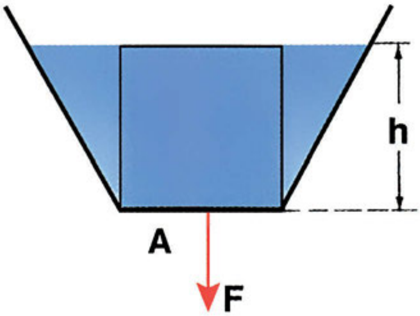
α) Δύναμη στον οριζόντιο πυθμένα δοχείου από υγρό που ηρεμεί

Στην εικ. 7.16 φαίνεται δοχείο με οριζόντιο πυθμένα, το οποίο περιέχει υγρό με πυκνότητα ρ και ύψος h. Η υδροστατική πίεση $p_υ$ στον πυθμένα είναι προφανώς παντού ίδια και ίση με: $p_υ = ρgh$ (ξαναδείτε τη σχέση 7.4). Η δύναμη F που ασκεί το υγρό κατακόρυφα στον πυθμένα είναι:

$$\boxed{F = pA = ρgAh} \tag{7.15}$$

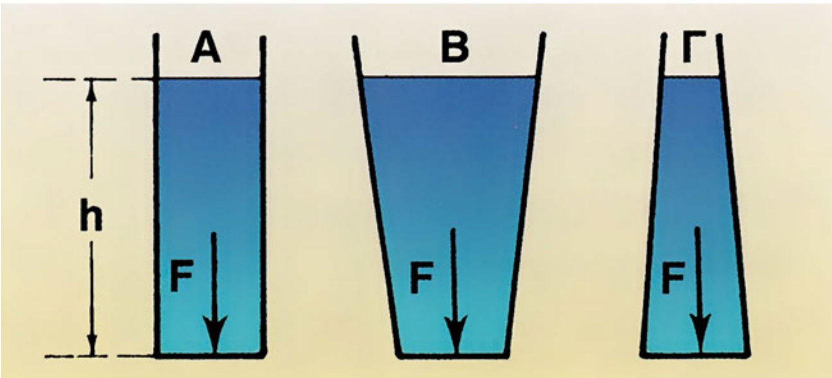
Όπως φαίνεται από τη σχέση (7.15), η δύναμη F εξαρτάται:

- από τη φύση του υγρού, που αντιπροσωπεύεται από την πυκνότητά του ρ
- από το εμβαδόν A της επιφάνειας του πυθμένα και
- από την απόσταση h πυθμένα - ελεύθερης επιφάνειας υγρού.



Εικόνα 7.16: Δύναμη στον οριζόντιο πυθμένα δοχείου

Όπως φαίνεται από το σχήμα 7.16 και από τη σχέση (7.15), η δύναμη F ισούται με το βάρος του υγρού που αντιστοιχεί στο γραμμοσκιασμένο τμήμα (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση εμβαδού A και ύψος h). Άρα, το σχήμα του δοχείου και το συνολικό βάρος του υγρού σε αυτό δεν επηρεάζουν την τιμή της δύναμης F.



Εικόνα 7.17: Το "υδροστατικό παράδοξο" που δεν είναι παράδοξο...

Οι παραπάνω διαπιστώσεις δεν είχαν γίνει από τους πειραματιστές προ της εποχής του Pascal, οι οποίοι ονόμασαν **υδροστατικό παράδοξο** το φαινόμενο της εικ. 7.17. Βλέπουμε τρία δοχεία με διαφορετικό σχήμα και με άνισες ποσότητες του ίδιου υγρού. Το ύψος του υγρού, όμως, και το εμβαδόν A της επιφάνειας του πυθμένα είναι τα ίδια για τις τρεις περιπτώσεις. Γιατί να είναι παράδοξο, λοιπόν, το ότι η δύναμη στον πυθμένα είναι ίδια;

(Το "παράδοξο", για να είμαστε ακριβείς, προκύπτει αβίαστα για το δοχείο Γ, όπου η δύναμη F είναι μεγαλύτερη από το βάρος του υγρού στο δοχείο).

Καταλήγουμε, λοιπόν: "Το υγρό που ηρεμεί ασκεί στον πυθμένα του δοχείου που το περιέχει κατακόρυφη δύναμη ίση με το βάρος μιας ορθογώνιας στήλης του υγρού με βάση τον πυθμένα και το ύψος την απόσταση πυθμένα - ελεύθερης επιφάνειας". Το βάρος αυτό μπορεί να είναι ίσο με το πραγματικό βάρος του υγρού (δοχείο Α), μικρότερο (δοχείο Β) ή μεγαλύτερο από αυτό (δοχείο Γ).

β) Δύναμη σε πλευρικό τοίχωμα δοχείου από το υγρό που ηρεμεί μέσα σε αυτό

Στα πλευρικά τοιχώματα δοχείου που περιέχει υγρό σε ηρεμία τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά από όσα είπαμε για τον πυθμένα. Αυτό συμβαίνει, επειδή η υδροστατική πίεση ($p = \rho g h$) είναι διαφορετική στα σημεία του τοιχώματος με διαφορετικό βάθος h. Η κατανομή των πιέσεων που ασκεί το υγρό στο τοίχωμα δείχνει μια αύξηση από την τιμή $P_1 = 0$ (στα σημεία που αντιστοιχούν στην ελεύθερη επιφάνεια) μέχρι τη μέγιστη τιμή $P_2 = \rho g h$ (στα σημεία του τοιχώματος που βρίσκονται στο κάτω άκρο του). Μπορούμε, έτσι, να μιλήσουμε για **μέση πίεση στο πλευρικό τοίχωμα** ίση με:

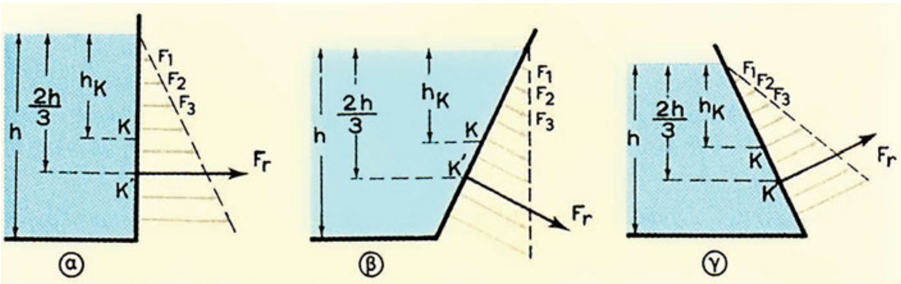
$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} = \rho g \frac{h}{2} = \rho g h_k.$$

Με $h_k = \dfrac{h}{2}$ συμβολίσαμε τη μέση απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια ή την απόσταση του κέντρου βάρους Κ του ομογενούς τοιχώματος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Η μέση πίεση μας βοηθά να εκφράσουμε απλά τη μέση δύναμη για το πλευρικό τοίχωμα,

αφού: $$\boxed{\overline{F} = \overline{p}A = \rho g A h_k} \qquad (7.16)$$

A = εμβαδόν επιφάνειας του πλευρικού τοιχώματος που έρχεται σε επαφή με το υγρό.



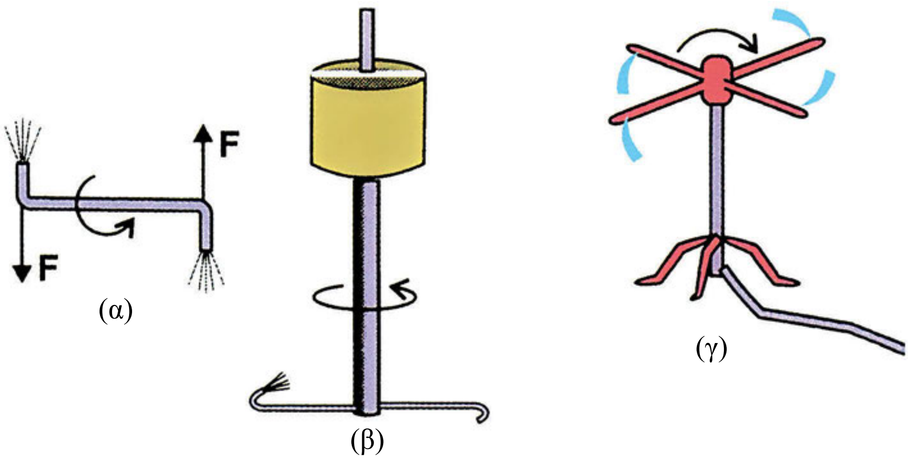
Εικόνα 7. 18: Κατανομή δυνάμεων σε πλευρικό τοίχωμα

Η κατανομή των δυνάμεων που έχουν μέση τιμή $\overline{F}$ φαίνεται στην εικ. 7.18 και αφορά μια κατακόρυφη (α) και δυο πλάγιες πλευρικές επιφάνειες (β και γ). Όπως βλέπουμε, οι δυνάμεις είναι παντού κάθετες στο τοίχωμα και αυξάνονται ομαλά, όσο κατεβαίνουμε από την ελεύθερη επιφάνεια προς τον πυθμένα.

Υπάρχει κάποιο σημείο Κ΄, όπου θεωρούμε ότι ασκείται η μέση δύναμη της σχέσης (7.16). Το σημείο λέγεται **κέντρο των πιέσεων** και ισοδυναμεί με το "κέντρο βάρους" όλων των δυνάμεων του πλευρικού συστήματος (πλευρικό τοίχωμα - υγρό). Αποδεικνύεται ότι το Κ΄ βρίσκεται σε βάθος $h' = \frac{2h}{3}$ από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Συμπερασματικά: Αν θέλουμε να μιλήσουμε για μια μόνο δύναμη στο πλευρικό τοίχωμα, που να είναι αντιπροσωπευτική για το σύνολο, αυτή θα είναι η μέση δύναμη $\overline{F}$ της σχέσης (7.16) και το σημείο εφαρμογής της το Κ΄.

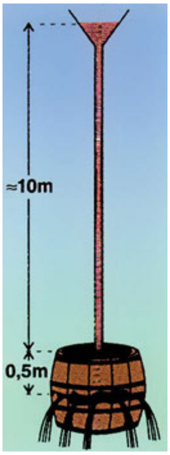
Από τη θεωρία στην πράξη: Οι δυνάμεις που ασκεί το υγρό στα πλευρικά τοιχώματα των δοχείων καθορίζουν και διευκολύνουν πολλές εφαρμογές.



Εικόνα 7.19: Αρχή λειτουργίας υδροστρόβιλου και καταιονιστήρα

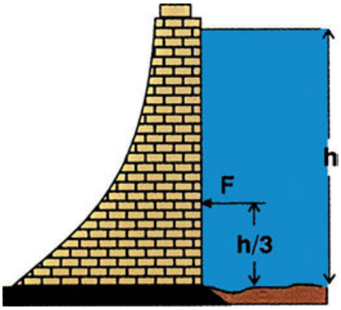
Στην εικόνα 7.19 φαίνεται η αρχή λειτουργίας του υδροστρόβιλου (α, β) και του καταιονιστήρα (ποτιστικού) για το χλοοτάπητα (γκαζόν). Οι πλευρικές δυνάμεις και στις δύο συσκευές δημιουργούν ζεύγος που προκαλεί την περιστροφή.

Στην εικόνα 7.20 υπάρχει πείραμα όμοιο με αυτό που επιχείρησε ο Pascal το 1646. Όταν ο κατακόρυφος σωλήνας γέμισε με νερό, το ξύλινο βαρέλι έσπασε, αφού οι πλευρικές δυνάμεις στα τοιχώματά του είναι πολύ μεγάλες.



**Εικόνα 7.20:
Το πείραμα Pascal**

Η κατασκευή των φραγμάτων, εικόνα 7.21, βασίζεται στην κατανομή δυνάμεων, που αναφέραμε πιο πάνω. Είναι κατασκευασμένα έτσι, ώστε να υπάρχει αύξηση του πλάτους από πάνω προς τα κάτω.



Εικόνα 7.21: Φράγμα

γ) Η συνισταμένη των δυνάμεων από το υγρό στα τοιχώματα δοχείου

Το βάρος υγρού με δεδομένο όγκο δεν επηρεάζεται, φυσικά, από το σχήμα του δοχείου που το περιέχει. Αυτό αποδεικνύεται με τη χρήση ενός ζυγού και οδηγεί στο εξής ενδιαφέρον συμπέρασμα: **Η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκεί το υγρό στα τοιχώματα του δοχείου είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και ισούται με το βάρος του υγρού.** (*Η εξήγηση του συμπεράσματος βασίζεται στην ισορροπία δυνάμεων και στην αρχή δράσης-αντίδρασης. Μπορείτε, αν θέλετε, να ασχοληθείτε με το φαινόμενο*).

ΙΙ. Δυνάμεις από υγρό που ηρεμεί σε σώμα βυθισμένο μέσα σε αυτό

Η καθημερινή εμπειρία μάς προσφέρει πολλά παραδείγματα στα οποία υποψιαζόμαστε την παρουσία δύναμης από το υγρό σε σώμα, που είναι κατά ένα μέρος του ή ολόκληρο βυθισμένο μέσα σε αυτό.

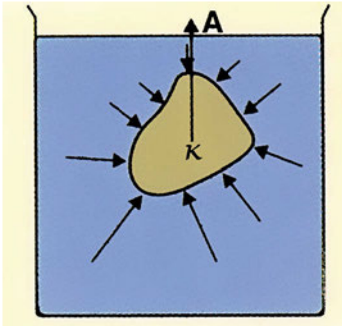
Βλέπουμε, π.χ., αντικείμενα να επιπλέουν στη θάλασσα, ενώ θα περιμέναμε να βυθίζονται λόγω του βάρους τους (όταν μάλιστα έχουν, όπως τα μέταλλα, μεγαλύτερη πυκνότητα από το νερό).

Νιώθουμε πως κάθε σώμα γίνεται ελαφρύτερο μέσα στο νερό από ό,τι στον αέρα.

Όλα αυτά δείχνουν ότι το υγρό ασκεί δύναμη στο στερεό που βυθίζεται σε αυτό. Δύναμη που την περιμένουμε να έχει φορά προς τα πάνω, αφού η αίσθηση είναι ότι το σώμα έχει τώρα μειωμένο βάρος.

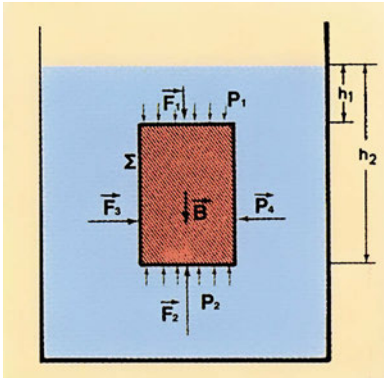
7.6 Άνωση - Αρχή του Αρχιμήδη

Ας δούμε το σώμα Α της εικόνας 7.22, που είναι βυθισμένο μέσα σε υγρό. Το σώμα δέχεται δυνάμεις από το υγρό, οι οποίες είναι κάθετες σε κάθε στοιχειώδη επιφάνειά του. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην κατώτερη πλευρά αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες πιέσεις, λόγω του μεγαλύτερου βάθους στο οποίο βρίσκονται τα σημεία της πλευράς αυτής.



Εικόνα 7.22: Δυνάμεις από υγρό σε βυθισμένο στερεό

Επιλέγουμε στερεό με πρισματικό σχήμα, εικόνα 7.23, για απλοποίηση των σχέσεων. Οι δυνάμεις στις 4 πλευρές του στερεού έχουν τη φορά που προκαλείται από τις πιέσεις του υγρού σε αυτές. Η $\vec{F}_1$ έχει φορά προς τα κάτω και είναι η συνισταμένη των δυνάμεων στην πάνω έδρα. Οι δυνάμεις $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ στα πλευρικά τοιχώματα είναι αντίθετες (αφού για κάθε σημείο της μιας πλευράς υπάρχει αντίστοιχο της άλλης σε ίδιο βάθος. Τα σημεία, δηλαδή, δέχονται ανά δύο την ίδια πίεση). Η δύναμη $\vec{F}_2$ στην κάτω έδρα έχει φορά προς τα πάνω και είναι μεγαλύτερη από την F_1 αφού $F_1 = p_1A$, $F_2 = p_2A$ και $p_2 > p_1$.



Εικόνα 7.23: Υπολογισμός της άνωσης

Η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκεί το υγρό στο στερεό είναι λοιπόν:

$$F = F_2 - F_1$$

ή

$$F = (p_2 - p_1)A = \rho g\,(h_2 - h_1)A$$

ή

$$F = \rho g\,Ah,$$

όπου $h = h_2 - h_1$ = ύψος στερεού
ρ = πυκνότητα υγρού.

Τελικά:

$$\boxed{F = \varepsilon V} \qquad (7.17)$$

Η σχέση (7.17) δείχνει ότι:

Η συνισταμένη δύναμη εξαρτάται από το ειδικό βάρος του υγρού και από τον όγκο του βυθισμένου στερεού.

Επειδή η $\vec{F}$ έχει φορά προς τα πάνω, ονομάστηκε **άνωση** $\vec{A}$, και επομένως:

$$\boxed{A=\varepsilon V} \quad (7.18)$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι ο όγκος V του βυθισμένου στερεού είναι ίδιος με τον αντίστοιχο του υγρού που εκτοπίζει, η σχέση (7.18) μπορεί να γραφεί:

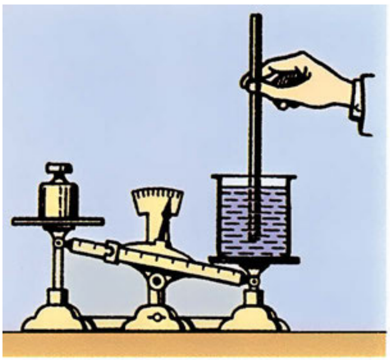
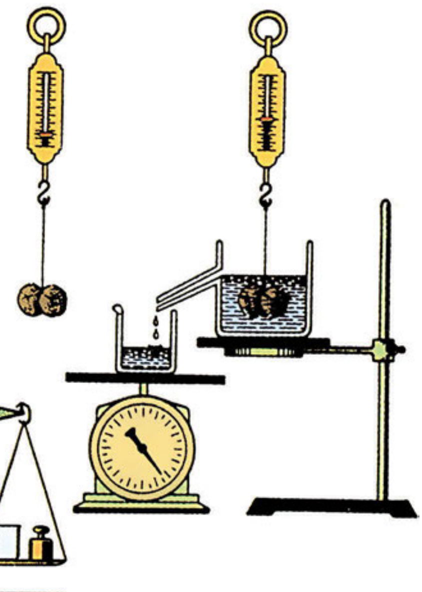
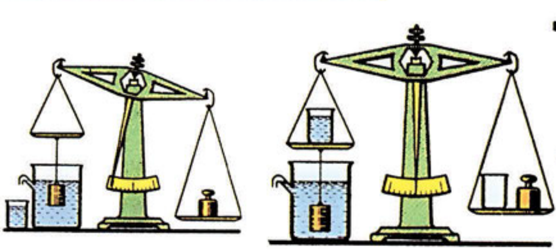
$$\boxed{A=B'} \quad (7.19)$$

όπου B΄ = βάρος του εκτοπισμένου υγρού.
Η σχέση (7.19) εκφράζει την **αρχή του Αρχιμήδη**:

“Κάθε σώμα που βρίσκεται σε υγρό που ηρεμεί δέχεται δύναμη ίση με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει”.

Η αρχική διατύπωση της αρχής του Αρχιμήδη ήταν:
“Κάθε σώμα που βυθίζεται σε υγρό χάνει από το βάρος του τόσο όσο είναι το βάρος του υγρού που εκτοπίζει”. Είναι φανερό ότι οι δύο διατυπώσεις της αρχής είναι ισοδύναμες, αφού το σώμα “χάνει βάρος” ακριβώς λόγω της άνωσης.

Η άνωση εμφανίζεται είτε το σώμα είναι βυθισμένο ολόκληρο στο υγρό είτε ένα μέρος του, με μία προϋπόθεση όμως: **πρέπει η κατώτερη επιφάνεια του στερεού να βρέχεται από το υγρό.** Αν αυτό δε συμβαίνει και το στερεό ακουμπά στη βάση του δοχείου, η συνισταμένη δύναμη από το υγρό έχει φορά προς τα κάτω (θα τη λέγαμε κάτωση) και το στερεό σπρώχνεται προς τα κάτω.

(α)




(β) (γ) (δ)

Εικόνα 7. 24: Πειραματική επαλήθευση της αρχής του Αρχιμήδη

Ο ζυγός και η άνωση: Στην εικόνα 7.24 παρουσιάζονται 4 πειράματα επαλήθευσης της αρχής του Αρχιμήδη.

* Στην εικόνα 7.24(α) η ράβδος δέχεται άνωση από το νερό και ανταποδίδει με ίση δύναμη αντίθετης φοράς (δράση-αντίδραση). Η ισορροπία του ζυγού χαλάει, επειδή το υγρό εμφανίζεται "βαρύτερο". *Ας το σκεφτούμε λίγο...*
* Στην εικόνα 7.24(β) ο ζυγός ισορροπούσε πριν τοποθετήσουμε το μεγάλο ποτήρι με το νερό κάτω από το σώμα. Μετά τη βύθιση του σώματος στο νερό ο ζυγός κλίνει προς το μέρος των σταθμών.
  Απορία: *Αν μαζέψουμε στο μικρό ποτήρι το νερό που εκτοπίστηκε από τη βύθιση του στερεού, θα μπορούσαμε να το χρησιμοποιήσουμε (και πώς;), για να αποκατασταθεί η ισορροπία στο ζυγό;*
* Στην εικόνα 7.24(γ) βρίσκουμε μια απάντηση στην απορία που εκφράστηκε. Έχετε άλλη λύση να προτείνετε;
* Στην εικόνα 7.24(δ) προσπαθούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η άνωση σώματος ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού. Η άνωση βρίσκεται από τη διαφορά Α = Β - Β΄, όπου Β, Β΄ το βάρος του σώματος στον αέρα και στο νερό αντίστοιχα.
  Αυτά τα δύο βάρη βρίσκονται με τη βοήθεια ζυγού με ελατήριο. Το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού μετριέται με το δυναμομετρικό ζυγό.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *(287-212 π.Χ.): Έλληνας μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός που έζησε στις Συρακούσες. Θεωρείται ως ο μεγαλύτερος θετικός επιστήμονας της αρχαιότητας. Σημαντικότερες προσφορές του ήταν:*

– Απέδειξε πώς το πηλίκο του μήκους κάθε περιφέρειας προς τη διάμετρό της είναι σταθερό και ίσο με π=3,14156... Βρήκε, επίσης, τις σχέσεις για τον υπολογισμό του όγκου και της ολικής επιφάνειας όλων των γνωστών γεωμετρικών σχημάτων (σφαίρας, κυλίνδρου κτλ.). Σε αυτόν αποδίδεται η φράση: "μη μου τους κύκλους τάραττε", που απηύθυνε σε Ρωμαίο στρατιώτη έτοιμο να τον συλλάβει, ενώ έλυνε γεωμετρικό πρόβλημα στην άμμο.

– Προσδιόρισε τη φύση και τον τύπο για την ***άνωση*** *που δέχονται τα στερεά μέσα στα ρευστά.*

– Επινόησε πολλές ***απλές μηχανές*** *(μοχλούς, τροχαλίες κτλ) για τη μετακίνηση σωμάτων με μεγάλο βάρος. Είπε τη φράση "Δος μοι πα στω καί την γαν κινάσω" (δώσε μου, δηλαδή, μέρος να σταθώ και θα μετακινήσω τη γη). Οι μηχανικές και οπτικές επινοήσεις του (παραβολικά κάτοπτρα κ.ά.) αξιοποιήθηκαν από το στόλο των Συρακουσών στο διετή πόλεμο με τους Ρωμαίους. Τον συνοδεύει η ιστορική φράση "Εύρηκα", η οποία ακολούθησε τη δοκιμασία που του επέβαλε ο βασιλιάς Ιέρωνας, ο οποίος του ζήτησε να ελέγξει τη γνησιότητα του στέμματός του, χωρίς να προκαλέσει ζημιά σ' αυτό. Ο Αρχιμήδης ανακάλυψε τυχαία - ενώ έκανε το μπάνιο του - τη λύση του προβλήματος αντιλαμβανόμενος την άνωση του νερού στο σώμα του. Το παραπάνω ρήμα ακούστηκε σαν κραυγή από τον εφευρέτη, που έτρεχε με αδαμιαία περιβολή στους δρόμους των Συρακουσών θριαμβολογώντας. Φήμες....*

Εργαστηριακή πρόταση: Σε εργαστήριο Φυσικής μετριέται πειραματικά η πυκνότητα στερεού βαρύτερου από το νερό, ειδικά μετάλλου (π.χ. μολύβδου) και υγρού (π.χ. οινοπνεύματος). Χρησιμοποιούνται ο αναλυτικός ζυγός της εικόνας 6.24(β).

Μετριέται το βάρος B_1 του μολύβδου στον αέρα και το αντίστοιχο του B_2 στο νερό. Έχουμε:

$$B_1 = \rho_1 g V$$

$$A_1 = B_1 - B_2 = \rho_2 g V.$$

(ρ_1, ρ_2 οι πυκνότητες μολύβδου και νερού αντίστοιχα).

Βρίσκουμε: $$\frac{B_1}{B_1 - B} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Αφού η πυκνότητα P_2 του νερού είναι γνωστή (πίνακας 6.1), υπολογίζουμε την πυκνότητα P_1 του μολύβδου.

Μετριέται το βάρος B_3 του ίδιου κομματιού στο οινόπνευμα. Η νέα άνωση A_2 είναι: $A_2=B_1-B_3=\rho_3 g V$,

ρ_3 = πυκνότητα οινοπνεύματος. Άρα:

$$\frac{B_1}{B_1 - B_3} = \frac{\rho_1}{\rho_3}$$

Τώρα ξέρουμε την πυκνότητα ρ_1 του μολύβδου, άρα βρίσκουμε την αντίστοιχη ρ_3 του οινοπνεύματος.

Σημείωση: *Τι κάνουμε, αν το στερεό είναι ελαφρύτερο από το υγρό (π.χ. φελλός και νερό); Μπορούμε να αξιοποιήσουμε τη* ***μέθοδο της άνωσης****, που περιγράψαμε για το μόλυβδο, μόνο αν το σώμα που έχει πυκνότητα μικρότερη από το νερό "συνοδεύεται" στο βύθισμα από κάποιο με αρκετά μεγαλύτερη πυκνότητα από το υγρό (π.χ. φελλός - μόλυβδος). Υποψιάζεστε γιατί; Η διαδικασία είναι, τώρα, πιο χρονοβόρα και η περιγραφή της παραλείπεται.*

Η άνωση και η πλεύση: Σημαντικό ρόλο για τη δράση της άνωσης έχει η θέση του σημείου εφαρμογής της. Το σημείο αυτό λέγεται **κέντρο άνωσης** και είναι το (u) στην εικόνα 7.22. Εκείνο που έχει σημασία είναι η σχετική θέση των κέντρων βάρους (κ) και ανώσεως (u).

Αυτά τα δύο κέντρα συμπίπτουν, μόνο αν το σώμα είναι ομογενές (έχει δηλ. παντού την ίδια πυκνότητα). Για να εντοπίσουμε αυτά τα δυο σημεία, θυμόμαστε ότι:

Το κέντρο βάρους υπολογίζεται εμπειρικά, όπως συζητήσαμε στην αντίστοιχη ενότητα.

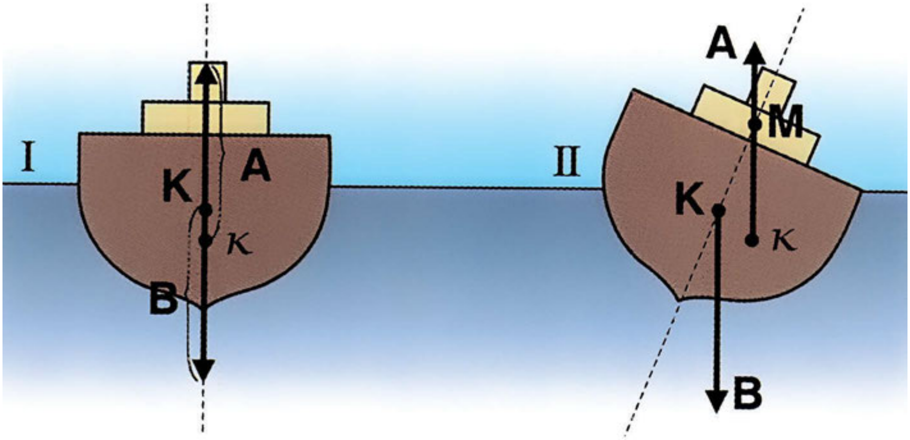
Το κέντρο άνωσης βρίσκεται, αν φανταστούμε ότι στη θέση του βυθισμένου στερεού (ή τμήματός του) έχουμε υγρό, σαν αυτό στο οποίο έχει βυθιστεί. Τότε, το κέντρο άνωσης είναι το κέντρο βάρους αυτού του υγρού.

Επειδή οι δύο δυνάμεις (βάρος και άνωση) είναι αντίρροπες και ίσου μέτρου (αφού το στερεό ισορροπεί), οι περιπτώσεις είναι δύο:

* Να έχουν ίδιο φορέα, οπότε δεν υπάρχει συνολικά ροπή.

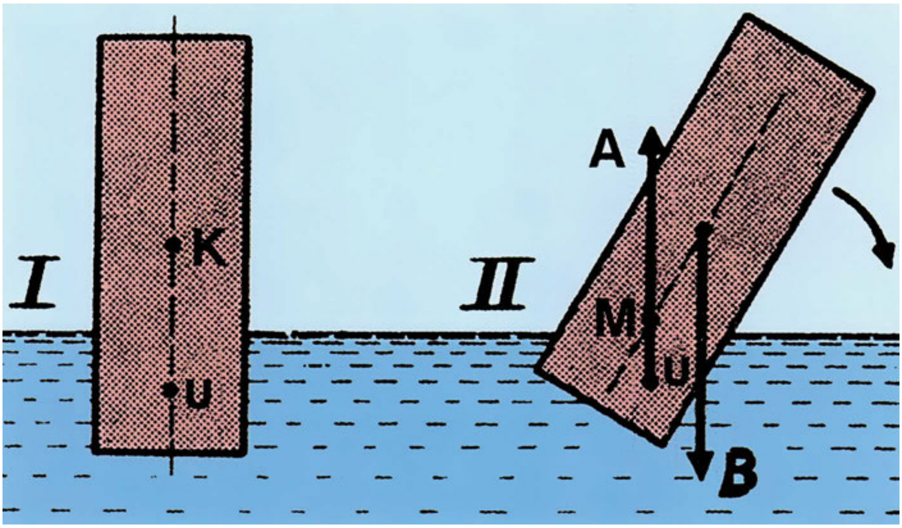
* Να έχουν παράλληλους φορείς, όποτε σχηματίζουν το γνωστό ζεύγος

δυνάμεων. Το σώμα, τότε, περιστρέφεται και το ερώτημα είναι αν αυτή η περιστροφή οδηγεί σε αποκατάσταση ισορροπίας ή σε ανατροπή.



Εικόνα 7.25: Πλεύση πλοίου (ευσταθής ισορροπία)

Ας παρατηρήσουμε το πλοίο στην εικόνα 7.25, το οποίο επιπλέει στο νερό. Στη θέση ισορροπίας το βάρος και η άνωση είναι αντίθετες δυνάμεις πάνω σε φορέα που είναι ο άξονας συμμετρίας του πλοίου. Αν το πλοίο παρουσιάσει μικρή κλίση, το βάρος και η άνωση αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Η ροπή του ζεύγους (ας θυμηθούμε την αντίστοιχη παράγραφο...)



Εικόνα 7.26: Πλεύση σανίδας (ασταθής ισορροπία)

βοηθά στο να ξαναγυρίσει το πλοίο στην αρχική θέση του.

Για την ξύλινη σανίδα της εικόνας 7.26, όμως, η εξέλιξη είναι διαφορετική. Η σανίδα βυθίζεται κατά μικρό τμήμα του όγκου της στο νερό και γι' αυτό το κέντρο άνωσης (υ) είναι αρκετά χαμηλότερο από το κέντρο βάρους (κ). Στην πλάγια θέση το ζεύγος των $\vec{B}$, $\vec{A}$ δημιουργεί ροπή που ανατρέπει την σανίδα.

Στη ναυπηγική αναφέρεται το **μετάκεντρο** (M), που είναι το σημείο τομής δύο φορέων: του φορέα της άνωσης και του άξονα συμμετρίας του στερεού.

Γενική συνθήκη ευστάθειας στην πλεύση: Κάθε πλεούμενο βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία, όταν το μετάκεντρο του είναι πιο ψηλά από το κέντρο βάρους του.

Στην άνωση στηρίζεται σειρά εφαρμογών όπως η κίνηση των υποβρυχίων, οι πλωτές δεξαμενές, η κίνηση και η ηρεμία των ψαριών στη θάλασσα.

Υδροστατικοί υπολογισμοί: Ομογενές σώμα Σ ζυγίζει στον αέρα B_1 = 40p, μέσα στο νερό B_2 = 35,3p και μέσα σε άγνωστο υγρό B_3 = 36,25p. Να υπολογιστούν οι πυκνότητες του στερεού και του άγνωστου υγρού.

Λύση:

Το βάρος B_1 ισούται με

$$\boxed{B_1 = \varepsilon_1 V = \rho_1 g V} \qquad (1)$$

(ρ_1 = πυκνότητα στερεού και V ο όγκος του). Η διαφορά $A_1 = B_1 - B_2$ εκφράζει την άνωση μέσα στο νερό και:

$$\boxed{A_1 = \rho_2 g V} \qquad (2)$$

ρ_2 = πυκνότητα του νερού = $10^3\ \dfrac{kg}{m^3}$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{B_1}{B_1 - B_2},$$

άρα

$$\rho_1 = \rho_2 \frac{B_1}{B_1 - B_2}.$$

Βρίσκουμε:

$$\rho_1 = 10^3 \frac{kg}{m^3}\frac{40p}{4,7p} = 8510\frac{kg}{m^3}.$$

Η άνωση A_2, εξάλλου, του σώματος στο άγνωστο υγρό είναι:

$$A_2 = B_1 - B_3 = \rho_3 g V = \rho_3 g \frac{B_1}{\rho_1 g},$$

δηλαδή

$$A_2 = \frac{B_1 \rho_3}{\rho_1}$$

ή

$$B_1 - B_3 = \frac{B_1 \rho_3}{\rho_1}$$

και τελικά:

$$\rho_3 = \frac{(B_1 - B_3)}{B_1}\rho_1.$$

Βρίσκουμε:

$$\rho_3 \frac{(40 - 36,25)p}{40p} \cdot 8510\frac{kg}{m^3} = 797,8\frac{kg}{m^3}.$$

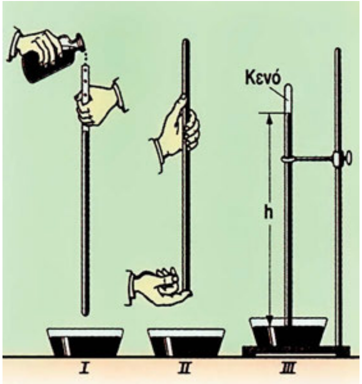
7.7 Αεροστατική και ατμοσφαιρική πίεση

Οι αρχές που αναφέρθηκαν στην Υδροστατική ισχύουν και για τα αέρια, εκτός από την σχέση (7.4). Δεν μπορούμε, δηλαδή, να μιλάμε για τέτοιας μορφής μεταβολή της πίεσης με το ύψος. Ας πάρουμε τα πράγματα με τη σειρά: Τα αέρια ασκούν πίεση για τους ίδιους λόγους με τα υγρά.

Σε κατάσταση ηρεμίας ασκούν πίεση λόγω του βάρους τους.

Σε κατάσταση κίνησης ασκούν πίεση στα τοιχώματα εξαιτίας των συγκρούσεων των μορίων τους με αυτά.

Τυπικό δείγμα αερίου είναι ο ατμοσφαιρικός αέρας ο οποίος, όπως είδαμε στην § 7.2, ασκεί την ατμοσφαιρική πίεση.



Εικόνα 7.27: Προσεγγίζοντας το πείραμα Toricelli

***Evangelista TORRICELLI** (1608-1647): Ιταλός φυσικός, μαθητής του Γαλιλαίου. Επινόησε πείραμα για τη **μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης** με τη βοήθεια στήλης υδραργύρου. Σε αυτό στηρίχτηκε η λειτουργία των κυριότερων τύπων μανομέτρων και βαρομέτρων. Μελέτησε τη δυναμική των ρευστών και διατύπωσε **θεώρημα για την ταχύτητα εκροής** ιδανικών υγρών από δοχεία. Πρότεινε εφαρμογές βασισμένες στο θεώρημα Bernoulli.*

Ο Toricelli (1643) ασχολήθηκε συστηματικά με τη μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης. Το πείραμα πρέπει να έγινε περίπου όπως δείχνει η εικόνα 7.27. Ο γυάλινος σωλήνας με μήκος 90cm γέμισε με καθαρό υδράργυρο απαλλαγμένο από υγρασία (εικόνα 7.27 I). Ο σωλήνας αναποδογυρίστηκε αφού κλείστηκε το ανοικτό άκρο του και βυθίστηκε σε ανοικτή λεκάνη γεμάτη με υδράργυρο (7.27 II). Το σύστημα ισορρόπησε τελικά στην κατάσταση που δείχνει η εικόνα (7.27 III).

Τι προκύπτει από το πείραμα; Μετά τη μέτρηση του ύψους h που απόκτησε η στήλη του υδραργύρου, το οποίο βρέθηκε h = 76cm, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ατμοσφαιρική πίεση ισοδυναμεί με την πίεση που ασκεί στη βάση της στήλη Hg με ύψος 76cm. Άρα: 1atm = 76cm Hg = 760mm Hg. Η μονάδα 1mm Hg ονομάστηκε τιμητικά **Torr**, και, επομένως, εισάγεται νέα μονάδα μέτρησης της πίεσης το 1 Torr = 1 mm Hg.

Για όσους ενδιαφέρονται για αποδείξεις: Ας θυμηθούμε την αρχή της υδροστατικής: η πίεση στη βάση της στήλης είναι $p_1 = \rho_{Hg}\, gh$. Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο στην ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου της λεκάνης η πίεση είναι $p_2 = p_\alpha$. Άρα $p_1 = p_2$ και:

$$\boxed{p_\alpha = \rho_{Hg}\, gh} \qquad (7.11)$$

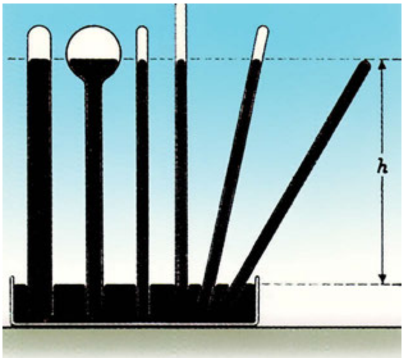
Αν αντικαταστήσουμε: $\rho_{Hg} = 13,6\dfrac{gr}{cm^3} = 13600\dfrac{kg}{m^3}$, $g = 10\dfrac{m}{s^2}$,

h=76cm=0,76m, βρίσκουμε: $p_\alpha = 13600\dfrac{kg}{m^3}\cdot 10\dfrac{m}{s^3}\cdot 0,76m$

και $p_\alpha = 1,033\cdot 10^5\dfrac{N}{m^2}$, (τιμή την οποία είχαμε αναφέρει στην § 7.2).

Σκέψεις και σχόλια για το πείραμα Toricelli

* Πάνω από τη στήλη Hg στο σωλήνα της εικόνας 7.27 ΙΙΙ αναγράφεται η λέξη "κενό". Αυτό δεν είναι απόλυτα σωστό, αφού υπάρχουν ατμοί Hg. Ένα από τα προσόντα του Hg, όμως, είναι ότι η πίεση που ασκούν οι ατμοί του σε συνηθισμένες θερμοκρασίες είναι πολύ μικρή, μέχρι αμελητέα (σε σχέση με την Pa).
* Η στήλη Hg στο σωλήνα, που την ονομάζουμε **βαρομετρική,** είναι ίδια ανεξάρτητα από την επιφάνεια βάσης, από τη μορφή και από την κλίση του σωλήνα (εικόνα 7.28). Η εξήγηση είναι όμοια με αυτήν που δώσαμε για το υδροστατικό παράδοξο.



Εικόνα 7.28: Το ύψος της βαρομετρικής στήλης δεν επηρεάζεται από την επιφάνεια της βάσης, από τη μορφή και από την κλίση του σωλήνα.

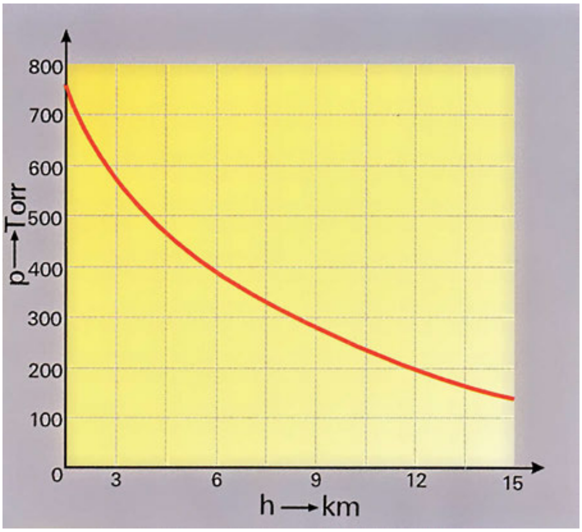
Εύλογη απορία: Γιατί ο Toricelli δούλεψε με Hg και όχι με νερό, που είναι και το φθηνότερο και το πιο διαδεδομένο υγρό;

(Χρησιμοποιήστε τη σχέση (7.11) για το νερό με $\rho = 10^3 \dfrac{kg}{m^3}$ *και βρείτε το ύψος h που θα είχε η στήλη του. Σχολιάστε...)*

7.8 Η ατμοσφαιρική πίεση ελαττώνεται με το ύψος.

Είδαμε ότι στα υγρά η πίεση αυξάνεται με το βάθος. Αν το δούμε αντίστροφα, η πίεσή τους μειώνεται από τον πυθμένα προς την ελεύθερη επιφάνεια. Εκεί, όμως, η μεταβολή ακολουθούσε ευθεία γραμμή στο διάγραμμα πίεσης - βάθους (εικόνα 7.5).

Και στην ατμόσφαιρα η πίεση ελαττώνεται από τη βάση της αέριας στήλης (έδαφος) προς τα πάνω. Μόνο που τώρα η μεταβολή δίνει καμπύλη στο διάγραμμα πίεσης (p) - ύψους (h). Αυτό συμβαίνει, επειδή η πυκνότητα του αέρα δεν είναι σταθερή με την αύξηση του ύψους, αφού ελαττώνεται, όσο ανεβαίνουμε. Στα υγρά, αντίθετα, θεωρήσαμε σταθερή πυκνότητα για όλο το υγρό. Η μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης με το ύψος φαίνεται στην εικόνα 7.29.



Εικόνα 7.29: Μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης με το ύψος

Η ελάττωση πίεσης και πυκνότητας του αέρα, όσο ψηλότερα βρισκόμαστε, έχει πολλές χαρακτηριστικές συνέπειες. Θυμηθείτε εκφράσεις όπως αυτές:

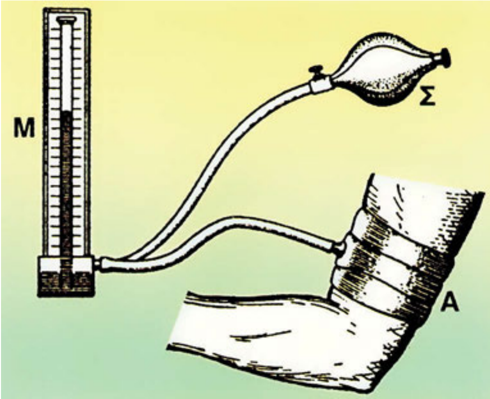
“Έχει καρδιοπάθεια και δεν πρέπει να μένει σε μέρη με μεγάλο υψόμετρο.”

“Καθώς ανεβαίναμε στον Παρνασσό, βούλωσαν τα αφτιά μου.”

“Η ορειβασία στα Ιμαλάια, πάνω από κάποιο υψόμετρο, γίνεται εξαιρετικά επίπονη για τον οργανισμό.”

Αξίζει να αναφερθούν λίγες από τις χαρακτηριστικές εφαρμογές της αεροστατικής:

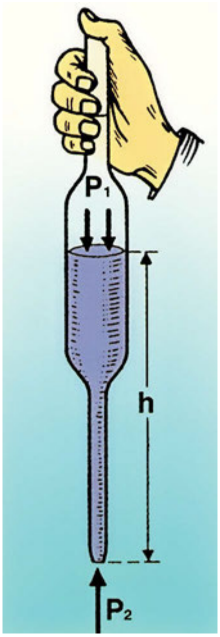
Το ιατρικό πιεσόμετρο (εικ. 7.30). Αξιοποιείται για τη μέτρηση της αρτηριακής υπερπίεσης (όπως σχολιάσαμε και για τον αέρα στα ελαστικά). Ο αεροθάλαμος τοποθετείται σταθερά στο βραχίονα του χεριού (αριστερού, ώστε να εξετάζεται αρτηρία κοντά στην καρδιά). Με το συμπιεστή Σ γεμίζουμε τον αεροθάλαμο έως ότου η πίεση να μην επιτρέπει στο σφυγμό να ακούγεται στον καρπό του χεριού. Αφαιρούμε, μετά, αέρα με πολύ μικρό ρυθμό με τη βοήθεια του σφικτήρα. Κάποια στιγμή ακούγεται πάλι ο σφυγμός, και, τότε, μετράμε την αρτηριακή πίεση με τη βοήθεια στήλης Hg. Λέμε ότι μετρήσαμε τη "μεγάλη" πίεση, που θα πρέπει να είναι 10 - 12 cm Hg για τους νέους και 14 -15 cm Hg για τους μεσήλικες. Αν συνεχίσουμε την αφαίρεση του αέρα, ο σφυγμός κάποια στιγμή "ξαναχάνεται". Η πίεση που μετράμε τώρα, η "χαμηλή", λέγεται και πίεση καρδιάς. Ο εμπειρικός τύπος για τη μεγάλη p και τη μικρή πίεση είναι: $p_{μικρή} = \frac{p_{μεγάλη}}{2} + 1\text{cmHg}$. Αν δεν προκύψει τέτοιο ζευγάρι τιμών, ίσως πρέπει να συμβουλευτούμε γιατρό. *(Εκτός αν μετρηθήκαμε σε στιγμή υπερέντασης ή αϋπνίας ή ύστερα από πολυφαγία).*



Εικόνα 7.30: Το ιατρικό πιεσόμετρο

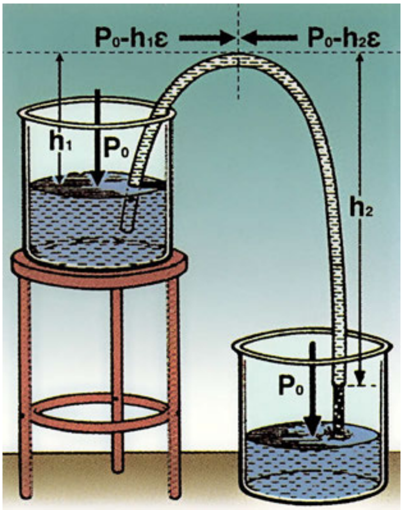
Το σιφώνι (εικόνα 7.31): Χρησιμοποιείται για μεταγγίσεις μικρών ποσοτήτων υγρών. Αν το γεμίσουμε με υγρό από δοχείο και κλείσουμε με το δάκτυλο το πάνω άνοιγμα, παρατηρούμε μικρή πτώση της στάθμης, και μετά η εκροή σταματά. Αυτό σημαίνει ότι το υγρό σταμάτησε να πέφτει, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων έγινε ίση με μηδέν. Οι δυνάμεις είναι: το βάρος της στήλης, η δύναμη από την ατμοσφαιρική πίεση p_1 και η αντίστοιχη από την πίεση p_2 του παγιδευμένου αέρα.

Αν πάτε για ανάλυση αίματος, θα δείτε το μικροβιολόγο να τοποθετεί με σιφώνι σε γυάλινη πλάκα λίγο από το αίμα που σας αφαίρεσε. Ανοιγοκλείνοντας το πάνω άκρο ρυθμίζει την ποσότητα του υγρού που θέλει. Το σιφώνι, τότε, λέγεται σταγονόμετρο.



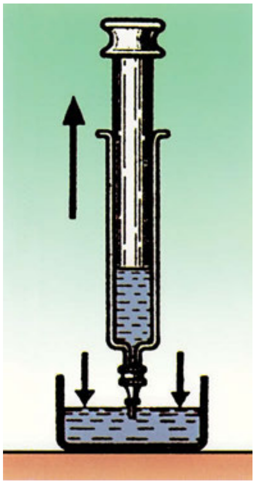
Εικόνα 7.31: Το σιφώνι

Ο σίφωνας (εικόνα 7.32): Με αυτόν μπορούμε να μεταγγίσουμε μεγαλύτερες ποσότητες υγρού απ’ ότι με το σιφώνι. Στο σίφωνα, όμως, πρέπει να προηγηθεί τράβηγμα του αέρα με το στόμα. Ύστερα όλα εξελίσσονται ομαλά. Η εκροή συνεχίζεται έως ότου οι πιέσεις στο ανώτατο σημείο του σωλήνα γίνουν ίσες. Όσο ρέει το υγρό, το ύψος h_1 στον τροφοδότη Τ μεγαλώνει, άρα η πίεση από αριστερά ($p_α$ - εh_1) μικραίνει. Συγχρόνως μικραίνει το ύψος h_2 στον υποδοχέα Υ, άρα η πίεση από δεξιά ($p_α$ - εh_2) μεγαλώνει. Κάποια στιγμή οι δύο πιέσεις γίνονται ίσες και η εκροή σταματά.

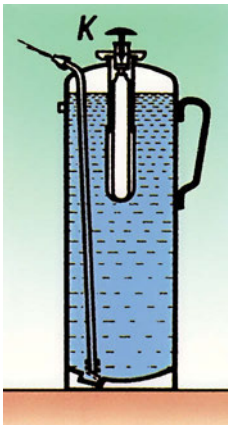


Εικόνα 7.32: Ο σίφωνας

Η ιατρική σύριγγα (εικόνα 7.33): Ας μην αναφέρουμε πού χρησιμοποιείται, επειδή κάποιοι φοβούνται τα “τσιμπήματα”! Πάντως, το ανέβασμα του εμβόλου δίνει διέξοδο στο διαλυμένο αέρα να κινηθεί προς τα πάνω. Όσο μεγαλώνει ο όγκος του, μικραίνει η πίεση και το υγρό επωφελείται ανεβάζοντας τη στάθμη του. Το αντίθετο γίνεται στο κατέβασμα του εμβόλου.


Εικόνα 7.33: Η ιατρική σύριγγα

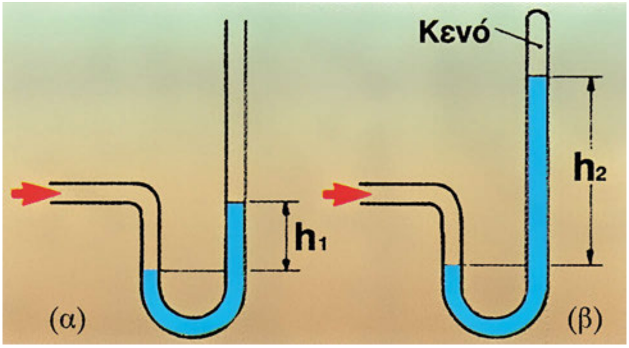
Ο πυροσβεστήρας (εικόνα 7.34): Ο τύπος της εικόνας χρησιμοποιείται σε κλειστούς χώρους (σπίτια, αυτοκίνητα κτλ.). Με απότομο κτύπημα στο κάλυμμα Κ ανοίγει το στόμιο της φιάλης με διοξείδιο του άνθρακα σε μεγάλη πίεση. Το υγρό, συνήθως διάλυμα αλατούχο, εκσφενδονίζεται με μορφή φλέβας.



Εικόνα 7.34: Ο πυροσβεστήρας

Όργανα μέτρησης της αεροστατικής πίεσης

Η αεροστατική πίεση, γενικά, μετριέται με τα **μανόμετρα** (εικόνα 7.35), τα οποία διακρίνονται σε δυο τύπους:



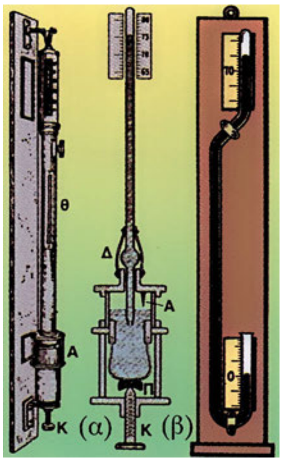
Εικόνα 7.35: Ανοιχτό και κλειστό μανόμετρο.

* Στα **ανοικτά μανόμετρα** (εικ. 7.35 α): Το δεύτερο σκέλος είναι ανοικτό (το πρώτο έτσι κι αλλιώς είναι), για να εισάγεται το αέριο που θα μελετήσουμε. Η διαφορά πίεσης p_A - $p_α$, εικόνα 7.35, (p_A = η πίεση του αερίου και $p_α$ = ατμοσφαιρική πίεση) ισούται με την πίεση ($εh_1$) της στήλης Hg ύψους h_1 και ειδικού βάρους ε.
* Στα **κλειστά μανόμετρα** (εικ. 7.35β): Το δεύτερο σκέλος είναι κλειστό και η πίεση πάνω από τη στήλη Hg σε αυτό είναι αμελητέα ("κενό"). Τώρα η πίεση p_A του αερίου μετριέται απευθείας με το ύψος h_2 της στήλης Hg ($p_A = εh_2$).

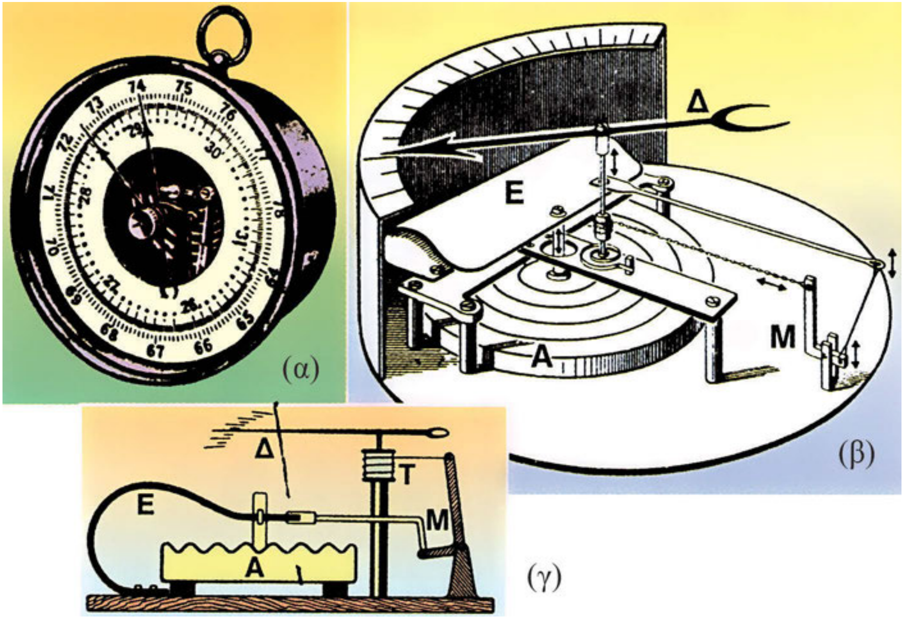
Ειδικά για την ατμοσφαιρική πίεση χρησιμοποιούνται τα **βαρόμετρα.** Βασίζονται σε δύο μεθόδους:

● Στα **άμεση μέτρηση:** Τα βαρόμετρα αυτού του τύπου λειτουργούν όπως και τα μανόμετρα. Βασίζονται στον υδράργυρο. Τα πιο συνηθισμένα είναι το βαρόμετρο Fortin και το σιφωνοειδές, εικόνα 7.36 (α) και (β). Το πρώτο μοιάζει να είναι πιο πολύπλοκο από το άλλο, αλλά έχει ένα μεγάλο πλεονέκτημα: δε σπάει εύκολα κατά τη μεταφορά, όπως βλέπετε και από την κατασκευή του.

● Στην **έμμεση μέτρηση:** Τα βαρόμετρα αυτού του τύπου μετράνε την ατμοσφαιρική πίεση από τα αποτελέσματά της σε ευαίσθητα υλικά. Είναι τα **μεταλλικά βαρόμετρα** και είναι ελαφρά (λείπει τώρα ο "βαρύς" Hg) και ευμετακίνητα (εικόνα 7.37). Η ατμοσφαιρική πίεση μετριέται από την παραμόρφωση σε κατάλληλα μεταλλικά ελάσματα.



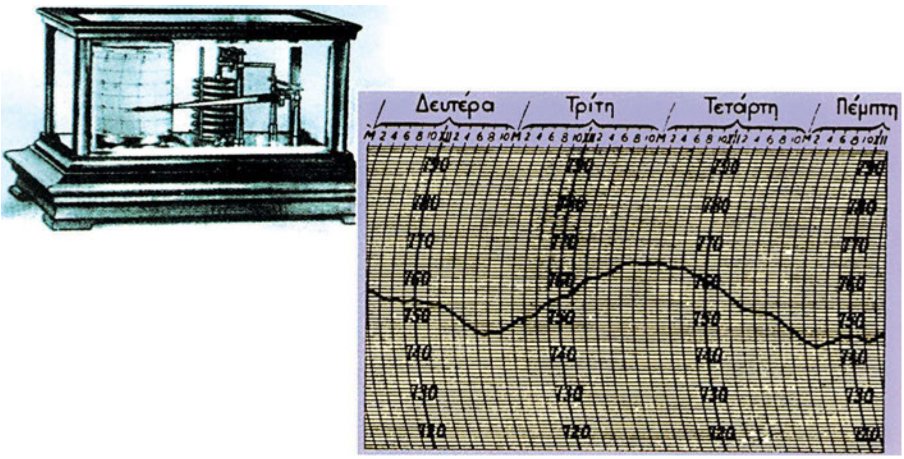
Εικόνα 7.36: Βαρόμετρα



Εικόνα 7.37: Δομή και μορφή συνηθισμένου βαρόμετρου

Στην εικόνα 7.37(α) φαίνεται το βαρόμετρο όπως το βλέπουμε εξωτερικά. Στην εικόνα 7.37(β) έχουμε "ανοίξει" το όργανο και στην 7.37 (γ) φαίνεται απλοποιημένη η εσωτερική διάταξή του.

Με κατάλληλη επέκταση το μεταλλικό βαρόμετρο μπορεί να γίνει **βαρογράφος** *(αφού το δεύτερο συνθετικό μιας λέξης είναι "γράφος", περιμένουμε καταγραφή των μετρήσεων κάπου σε χαρτί, σε φιλμ κτλ.).* Τώρα έχουμε και τύμπανο που περιστρέφεται με ωρολογιακό μηχανισμό και καλύπτεται εξωτερικά από φύλλο χαρτιού στο οποίο αναγράφονται ημέρες και ώρες. Όλα αυτά φαίνονται στην εικόνα 7.38.



Εικόνα 7.38: Βαρογράφος

Παράδειγμα: Αερόστατο έχει συνολικό όγκο V = 60m^3. Το περίβλημα μαζί με τα εξαρτήματα έχουν βάρος 750p. Ο αεροθάλαμος περιέχει υδρογόνο. Οι συνθήκες είναι τέτοιες, ώστε οι πυκνότητες υδρογόνου και αέρα να είναι 0,09 και 1,3 (στο S.I.). Με ποια δύναμη ανυψώνεται το αερόστατο;

Λύση.

Η ανυψωτική δύναμη F δίνεται από τη σχέση:

$$F = A - B_{ολ}$$

όπου $A = \rho_α g V$

($\rho_α$ = πυκνότητα υδρογόνου και $B_ε$ το βάρος των εξαρτημάτων).

Άρα: $F = \rho_α g V - (\rho_{Hg} g V + B_ε)$.

Τελικά: $F = (\rho_α - \rho_H) g V - B_ε$.

Βρίσκουμε $F = 1,21\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 60m^3 - 7,5N = 718,5N.$

(Η μονάδα πυκνότητας στο S.I. είναι $\frac{kg}{m^3}$ και $1p = 10^{-3}kp = 10^{-2}N$).

Πώς λύνουμε ασκήσεις στατικής των ρευστών: Όπως φαίνεται από τα λυμένα παραδείγματα, που προηγήθηκαν, υπάρχουν δύο γενικές κατηγορίες ασκήσεων στατικής των ρευστών:

- **Ασκήσεις βασισμένες στις πιέσεις:** Έχουν ως βασικό δεδομένο ή ζητούμενο την υδροστατική ή την αεροστατική πίεση. Στην πρώτη περίπτωση δουλεύουμε με τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής και την αρχή του Pascal. Στη δεύτερη περίπτωση αξιοποιούμε το διάγραμμα μεταβολής της ατμοσφαιρικής πίεσης με το ύψος, και το πείραμα του Toricelli.
- **Ασκήσεις βασισμένες στις δυνάμεις:** Εδώ κυριαρχούν η αρχή του Αρχιμήδη (για περιπτώσεις στερεού μέσα σε ρευστό) και οι δυνάμεις στα πλευρικά τοιχώματα. Η πιο συνηθισμένη μορφή ασκήσεων είναι αυτή του "φαινόμενου βάρους" στερεού μέσα σε ρευστό. Τότε θυμόμαστε ότι η άνωση είναι η διαφορά του βάρους του στερεού έξω από το ρευστό και μέσα σ' αυτό.

7.9 Ιδανικά και πραγματικά ρευστά

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε τη στατική των ρευστών. Όταν τα υγρά θεωρούνται ακίνητα (για τα αέρια τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει παρά μόνο στο απόλυτο μηδέν των θερμοκρασιών), δε μας απασχολεί συνήθως το ερώτημα: “συμπεριφέρεται ιδανικά το ρευστό ή όχι;”. Υπάρχουν, όμως, φαινόμενα όπου το ερώτημα ζητά απάντηση. **Ιδανικά υγρά** θεωρούνται εκείνα για τα οποία μπορούμε να δεχτούμε:

α) πολύ μικρή συμπιεστότητα.

β) αμελητέες δυνάμεις επαφής ανάμεσα στο υγρό και στο στερεό με το οποίο γειτονεύουν **(δυνάμεις συνάφειας)**.
γ) απουσία δυνάμεων ανάμεσα στα μόρια του υγρού **(δυνάμεις συνοχής)**.
δ) απουσία κάθε αντίστασης κατά τις κινήσεις που γίνονται μέσα σε αυτά.
ε) σταθερή σύσταση της κινούμενης μάζας τους.
στ) έλλειψη στροβίλων κατά την κίνησή τους.

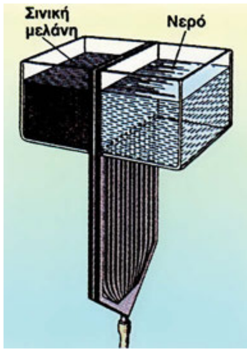
Όπως βλέπουμε, από τις παραπάνω ιδιότητες μόνο οι τρεις πρώτες (α, β, γ) αναφέρονται στην ηρεμία του υγρού.

Είναι παράλειψη το ότι δεν ελέγχαμε αυτές τις ιδιότητες ως τώρα; Θεωρώντας το υγρό ιδανικό στα υδροστατικά φαινόμενα δεν είχαμε τη δυνατότητα να αναφερθούμε στο τριχοειδές φαινόμενο, το οποίο οφείλεται στις δυνάμεις συνοχής και συνάφειας. Ας περιοριστούμε στην διευκρίνιση ότι αφορά το αυθόρμητο ανέβασμα νερού από το δοχείο σε πολύ λεπτό σωλήνα που βυθίζεται κατακόρυφα σε αυτόν. Και ότι το ανέβασμα του νερού από τις ρίζες των φυτών στα πιο ψηλά σημεία τους αποτελεί τη σημαντικότερη απόδειξη αυτού του φαινομένου.

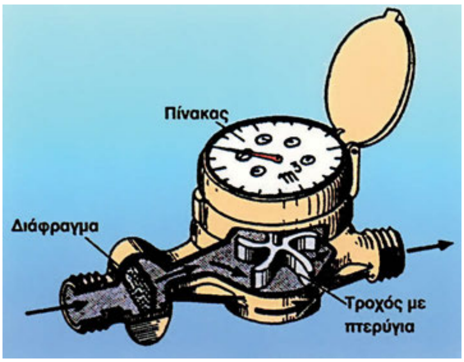
7.10 Δυναμική ιδανικών υγρών

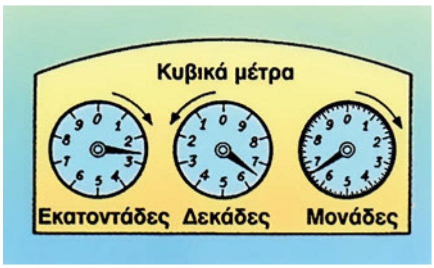
7.10.1 Ροή και παροχή

Όταν ένα ρευστό κινείται, λέμε ότι υπάρχει **ροή** και το ρευστό αποτελεί **πεδίο ροής.** Η ροή μπορεί να είναι **μόνιμη** (ή στρωτή), όταν η ταχύτητα των μορίων σε κάθε σημείο είναι πάντα ίδια (δεν εννοούμε και παντού ίδια). Αν δε συμβαίνει αυτό, μιλάμε για **στροβιλώδη** (ή **τυρβώδη)** ροή. Η μελέτη της κίνησης του υγρού διευκολύνεται, αν θεωρήσουμε τις **γραμμές ροής.** Στην εικόνα 7.39, π.χ., βλέπουμε τις γραμμές ροής για δύο υγρά διαφορετικού χρώματος που δεν αναμειγνύονται (σινική μελάνη και νερό).



Εικόνα 7.39: Γραμμές ροής για δύο υγρά





Εικόνα 7.40: Το γνωστό μας ρολόι της εταιρείας ύδρευσης

Έχουμε συνηθίσει να μιλάμε για κατανάλωση νερού και, φυσικά, αναφερόμαστε στον όγκο. Είναι το μέγεθος που μετρά το “ρολόι” της εταιρείας ύδρευσης (ΕΥΔΑΠ για την Αττική) (εικόνα 7.40).

Όπως έχουμε εξηγήσει, όμως, στο κεφ. 5, πολλές φορές χρειαζόμαστε το ρυθμό μεταβολής κάποιου μεγέθους. Στα θέματα που συζητάμε αναφερόμαστε στο ρυθμό με τον οποίο γίνεται η ροή του υγρού. Πόσες φορές δε διαπιστώσαμε ότι “η ροή είναι μεγάλη” ή ότι “με το σταγονόμετρο βγαίνει το νερό από τη βρύση”! Το μέγεθος που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του όγκου υγρού είναι η **παροχή** Π:

$$\boxed{\Pi = \frac{V}{t}} \tag{7.11}$$

V = όγκος υγρού που πέρασε από μια διατομή σωλήνα σε χρόνο t.

Προσέχουμε:

Η παροχή εκφράζεται σε $\frac{m^3}{s}$ (στο S.I.).

Η σχέση (7.11) μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{\Pi = A \cdot \upsilon} \tag{7.12}$$

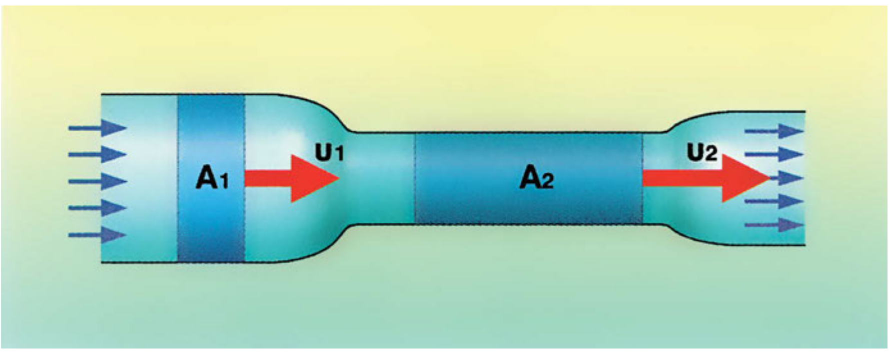
(έχοντας υπόψη ότι $V = A\ell$ και $\frac{\ell}{\upsilon} = t$ για ένα τμήμα υγρού με εμβαδόν βάσης A και μήκος ℓ).

Όπως φαίνεται από τη σχέση (7.12), όταν η ροή γίνεται με σταθερή παροχή, εικόνα 7.41, μπορούμε να γράψουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

ή

$$\boxed{A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2} \tag{7.13}$$



Εικόνα 7.41: Ροή με σταθερή παροχή

Η σχέση (7.13) εκφράζει το **νόμο της συνέχειας** και έχει μεγάλη σημασία για την κατανομή των ταχυτήτων σε σωλήνα τυχαίου σχήματος.

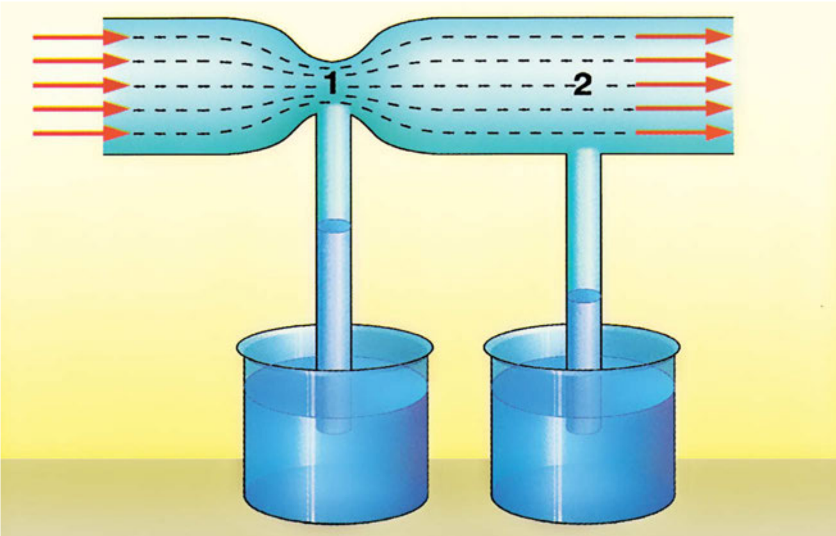
Ας θυμηθούμε: Πόσες φορές αναγκαστήκαμε να μειώσουμε το άνοιγμα του σωλήνα ποτίσματος (πιέζοντας με τα δάχτυλα), για να βγαίνει το νερό με μεγαλύτερη ταχύτητα;

7.10.2 Ο Νόμος του Bernoulli και εφαρμογές του

Με το νόμο της συνέχειας υπολογίζουμε την ταχύτητα σε κάθε σημείο υγρού, αν μετρήσουμε τη διατομή A του σωλήνα που αντιστοιχεί στο σημείο. Έχουμε, όμως, παραμελήσει το βασικό μέγεθος για τη συμπεριφορά των ρευστών: την πίεση. Επιχειρούμε δύο πειράματα διερευνητικά.

Πείραμα 1ο

Στα σημεία 1 και 2 του σωλήνα με νερό που ρέει, εικόνα 7.42, όπου οι διατομές είναι διαφορετικές, συνδέονται δύο σωληνάκια με τα άλλα άκρα τους βυθισμένα σε ποτήρια με νερό. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα.



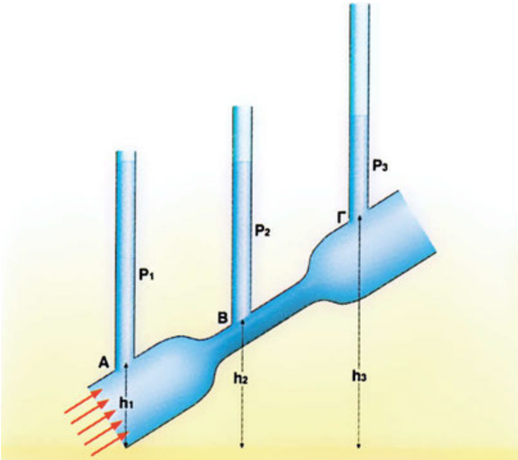
Εικόνα 7.42: Πειραματική επιβεβαίωση του νόμου Bernoulli

Το ύψος του νερού στα δύο σωληνάκια δεν είναι το ίδιο. Το μεγαλύτερο ύψος στο σωληνάκι I δείχνει ότι η πίεση στο σημείο 1 είναι μικρότερη από την αντίστοιχη στο σημείο 2 ($p_1 < p_2$). Στο σημείο 1, όμως, έχουμε μεγαλύτερη ταχύτητα ροής από αυτήν στο 2, αφού στο πρώτο σημείο η διατομή είναι μικρότερη.

Συμπέρασμα: Σε υγρό που ρέει μέσα σε σωλήνα, η πίεση που επικρατεί σε σημείο του ρευστού είναι μικρή εκεί που η ταχύτητα του υγρού είναι μεγάλη (και αντίστροφα). Την πίεση αυτή, στις επόμενες παραγράφους, θα την ονομάζουμε **στατική.**

Πείραμα 2ο

Στην εικόνα 7.43 επαναλαμβάνεται το προηγούμενο πείραμα για σωλήνα σε πλάγια θέση. Επιδίωξή μας είναι, τώρα, να δούμε την επίδραση του ύψους από επίπεδο αναφοράς (π.χ. το έδαφος) στη στατική πίεση του υγρού.



Εικόνα 7.43: Επίδραση του ύψους στη στατική πίεση σε σημείο υγρού

Σταματάμε τη ροή του υγρού κλείνοντας το δεξιό άκρο του σωλήνα με την παλάμη. Βλέπουμε ότι τα ύψη του νερού στα σωληνάκια είναι διαφορετικά. Εκεί που το ύψος από το έδαφος είναι μικρό (σημείο Α) η στατική πίεση είναι μεγάλη. Αν ο σωλήνας στραφεί στην οριζόντια θέση και αφήσουμε ελεύθερη τη ροή, βλέπουμε, όπως και στο 1ο πείραμα, μεγάλη στατική πίεση εκεί που η ταχύτητα είναι μικρή. Οι πιέσεις δηλαδή στα Α, Γ είναι ίσες, ενώ στο Β, όπου έχουμε μεγαλύτερη ταχύτητα, η στατική πίεση είναι μικρότερη.

Ο συνδυασμός των πειραμάτων έδειξε ότι:

"Η στατική πίεση σε σημείο είναι μεγαλύτερη, όταν η ταχύτητα του υγρού σε αυτό είναι μικρότερη (μεγαλύτερη διατομή) ή όταν το σημείο είναι χαμηλότερο υψομετρικά".

Ασχοληθήκαμε, λοιπόν, με τρία είδη πιέσεων για κάθε ροή υγρού σε σωλήνα τυχαίου σχήματος και πλάγιο:

Τη στατική πίεση $p_σ$, που εμφανίζεται ανεξάρτητα από το αν το υγρό κινείται ή όχι. Εμφανίζεται σε όλους τους σωλήνες, οριζόντιους και πλάγιους.

Τη δυναμική πίεση, που οφείλεται στην ταχύτητα του ρευστού στο εξεταζόμενο σημείο και εκφράζεται από τη σχέση: $p_δ = \frac{1}{2}ρυ^2$ (ρ = πυκνότητα).

Την υψομετρική πίεση, που σχετίζεται με το ύψος h του σημείου από κάποιο επίπεδο αναφοράς. Εμφανίζεται σε σωλήνες τοποθετημένους πλάγια, οπότε όλα τα σημεία του δε βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Υπολογίζεται από τη σχέση: $p_υ = ρgh$.

Ο Bernoulli απέδειξε θεωρητικά και πειραματικά ότι το άθροισμα των τριών πιέσεων είναι σταθερό:

$$\boxed{p_\sigma + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h = \text{σταθ.}} \qquad (7.14)$$

Η σχέση (7.14) είναι γνωστή ως **νόμος του Bernoulli.** (Η θεωρητική απόδειξη βασίζεται στη διατήρηση της ενέργειας). Ο νόμος ισχύει για όλα τα ιδανικά ρευστά και έχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές, πρακτικές και τεχνολογικές.

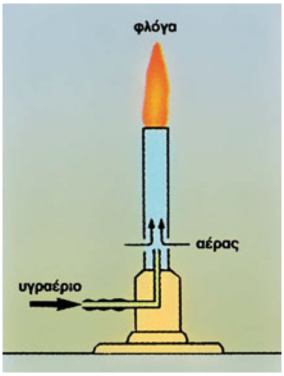
* **Μακριά από "κόντρες".** Οι γνωστοί ανταγωνισμοί με τα αυτοκίνητα είναι έτσι κι αλλιώς επικίνδυνοι και ανεπίτρεπτοι. Δείτε και την αεροδυναμική πλευρά τους. Όταν τα αυτοκίνητα τρέχουν παράλληλα και σε μικρή απόσταση μεταξύ τους έλκονται, και απειλείται πλάγια σύγκρουση. Ο αέρας ανάμεσα στα αυτοκίνητα κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα από τον αέρα στις εξωτερικές πλευρές του. Αυτό συμβαίνει, επειδή η διατομή στον ενδιάμεσο χώρο είναι μικρότερη, και επομένως, ισχύει ο νόμος της συνέχειας. Η υψομετρική πίεση είναι ίδια σε όλους τους χώρους γύρω από τα αυτοκίνητα. Από τη σχέση (7.14) προκύπτει: $p_\sigma + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{σταθ.}$

  Άρα στον ενδιάμεσο χώρο, όπου η δυναμική πίεση είναι μεγαλύτερη, έχουμε μικρότερη στατική πίεση p_σ. Επομένως, η πίεση εξωτερικά είναι μεγαλύτερη και ωθεί το ένα αυτοκίνητο προς το άλλο...

Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται, όταν το αυτοκίνητο κινείται με μεγάλη ταχύτητα στην αριστερή λωρίδα της εθνικής οδού, κοντά στον προστατευτικό τοίχο από μπετόν.

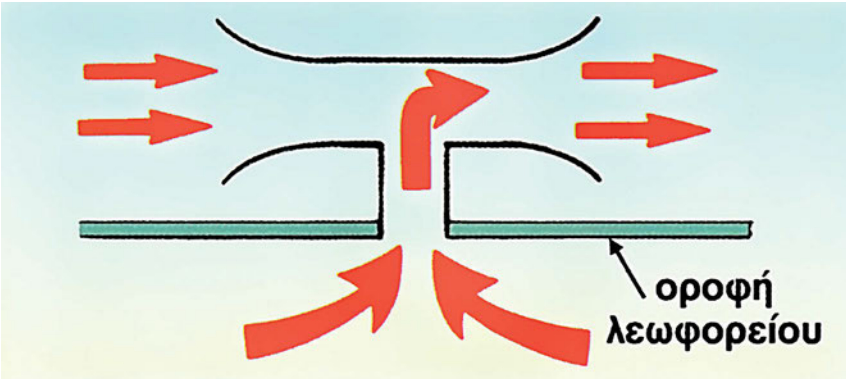
* Υπάρχει μια σειρά από συσκευές και μηχανήματα των οποίων η λειτουργία βασίζεται στο νόμο Bernoulli. **Το κοινό γνώρισμα όλων αυτών είναι ότι δημιουργούμε μεγάλη ταχύτητα ρευστού εκεί που θέλουμε μικρή στατική πίεση και, αντίθετα, μικρή ταχύτητα για μεγάλη στατική πίεση.**

Στην εκτόξευση αερίου, όπως, π.χ., στο λύχνο Bunsen (συσκευή όμοια με τα γκαζάκια, εικόνα 7.44(α), επιδιώκουμε μεγάλη ταχύτητα στην έξοδο από το μικρό ακροφύσιο. Ύστερα, όμως, το αέριο οδηγείται σε χώρο μεγαλύτερης διατομής, μικραίνει η ταχύτητά του και μεγαλώνει η στατική πίεση. Το υγραέριο μπορεί, έτσι, να εισχωρεί στον ατμοσφαιρικό αέρα στο χώρο του σωλήνα. Εξάλλου, επιτρέπει στον αέρα να εισχωρεί από την περιοχή ακροφυσίου στη συσκευή, αφού εκεί η πίεση του υγραερίου είναι μικρή. Το μείγμα αναφλέγεται από δική μας επέμβαση (σπίρτο, αναπτήρας) και λειτουργεί όση ώρα κρατά η παροχή του υγραερίου.



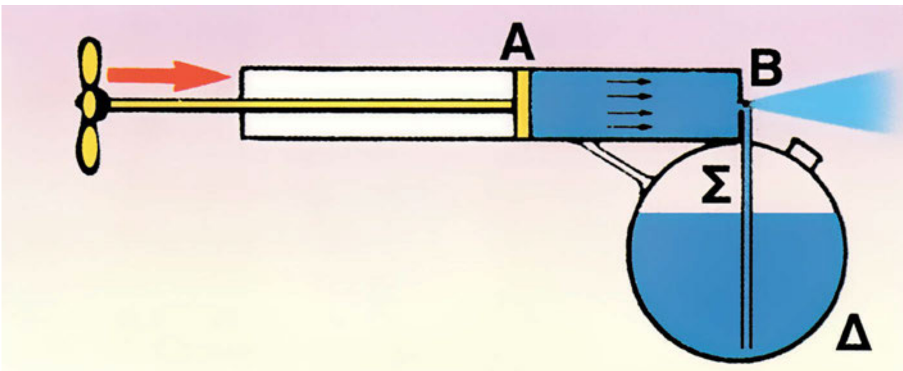
Εικόνα 7.44 (α): Λύχνος Bunsen

Στους εξαεριστήρες για χώρους συναθροίσεων, όπως π.χ. αυτόν του λεωφορείου, εικόνα 7.44(β), υπάρχει χωνί με στένωση, για να περνά ο αέρας με μεγάλη ταχύτητα. Η στατική πίεση εκεί μικραίνει και η υποπίεση που δημιουργείται ευνοεί την αναρρόφηση αέρα από το χώρο των επιβατών. *(Ας προσέξουμε μια παρόμοια περίπτωση: τα ειδικά "καπέλα " που τοποθετούνται στις καπνοδόχους, για να "τραβάει " το τζάκι καλύτερα).*



Εικόνα 7.44 (β): Εξαεριστήρας σε λεωφορείο

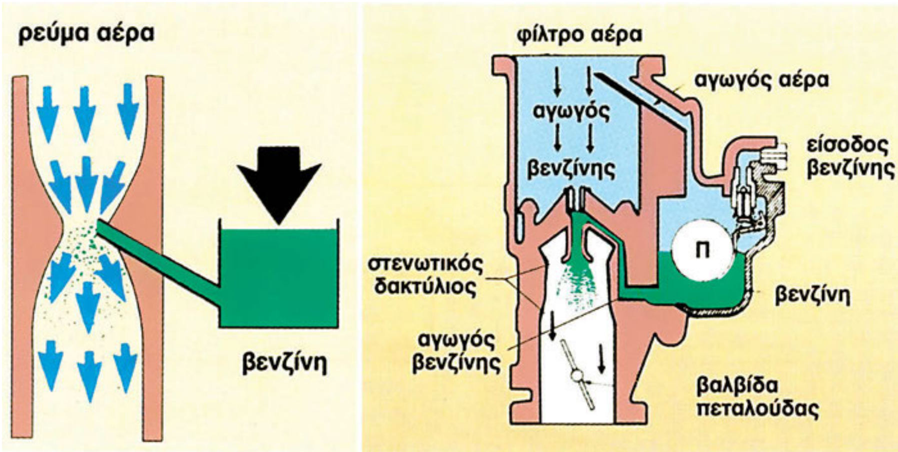
Για την εκτόξευση υγρών (και μάλιστα με τη μορφή συγκεντρωτικής δέσμης) βοηθά πάντα κάποιο ρεύμα αέρα, που δημιουργούμε με πίεση. Στους ψεκαστήρες, π.χ., εικόνα 7.44 (γ) η μεγάλη ταχύτητα του αέρα αντιστοιχεί σε μικρή πίεση (μικρότερη από την ατμοσφαιρική). Το υγρό, που δέχεται επιφανειακά την ατμοσφαιρική πίεση, αναγκάζεται να ανέβει στο σωληνάκι και να διασκορπιστεί έξω στον αέρα.



Εικόνα 7.44 (γ) Ψεκαστήρας

Το ίδιο ακριβώς γίνεται στον εξαερωτήρα (καρμπιρατέρ) του αυτοκινήτου εικόνα 7.44 (δ). Η μηχανή τραβά αέρα προς τα κάτω, στη στένωση η ταχύτητα στον εξαερωτήρα μεγαλώνει και η πίεση μικραίνει. Γίνεται μικρότερη από την ατμοσφαιρική και βοηθά τη βενζίνη, που βρίσκεται σε ατμοσφαιρική πίεση, να αναμιχθεί με τον αέρα. Ακολουθεί η ανάφλεξη του μείγματος.

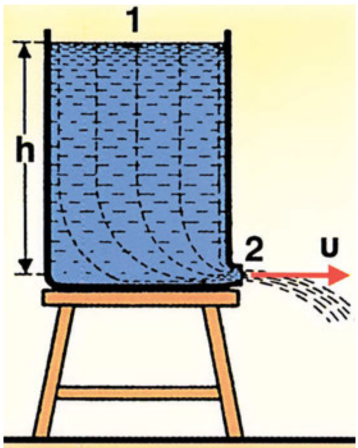
Για περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες οι ενδιαφερόμενοι ας ρίξουν μια ματιά στην εικόνα 7.44 (ε) ή... ας ρωτήσουν τον τεχνικό του συνεργείου!



Εικόνα 7.44 (δ, ε): Η αρχή λειτουργίας και η διάταξη στον εξαερωτήρα (καρπιρατέρ) αυτοκινήτου

* Έξοδος υγρού από πλευρικό άνοιγμα: θεώρημα Toricelli

Όσον αφορά τις δεξαμενές μεγάλης χωρητικότητας μπορούμε να δεχτούμε ότι, ενώ το υγρό ρέει από μικρό άνοιγμα, η ελεύθερη επιφάνεια μένει για κάποιο χρόνο ακίνητη. Η δεξαμενή στην εικόνα 7.45 είναι δείγμα μόνο μιας τέτοιας παραδοχής. Εξετάζουμε τα σημεία 1 και 2.



Εικόνα 7.45: Για την επιβεβαίωση του θεωρήματος Toricelli

Σημείο 1: Στατική πίεση ίση με την ατμοσφαιρική: $p_\sigma = p_\alpha$

Δυναμική πίεση αμελητέα ($\upsilon_1 \approx 0$): $p_\delta = 0$
Υψομετρική πίεση: $P_\upsilon = \rho\, gh$.

Σημείο 2: Στατική πίεση ίση, επίσης, με την ατμοσφαιρική: $p'_\sigma = p_\alpha$

Δυναμική πίεση: $p'_\delta = \dfrac{1}{2}\rho\upsilon^2$

Υψομετρική πίεση μηδέν ($h = 0$): $p'_\upsilon = 0$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli:

$$p_\sigma + p_\delta + p_\upsilon = p'_\sigma + p'_\delta + p'_\upsilon$$

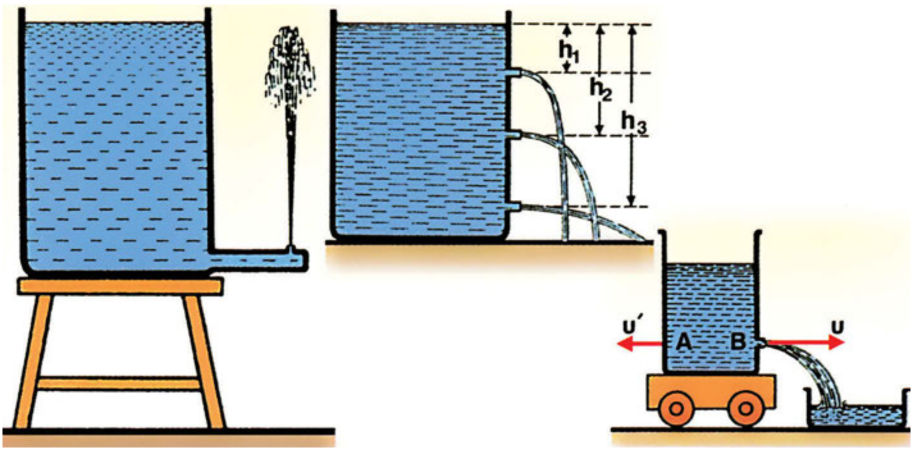
ή $$p_\alpha + 0 + \rho \cdot gh = p_\alpha + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + 0.$$

Τελικά:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gh}} \qquad (7.15)$$

Η σχέση (7.15) εκφράζει το **θεώρημα Toricelli: "Η ταχύτητα με την οποία ρέει ιδανικό υγρό ύψους h από μικρό άνοιγμα μεγάλης δεξαμενής είναι ίση με την ταχύτητα ελεύθερης πτώσης μιας μάζας του υγρού από το ίδιο ύψος".**

Ας σχολιάσουμε με εξήγηση: Στην εικόνα 7.46 βλέπουμε τρία παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος Toricelli. Αιτιολογούμε όσα βλέπουμε βασιζόμενοι σε θεωρήματα που μελετήσαμε πρόσφατα (Toricelli) και παλιότερα (διατήρησης ορμής και ενέργειας).



Εικόνα 7.46: Παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος Toricelli

Παράδειγμα δυναμικής ιδανικού ρευστού: Σωλήνας παροχής φυσικού αερίου έχει την αρχή της εγκατάστασης διάμετρο 10mm και στην είσοδο σπιτιού διάμετρο 5mm. Αν η ταχύτητα εισαγωγής του αερίου στην οικιακή εγκατάσταση είναι 25 m/s να βρεθούν: α) πόση είναι η ταχύτητα εκροής του αερίου από την παραγωγή, β) πόση είναι η παροχή του φυσικού αερίου, γ) σε πόσο χρόνο η κατανάλωση φτάνει το 1 m³.

Λύση:

α) Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$, όπου A_1 A_2 οι διατομές στα δύο σημεία που μας ενδιαφέρουν, και $A = \pi r^2 = \pi\frac{\delta^2}{4}$

(r = ακτίνα και δ = διάμετρο σωλήνα).

Άρα: $\pi\frac{\delta^2}{4}\upsilon_1 = \frac{\pi\delta_1^2}{4}\upsilon_2$.

Τελικά: $\upsilon_2 = \upsilon_1\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2$.

Βρίσκουμε: $\upsilon_2 = 25\frac{m}{s}\cdot\left(\frac{5mm}{10mm}\right)^2 = 6,25\,m/s$.

β) $\Pi = A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$

Άρα $\Pi = \frac{\pi\delta_1^2}{4}\upsilon_1$.

Βρίσκουμε:

$$\Pi = 3,14\frac{(5mm)^2}{4}\cdot 25\frac{m}{s} = \frac{3,14\cdot 25}{4}\cdot 10^{-6}m^3\cdot 25\frac{m}{s} \cong 490\cdot 10^{-6}\frac{m^3}{s}.$$

γ) $\Pi = \frac{V}{t}$, άρα $t = \frac{V}{\Pi}$

Τελικά: $t = \dfrac{1m^3}{490\cdot 10^{-6}\frac{m^3}{s}} \cong 2040s \cong 34min$.

Πώς λύνουμε ασκήσεις δυναμικής ιδανικών ρευστών: Σε όλες τις περιπτώσεις ασκήσεων που αφορούν τη δυναμική των ιδανικών ρευστών βασιζόμαστε σε δυο νόμους:

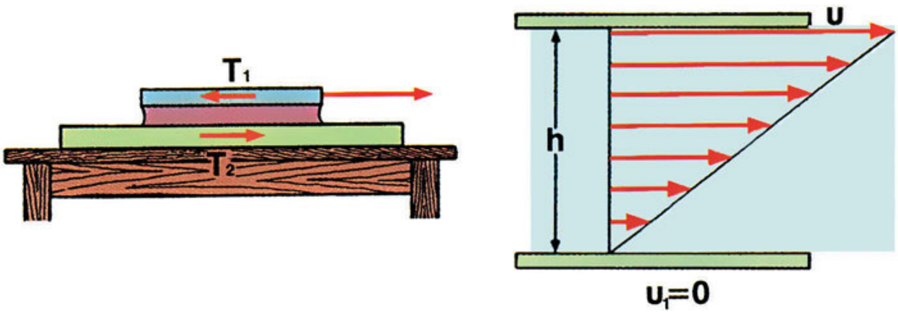
- **στο νόμο της συνέχειας:** Με αυτόν μπορούμε να συγκρίνουμε τις ταχύτητες του ρευστού σε δύο σημεία με διαφορετική διατομή σωλήνα.
- **το νόμο του Bernoulli:** Η ισότητα των ολικών πιέσεων σε όλα τα σημεία ιδανικού ρευστού μάς δίνει σχέση από την οποία βρίσκουμε το ζητούμενο μέγεθος. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι απλοποιημένη μορφή του νόμου Bernoulli είναι το θεώρημα Toricelli.

7.11 Δυναμική μη ιδανικών (πραγματικών) ρευστών

Στην προηγούμενη παράγραφο 7.10 αντιμετωπίσαμε τα ρευστά ως ιδανικά και τη ροή τους ως στρωτή. Και οι δύο παραδοχές ισχύουν σε αρκετές αλλά όχι σε όλες τις εφαρμογές δυναμικής ρευστών. Έχουμε παραλείψει έως τώρα τις δυνάμεις που ασκούν τα μόρια του ρευστού μεταξύ τους και τις δυνάμεις που δέχεται κάθε κινούμενο σώμα μέσα στα ρευστά. Μην ξεχνάμε ότι μιλάμε για σχετική κίνηση του ρευστού ως προς το στερεό.

7.11.1 Εσωτερική τριβή - Ιξώδες

Ας φανταστούμε μια εκτεταμένη ποσότητα υγρού μεταξύ δύο οριζόντιων πλακών. Διαλέγουμε υγρό παχύρρευστο (μέλι, γλυκερίνη κτλ.) το οποίο να ρέει δύσκολα (εικόνα 7.47α). Επιχειρούμε να μετακινήσουμε την πάνω πλάκα προς τα δεξιά και νιώθουμε κάποια αντίσταση στην προσπάθειά μας. Δεχόμαστε ότι το υγρό αποτελείται από πολύ μικρά ορθογώνια τμήματα, τα οποία μπορούμε να τα θεωρήσουμε για τη μελέτη μας ως αυτόνομα.



Εικόνα 7.47: Για τη μελέτη της εσωτερικής τριβής στα υγρά

Το πάνω τμήμα του υγρού, λοιπόν, ασκεί στην πάνω πλάκα τριβή T_1 αντίρροπη της ταχύτητάς της. Η αντίδραση της T_1 είναι μια δύναμη στο ανώτερο τμήμα με φορά προς τα δεξιά, η οποία το βοηθά να κινηθεί ακολουθώντας την πάνω πλάκα. Το αμέσως κατώτερο τμήμα του υγρού ασκεί τριβή T_2 στο τμήμα πάνω από αυτό κ.ο.κ.

Δημιουργείται, λοιπόν, μια κατάσταση όπου κάθε τμήμα του ρευστού δημιουργεί δυσκολίες στο αμέσως ανώτερο του και συγχρόνως βοηθιέται από αυτό να κινηθεί. Η ταχύτητα μειώνεται από στρώμα σε στρώμα προς τα κάτω και τα μόνα σημεία που είναι ακίνητα είναι αυτά που βρίσκονται σε επαφή με την ακίνητη κάτω πλάκα. Η κατανομή των ταχυτήτων δεχόμαστε ότι είναι αυτή της εικόνας 7.47 (β).

Πειραματικά αποδεικνύεται ότι, για να συνεχίζει η πάνω πλάκα με σταθερή ταχύτητα υ, πρέπει να ασκηθεί δύναμη F ίση με τη συνολική τριβή T που αναπτύσσεται ανάμεσα στα μετακινούμενα στρώματα. *(Ας σκεφτούμε: για όλα τα υπόλοιπα στρώματα υπάρχει δράση - αντίδραση που βρίσκονται μέσα στο υγρό, εκτός από τα δύο ακραία, ανώτερο και κατώτερο, όπου η μια δρα εντός και η άλλη εκτός υγρού, στις πλάκες).* Η τριβή T:

- αποδεικνύεται ανάλογη της επιφάνειας A των πλακών.
- αποδεικνύεται ανάλογη της μεταβολής της ταχύτητας του υγρού ανά μονάδα ύψους. (Εδώ η μεταβολή είναι: $\Delta\upsilon = \upsilon - 0 = \upsilon$ και το ύψος h).
- εξαρτάται από τη φύση του υγρού.

Η σχέση που συγκεντρώνει τις διαπιστώσεις αυτές είναι:

$$\boxed{T = \eta A \frac{\upsilon}{h}} \qquad (7.17)$$

όπου: **η = συντελεστής τριβής ή ιξώδες του υγρού,** που εκτός από τη φύση επηρεάζεται από τη θερμοκρασία και από τις τυχόν αλλοιώσεις του υγρού.

Μονάδα του η στο S.I. είναι το $1\dfrac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\left(\text{ή } 1\dfrac{\text{Ns}}{\text{m}^2}\right)$. Πιο γνωστή μονάδα είναι

το $1\,\text{poise} = 10^{-1}\,\dfrac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$ και το $\text{dekapoise} = 10\,\text{poise} = 1\dfrac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$.

Στα λιπαντικά του αυτοκινήτου κυριαρχεί η μονάδα Engler. Τα Engler (E) συνδέονται με το poise (n) σύμφωνα με την εμπειρική σχέση:

$$100\frac{\text{n}}{\rho} = 7{,}24\text{E} - \frac{6{,}25}{\text{E}}.$$

Στις προδιαγραφές των λιπαντικών θα δούμε τα εξής: Ρευστότητα: 15W/50. (Το "W" σημαίνει Winter - χειμώνας).

Αξίζει να ρωτήσουμε τι σημαίνουν οι τιμές αυτές και να αναρωτηθούμε γιατί η τιμή που αντιστοιχεί στο χειμώνα είναι μικρότερη.

Η τριβή που ασκεί το υγρό στο στερεό που κινείται μέσα σε αυτό εξαρτάται και από τη μορφή του στερεού. Σε μια σφαίρα π.χ. η τριβή είναι:

$$\boxed{\text{T} = 6\,\pi\,\text{n}\,\text{r}\,\upsilon} \qquad (7.18)$$

όπου r και υ = η ακτίνα και η ταχύτητα της σφαίρας αντίστοιχα **(νόμος Stokes).**

Ας πειραματιστούμε: Βρίσκουμε κάποιο γυάλινο σωλήνα μήκους 1m μήκος. Τον γεμίζουμε με λάδι κουζίνας. Παίρνουμε μια μικρή μεταλλική σφαίρα και την αφήνουμε ελεύθερη στην επιφάνεια του λαδιού. Προσέχουμε ότι, ενώ στην αρχή κάνει επιταχυνόμενη κίνηση, μετά συνεχίζει να πέφτει ομαλά. Θυμόμαστε ποιες δυνάμεις ενεργούν στην σφαίρα:

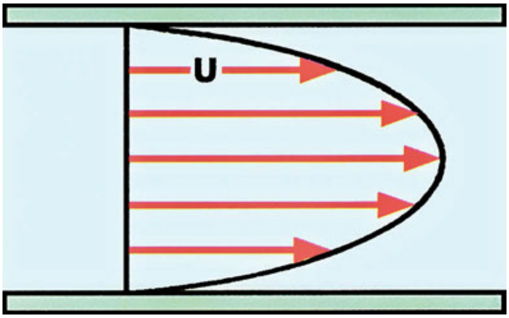
- το βάρος της Β.

- η άνωση Α από το υγρό.

- η τριβή Τ από το υγρό.

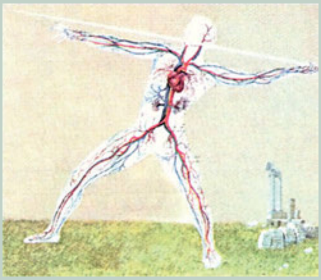
Οι δύο πρώτες δεν επηρεάζονται, φυσικά, από την ταχύτητα, ενώ η τρίτη ακολουθεί τη σχέση (7.18). Τις σχεδιάζουμε και εξηγούμε γιατί, τελικά, έχουμε ομαλή κίνηση.

Η εσωτερική τριβή και η τυρβώδης ροή



Εικόνα 7.48: Κατανομή ταχυτήτων σε στρωτή ροή

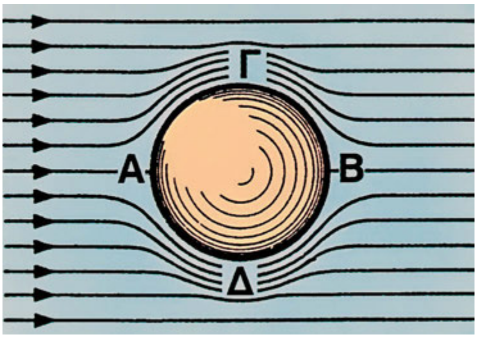
Οι επιπτώσεις της εσωτερικής τριβής στη διαμόρφωση της ροής είναι άμεσες. Στη **στρωτή ροή** δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα ρευστού έχει τη μορφή **φλέβας** και ότι η μορφή των γραμμών ροής είναι συμμετρική.



Το εσωτερικό κυκλοφορικό μας δίκτυο

Ας... περιαυτολογήσουμε: Το κυκλοφορικό δίκτυο του ανθρώπινου οργανισμού αποτελείται από «σωλήνες» με συνολικό μήκος... 96000km!. Το αίμα ταξιδεύει από την καρδιά με τις **αρτηρίες** και προς την καρδιά με τις **φλέβες.** Ακόμα πιο εντυπωσιακό είναι το πώς αντιδρά το αίμα στο νόμο της βαρύτητας με τη βοήθεια της καρδιάς, που δουλεύει σαν αντλία.

Ας δούμε την κατανομή των ταχυτήτων στη στρωτή ροή, εικόνα 7.48 και πώς αντιμετωπίζει το υγρό σε στρωτή ροή τα στερεά (πλάκα και σφαίρα) που βρίσκονται μέσα σε αυτό, εικόνα 7.49. Είναι φανερό ότι στα σημεία Γ, Δ με τη μικρή διατομή της ροής η ταχύτητα είναι η μεγαλύτερη, ενώ στα Α, Β τη δεχόμαστε πρακτικά ίση με μηδέν (σημεία ανακοπής).



Εικόνα 7.49: Στρωτή ροή γύρω από πλάκα και σφαίρα

Αυτό το μοντέλο μπορεί ίσως να "σταθεί" για μικρές ταχύτητες του υγρού, ενώ σε μεγαλύτερες μοιάζει εξωπραγματικό. Αν η σφαίρα, π.χ., περιστρέφεται, δημιουργείται η κατανομή των ταχυτήτων του κυλιόμενου τροχού (κεφ. 5), και η ταχύτητα στο Γ είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στο Δ (θυμηθείτε: στο Γ έχουμε άθροισμα δύο ταχυτήτων, ενώ στο Δ τη διαφορά τους). Άρα: $υ_Γ > υ_Δ$ και, σύμφωνα με το νόμο Bernoulli, $p_Γ < p_Δ$. Στο κάτω μέρος της σφαίρας υπάρχει, λοιπόν, μεγαλύτερη πίεση από το πάνω, και η διαφορά πίεσης δημιουργεί δύναμη προς τα πάνω, που λέγεται **δυναμική άνωση** Α. Πιο κάτω θα μας απασχολήσει αρκετά η δύναμη αυτή.

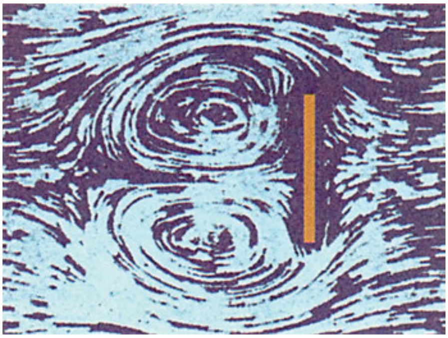
Έχουμε, όμως, και άλλες εξελίξεις. Λόγω της παρουσίας της εσωτερικής τριβής οι ταχύτητες δεν είναι όσο τις περιμένουμε αλλά μικρότερες. Δεν είναι, λοιπόν, αρκετή η τιμή τους, ώστε να συνεχιστεί η ροή. Τότε, το υγρό αναδιπλώνεται και αποσπάται στρόβιλος. Ο στροβιλισμός είναι ένα από τα χαρακτηριστικά της τυρβώδους ροής, η οποία, γι' αυτό, λέγεται και **στροβιλώδης.** Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της ροής αυτής είναι:

● η ταχύτητα σε κάθε σημείο μεταβάλλεται με το χρόνο.

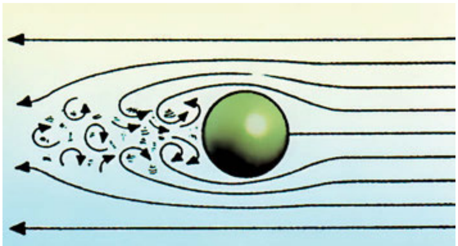
● η κατανομή των ταχυτήτων σε σωλήνα δείχνει απότομη μεταβολή στα άκρα και σχεδόν σταθερότητα γύρω από τον άξονα του σωλήνα.

● κάθε στρόβιλος είναι κλειστή "καμπύλη".

Η πραγματική ροή γύρω από πλάκα και σφαίρα φαίνεται στην εικόνα 7.50.



(α)



(β)

Εικόνα 7.50: Πραγματική ροή γύρω από πλάκα και σφαίρα

Παράδειγμα δυναμικής πραγματικού υγρού: Σφαίρα από μόλυβδο ($ρ_1$ = 11300kg/m^3) με ακτίνα r = 2mm αποκτά, τελικά, οριακή (σταθερή) ταχύτητα υ = 15cm/s, αν αφεθεί ελεύθερη σε παχύρρευστο υγρό πυκνότητας $ρ_2$ = 800kg/m^3. Να υπολογιστεί ο συντελεστής ιξώδους του υγρού (g = 10m/s^2).

Λύση:

Στη σφαίρα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος της $B = ρ_1 g V = \frac{4}{3}πr^3 ρ_1 g$ (όγκος σφαίρας: $V = \frac{4}{3}πr^3$)

- η άνωση από το υγρό $A = ρ_2 g V = \frac{4}{3}πr^3 ρ_2 g$

- η εσωτερική τριβή $T = 6πηrυ$ (τύπος Stokers).

Όταν η σφαίρα φτάσει στην οριακή ταχύτητα, έχουμε: ΣF=0,

B-A-T=0

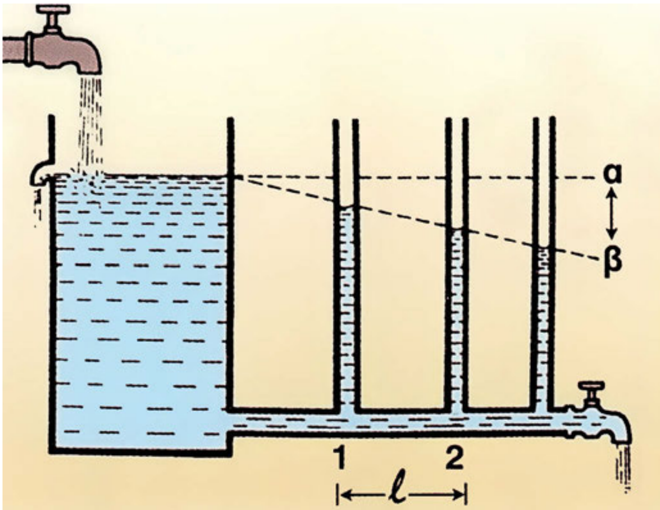
ή $$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g - 6\pi n r \upsilon = 0.$$

Τελικά: $$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_1 - \rho_2) r^2}{\upsilon}.$$

Βρίσκουμε $$\eta = \frac{2}{9}\cdot\frac{(11300-800)\frac{kg}{m^3}\cdot\left(2\cdot 10^{-3} m\right)^2}{0{,}15\frac{m}{s}} = 0{,}56\frac{Ns}{m^2}.$$

7.11.2 Ροή πραγματικού ρευστού σε σωλήνα

Στην εικόνα 7.51 φαίνεται διάταξη με την οποία παρακολουθούμε τη ροή του υγρού. Αν η προς τα δεξιά βρύση είναι κλειστή και κρατήσουμε σταθερή τη στάθμη στη δεξαμενή, έχουμε εκδήλωση υδροστατικού φαινομένου. Άρα, σύμφωνα με την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων η ελεύθερη επιφάνεια είναι στο ίδιο ύψος στη δεξαμενή και στους τρεις κατακόρυφους σωλήνες.



Εικόνα 7.51: Διάταξη για την παρακολούθηση της ροής υγρού

Ανοίγουμε την προς τα δεξιά βρύση, ώστε να δημιουργηθεί ροή σταθερής, μικρής παροχής. Παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από τη δεξαμενή, μικραίνει η στατική πίεση. Αν αυξήσουμε μάλιστα την παροχή, η διαφορά στις στατικές πιέσεις μεγαλώνει. Η σχέση που συνδέει τη διαφορά πίεσης p_1 - p_2 σε δύο σημεία 1 και 2 που απέχουν οριζόντια κατά ℓ σε σωλήνα ακτίνας r είναι:

$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{8n\ell\Pi}{\pi r^4}} \qquad (7.18)$$

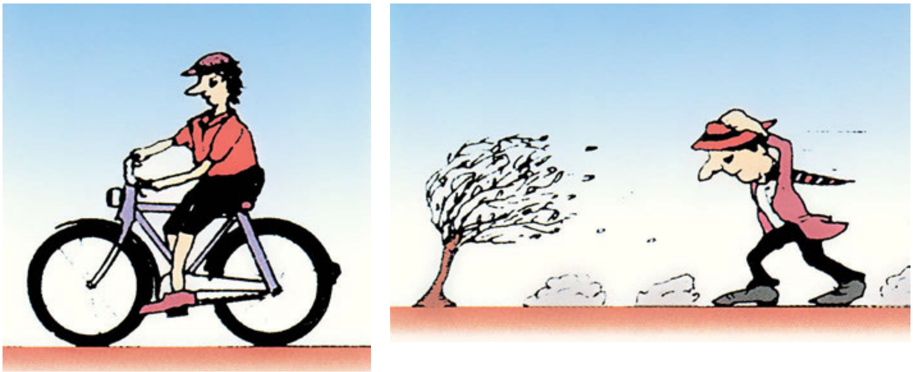
όπου: Π = παροχή
n = συντελεστής ιξώδους
π = 3,14,

Η σχέση (7.18) είναι μια μορφή του νόμου Poiseuille.

Ας αναρωτηθούμε: Τι θα συμβεί, αν κάποιος οριζόντιος σωλήνας είναι ανοικτός στα δυο άκρα;

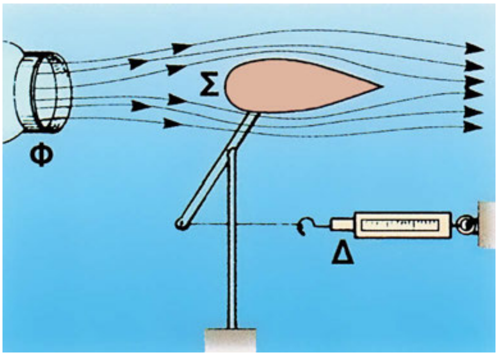
7.11.3 Η αντίσταση του αέρα

Αντίσταση ασκείται, γενικά, από ρευστό σε οτιδήποτε βρίσκεται μέσα σε αυτό, αρκεί να έχει διαφορετική ταχύτητα από το ρευστό. Ειδικά για τον αέρα, η αντίσταση συμμετέχει σημαντικά στη συμπεριφορά κάθε κινητού μέσα σ' αυτόν. Έχουμε πάρει, κιόλας, μια "γεύση" στην παράγραφο που αναφέρεται στο βάρος. Εκεί αναφέρθηκε ότι η παρουσία της αντίστασης δεν επιτρέπει σε όλα τα σώματα να φτάνουν συγχρόνως στο έδαφος (ενώ έχουν αφεθεί από το ίδιο ύψος).



Εικόνα 7.52: Καθένας νοιώθει την αντίσταση του αέρα με διαφορετικό τρόπο

Ο ποδηλάτης και ο πεζός της εικόνας 7.52 νιώθουν έντονα την αντίσταση του αέρα και, ο δεύτερος όπως φαίνεται, ταλαιπωρείται περισσότερο. Μια πρώτη εκτίμηση είναι ότι αυτό οφείλεται στη μεγάλη ταχύτητα του ανέμου και στη σχετικά μικρή (και μάλιστα αντίθετης φοράς) δική του.



Εικόνα 7.53: Για τη μέτρηση της αντίστασης του αέρα

Με τη συσκευή της εικόνας 7.53 μπορούμε να μετράμε την αντίσταση του αέρα κάτω από διάφορες συνθήκες. Η μέτρηση της αντίστασης $T_α$ είναι εύκολη, αφού σε κάθε περίπτωση ισούται με την ένδειξη του δυναμόμετρου (προσέξτε τη διάταξη και εξηγήστε γιατί).

Πείραμα 1ο

Με τη βοήθεια του φυσητήρα Φ ρυθμίζουμε την ταχύτητα υ του αερίου. Το σώμα Σ είναι πάντα το ίδιο. Παρατηρούμε ότι σε πολύ μικρές ταχύτητες η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας, ενώ σε μεγαλύτερες τιμές η αντίσταση είναι ανάλογη του $υ^2$.

Συμπέρασμα: **η αντίσταση $T_α$ είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του αερίου.**

Πείραμα 2ο

Κρατάμε σταθερή την ταχύτητα ροής του αέρα. Χρησιμοποιούμε σώματα με ίδιο σχήμα και υλικό αλλά με διαφορετική μετωπική επιφάνεια Α. (Είναι η μπροστινή *επιφάνεια* κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας).

Συμπέρασμα: **η αντίσταση $T_α$ είναι ανάλογη της μετωπικής επιφάνειας Α.**

Πείραμα 3ο

Διατηρούμε σταθερή την ταχύτητα του αερίου και τη μετωπική επιφάνεια, αλλά επιλέγουμε σώματα με διαφορετικό σχήμα (του οπίσθιου τμήματός τους).

Συμπέρασμα: **το σχήμα του οπίσθιου τμήματος επηρεάζει την τιμή της αντίστασης $T_α$.**

Πείραμα 4ο

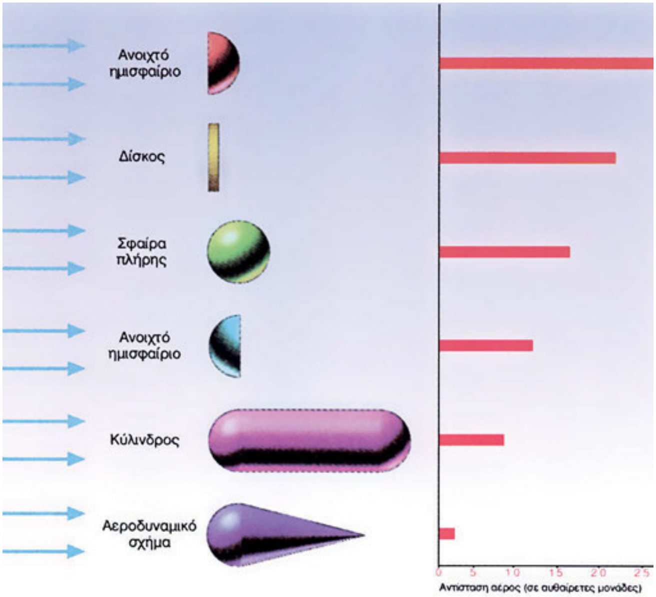
Κρατάμε όλα τα άλλα σταθερά (ταχύτητα αερίου υ, μετωπική επιφάνεια, σχήμα του σώματος) και αλλάζουμε την πυκνότητα ρ του αερίου.

Συμπέρασμα: **η αντίσταση Τ είναι ανάλογη της πυκνότητας ρ του αερίου.**

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα σχετικά με την αντίσταση οδηγούν στη σχέση:

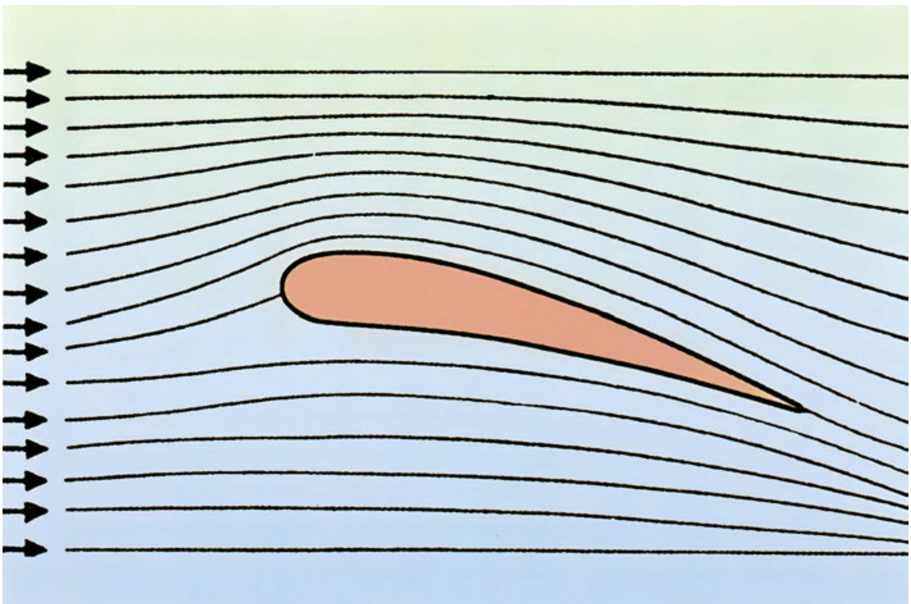
$$\boxed{T_α = k\,Aυ^2} \qquad (7.19)$$

όπου k = συντελεστής αντίστασης, που εξαρτάται από το σχήμα του σώματος (κυρίως του οπίσθιου τμήματός του) και από την πυκνότητα του αερίου. Η σχέση (7.19) ισχύει και για τον αέρα.



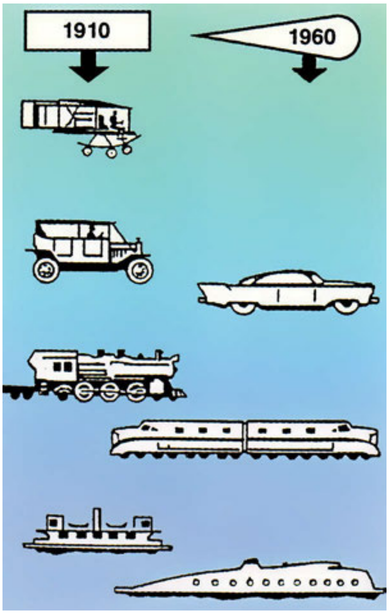
Εικόνα 7.54: Ο ρόλος του σχήματος στο οπίσθιο τμήμα για την αντίσταση του αέρα

Στην εικόνα 7.54 φαίνεται η μεγάλη σημασία που έχει το σχήμα του οπίσθιου τμήματος σωμάτων για την αντίσταση του αέρα σε αυτά. (Επιλέχθηκαν σώματα με ίδια μετωπική επιφάνεια).



Εικόνα 7.55: Γραμμές ροής σε αεροδυναμικό σχήμα

Το τελευταίο σχήμα παρουσιάζει σχεδόν μηδενική αντίσταση και λέγεται **αεροδυναμικό**. *(Προσέξτε την ομοιότητά του με το αντίστοιχο των ψαριών. Η φύση πάντα προνοεί...).* Για το σχήμα αυτό σχεδιάστηκαν οι γραμμές ροής στην εικόνα 7.55. Παρατηρούμε ότι το σχήμα αυτό αποτελεί βελτίωση του σφαιρικού σχήματος της εικόνας 7.50(β). Αξίζει να προσέξουμε τη διαφορά στο στροβιλισμό των δυο σωμάτων.



Εικόνα 7.56: Μορφές αεροδυναμικών σχημάτων

Στην εικόνα 7.56, τέλος, θυμίζουμε τις τυπικές μορφές αεροδυναμικών σχημάτων για τις δύο δεκαετίες - σταθμούς της αυτοκινητοβιομηχανίας: το 1910 (“τα πρώτα βήματα”) και το 1960 (“η μεγάλη έκρηξη παραγωγής”). *(Με την ευκαιρία, ας επιχειρήσουμε μια μικρή ιστορική αναδρομή: οι άλλες δύο περίοδοι ιστορικής σημασίας για το αυτοκίνητο ήταν: τα πρώτα χρόνια της δεκαετίας του ‘70 και η αρχή της δεκαετίας του ‘90. Στην πρώτη είχαμε την εκτίναξη της τιμής του πετρελαίου. Αυτή έφερε αναγκαστικά την αλλαγή νοοτροπίας όσον αφορά κατασκευές (ελαφρά αμαξώματα για μικρότερη κατανάλωση καυσίμου). Στη δεύτερη περίοδο εμφανίστηκαν τα καταλυτικά αυτοκίνητα).*

Η αντίσταση του αέρα και η πτώση των σωμάτων

Σε κάθε σώμα που πέφτει στον αέρα ασκούνται οι παρακάτω τρεις δυνάμεις:

- το βάρος του Β $B = \rho_\sigma g V$ (ρ_σ = πυκνότητα σώματος)
- η άνωση Α $A = \rho_\alpha g V$ (ρ_α = πυκνότητα αέρα)
- η αντίσταση T_α $T_\alpha = kAu^2$.

Για σχετικά ελαφρά σώματα η κίνηση μπορεί να εξελιχθεί σε ομαλή. Αυτό συμβαίνει, επειδή, ενώ οι δυνάμεις Β, Α είναι σταθερές, η αντίσταση T_α συνέχεια αυξάνεται στην πρώτη φάση της κίνησης. Κάποτε, λοιπόν, αν οι συνθήκες το επιτρέπουν, μπορεί να φτάσουμε σε συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη ίση με μηδέν. Άρα:

$$\boxed{B\text{-}A\text{-}T_{\alpha}=0}$$

Αν μάλιστα θεωρήσουμε αμελητέα την άνωση A (λόγω της πολύ μικρής πυκνότητας του αέρα), γράφουμε:

$$B\text{-}T_{\alpha}=0$$

ή

$$\boxed{mg\text{-}kA\upsilon^2=0}$$

και

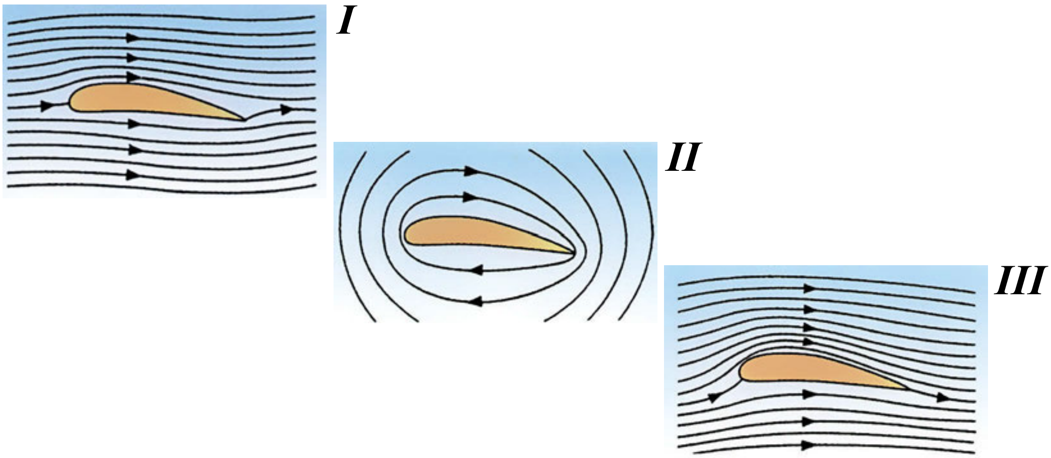
$$\boxed{\upsilon=\sqrt{\frac{mg}{kA}}} \qquad (7.20)$$

Τότε η υ λέγεται **ορική ή οριακή ταχύτητα.** Υποτίθεται ότι για όλα αυτά πρέπει να υπάρχουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις. Στο βαρύ σώμα, αν αυτό αφεθεί από μικρά σχετικά ύψη, δεν προλαβαίνουν να συμβούν όλα αυτά. Ιδανικό για τέτοιες εξελίξεις είναι το αλεξίπτωτο, εικόνα 7.57. Η πολύ μεγάλη επιφάνεια του ανοικτού αλεξίπτωτου δημιουργεί μεγάλη αντίσταση T_{α} και, έτσι, πολύ γρήγορα εξουδετερώνει το βάρος του αλεξιπτωτιστή.

Εικόνα 7.57: Η πτώση του αλεξίπτωτου

7.11.4 Η δυναμική άνωση και η κίνηση του αεροπλάνου

Κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τη δυναμική άνωση αναφέρθηκαν με αφορμή τη σφαίρα του σχ. 7.49. Εκεί φάνηκε ότι οφείλεται σε διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην πάνω επιφάνεια του στερεού.



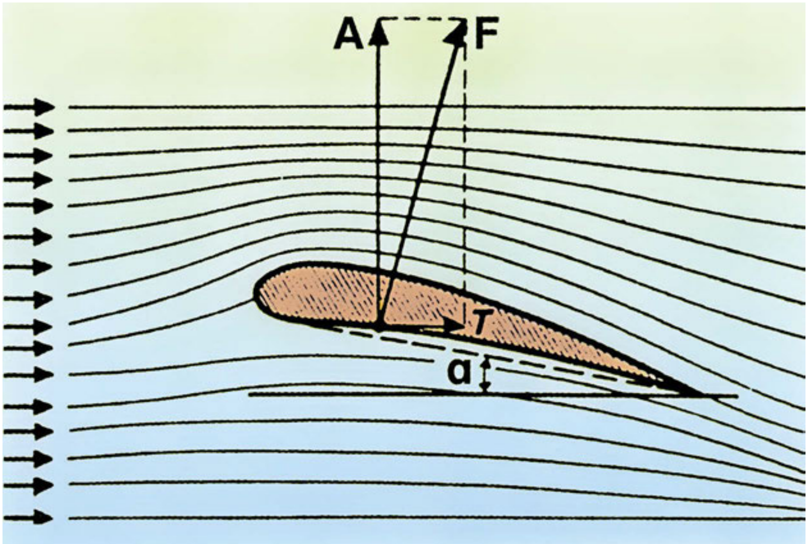
Εικόνα 7.58: Ροή γύρω από την πτέρυγα αεροπλάνου

Στην εικόνα 7.58 φαίνεται ο επηρεασμός της πτέρυγας αεροπλάνου από τις δυο ροές:

* τη στρωτή ροή 7.58(I)

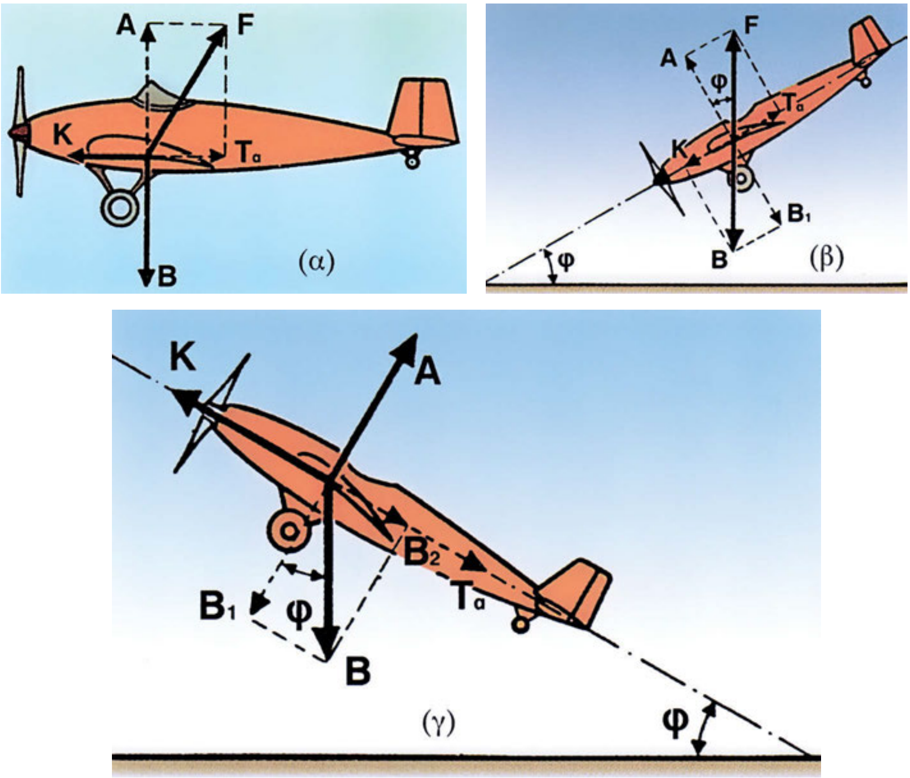
* τη ροή λόγω τριβών, την οποία ονομάσαμε τριβώδη 7.58(II).

Η σύνθεση των δυο αυτών ροών δίνει την εικόνα 7.58 (III). Όπως βλέπουμε, υπάρχει αραίωμα γραμμών (μεγάλη διατομή) κάτω από την πτέρυγα και πύκνωμα γραμμών (μικρή διατομή) πάνω από αυτήν. Ο νόμος της συνέχειας προβλέπει μικρή ταχύτητα ροής κάτω από την πτέρυγα και μεγάλη ταχύτητα πάνω από αυτήν. Ο νόμος του Bernoulli οδηγεί στο συμπέρασμα, τελικά, ότι έχουμε μεγάλη πίεση κάτω από την πτέρυγα και μικρή πάνω από αυτήν. Η διαφορά πίεσης δημιουργεί τη δυναμική άνωση A, εικόνα 7.59.



Εικόνα 7.59: Η εμφάνιση της δυναμικής άνωσης

Η δυναμική άνωση Α μπορεί να θεωρηθεί αντίστοιχη της κατακόρυφης δύναμης που ασκεί το έδαφος σε σώμα. Η αντίσταση $T_α$ είναι, επίσης, αντίστοιχη με την τριβή στα στερεά. Η συνισταμένη των Α, $T_α$, δηλαδή η F, λέγεται αεροδύναμη. Η αντίσταση $T_α$ στα κινητά, γενικά, λέγεται και οπισθέλκουσα και εξουδετερώνεται από τη δύναμη του κινητήρα (προωστική).



Εικόνα 7.60: Στρατιωτικό αεροπλάνο στις τρεις φάσεις πτήσης του

Στην εικόνα 7.60 έχουμε κανονική πτήση (α), προσγείωση (β) και απογείωση (γ) στρατιωτικού αεροπλάνου. Για τις δυνάμεις που φαίνονται στις εικόνες έχουμε μιλήσει (Κ είναι η δύναμη από τον κινητήρα). Ας ασχοληθούμε με την ομαλή κίνηση του αεροπλάνου. Η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα κίνησης και στον κάθετο σε αυτόν είναι μηδέν.

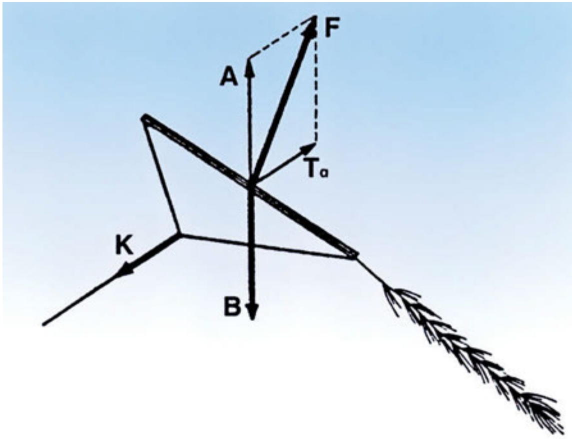
Οριζόντια πτήση: $K = T_α$ και $A = B$

Προσγείωση: $K + B_2 = T_α$ $(K = T_A - B_2)$ και $A = B_1$

Απογείωση: $K = B_2 + T_α$ και $A = B_1$

Παρατηρούμε ότι στην προσγείωση η προωθητική δύναμη Κ είναι μικρότερη από την αντίστοιχη σε οριζόντια πτήση. Άρα, ο κινητήρας τότε υπολειτουργεί (αν έχει δύο κινητήρες το αεροπλάνο, λειτουργεί μόνο ο ένας).

Στην απογείωση η Κ είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη σε οριζόντια θέση. Ο κινητήρας λειτουργεί σε οριακά υψηλές συνθήκες.



Εικόνα 7.61: Η πτήση του χαρταετού

Η αεροδυναμική και τα "κούλουμα". Στην εικόνα 7.61 φαίνεται η κατανομή των δυνάμεων στο χαρταετό, που κατά το έθιμο "πετάμε" την Καθαρή Δευτέρα. Είναι φανερό ότι προωστική δύναμη Κ είναι η αντίδραση της δύναμης που ασκεί όποιος χειρίζεται το σχοινί. Η δύναμη Κ είναι αντίθετη της αντίστασης, και το βάρος αντίθετο της δυναμικής άνωσης.

Ας αναρωτηθούμε: Γιατί, όταν υπάρχει άπνοια, τρέχει ο χειριστής του χαρταετού, για να ανυψωθεί ο χαρταετός;

Πώς λύνουμε ασκήσεις με πραγματικά ρευστά: Οι ασκήσεις αυτές περιλαμβάνουν το ιξώδες και την αντίσταση του αέρα.

● **Ασκήσεις με εσωτερική τριβή:** Συνήθως αφορούν την κίνηση σφαίρας μέσα σε ρευστό. Τότε χρησιμοποιούμε το νόμο του Stokes. Η κίνηση της σφαίρας καθορίζεται από τη σχέση των δυνάμεων: βάρος, άνωση και αντίσταση. Η άσκηση θα αφορά, πάντα, την ομαλή κίνηση της σφαίρας, άρα $\Sigma F=0$. Η σχέση αυτή μας βοηθά να βρούμε το ζητούμενο μέγεθος.

● **Ασκήσεις με αντίσταση του αέρα:** Χρησιμοποιούμε τη σχέση $T_\alpha=kA\upsilon^2$ και εξετάζουμε τη συνθήκη ομαλής κίνησης: $\Sigma F=0$.

Παράδειγμα δυναμικής πραγματικού αερίου: Δύο σφαιρίδια, το ένα από ξύλο (ρ_1 = 200kg/m^3) και το άλλο από σίδηρο (ρ_2 = 7800kg/m^3), αφήνονται στον αέρα από μεγάλο ύψος. Αν η διάμετρός τους είναι 2cm, να βρεθούν οι οριακές ταχύτητές τους (ο συντελεστής αντίστασης k για τη σφαίρα είναι k = 1,21 kg/m^3).

Λύση:

Οριακή ταχύτητα αποκτούν οι σφαίρες, όταν: $B = T_\alpha$ (T_α = αντίσταση αέρα) ή $$\rho\, g\, V = k\, A\, \upsilon^2.$$

όπου $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ και $A = 4\pi r^2$ ο όγκος και η μετωπική επιφάνεια της σφαίρας. Άρα $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = k4\pi r^2 \upsilon^2$ Τελικά : $\upsilon = \sqrt{\frac{\rho r g}{3k}}$.

Βρίσκουμε:

Για την ξύλινη σφαίρα:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{200\frac{kg}{m^3}\cdot 10^{-2}m\cdot 10\frac{m}{s^2}}{3\cdot 1,21\frac{kg}{m^3}}} \cong 2,35\frac{m}{s}.$$

Για τη σιδερένια σφαίρα:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{7800\frac{kg}{m^3}\cdot 10^{-2}m\cdot 10\frac{m}{s^2}}{3\cdot 1,21\cdot\frac{kg}{m^3}}} = 10,5\frac{m}{s}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Για τις περιπτώσεις που χρειάζεται η τιμή του g τη θεωρούμε ίση με $10m/s^2$).

7.1 Ασχοληθείτε με τα ερωτήματα και με τους προβληματισμούς που βρίσκονται διασκορπισμένα μέσα στο κείμενο του κεφαλαίου.

7.2 Να συμπληρωθούν οι προτάσεις:

α: Τα υγρά έχουν ελαστικότητα .... , ενώ τα αέρια έχουν ελαστικότητα .... και ....

β: Δύτης κατεβαίνει στο ίδιο βάθος στη λίμνη Βουλιαγμένης και θάλασσα του Σαρωνικού. Η πίεση που δέχεται είναι μεγαλύτερη στη .... παρά στη .... Αυτό συμβαίνει, επειδή η .... της λίμνης είναι .... από εκείνη της θάλασσας.

γ: Στα υδραυλικά πιεστήρια ασκούμε .... δύναμη στο .... έμβολο και δημιουργούμε .... δύναμη στο .... έμβολο.

δ: Στα σημεία όπου ένας σωλήνας είναι στενός, η ταχύτητα είναι .... και η στατική πίεση ....

7.3 Ξύλινη και μεταλλική σφαίρα έχουν ίδια ακτίνα. Αν τις βυθίσετε στο νερό μιας πισίνας, να συγκρίνετε τις ανώσεις που δέχονται.

7.4 Πλοίο πλέει σε ποτάμι και στη συνέχεια προχωρά στη θάλασσα, όπου συνεχίζει το ταξίδι του. Δέχεται ίδια άνωση στα δύο υγρά; Πώς εξηγείτε το γεγονός ότι όλα εξελίσσονται ομαλά;

7.5 Διαθέτετε κόσμημα που υποτίθεται ότι είναι ασημένιο. Επίσης, έχετε δυναμόμετρο και ποτήρι με νερό. Πώς θα διαπιστώσετε ότι το κόσμημα είναι γνήσιο;

7.6 Θέλετε να ελέγξετε αν κάποιο μεταλλικό αντικείμενο είναι συμπαγές ή κοίλο ("κούφιο"). Έχοντας δυναμόμετρο και ποτήρι με νερό πώς μπορείτε να εργαστείτε; Αν διαπιστώσετε την ύπαρξη κοιλότητας, πώς θα υπολογίσετε τον όγκο της;

7.7 Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν (παύλες) από τον παρακάτω πίνακα:

Σώμα	Μάζα g	Μήκος cm	Πλάτος cm	Ύψος cm	Διάμετρος βάσης cm	Ακτίνα σφαίρας cm	Πυκνότητα kg/m^3	Ειδικό βάρος N/m^3
Α	156	1	2	10			-	-
Β	113			20	2,5		-	-
Γ	114					-	11400	-
Δ	-	2	3	5			-	780
Ε	125			7, 5	-		2500	-

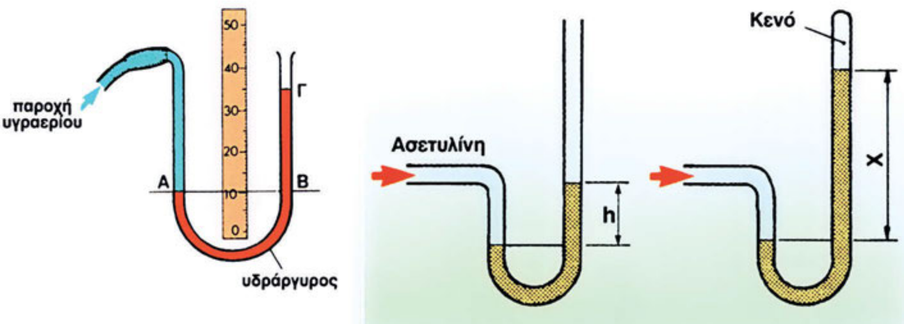
7.8 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και γιατί;

α: Ο παγοδρόμος φορά παπούτσια με κατακόρυφη λεπίδα στη βάση για να ασκεί μεγάλη δύναμη στην παγωμένη πίστα.

β: Τα υγρά απορρυπαντικά ασκούν στη βάση των ισοϋψών δοχείων που τα περιέχουν ίδια δύναμη.

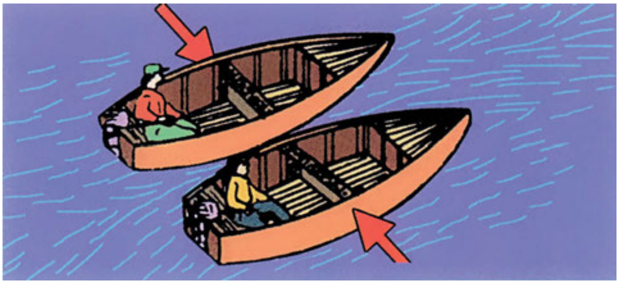
γ: Το ύψος υδραργυρικής στήλης σε συγκοινωνούντα δοχεία είναι 13,6 φορές μεγαλύτερο από το ύψος της υδάτινης.

δ: Όταν επιδιώκουμε μεγάλες στατικές πιέσεις σε σωλήνες, πρέπει να επιλέγουμε περιοχές με μεγάλη διατομή.



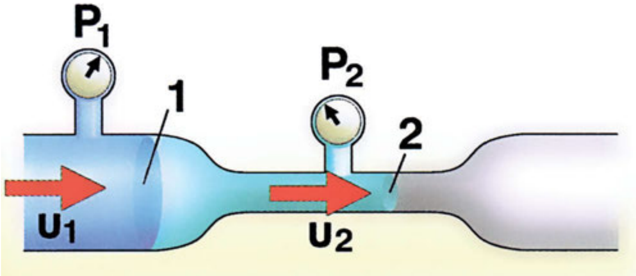
Εικόνα 7.62: Για τον υπολογισμό πιέσεων

7.9 Εξηγήστε τη λειτουργία των διατάξεων στην εικόνα 7.62. Με την προϋπόθεση ότι το σκούρο υγρό είναι Hg να υπολογίσετε την πίεση των αερίων που συμμετέχουν.



Εικόνα 7.63: Το πλησίασμα δεν κάνει καλό...

7.10 Βλέπετε κίνδυνο σύγκρουσης για τις βάρκες της εικ. 7.63; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Εικόνα 7.64: Για το υδραυλικό πιεστήριο

7.11 Οι διάμετροι $δ_1$, $δ_2$ των διατομών της εικόνας 7.64 έχουν σχέση $δ_1 = 3δ_2$. Να συγκρίνετε τις ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$, καθώς και τις ενδείξεις p_1, p_2 των οργάνων.

7.12 Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν (παύλες) στον παρακάτω πίνακα (τα σημεία 1,2,... βρίσκονται μέσα στον ίδιο οριζόντιο σωλήνα νερού $ρ = 10^3 kg/m^3$). Συμβουλή: ***αρχίστε από το σημείο 3 και θυμηθείτε κάποιους νόμους...***

Σημείο	Ακτίνα r cm	Διατομή A cm^2	Ταχύτητα υ m/s	Παροχή lt/s	Δυναμική πίεση $p_δ$ N/m^2	Στατική πίεση $P_σ$ N/m^2	Ολική πίεση $P_{ολ}$ N/m^2
1	1,5	-	-	-	-	-	-
2	-	3,6	-	-	-	-	-
3	1,0	-	2	-	-	-	-
4	0,8	-	-	-	-	10^5	-
5	1,2	-	-	-	-	-	-

7.13 Εξηγήστε τα παρακάτω:

α. Αρχές Αυγούστου οι ταξιδιώτες του Αιγαίου βλέπουν μπουκάλια γεμάτα λάδι να επιπλέουν με επιθυμητή κατεύθυνση προς την Τήνο. Πώς επιπλέουν;

β: Πώς λειτουργούν το σταγονόμετρο και το ιατρικό πιεσόμετρο;

γ: Γιατί στην άπνοια μιας Καθαρής Δευτέρας τραβάμε συνέχεια το σχοινί του χαρταετού, για να ανυψωθεί;

δ: Γιατί λέμε ότι στην προσγείωσή του το αεροπλάνο ταλαιπωρείται από τα ρεύματα του αέρα περισσότερο από ότι στην απογείωση;

7.14 Χαρακτηρίστε με σωστά (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α: Οι αρχές Pascal και Αρχιμήδη ισχύουν μόνο στα ιδανικά ρευστά.

β: Η άνωση είναι δύναμη ηρεμίας από το υγρό στο στερεό, ενώ η δυναμική άνωση εμφανίζεται μόνο κατά τη σχετική κίνησή τους.

γ: Το λάδι έχει μεγαλύτερο ιξώδες το χειμώνα από ό,τι το καλοκαίρι.

δ: Αν διπλασιαστεί η ταχύτητα αυτοκινήτου, διπλασιάζεται η αντίσταση του αέρα σε αυτό.

ε: Ο δύτης δέχεται μεγαλύτερη πίεση όταν κινείται μέσα στη θάλασσα, από αυτήν που δέχεται όταν είναι στάσιμος.

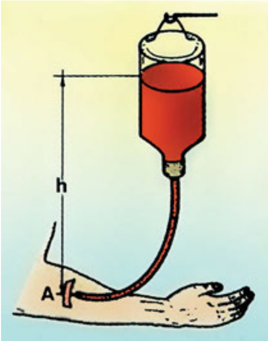
7.15 Με τη βοήθεια του νόμου Bernoulli εξηγήστε γιατί υπάρχει κίνδυνος να αρπάξει σφοδρός άνεμος τη στέγη σπιτιού. *(Θυμηθείτε τη λαϊκή έκφραση αγανάκτησης: "Θεέ μου, γιατί αφήνεις καρφωμένα τα κεραμίδια στη στέγη!!...").*

7.16 Το λάστιχο σύνδεσης στο ψυγείο αυτοκινήτου (κολάρο) έχει διάμετρο δ = 4cm. Από βλάβη του ανεμιστήρα (βεντιλατέρ) και από την υπερθέρμανση που ακολούθησε τρύπησε σε σημείο που βρίσκεται 20cm κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής νερού. Το άνοιγμα είχε διάμετρο 5mm. α) Με ποια ταχύτητα εκρέει αρχικά το νερό; (Γιατί μόνο αρχικά;). β) Αν το ψυγείο δέχεται 1,5lit νερού (δική μας εκτίμηση), σε πόση ώρα θα αδειάσει το ψυγείο; (Ας δεχτούμε ότι η παροχή μειώνεται με σταθερό ρυθμό μέχρι να μηδενιστεί)

7.17 Η πίεση καρδιάς για έφηβο βρέθηκε 8. Εκτιμήστε αποστάσεις και βρείτε πόση πίεση υπάρχει στο πέλμα του ποδιού και στον εγκέφαλο (για το αίμα ρ = 1055 kg/m^3).

7.18 Σε υδραυλικό πιεστήριο η σχέση διαμέτρου στα δύο έμβολα είναι 1:10. Η μέγιστη δύναμη που ασκούμε είναι 50kp και η μετατόπιση 10cm. Να βρεθούν: α) το μέγιστο φορτίο που μπορεί να ανυψωθεί, β) η σχέση μετατοπίσεων, έργων και πιέσεων.

7.19 Στην εικόνα 7.65 φαίνεται η μετάγγιση ενδοφλέβιου ορού για χειρουργημένο ασθενή σε νοσοκομείο. Αν στο σημείο Α η ολική πίεση δεν πρέπει να ξεπερνά τα 80 Torr και η πυκνότητα του ορού θεωρηθεί ίση με αυτήν του νερού, α) να βρεθεί από ποιο ύψος h πρέπει να αρχίσει η μετάγγιση ώστε η στατική πίεση να μην ξεπεράσει τα 60mm Hg, β) αν η ακτίνα κάθε (υποτίθεται σφαιρικής) σταγόνας που πέφτει είναι 1,5mm και ο ρυθμός εκροής είναι 1Hz, να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται, για να αδειάσει το μπουκάλι του ορού 0,5lit.



Εικόνα 7.65: Μετάγγιση ορού σε ασθενή

(Θυμηθείτε: όγκος σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, ***r =ακτίνα).***

7.20 Αεροπλάνο με συνολικό βάρος 8,6 tn και επιφάνεια πτερύγων $60m^3$ βρίσκεται στη φάση της απογείωσης. Αν για τον αέρα εκείνη τη στιγμή δεχτούμε συντελεστή αντίστασης $k = 0,4$ kg/m^3, σε ποια ταχύτητα απογειώνεται το αεροπλάνο; (Για εκείνη τη στιγμή δεχτείτε ότι το αεροπλάνο είναι ακόμα σε οριζόντια θέση).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αξιολόγηση τον μαθητών της Α΄ Λυκείου στο μάθημα της Φυσικής ΚΕΕ Αθήνα 1998.
2. Φυσική Δ΄ Επαγγελματικής Κατεύθυνσης (Λευκωσία-Κύπρος 1993).
3. D. SANG **Further Physics** (Cambridge University Press, 1996).
4. HALLIDAY, D., RESNICK, R. **Γενική Φυσική** (Ελληνική μετάφραση), Αθήνα 1966.
5. K. GIBBS **Advanced Physics** (Cambridge University Press, 1990).
6. KEN DOBSON **Physics** (Nelson Science, 1998).
7. M BRIMICOMBE **Physics in focus** (Nelson Science, 1990).
8. S. POPLE **Advanced Physics** (Oxford University Press, 1996).
9. SPIEGEL, M.R. **Πιθανότητες και Στατιστική** (Ελληνική μετάφραση), 1975.
10. SPEIEGEL, M.R. **Θεωρητική Μηχανική**. (Ελληνική μετάφραση) 1967.
11. WALTERJ., DODGE J., SCHAN U. **PSSC ΦΥΣΙΚΗ** (Ελληνική μετάφραση) 1992.
12. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΣ Κ.Δ. **Γενική Φυσική** Αθήνα 1976.
13. Β. ΦΩΤΕΙΝΟΠΟΥΛΟΣ **Μηχανική 1** Πειραιάς 1983.
14. Ι. ΑΘΑΝΑΣΑΚΗ **Θέματα Γενικής Φυσικής** Αθήνα 1980.
15. ΚΟΥΠΟΥΜΤΖΕΛΗΣ Θ., ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗΣ Σ. **Στοιχεία Φυσικής** Αθήνα 1960.
16. ΚΟΥΜΕΛΗΣ Χ.Ν. **Ασκήσεις Φυσικής** Τόμοι Α΄ και Β΄ Αθήνα 1967.
17. Ν.Α. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ **Εισαγωγή στη Φυσική** Θεσσαλονίκη 1975.
18. Σ. ΣΙΡΟΚΟΥ **Ασκήσεις Φυσικής** Αθήνα 1976.
19. **Basic Physics1 and 2 Modular Science** (Cambridge University Press, 1995).
20. **Μηχανική** Μαθήματα Φυσικής Πανεπιστημίου Berkley.
21. ΕΛΕΥΘΕΡΟΥΔΑΚΗΣ **Εγκυκλοπαιδικό Λεξικό**, Τόμος 2, Αθήνα 1930.
22. ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ “TIME-LIFE” International 1971.
23. Ι. ΓΑΡΟΦΑΛΑΚΗ **Τεχνολογική Φυσική** (Μακεδονικές Εκδόσεις 1994)
24. ΟΜΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Τ.Ε.Ι. Πειραιά **Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής Ι και ΙΙ** (Μακεδονικές Εκδόσεις 1996).
25. YOUNG H. **Φυσική** (Εκδόσεις Παπαζήση 1995).

26. A. ABBOTT **Ordinary Level Physics**.
27. GREEN **Technical Physics** (P. Hall Inc. N.J. 1984).
28. GREEN BERG **Physics for biology and premedical Students** (Students Company 1975).
29. Arons, B.A. 1992 **Οδηγός διδασκαλίας της Φυσικής**, ελληνική μετάφραση εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
30. Einstein A. and Infeld L. 1928/1978. **Η εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική** (ελληνική μετάφραση). Εκδόσεις Δωδώνη, Αθήνα.
31. Driver R., Squire A., Ruchworth P., Wood-Robinson 1994. **Making sence of secondary science research into children's ideas**. London and New York Routledge.
32. Hewitt G.P. 1992. **Οι έννοιες της Φυσικής**, τόμος Ι, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
33. Δαππόντες Ν., Κασσέτας Α., Μουρίκης Στ., Σκιαθίτης Μ., 1997. **Φυσική** Α΄ τάξη ΕΠΛ, ΓΕΛ, ΤΕΛ, Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα.

Κωδικός βιβλίου: 0-24-0563
ISBN 978-960-06-5208-6

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 24 0563 6