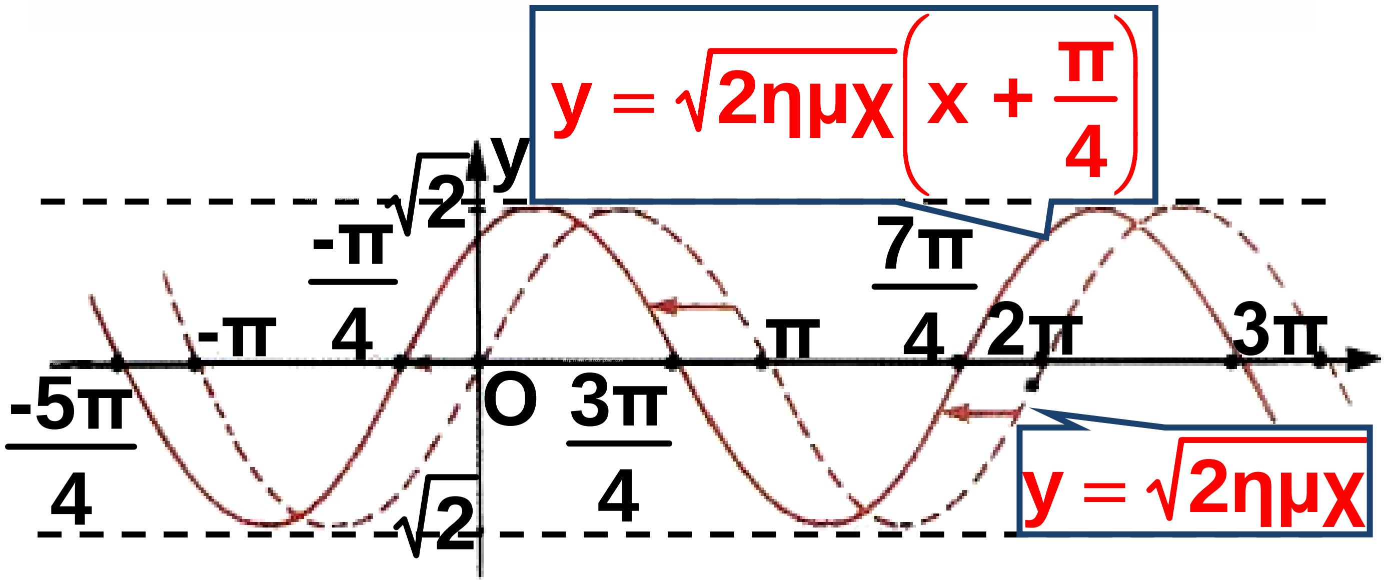
Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Τόμος 1ος

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Παπασταυρίδης Σταύρος
Πολύζος Γεώργιος
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός

Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος

Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου

Παπασταυρίδης Σταύρος

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος

Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

Σβέρκος Ανδρέας

Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π.Ι.

Σκούρας Αθανάσιος

Σύμβουλος του Π.Ι.

Πολύζος Γεώργιος

Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης

Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.

Ζώτος Ιωάννης *Καθηγητής Μαθ/κών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.*

Καλλιπολίτου Ευρυδίκη *Καθηγήτρια Μαθ/κών, Αποσπασμένη στο Π.Ι.*

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991
ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ:
1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998
Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ Λυκείου και είναι η συνέχεια της νέας συγγραφικής προσπάθειας για τα μαθηματικά του Λυκείου, που άρχισε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο το έτος 1989-90. Η προσπάθεια αυτή έχει ως σκοπό τον εκσυγχρονισμό των μαθηματικών βιβλίων των Λυκείων της χώρας μας με βάση τις αντιλήψεις που αναπτύχθηκαν στο διεθνή επιστημονικό χώρο για τη διδασκαλία των μαθηματικών κατά τη δεκαετία 1980-1990. Το περιεχόμενο του παρόντος τεύχους έχει σε γενικές γραμμές ως εξής:

Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται στην Τριγωνομετρία και είναι η συνέχεια της αντίστοιχης ενότητας

του βιβλίου της Α΄ Λυκείου. Εδώ γίνεται σαφέστερη η σύνδεση των τριγωνομετρικών μεγεθών με φαινόμενα που εμφανίζουν περιοδικότητα, καθώς και η δυνατότητα συστηματικής χρησιμοποίησης γωνιών για τον υπολογισμό μηκών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο τίθενται οι βάσεις για μια πιο συστηματική μελέτη των πολυωνύμων και αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων.

Το τρίτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή σε μια καινούρια για τους μαθητές και πολύ σημαντική μαθηματική έννοια, την έννοια της ακολουθίας. Εξετάζονται η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος καθώς και προβλήματα ανατοκισμού και εισάγονται τα πρώτα ψήγματα της έννοιας του ορίου με το άθροισμα

των άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $|\lambda| < 1$.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, εισάγονται δυο καινούριες και πολύ σημαντικές συναρτήσεις, η Εκθετική και η Λογαριθμική, και έτσι ολοκληρώνεται ο κατάλογος των βασικών συναρτήσεων που παρουσιάζονται στα μαθηματικά του Λυκείου.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου, εισάγεται μια από τις τρεις σημαντικότερες συλλήψεις των μαθηματικών της Αναγέννησης, η έννοια της Παραγώγου. (Οι άλλες δύο είναι το Ολοκλήρωμα και η Αναλυτική Γεωμετρία, που θα μελετηθούν εκτενώς στη Γ' Λυκείου). Στο κεφάλαιο αυτό τονίζεται η χρησιμότητα της παραγώγου στη μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, καθώς και στην εύρεση της

εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της.

Οι συγγραφείς αισθάνονται την υποχρέωση να ευχαριστήσουν:

α) Την ομάδα των κριτών, η οποία βοήθησε με τις παρατηρήσεις της την παρούσα συγγραφική προσπάθεια. Την ομάδα των κριτών αποτελούσαν οι:

Αναγνωστόπουλος Παναγιώτης, καθηγητής μαθηματικών Β/θμιας Εκπαίδευσης.

Αχτσαλωτίδης Χριστόφορος, καθηγητής μαθηματικών Β/θμιας Εκπαίδευσης.

Δικαιάκου–Μαυρουδέα Καλλιόπη, σχολική σύμβουλος μαθηματικών.

Καββαδίας Κων/νος, καθηγητής μαθηματικών Β/θμιας Εκπαίδευσης.

Κουζέλης Ανδρέας, διευθυντής Λυκείου.

Τζιαφέτας Γεώργιος, καθηγητής Ε.Μ. Πολυτεχνείου.

β) Το σύμβουλο του Π.Ι. κ. Β. Θεοδωρακόπουλο για τις γλωσσικές παρατηρήσεις του στα δοκίμια.

γ) Τον διευθύνοντα σύμβουλο του Ο.Ε.Δ.Β. κ. Κ. Τσαμαδιά για τη βοήθεια που προσέφερε στην εκτύπωση-διακίνηση του βιβλίου και την υπάλληλο του Ο.Ε.Δ.Β. κ. Αικ. Δραγώνα που είχε την καλλιτεχνική επιμέλεια του βιβλίου.

Όποιος μαθητής, συνάδελφος καθηγητής ή οποιοσδήποτε ενδιαφέρεται για την Παιδεία στον τόπο μας, θέλει να κάνει σχόλια, παρατηρήσεις ή κρίσεις για το βιβλίο αυτό, παρακαλείται να απευθύνεται στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 153 10 Αγ. Παρασκευή.

Ιανουάριος 1992
Οι Συγγραφείς

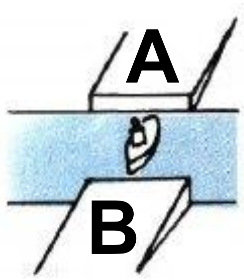
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

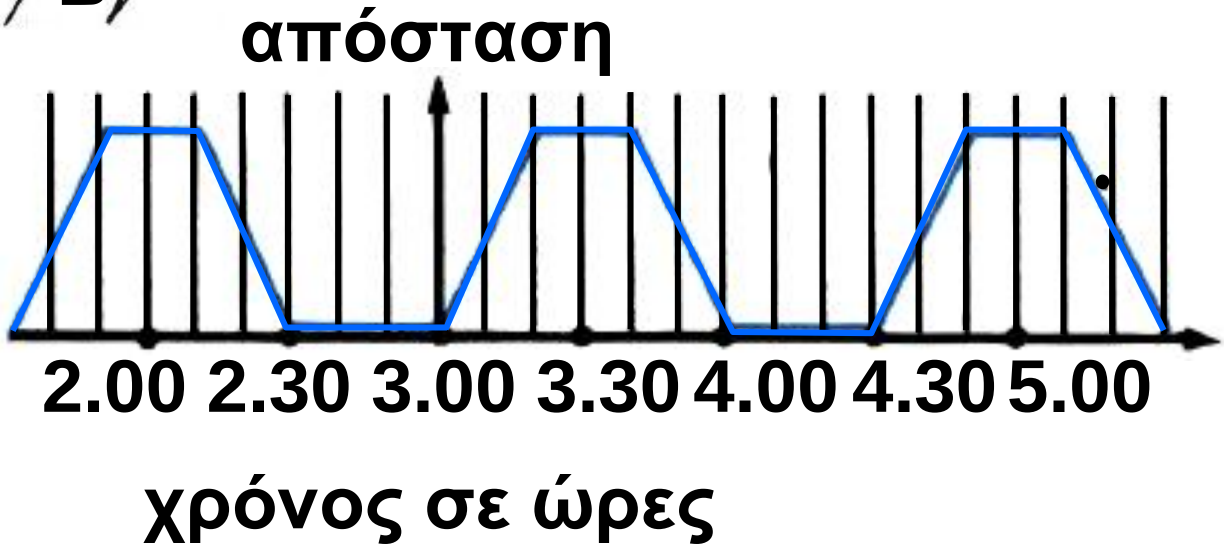
Τριγωνομετρία

1.1 Οι τριγωνομετρικές συναρτή-σεις

Περιοδικές συναρτήσεις

– Έστω ότι ένα φέρι-μποτ πηγαινοέρχεται μεταξύ δύο λιμανιών Α και Β και η γραφική παράσταση της απόστασής του από το λιμάνι Α ως συνάρτηση του χρόνου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.





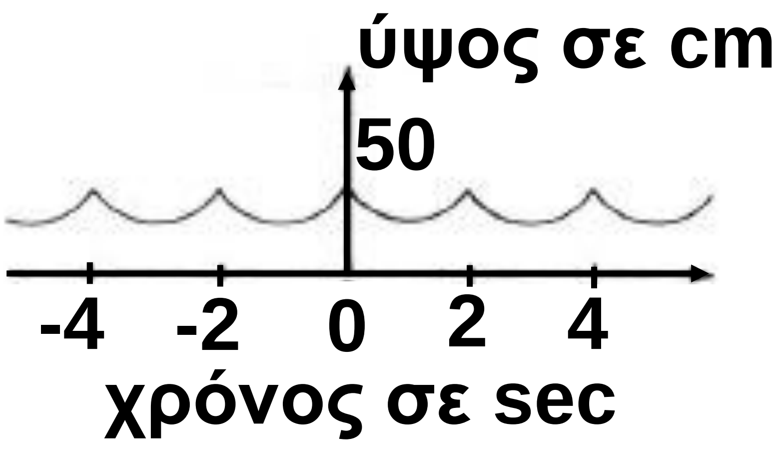
Παρατηρούμε ότι κάθε $1\frac{1}{2}$ ώρα το φέρι-μπότ επαναλαμβάνει την ίδια ακριβώς κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι σε όποια απόσταση βρίσκεται από το λιμάνι Α σε κάποια χρονική στιγμή t, στην ίδια απόσταση θα βρίσκεται και τη χρονική στιγμή $t + 1\frac{1}{2}$ ώρες και στην ίδια απόσταση βρισκόταν και τη χρονική

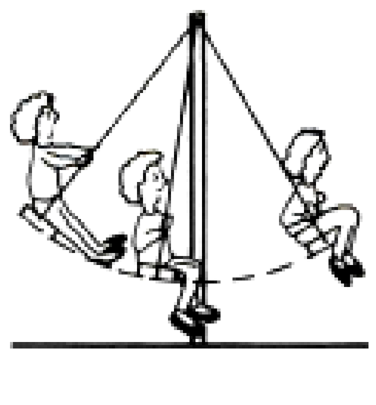
στιγμή t - $1\frac{1}{2}$ ώρες.

Επομένως η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση του φέρι-μπότ από το λιμάνι Α, με τη βοήθεια του χρόνου t, έχει τις ίδιες τιμές τις χρονικές στιγμές t, t + $1\frac{1}{2}$, t - $1\frac{1}{2}$.

Λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με **περίοδο** 1- $\frac{1}{2}$ ώρες.

– Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του ύψους μιας κούνιας ως συνάρτηση του χρόνου t.





Παρατηρούμε ότι, όποιο ύψος έχει η κούνια σε κάποια χρονική στιγμή t, το ίδιο ύψος θα έχει και τη χρονική στιγμή t + 2 sec και το ίδιο ύψος είχε και τη χρονική στιγμή t - 2 sec. Λέμε πάλι ότι η συνάρτηση (που εκφράζει το ύψος της κούνιας με τη βοήθεια του χρόνου t) **είναι περιοδική** με **περίοδο** 2 sec.

Γενικότερα:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x + T \in A$, $x - T \in A$

και

ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε γωνία ω υπάρχει μία μόνο τιμή του ημω, με -1 < ημω < 1. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε γωνία ω αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της. Ομοίως ορίζονται και οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις γωνιών.

Πολλές εφαρμογές όμως των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν περιέχουν γωνίες, αλλά πραγματικούς αριθμούς, όπως, π.χ, ο τύπος της αρμονικής ταλάντωσης
f(t) = α • ημωt, στον οποίο τα α και ω είναι σταθερές και t είναι ένας πραγματικός αριθμός που παριστάνει το χρόνο.
Για το λόγο αυτό ορίζουμε στη συνέχεια τριγωνομετρικές

συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.
Συγκεκριμένα:
– Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο ημ (x rad) λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και συμβολίζεται με **ημ.**
Ορίζουμε δηλαδή ότι

$$ημx = ημ\ (x\ rad).$$

Επειδή ημ (ω + 360^o) = ημ (ω - 360°) = ημω, για κάθε x ∈ R θα ισχύει:

$$ημ\ (x + 2π) = ημ\ (x - 2π) = ημx.$$

Άρα **η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π.**
– Ομοίως ορίζουμε και τη **συνάρτηση συνημίτονο** που συμβολίζεται με **συν**. Ορίζουμε δηλαδή ότι

$$συνx = συν\ (x\ rad).$$

Και η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π.
– Η συνάρτηση εφαπτομένη που συμβολίζεται με **εφ**, ορίζεται ως εξής:

$$\text{εφ}x = \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εφ είναι το σύνολο:

$$R_1 = \{x \mid \text{συν}x \neq 0\}$$

Επειδή για κάθε $x \in R_1$ ισχύει

$$\text{εφ}\,(x + \pi) = \text{εφ}\,(x - \pi) = \text{εφ}x,$$

η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.
– Η συνάρτηση συνεφαπτομένη, που συμβολίζεται με **σφ**, ορίζεται ως εξής:

$$\text{σφ}x = \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης σφ είναι το σύνολο:

$$R_2 = \{x|\ ημx \neq 0\}$$

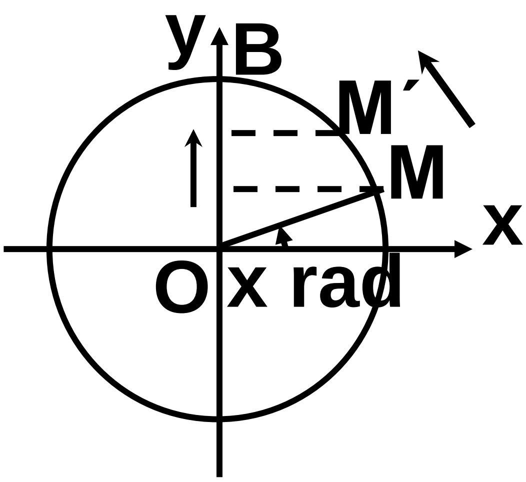
Και η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = ημx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το [0,2π]. Έχουμε αναφέρει όμως ότι το ημx είναι η τεταγμένη του σημείου Μ στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας xrad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τεταγμένη του Μ, όταν αυτό περιφέρεται στον τριγωνομετρικό

κύκλο κατά τη θετική φορά, ξεκινώντας από το Α. Παρατηρούμε ότι:

- **Όταν το x μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το $\frac{\pi}{2}$, το Μ κινείται από το Α μέχρι το Β. Άρα η τεταγμένη του αυξάνει, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**



Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι:

– γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

– γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$,

– γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

• Η συνάρτηση παρουσιάζει

– μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το ημ$\frac{\pi}{2}$ = 1 και

– ελάχιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$, το ημ$\frac{3\pi}{2}$ = -1.

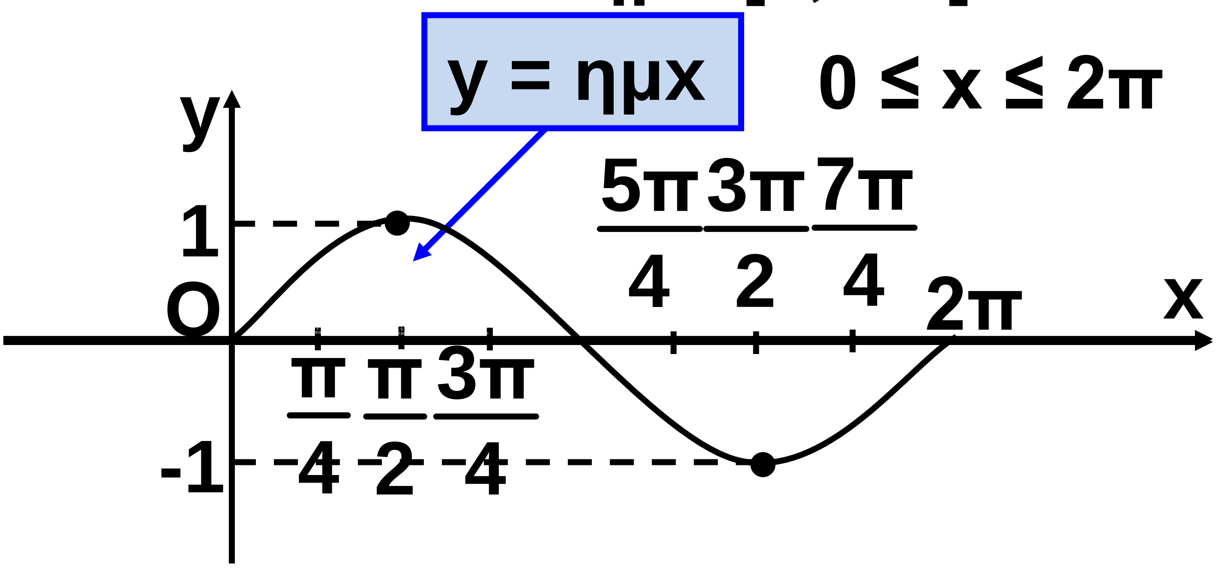
Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται ως εξής:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
ημx	0	↗	1 μεγ.	↘	0	↘	-1 ελαχ.	↗	0

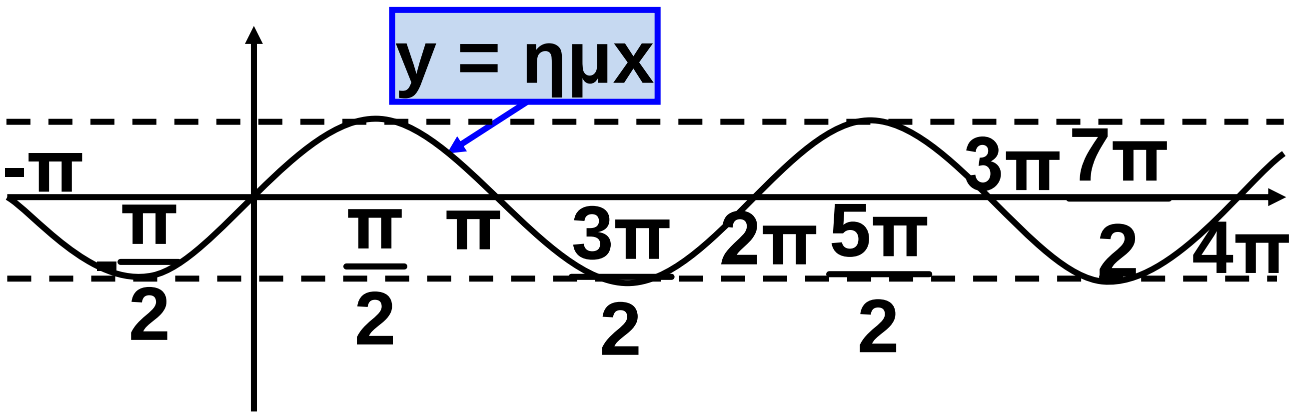
Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της. Κατά τα γνωστά έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ημx	0	$\sqrt{2}/2 \simeq 0{,}71$	1	0,71	0	-0,71	-1	-0,71	0

Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.
Έτσι προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο στο διάστημα [0, 2π]:



Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική, με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα [2π, 4π], [4π, 6π] κτλ. καθώς και στα διαστήματα [-2π, 0], [-4π, -2π] κτλ.
Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο, η οποία λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη.



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετα ημίτονα. Άρα για κάθε x ∈ R ισχύει ημ(-x) = -ημx. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει

κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο(0,0) των αξόνων.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = συνx

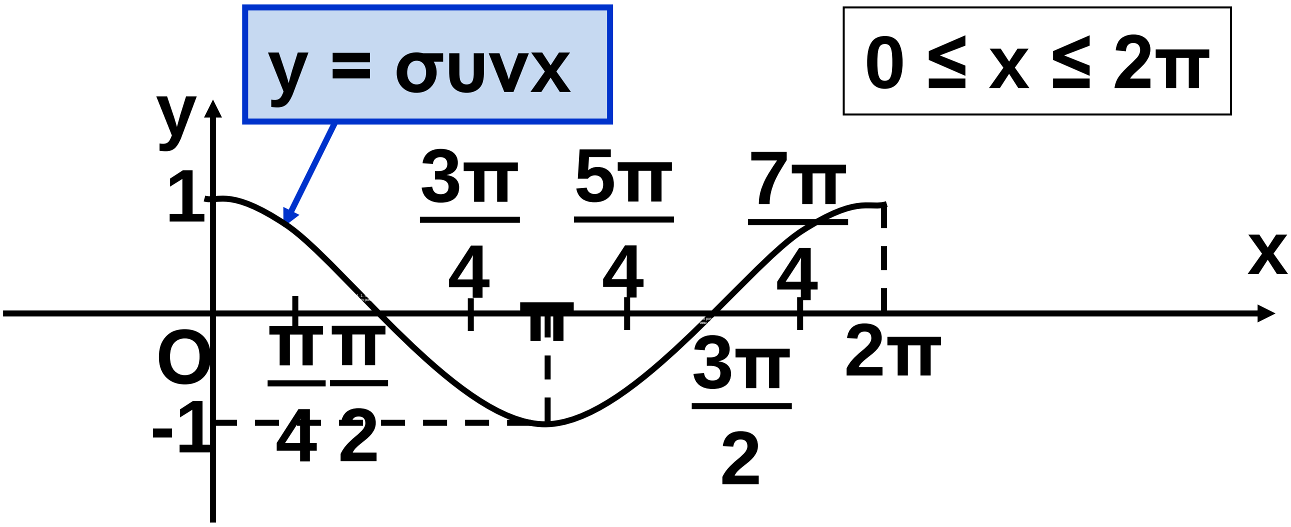
Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το [0, 2π]. Από τη μελέτη αυτή προκύπτουν τα συμπεράσματα του επόμενου πίνακα:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
συνx	1 μεγ.	↘	0	↘	-1 ελαχ.		0	↗	1 μεγ.

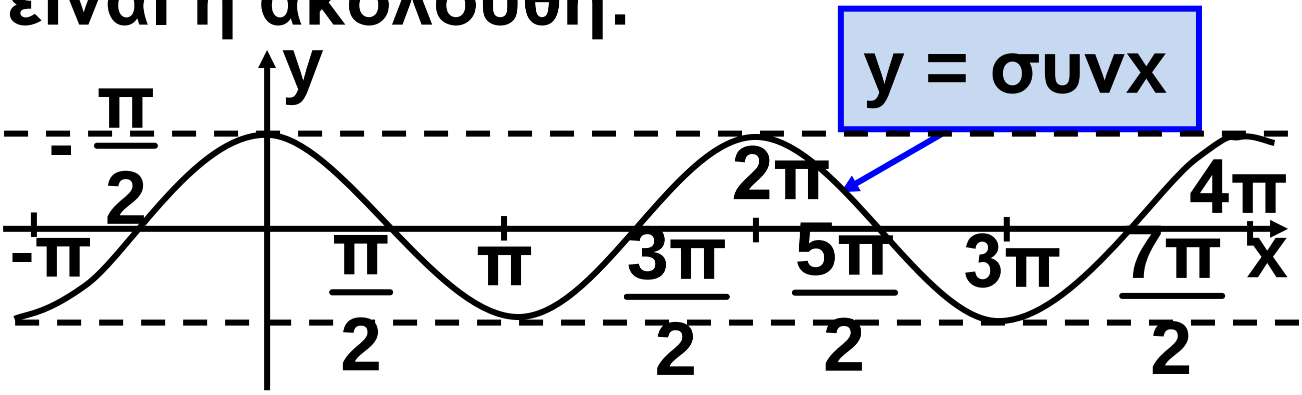
Συντάσσσουμε τώρα κατά τα γνωστά και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης συνημίτονο:

x	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
συνx	0	$\frac{2}{2}$	0,71	0	-0,71	-1	-0,71	0	0,71	1

Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της y = συνx για $0 \leq x \leq 2\pi$.



Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση στο R είναι η ακόλουθη:



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο. Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει
συν (-x) = συνx. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = συνx είναι άρτια και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = εφx

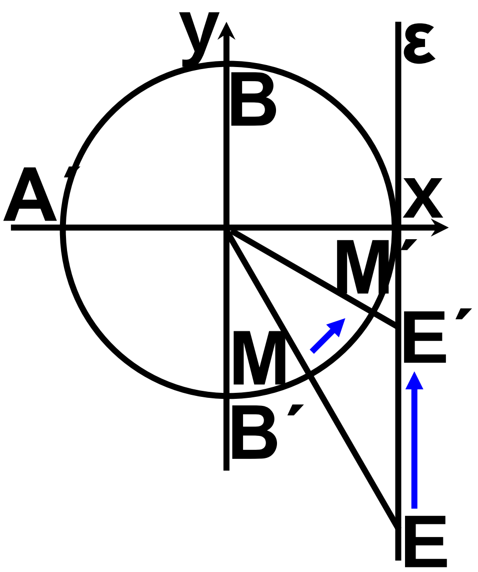
Επειδή η συνάρτηση f(x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
(Το διάστημα είναι ανοικτό, αφού η συνάρτηση εφ δεν ορίζεται στα $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$).

Ας υποθέσουμε ότι η τελική πλευρά της γωνίας x rad τέμνει

τον τριγωνομετρικό κύκλο στο Μ και την ευθεία των εφαπτόμενων στο σημείο Ε.

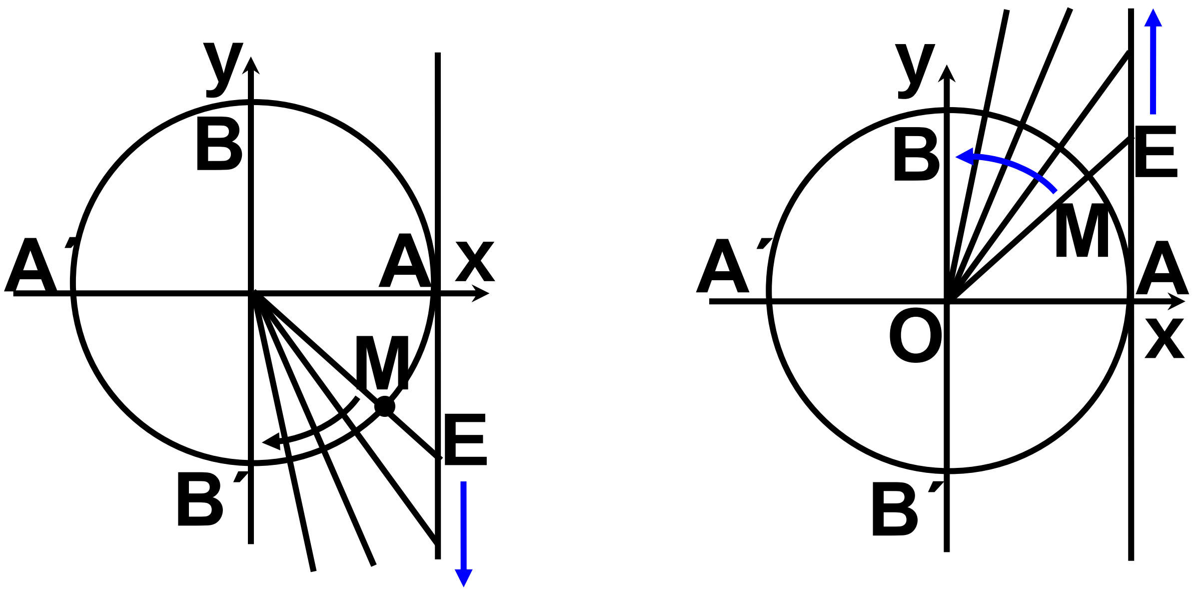
Όπως έχουμε αναφέρει η εφx ισούται με την τεταγμένη του σημείου Ε. Επομένως:

- **Όταν ο x παίρνει τιμές από $-\frac{\pi}{2}$ προς το $\frac{\pi}{2}$ το Μ κινείται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά από το Β΄ προς το Β, οπότε η τεταγμένη του σημείου Ε αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι η f(x) = εφx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$**



• Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από μεγαλύτερες τιμές η εφx «τείνει» στο -∞. Γι’ αυτό λέμε ότι η ευθεία $\chi = -\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της Γ. Επίσης όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από μικρότερες τιμές η εφx τείνει στο +∞. Γι’ αυτό λέμε ότι και η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ είναι

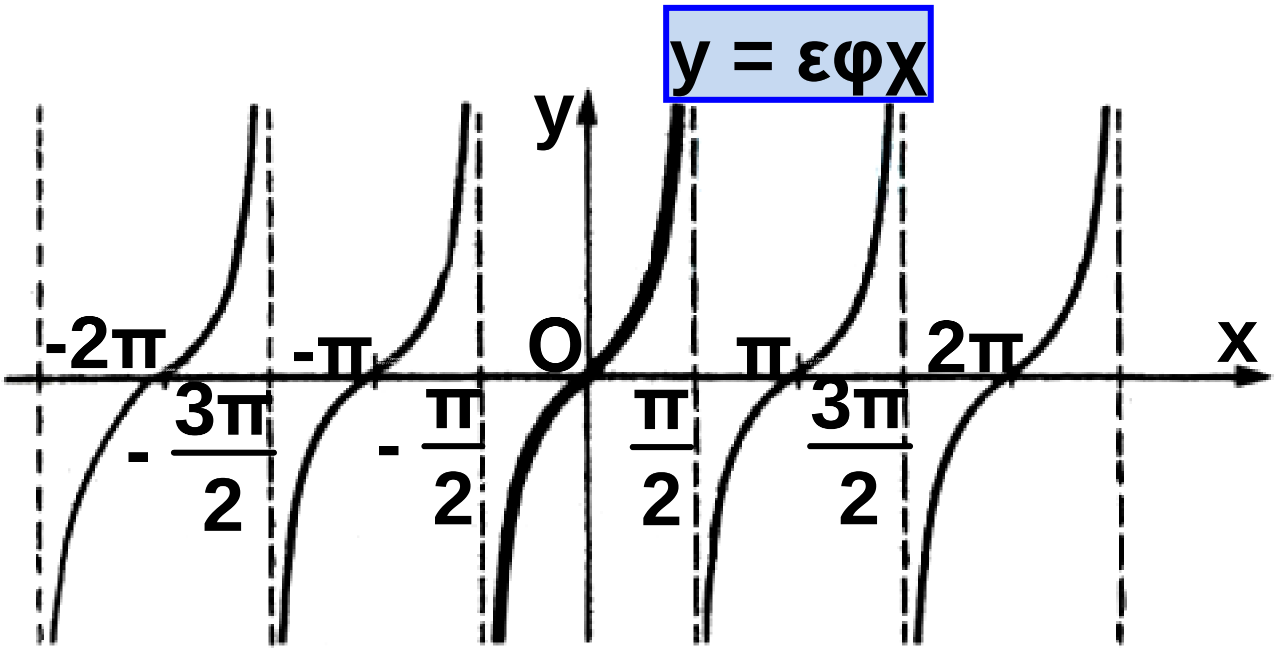
κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφι-κής παράστασης της f.



Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x) = εφx συντάσσουμε, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων ή με επιστημονικό κομπιουτεράκι, έναν πίνακα τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$ $\simeq -1,7$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\simeq -0,6$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\simeq -0,6$	1	$\sqrt{3}$ $\simeq 1,7$	Δεν ορίζεται

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραφική παράσταση της f(x) = εφx φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι φανερό ότι η γραφική παρά-σταση της f(x) = εφx έχει κέντρο συμμετρίας το Ο, αφού
(§ 5 • 3 : εφ(- x) = - εφx) είναι περιττή συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = 3ημx$

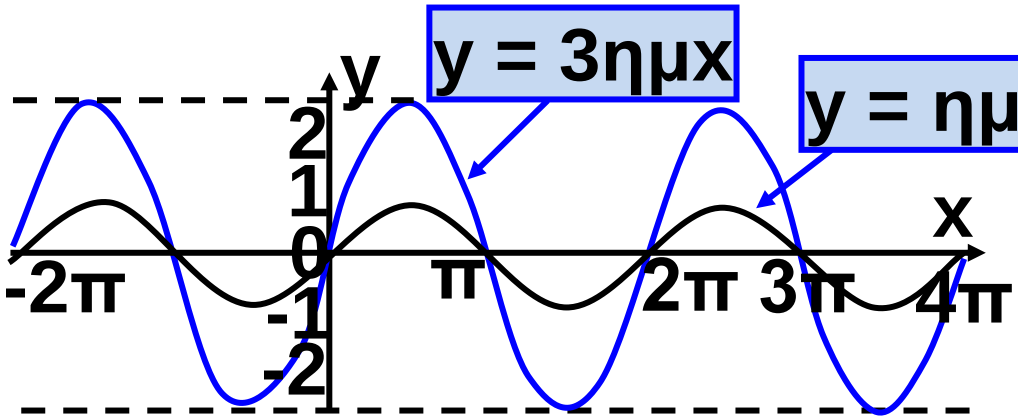
ΛΥΣΗ

Οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = 3ημx$ είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $φ(x) = ημx$. Εξάλλου και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο $2π$, αφού ισχύει:

$f(x+2π) = 3 \cdot ημ(x+2π) =$
$= 3 \cdot ημx = f(x)$, για κάθε $x \in R$.
και $f(x-2π) = 3 \cdot ημ(x-2π)=$
$= 3 \cdot ημx = f(x)$, για κάθε $x \in R$

Έχοντας υπόψιν τα στοιχεία αυτά και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 3ημx$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	-1	0
3ημx	0	3	0	-3	0



2. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x) = ημ2x

ΛΥΣΗ

Κάθε τιμή της συνάρτησης f(x) = ημ2x επαναλαμβάνεται, όταν το 2x αυξηθεί κατά 2π, που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το x αυξηθεί κατά π. Επομένως,

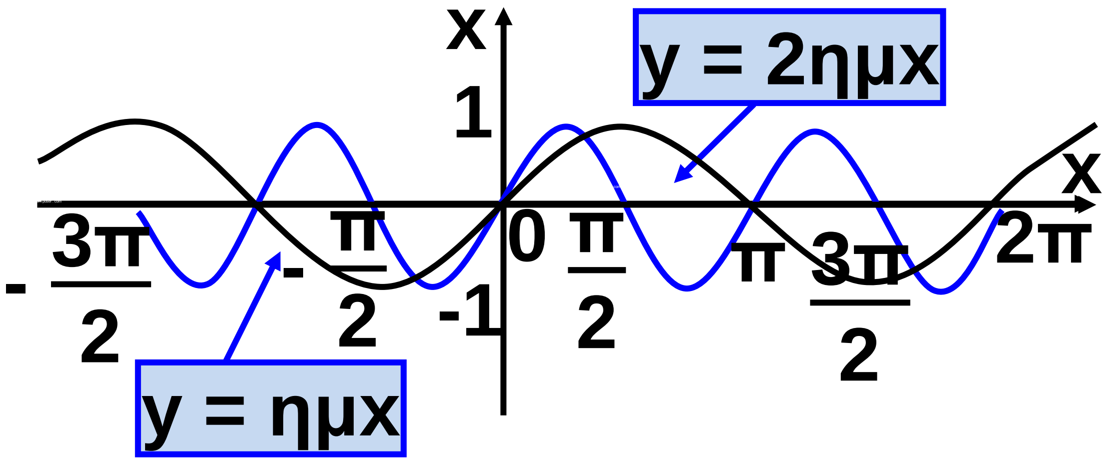
η συνάρτηση f(x) = ημ2x είναι περιοδική με περίοδο π. Πράγματι:

f(x + π) = ημ2(x + π) = ημ(2x + 2π)=
= ημ2x = f(x), για κάθε x ∈ R

και f(x - π) = ημ2(x - π) =
=ημ(2x - 2π) = ημ2x = f(x) για κάθε x ∈ R

Έχοντας υπόψη το στοιχείο αυτό και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(x) = ημ2x.

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ημ2x	0	1	0	-1	0



3. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = 3ημ2x$

ΛΥΣΗ

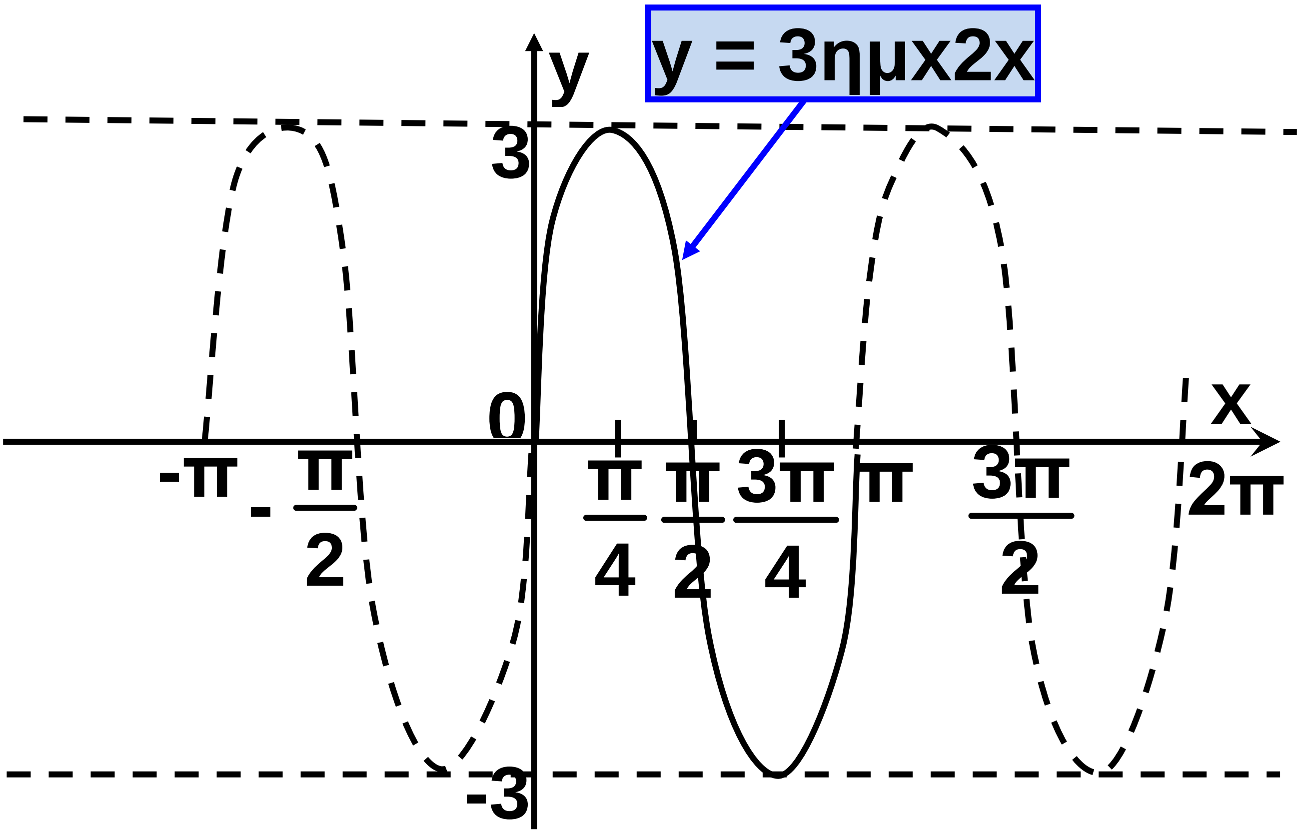
Σύμφωνα με τα προηγούμενα παραδείγματα η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο 3, ελάχιστο -3 και είναι περιοδική με περίοδο π.

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x) = 3ημ2x$ είναι ο εξής:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$3ημ2x$	0	3	0	-3	0

Με τη βοήθεια του πίνακα αυτού σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Σχόλιο **Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι, σε μια συνάρτηση της μορφής**



f(x) = ρ ημωx, όπου ρ, ω > 0:

(i) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με - ρ.

(ii) Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής

f(x) = ρ συνωx, όπου ρ, ω > 0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων

i) $f(x) = 2ημx$, $g(x) = 0,5 \cdot ημx$,
$h(x) = -2ημx$, $0 \le x \le 2π$.

ii) $f(x) = 2συνx$, $g(x) = 0,5 \cdot συνx$,
$h(x) = -2συνx$, $0 \le x \le 2π$.

2. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$g(x)=1+ημx$ και $h(x) = -1+ημx$

3. **Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων**
f(x) = ημx και g(x) = ημ3x,
$0 \leq x \leq 2\pi$.

4. **Ομοίως των συναρτήσεων**
f(x) = συνx και g(x) = συν3x,
$0 \leq x \leq 2\pi$.

5. **Έστω η συνάρτηση f(x) = 2ημ$\frac{x}{2}$.**
Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

6. **Ομοίως για τη συνάρτηση**

f(x) = 2 συν$\frac{x}{2}$

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
i) f(x) = εφx , ii) g(x) = 1+εφx και
iii) h(x) = -1+εφx στο ίδιο σύστημα αξόνων

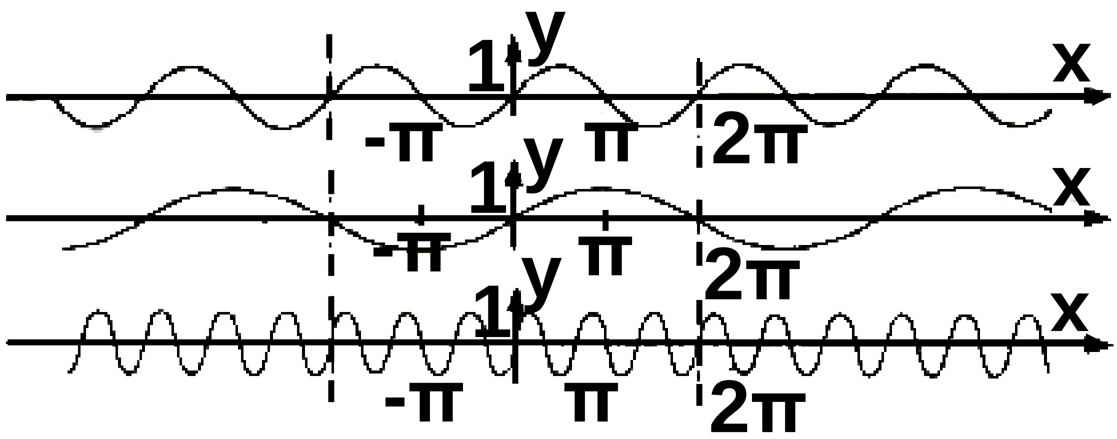
8. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση
f(x) = εφ2x.

9. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση
f(x) = σφx.

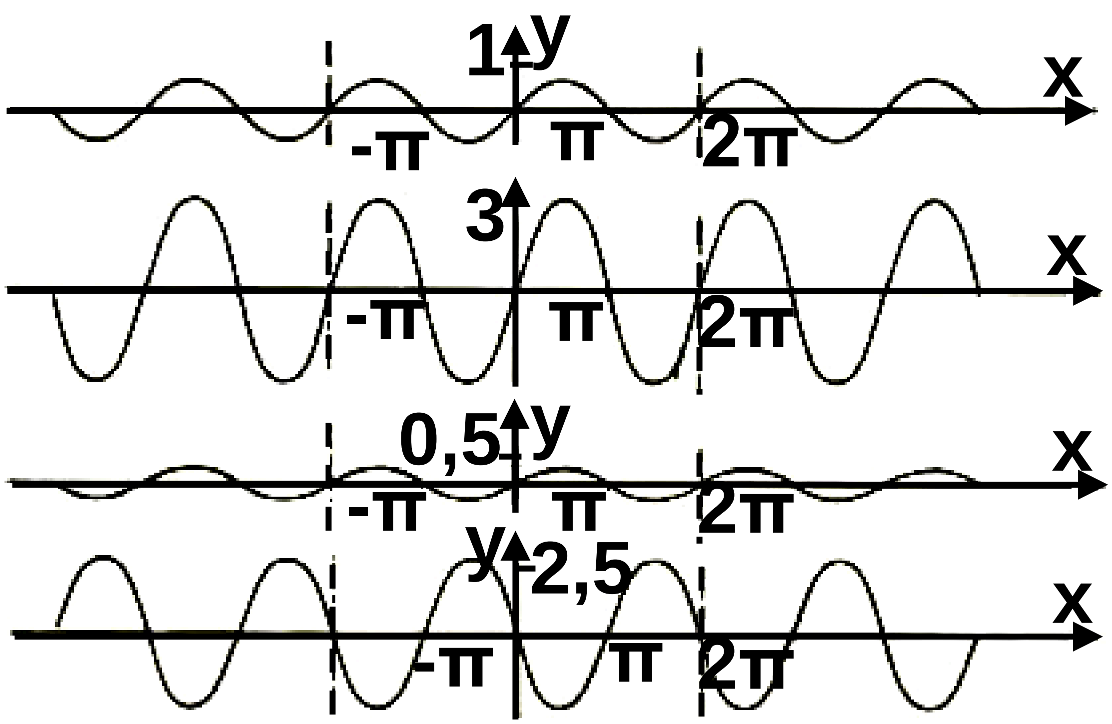
Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ημιτονοειδών καμπύλων:

i)



ii)

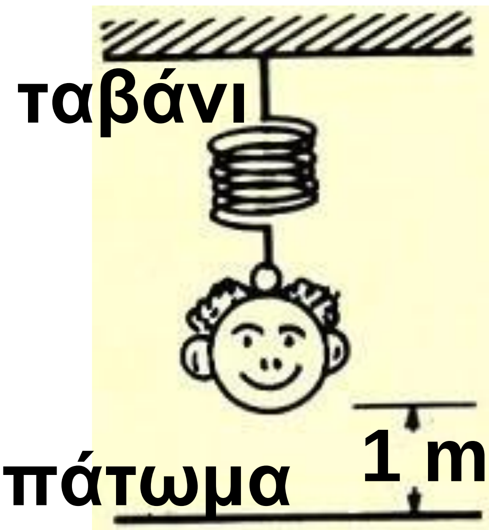


2. **Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση**

$$y = 3 \cdot ημ\left(\frac{π}{6} \cdot t\right)$$ **, όπου y το ύψος**

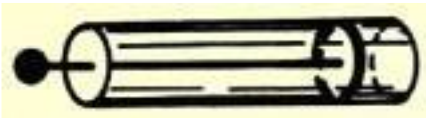
της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.
i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 12$.

3. **Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το πάτωμα 1m. Όταν το παιγνίδι ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του από το πάτωμα σε μέτρα είναι $h = 1 + \frac{1}{3}$ συν3t, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.**



i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.
ii) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης
iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 2\pi$.

4. Η απόσταση x του πιστονιού σε μέτρα από το ένα άκρο του κυλίνδρου περιγράφεται με τη συνάρτηση $x(t) = 0{,}1 + 0{,}1 \cdot ημ3t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα,

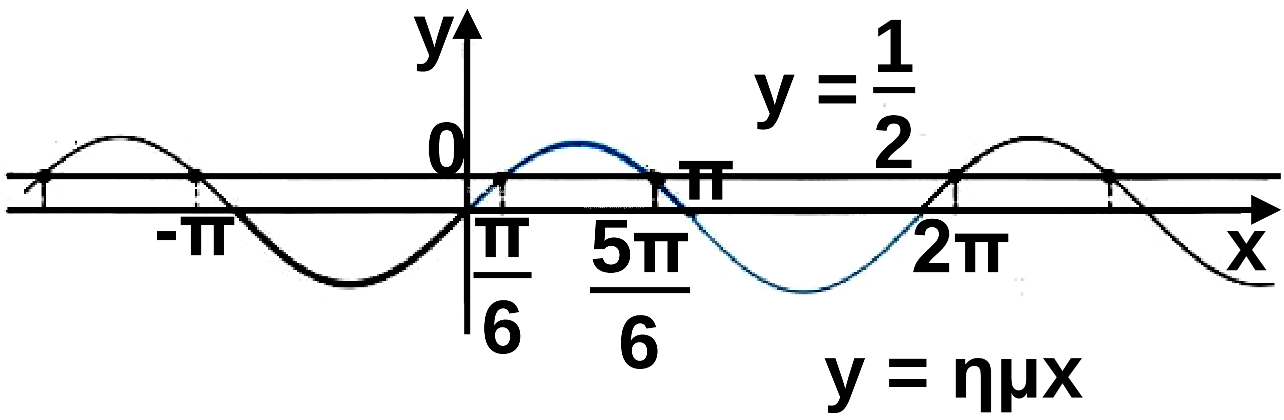


i) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού,
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 2\pi$. Ποιες στιγμές του χρονικού αυτού διαστήματος η απόσταση είναι 0,15m;

1.2 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Η εξίσωση ημx = α

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση ημx = $\frac{1}{2}$. Είναι φανερό ότι ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης y = ημx και της ευθείας y = $\frac{1}{2}$.



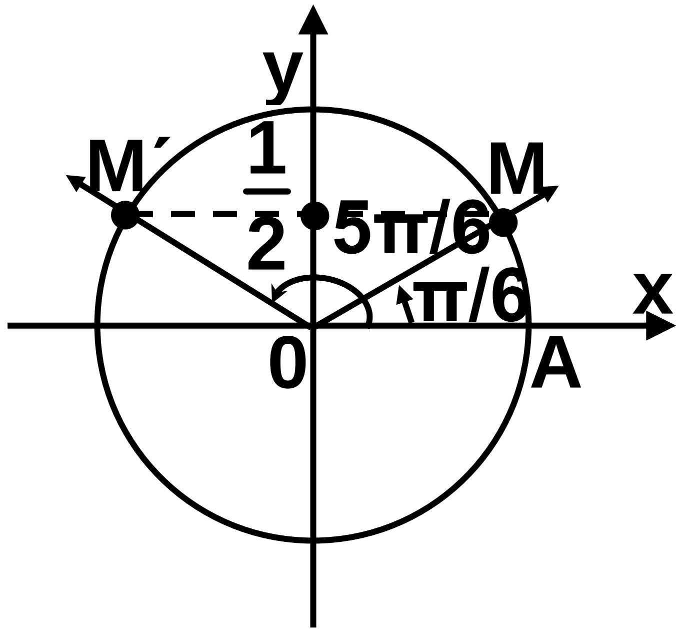
Ζητάμε δηλαδή εκείνα τα x ∈ R, για τα οποία η συνάρτηση f(x) = ημx παίρνει

την τιμή $\frac{1}{2}$. Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, για να βρούμε τα ζητούμενα x, που είναι άπειρα σε πλήθος (βλ. σχήμα), αρκεί να βρούμε όσα από αυτά υπάρχουν σε ένα διάστημα πλάτους 2π και σε κάθε ένα να προσθέσουμε το κ • 2π, όπου κ ακέραιος.
Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης ημx $= \frac{1}{2}$ στο διάστημα [0, 2π], είναι οι $\frac{\pi}{6}$ και $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

γιατί ημ $\frac{\pi}{6}$ = ημ $\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης ημx $= \frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \quad\quad ή \\ x = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}, \ \kappa \in Z$$



Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης ημx = α, αν δηλαδή ισχύει ημθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad\quad ή \quad\quad\quad\quad\quad , \quad \kappa \in Z \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{array}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $ημx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $ημ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει

$ημ\left(-\frac{π}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως η εξίσωση γράφεται

$ημx = ημ\left(-\frac{π}{3}\right)$,

οπότε οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2κπ - \frac{π}{3} \\ \quad\quad ή \\ x = 2κπ + π + \frac{π}{3} \end{array}\right. , κ \in Z$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ **, έχουμε**

$$\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu x\frac{\pi}{6}$$ **, οπότε**

$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \kappa\in Z$$

Ισχύει όμως

$$2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{24}$$

και

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{7\pi}{24}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$\left\{\begin{array}{l} x = \kappa\pi - \dfrac{\pi}{24} \\ \quad\quad ή \\ x = \kappa\pi + \dfrac{7\pi}{24} \end{array}\right. , \kappa \in Z$$

Η εξίσωση συνx = α

Με ανάλογες σκέψεις όπως προηγουμένως, εργαζόμαστε για να λύσουμε π.χ. την εξίσωση

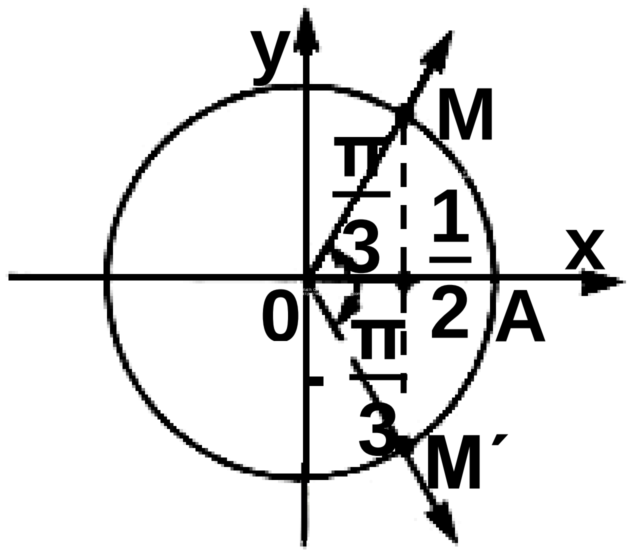
$συνx = \frac{1}{2}$.

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης συνx = $\frac{1}{2}$ στο διάστημα [-π, π] είναι οι $\frac{\pi}{3}$ και - $\frac{\pi}{3}$ γιατί

$$συν\frac{\pi}{3} = συν\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης συνx = $\frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2κπ + \dfrac{\pi}{3} \\ \quad\quad ή \\ x = 2κπ - \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \quad , κ \in Z$$



Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωση συνx = α, αν δηλαδή ισχύει συνθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = 2\kappa\pi + \theta & \\ \quad\text{ή} & ,\ \kappa \in Z \\ x = 2\kappa\pi - \theta & \end{array}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση συνx $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή συν$\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, έχουμε

συνx = συν $\dfrac{\pi}{4}$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \quad\quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. , \quad \kappa \in Z$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή συν $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει

συν $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή

συν $\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Έχουμε επομένως

συν$2x$ = συν $\frac{5\pi}{6}$, οπότε

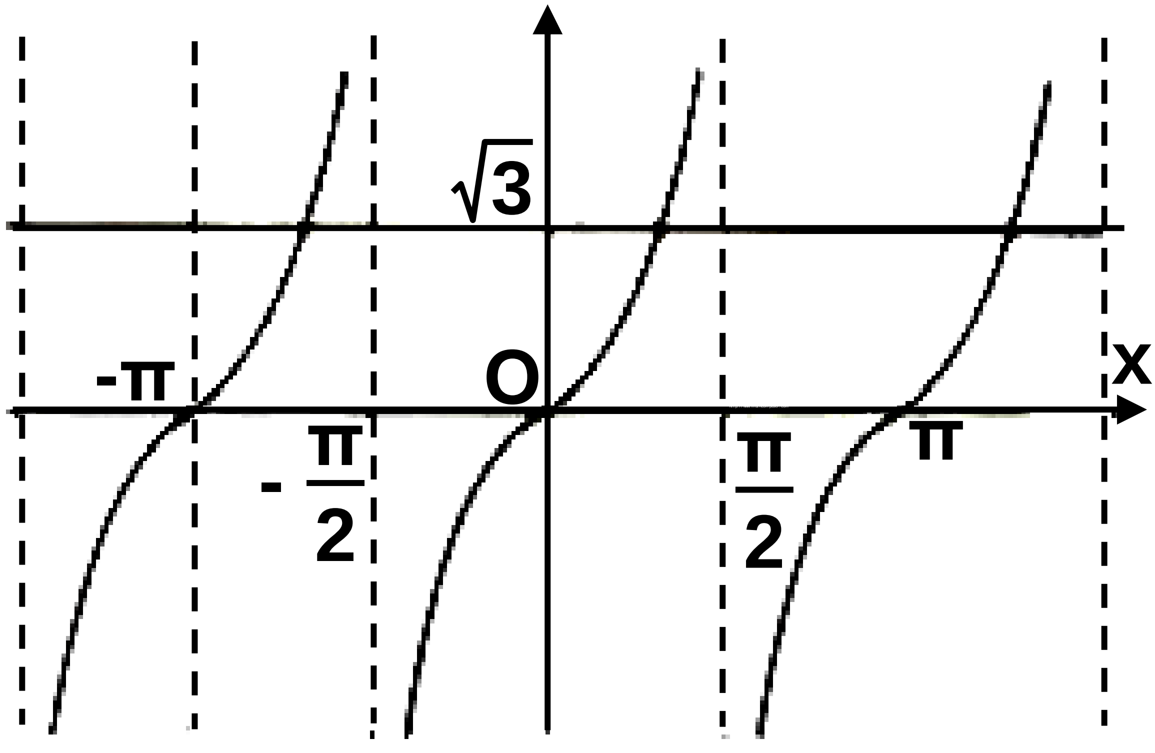
$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \\ \quad\quad ή \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in Z$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} x = \kappa\pi + \dfrac{5\pi}{12} \\ \quad\quad ή \\ x = \kappa\pi - \dfrac{5\pi}{12} \end{cases}, \kappa \in Z$$

Η εξίσωση εφx = α

Έστω η εξίσωση εφx = $\sqrt{3}$. Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση εφ είναι περιοδική με περίοδο π. Επομένως, για να λύσουμε την εξίσωση, αρκεί να βρούμε τις λύσεις της σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και να προσθέσουμε σε αυτές το κπ, $\kappa \in$ Ζ. Όπως φαίνεται όμως και στο σχήμα, μια μόνο λύση της εξίσωσης εφx = $\sqrt{3}$ υπάρχει στο διάστημα αυτό. Η λύση αυτή είναι η $\frac{\pi}{3}$, γιατί εφ $\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.



Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης εφx = $\sqrt{3}$ είναι: x = κπ + $\frac{\pi}{3}$, $\kappa \in$ Ζ.

Γενικότερα, αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης εφx = α, αν δηλαδή ισχύει εφx = εφθ, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι:

$$\boxed{x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in Z}$$

Ο ίδιος τύπος λύσεων ισχύει και για την εξίσωση σφx = α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση εφx = -1

ΛΥΣΗ

Επειδή εφ $\frac{\pi}{4}$ = 1, ισχύει εφ$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$= -1.

Έχουμε επομένως εφx = εφ$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,

οπότε

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}\ ,\quad \kappa \in Z$$

2. Να λυθεί η εξίσωση σφx = $\sqrt{3}$

ΛΥΣΗ

Επειδή σφ $\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, έχουμε

σφx = σφ $\frac{\pi}{6}$, οπότε οι λύσεις

της εξίσωσης είναι

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in Z$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) ημx = 0 ii) ημx = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii) συνx = 0 iv) συνx = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ημx = -\frac{1}{2}$

ii) $ημx = -1$

iii) $συνx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iv) $συνx = -1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $εφx = 0$

ii) $εφx = \frac{\sqrt{3}}{3}$

iii) $σφx = 1$

iv) $σφx = \sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ii) $σφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(1-ημx)(2ημx - \sqrt{3}) = 0$

ii) $(2ημx + \sqrt{2})(1 - συνx) = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(\sqrt{3} + εφx)(1 - εφx) = 0$

ii) $(2συνx + 1)(εφ^2x - 3)σφx = 0$

7. Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς πίνακες ή επιστημονικό κομπιουτεράκι να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ημx = 0,951$ ii) $συνx = -0,809$

iii) $εφx = 28,636$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2ημ3x = \sqrt{3}$ ii) $συν\dfrac{x}{5} + 1 = 0$

iii) $3εφ\dfrac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ημ\left(x + \dfrac{π}{3}\right) = -1$

ii) $2συν\left(3x - \dfrac{π}{4}\right) = 1$

iii) $εφ\left(\dfrac{π}{4} - 5x\right) = \sqrt{3}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

ί) $2ημ^2ω + ημω - 1 = 0$
ii) $2συν^2x + 3συνx - 2 = 0$
iii) $3εφ^2t = 3 + 2\sqrt{3}\,εφt$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις
i) $ημ^2x + 5\,συν^2x = 4$
ii) $εφx \cdot σφ2x = 1$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του x, καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της:
i) $f(x) = 3\,ημ\left(x - \frac{π}{2}\right), 0 \le x \le 2π$,
ii) $g(x) = 7\,συν\left(x - \frac{π}{2}\right), 0 \le x \le 2π$,

13. Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός εποχιακού προϊόντος (σε χιλιάδες

κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$S = 75 + 50 \cdot ημ\frac{πt}{6}$$ όπου t ο χρόνος σε μήνες και με t = 1 να αντιστοιχεί στον Ιανουάριο.

i) Να βρείτε ποιους μήνες οι πωλήσεις φτάνουν τις 100000 κομμάτια,

ii) Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ημx + συν\left(\frac{π}{4} - x\right) = 0$

ii) $εφ2x - σφ\left(\frac{π}{3} + 3x\right) = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $εφx \cdot ημx + 1 = ημx + εφx$

ii) $\dfrac{1}{συν^2x} - 2εφx = 4$

3. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $εφx = 1$ στο διάστημα $(3π, 4π)$.

* **4.** Να λύσετε την εξίσωση $1+συνx = ημx$ στο διάστημα $[0,2π)$.

5. Να λύσετε την εξίσωση:

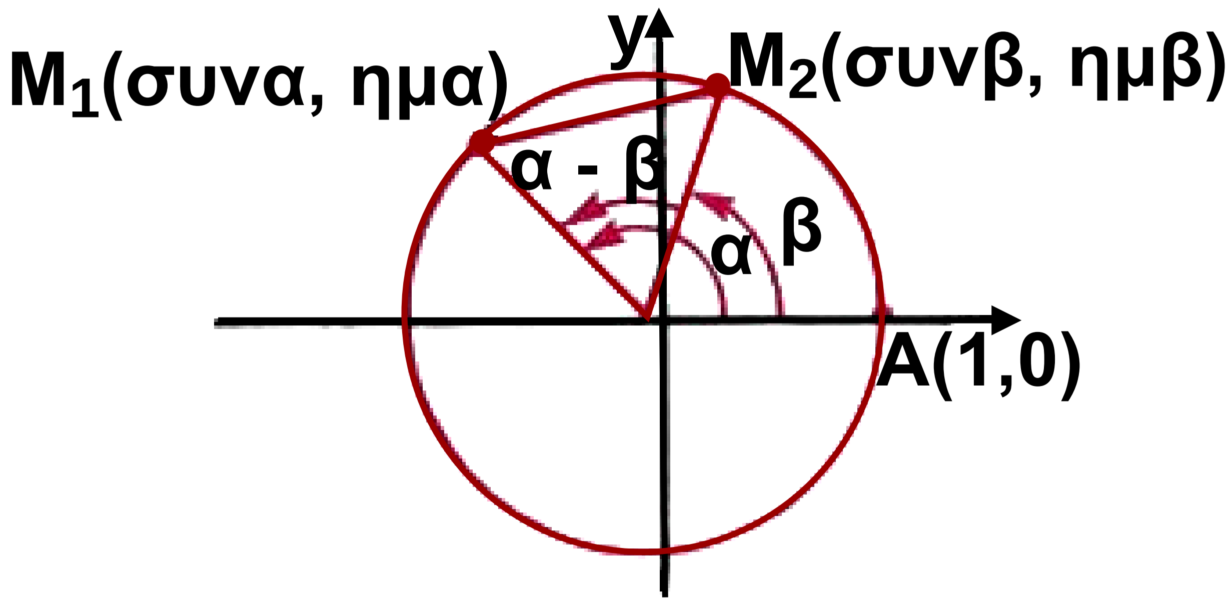
$εφx = σφ\left(\dfrac{π}{3} + x\right)$ στο διάστημα $[0, 2π)$.

1.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

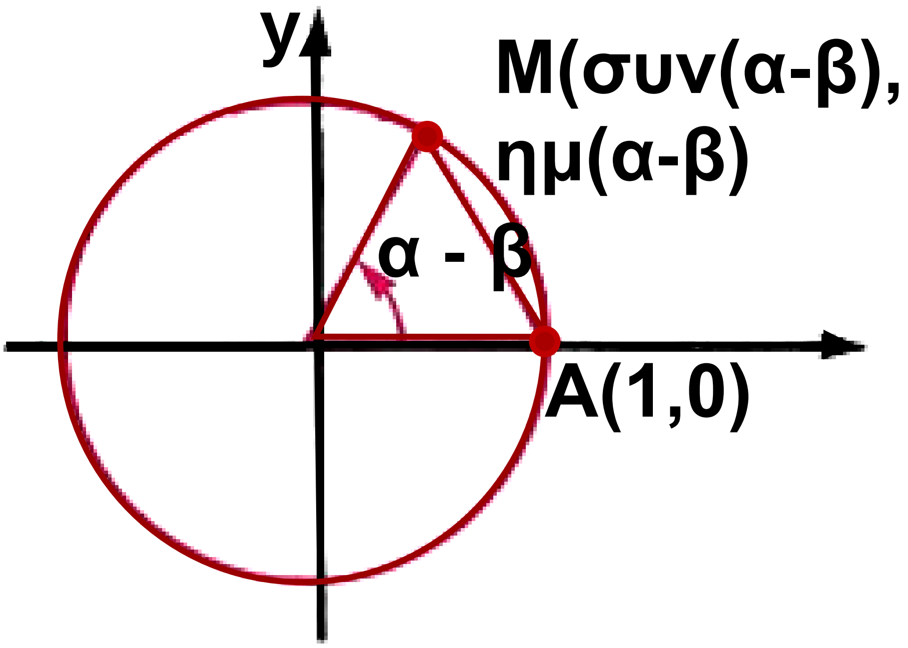
Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Ας θεωρήσουμε δυο γωνίες α, β που οι τελικές τους πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M_1, M_2 αντιστοίχως (Σχ. 1).

Έστω επιπλέον και η γωνία α-β, που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ. (Σχ. 2).



Σχ.(1)



Σχ.2

Όπως είναι γνωστό, τα σημεία M_1, M_2, A και M έχουν συντεταγμένες:

το M_1 : τετμημένη συνα και τεταγμένη ημα

το M_2 : τετμημένη συνβ και τεταγμένη ημβ

το A : τετμημένη 1 και τεταγμένη 0

το M : τετμημένη συν(α - β) και τεταγμένη ημ(α - β)

Επειδή $\widehat{M_2OM_1} = \widehat{AOM} = α - β$, θα είναι και $(M_2M_1) = (AM)$.
Άρα:

$$(M_2M_1)^2 = (AM)^2$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μας τύπο:

$$(P1P2) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

που δίνει την απόσταση δυο σημείων $P_1(x_1,y_1)$ και $P_2(x_2,y_2)$, έχουμε:

- $(M_2M_1)^2 = (συνα - συνβ)^2 +$
$+(ημα - ημβ)^2$
$= συν^2α + συν^2β - 2συνασυνβ +$
$+ημ^2α + ημ^2β - 2ημαημβ$
$= 2 - 2(συνασυνβ + ημαημβ)$ **και**

• $(AM)^2 = [συν(α - β) - 1]^2 +$
$+ [ημ(α - β) - 0]^2$
$= συν^2(α - β) + 1 - 2συν(α - β) +$
$+ ημ^2(α - β)$
$= 2 - 2συν(α - β)$.

Έτσι η σχέση $(M_2M_1)^2 = (AM)^2$ γράφεται

$2 - 2(συνασυνβ + ημαημβ) =$
$= 2 - 2συν(α - β)$

ή $συνασυνβ + ημαημβ = συν(α - β)$

Επομένως:

$$\boxed{συν(α - β) = συνασυνβ + ημα\,ημβ \qquad (1)}$$

Η ισότητα αυτή, που αποδείξαμε για γωνίες α, β με $0 \leq β < α < 360^o$, ισχύει και για οποιεσδήποτε γωνίες α, β.

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το -β, έχουμε:

συν (α -(-β)) =
= συνασυν(-β) + ημαημ(-β) =
= συνασυνβ - ημαημβ
Επομένως:

συν(α + β) = συνασυνβ - ημαημβ (2)

Με τη βοήθεια των τύπων (1) και (2) μπορούμε να υπολογίσουμε το συνημίτονο ορισμένων γωνιών, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρικούς πίνακες ή υπολογιστικές μηχανές. Για παράδειγμα, έχουμε:

- $συν\, 15^o = συν\, (45^o - 30^o)$
$= συν\, 45^o\, συν30^o + ημ45^o ημ30^o$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

- $συν75^o = συν\, (45^o + 30^o) =$
$= συν\, 45^o\, συν30^o - ημ45^o ημ30^o =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια του τύπου (1), που βρήκαμε προηγουμένως, θα υπολογίσουμε τώρα το ημίτονο του αθροίσματος δυο γωνιών.

Επειδή $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{ημ}x$

και $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{συν}x$**, έχουμε:**

$$\text{ημ}(\alpha+\beta) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) =$$

$$= \text{συν}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\text{συν}\beta + \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\text{ημ}\beta =$$

= ημασυνβ + συνα ημβ

Επομένως:

ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ (3)

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με -β βρίσκουμε ότι:

ημ(α - β) = ημασυνβ - συναημβ (4)

Σύμφωνα με τους τύπους αυτούς για παράδειγμα, έχουμε:

• $ημ15^{o} = ημ\,(45^{o}-30^{o})$
$= ημ\,45^{o}\,συν30^{o} - συν45^{o}ημ30^{o}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

• $ημ75° = ημ\,(45^{o}+30°) =$
$= ημ45°\,συν30° + συν45°ημ30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τύπων θα υπολογίσουμε την εφαπτομένη του αθροίσματος α + β δυο γωνιών α, β, αν γνωρίζουμε την εφαπτομένη καθεμιάς.

Όπως ξέρουμε, για να ορίζονται οι: εφ(α+β), εφα και εφβ, πρέπει συν(α+β) ≠ 0, συνα ≠ 0 και συνβ ≠ 0. Με την προϋπόθεση αυτή έχουμε:

$$εφ(α+β) = \frac{ημ(α+β)}{συν(α+β)} \left[\begin{array}{l}\text{Διαιρούμε με}\\ συνασυνβ \neq 0\end{array}\right]$$

$$= \frac{ημασυνβ + συναημβ}{συναημβ - ημασυνβ} =$$

$$= \frac{\dfrac{ημασυνβ}{συνασυνβ} + \dfrac{συναημβ}{συνασυνβ}}{\dfrac{συνασυνβ}{συνασυνβ} - \dfrac{ημαημβ}{συνασυνβ}} =$$

$$= \frac{εφα + εφβ}{1 - εφαεφβ}$$

Επομένως έχουμε:

$$εφ(α + β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφαεφβ} \qquad (5)$$

Αν τώρα στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το -β, βρίσκουμε ότι:

$$εφ(α - β) = \frac{εφα - εφβ}{1 + εφαεφβ} \qquad (6)$$

Τέλος με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$σφ(α + β) = \frac{σφασφβ - 1}{σφβ + σφα} \qquad (7)$$

$$σφ(α - β) = \frac{σφασφβ + 1}{σφβ - σφα} \qquad (8)$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους για παράδειγμα, έχουμε:

- $\varepsilon\varphi\ 15^{o} = \varepsilon\varphi(45^{o}-30^{o}) =$

$$= \varepsilon\varphi 45^{o} - \varepsilon\varphi 30^{o} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi 45^{o} - \varepsilon\varphi 30^{o}}{1+\varepsilon\varphi 45^{o}\varepsilon\varphi 30^{o}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

- $\varepsilon\varphi 75^{o} = \varepsilon\varphi(45^{o} + 30^{o}) =$

$$= \frac{\varepsilon\varphi 45^{o} + \varepsilon\varphi 30^{o}}{1 - \varepsilon\varphi 45^{o}\varepsilon\varphi 30^{o}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Αν $ημα = -\frac{3}{5}$, με $\frac{3π}{2} < α < 2π$ και $συνβ = \frac{12}{13}$, με $π < β < \frac{3π}{2}$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του α+β.

ΛΥΣΗ

Επειδή ημ(α+β) =
= ημασυνβ + συναημβ και
συν(α+β) = συνασυνβ - ημαημβ
αρκεί να υπολογίσουμε το συνα και το ημβ. ΄Εχουμε λοιπόν:

$συν^2α = 1 - ημ^2α = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$,

οπότε $συνα = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$,

αφού $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ και

$$ημ^2 β = 1 - συν^2 β = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169},$$

οπότε $$ημβ = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13},$$

αφού $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

Επομένως

$$ημ(α+β) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{16}{65}$$

$$συν(α+β) = \frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65},$$

οπότε:

$$εφ(α+β) = -\frac{16}{63} \text{ και } σφ(α+β) = -\frac{63}{16}$$

2ο Να αποδειχθεί ότι:
$ημ(α + β) \cdot ημ(α - β) =$
$= ημ^2α - ημ^2β$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$ημ(α + β)ημ(α - β) =$
$= (ημασυνβ + συναημβ)$
$(ημασυνβ - συναημβ)$
$= ημ^2ασυν^2β - συν^2αημ^2β$
$= ημ^2α(1 - ημ^2β) - (1 - ημ^2α)ημ^2β$
$= ημ^2α - ημ^2αημ^2β - ημ^2β +$
$+ημ^2αημ^2β = ημ^2α - ημ^2β$

3ο Να λυθεί η εξίσωση:

$$2\ συνx = ημ(x+\frac{π}{6})$$

ΛΥΣΗ

$$2συνx = ημ(x+\frac{π}{6})$$

$$\Leftrightarrow 2συνx = ημxσυν\frac{π}{6} + συνxημ\frac{π}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \eta\mu x + \frac{1}{2}\ \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\ 3$$

$$\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\,\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \qquad [\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \sigma\upsilon\nu x \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\ \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \qquad \kappa \in Z$$

4ο Να αποδειχθεί ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: εφ Α + εφΒ + εφΓ = εφΑεφΒεφΓ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο, ορίζονται οι εφΑ, εφΒ, εφΓ. Επειδή επιπλέον Α+Β = π - Γ ≠ $\frac{\pi}{2}$,

ορίζεται η εφ(Α+Β) και έχουμε διαδοχικά:

εφ(Α+Β) = εφ (π - Γ)

$$\frac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B} = -\varepsilon\varphi\Gamma$$

εφΑ+εφΒ = - εφΓ+εφΑεφΒεφΓ

εφΑ+εφΒ+εφΓ = εφΑεφΒεφΓ

5ο Θεωρούμε έναν αγωγό από τον οποίο διέρχονται τρία εναλλασσόμενα ρεύματα της ίδιας κυκλικής συχνότητας ω με στιγμιαίες εντάσεις $I_1 = ημωt$, $I_2 = ημ(ωt + \frac{2π}{3})$ και $I_3 = ημ(ωt+ \frac{4π}{3})$. Να αποδειχθεί ότι η ολική ένταση $I = I_1 + I_2 + I_3$ του ρεύματος που διέρχεται σπό τον αγωγό είναι μηδέν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι I =

$$=\eta\mu\omega t + \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\frac{2\pi}{3} +$$

$$+ \eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\frac{4\pi}{3}$$

$$= \eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\omega t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ \eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\omega t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \eta\mu\omega t - \frac{1}{2}\eta\mu\omega t - \frac{1}{2}\eta\mu\omega t = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστάσεων:

i) $συν\dfrac{π}{12}\ συν\ \dfrac{π}{4}\ -\ ημ\ \dfrac{π}{12}\ ημ\ \dfrac{π}{4}$

ii) $συν\ 170^{o}συν50^{o} + ημ170^{o}ημ\ 50^{o}$

iii) $ημ110^{o}ημ70^{o} - συν110^{o}συν70^{o}$

iv) $συν\ \dfrac{7π}{12}\ συν\dfrac{π}{12} + ημ\ \dfrac{7π}{12}\ ημ\ \dfrac{π}{12}$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $συν\ 3xσυν(-2x) - ημ3xημ(-2x)$

ii) $συν\left(x + \dfrac{π}{4}\right) + συνx + ημ\left(x + \dfrac{π}{4}\right)ημx$

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $συν\left(x + \dfrac{π}{4}\right) + συν\left(x - \dfrac{π}{4}\right) = \sqrt{2}\ συνx$

ii) $συν^2\left(x - \dfrac{π}{4}\right) - συν^2\left(x + \dfrac{π}{4}\right) = 2ημxσυνx$

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστάσεων:

i) $ημ\frac{17π}{18}συν\frac{4π}{9} - συν\frac{17π}{18}ημ\frac{4π}{9}$

ii) $ημ70συν20^{ο} + συν70^{ο}ημ20^{ο}$

iii) $\dfrac{εφ\frac{7π}{12} - εφ\frac{π}{4}}{1 + εφ\frac{7π}{12}εφ\frac{π}{4}}$

iv) $\dfrac{εφ165^{ο} + εφ15^{ο}}{1 - εφ165^{ο}εφ15^{ο}}$

5. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $ημ2xσυνx + συν2xημx$

ii) $ημ\left(x + \frac{π}{6}\right)συνx - συν\left(x + \frac{π}{6}\right)ημx$

iii) $\dfrac{\text{εφ}x - \text{εφ}2x}{1 + \text{εφ}x\text{εφ}2x}$

iv) $\dfrac{\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2x\right) + \text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)}{1 - \text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2x\right)\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)}$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\text{ημ}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \text{ημ}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{ημ}x$

ii) (ημα+συνα)(ημβ+συνβ) =
= ημ(α+β) + συν(α - β)

7. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 105^{o} και 195^{o}.

8. **Να αποδείξετε ότι:**

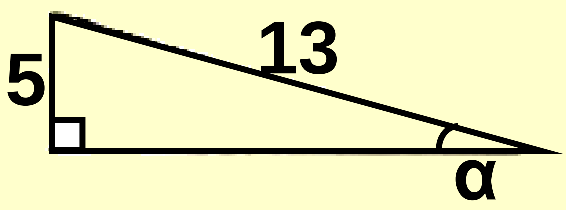
i) $\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = \dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)}$

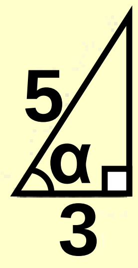
ii) $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta = \dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)}$

9. **Να αποδείξετε ότι για τις γωνίες α, β του διπλανού σχήματος ισχύει:**

i) $\eta\mu(\alpha+\beta) = \dfrac{63}{65}$

ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \dfrac{16}{65}$





10. **Να υπολογίσετε τους τριγωνο-μετρικούς αριθμούς της γωνίας α+β, αν:**

i) $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{3}{13}$,

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = -\frac{4}{5}$,

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

ii) $\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2$

iii) $\varepsilon\varphi x(x - \alpha) = -2$, αν $\varepsilon\varphi\alpha = -3$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{ημ(α - β)}{συνασυνβ} + \frac{ημ(β - γ)}{συνβσυνγ} + \frac{ημ(γ - α)}{συνγσυνα} = 0$$

2. Αν συν(α+β) = 0, να αποδείξετε ότι: ημ(α+2β) = ημα

3. Αν εφα = - 3, να λύσετε στο [0,2π] την εξίσωση:

ημ(x - α) = - 2 ημ(x+α)

4. Αν $α+β = \frac{π}{4}$, να αποδείξετε ότι:

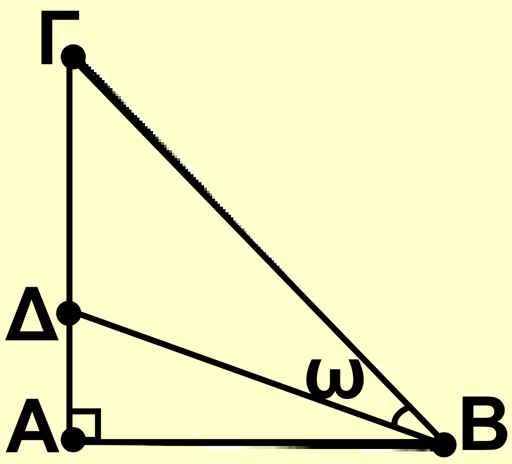
(1+εφα)(1+εφβ) = 2

5. Αν στο διπλανό σχήμα είναι ΑΓ = 3 · ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

i) $εφω = \dfrac{2εφB}{3+εφ^2B}$, όπου $B = \widehat{ΑΒΓ}$

όπου $B = \widehat{ΑΒΓ}$

ii) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας B, αν $B = 60^o$



6. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{ημΑ + ημ(Β - Γ)}{συν(Β - Γ)} = εφΒ\ ,$$

να αποδείξετε ότι $Α = \dfrac{π}{2}$
και αντιστρόφως.

*** 7.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

i) σφΑσφΒ+σφΒσφΓ+σφΓσφΑ= 1,

ii) $\frac{\text{συνΑ}}{\text{ημΒημΓ}} + \frac{\text{συνΒ}}{\text{ημΓημΑ}} + \frac{\text{συνΓ}}{\text{ημΑημΒ}} = 2$

8. Να λυθεί στο διάστημα [0,π] η εξίσωση:

$$\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \text{εφ}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{3}$$

*** 9.** Αν $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ με $\text{εφ}x = \frac{1}{2}$, $\text{εφ}y = \frac{1}{5}$ και $\text{εφ}z = \frac{1}{8}$, να αποδείξετε ότι: $x + y + z = \frac{\pi}{4}$

1.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

Οι τύποι που εκφράζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α, ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α, είναι ειδικές περιπτώσεις των τύπων της προηγούμενης παραγράφου. Συγκεκριμένα, αν στους τύπους του ημ(α+β), του συν(α+β) και της εφ(α+β) αντικαταστήσουμε το β με το α, έχουμε:

- **ημ2α** = ημ(α+α) = ημασυνα + συναημα = **2ημασυνα**

Επομένως:

$$\boxed{ημ2α = 2ημασυνα} \qquad (1)$$

• **συν2α** = συν(α+α) = συνασυνα - -ημαημα = **$συν^2α$ - $ημ^2α$**

= $συν^2α$ - (1 - $συν^2α$) = **$2συν^2α$ - 1**

Επίσης συν2α = $συν^2α$ - $ημ^2α$

= (1 - $ημ^2α$) - $ημ^2α$ = **1 - $2ημ^2α$**

Επομένως:

$$\boxed{\begin{aligned} συν2α &= συν^2α - ημ^2α \\ &= 2συν^2α - 1 \\ &= 1 - 2ημ^2α \end{aligned}} \qquad (2)$$

• **εφ2α** = $\dfrac{εφα + εφα}{1 - εφαεφα} = \mathbf{\dfrac{2εφα}{1 - εφ^2α}}$

Επομένως:

$$\boxed{εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφα^2α}} \qquad (3)$$

Από τους τύπους (2) μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α, αν γνωρίζουμε το συν 2α.
Πράγματι, έχουμε:

• $συν2α = 2συν^2α - 1$

$\Leftrightarrow 1+συν2α = 2συν^2α$

$$\Leftrightarrow συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$$

• $συν2α = 1 - 2ημ^2α$

$\Leftrightarrow 2ημ^2α = 1 - συν2α$

$$\Leftrightarrow ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2}$$

$$εφ^2α = \frac{ημ^2α}{συν^2α} = \frac{\frac{1 - συν2α}{2}}{\frac{1 + συν2α}{2}}$$

$$= \frac{1 - συν2α}{1 - συν2α}$$

Επομένως:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad (4)$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad (5)$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \qquad (6)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του μισού μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής. Για παράδειγμα οι τριγωνομετρικοί

αριθμοί της γωνίας 22,5° = $\frac{45^o}{2}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$ημ^2 22{,}5^o = \frac{1 - συν45^o}{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad ,$$

οπότε $ημ22{,}5^o = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

$$συν^2 22{,}5^o = \frac{1 + συν45^o}{2}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad ,$$

οπότε $συν22{,}5^o = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

Επομένως

$$\text{εφ}22{,}5^o = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1 \quad \text{και}$$

$$\text{σφ}22{,}5^o = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να αποδειχθεί ότι:

i) $\text{ημ}3\text{α} = 3\text{ημα} - 4\text{ημ}^3\text{α}$

ii) $\text{συν}3\text{α} = 4\text{συν}^3\text{α} - 3\text{συνα}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

i) $\text{ημ}3\text{α} = \text{ημ}(2\text{α}+\text{α}) =$

$= \text{ημ}2\text{ασυνα}+\text{συν}2\text{αημα} =$

$= 2\text{ημασυν}^2\text{α} + (1 - 2\text{ημ}^2\text{α})\text{ημα} =$

$= 2ημα(1 - ημ^2α) + (1 - 2ημ^2α)ημα =$
$= 2ημα - 2ημ^3α + ημα - 2ημ^3α =$
$= \mathbf{3ημα - 4ημ^3α}$

ii) $συν3α = συν(2α+α)$
$= συν2ασυνα - ημ2αημα$
$= (2συν^2α - 1)συνα - 2ημ^2ασυνα$
$= (2συν^2α - 1)συνα - 2(1 - συν^2α)συνα$
$= 2συν^3α - συνα - 2συνα + 2συν^3α$
$= \mathbf{4συν^3α - 3συνα}$

2ο Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α με $συνα \neq 0$ ισχύει:

$$\text{i) } ημ2α = \frac{2εφα}{1 + εφ^2α}$$

$$\text{ii) } συν2α = \frac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν συνα ≠ 0, έχουμε:

i) $ημ2α = 2ημασυνα$

$$= \frac{2ημασυνα}{συν^2α + ημ^2α} = \frac{\dfrac{2ημασυνα}{συν^2α}}{\dfrac{συν^2α}{συν^2α} + \dfrac{ημ^2α}{συν^2α}} =$$

$$= \frac{2εφα}{1 + εφ^2α}$$

ii) $συν2α = συν^2α - ημ^2α$

$$= \frac{συν^2α - ημ^2α}{συν^2α + ημ^2α} = \frac{\dfrac{συν^2α}{συν^2α} - \dfrac{ημ^2α}{συν^2α}}{\dfrac{συν^2α}{συν^2α} + \dfrac{ημ^2α}{συν^2α}} =$$

$$= \frac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}$$

3ο **Αν $εφ2α = \frac{3}{4}$ και $\frac{π}{2} < α < π$, να βρεθεί η εφα.**

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο (3) έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{εφα}{1 - εφ^2α} \Leftrightarrow 8εφα = 3 - 3εφ^2α$$

$$\Leftrightarrow 3\ εφ^2α + 8εφα - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow εφα = \frac{-8 \pm 10}{6} \qquad [αφού\ Δ = 100]$$

$$\Leftrightarrow εφα = \frac{1}{3} \quad ή\ εφ = -3$$

Από τις τιμές της εφα που βρήκαμε δεκτή είναι μόνο η - 3,

αφού $\frac{π}{2} < α < π$.

4ο Να αποδειχθεί ότι

$$εφ^2\left(\frac{π}{4} - x\right) = \frac{1 - ημ2x}{1 + ημ2x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $εφ^2α = \dfrac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$, έχουμε:

$$εφ^2\left(\frac{π}{4} - x\right) = \frac{1 - συν\left(\frac{π}{2} - 2x\right)}{1 + συν\left(\frac{π}{2} - 2x\right)} =$$

$$= \frac{1 - ημ2x}{1 + ημ2x} \quad ,$$

αφού $συν\left(\dfrac{π}{2} - 2x\right) = ημ2x$

5ο Να λυθεί η εξίσωση:

$$2 - ημ2x = 2συν^2\frac{x}{2}$$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$$2 - ημ^2x = 2συν^2\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 - ημ^2x = 1+συνx$$

$$\Leftrightarrow 2 - (1 - συν^2x) = 1 +συνx$$

$$\Leftrightarrow συν^2x - συνx = 0$$

$$\Leftrightarrow συνx(συνx - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow συνx=0 \quad ή \quad συνx=1$$

$$\Leftrightarrow x = 2κπ \pm \frac{π}{2} \quad ή \quad x=2κπ, \quad κ \in Z$$

6ο Να εκφρασθεί το $8συν^4α$ ως συνάρτηση του συν2α και του συν4α

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$$8\sigma\upsilon\nu^4\alpha = 8\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)^2$$

$$= 8\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}\right)^2$$

$$= 8\cdot\frac{1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{4}$$

$$= 2+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$$

$$= 2+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha$$

$$= 3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $2\eta\mu\frac{3\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$ ii) $1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}$

iii) $2\sigma\upsilon\nu^2 135^o - 1$

iv) $\dfrac{2\varepsilon\varphi 75^o}{1 - \varepsilon\varphi^2 75^o}$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

ii) $2\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) - 1$

iii) $\dfrac{2\varepsilon\varphi 3\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 3\alpha}$

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

ii) $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \eta\mu^2\alpha} = 2\varepsilon\varphi\alpha$

iii) $σφα - εφα = 2σφ2α$

iv) $εφα + σφα = \dfrac{2}{ημ2α}$

4. **Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 2α, αν:**

i) $συνα = -\dfrac{4}{5}$ και $π < α < \dfrac{3π}{2}$

ii) $ημα = \dfrac{3}{5}$ και $\dfrac{π}{2} < α < π$

5. **Να υπολογίσετε την $εφ(α + 2β)$,**

αν $εφα = \dfrac{1}{4}$ **και** $εφβ = \dfrac{1}{3}$

6. **Να αποδείξετε ότι:**

i) $ημ^3ασυνα + συν^3αημα = \dfrac{1}{2}ημ2α$

ii) $\eta\mu 2\alpha \varepsilon\varphi\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2$

iii) $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

iv) $\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x - 1 = 0$

ii) $\eta\mu 2x - 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - 1 = 0$

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\dfrac{\pi}{16}$

9. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\dfrac{\alpha}{2}$, αν:

i) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{\pi}{13}$ και $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{3}{5}$ και $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{x}{2} = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 \dfrac{x}{2} = 0$

iii) $2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\eta\mu^2 \dfrac{x}{2}$

iv) $\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{x}{2}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι:

$\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu 2\alpha}$.

2. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = 2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^2\frac{\pi}{8} - \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{8}$$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $$\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{2}$$

ii) $$\frac{3 - 4\sigma\upsilon\nu2\alpha + \sigma\upsilon\nu4\alpha}{3 + 4\sigma\upsilon\nu2\alpha + \sigma\upsilon\nu4\alpha} = \varepsilon\varphi^4\alpha$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi(45^{o} - \alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1 + \eta\mu2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha} - \varepsilon\varphi2\alpha$$

και με τη βοήθεια αυτού του τύπου να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi15^{o}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $εφ2x = 2συνx$ ii) $εφxεφ2x = -3$

7. Να αποδείξετε ότι:

$συν4α = 8συν^4α - 8συν^2α + 1$

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $συν^4\frac{π}{8} + συν^4\frac{3π}{8} = \frac{3}{4}$

ii) $ημ^4\frac{π}{8} + ημ^4\frac{3π}{8} = \frac{3}{4}$

iii) $8ημ^2ασυν^2α = 1 - συν4α$

9. Αν $συνx = \dfrac{α}{β+γ}$, $συν\,y = \dfrac{β}{γ+α}$

και $συνz = \dfrac{γ}{α+β}$, να αποδείξετε

ότι: $εφ^2\frac{x}{2} + εφ^2\frac{y}{2}$ +, $εφ^2\frac{z}{8} = 1$

* 1.5 Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων

Σε αρκετές εφαρμογές της Τριγωνομετρίας χρειάζεται το γινόμενο τριγωνομετρικών αριθμών να μετασχηματισθεί σε άθροισμα ή αντιστρόφως το άθροισμα σε γινόμενο.

Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τύπους, με τους οποίους γίνονται οι παραπάνω μετασχηματισμοί.

Μετασχηματισμός γινομένου σε άθροισμα

Από τις γνωστές μας ισότητες:

$$ημ(α + β) = ημασυνβ + συναημβ$$

$$ημ(α - β) = ημασυνβ - συναημβ$$

με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

ημ(α + β) + ημ(α - β) = 2ημασυνβ
δηλαδή:

2ημασυνβ = ημ(α+β)+ημ(α-β) (1)

ενώ από τις:

συν(α - β) = συνασυνβ + ημαημβ
συν(α + β) = συνασυνβ - ημαημβ

με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

2συνασυνβ = συν(α - β) + συν(α + β) (2)

2ημαημβ = συν(α - β) - συν(α + β) (3)

Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τριών τύπων μπορούμε να μετασχηματίσουμε το άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο. Πράγματι, αν θέσουμε

$$\alpha + \beta = A \qquad \text{και} \qquad \alpha - \beta = B,$$

τότε έχουμε

$$A + B = \alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha,$$

οπότε $\alpha = \dfrac{A + B}{2}$

$$A - B = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta,$$

οπότε $\beta = \dfrac{A - B}{2}$

Έτσι ο παραπάνω τύπος (1) γράφεται $2\,\eta\mu\,\dfrac{A + B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{A - B}{2} =$

$$= \eta\mu A + \eta\mu B.$$

Δηλαδή έχουμε:

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\,\eta\mu\,\frac{A + B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A - B}{2} \qquad (4)$$

Αν τώρα στον τύπο (4) αντικαταστήσουμε το Β με - Β, βρίσκουμε:

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\,\eta\mu\,\frac{A - B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A + B}{2} \qquad (5)$$

Ομοίως, από τον τύπο (2), βρίσκουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A + B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A - B}{2} \qquad (6)$$

ενώ από τον τύπο (3) βρίσκουμε

$$2\eta\mu\,\frac{A + B}{2}\,\eta\mu\,\frac{A - B}{2} = \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu A\text{, οπότε}$$

$$\text{συν}A - \text{συν}B =$$
$$= -2\text{ημ}\frac{A-B}{2}\,2\text{ημ}\frac{A+B}{2} \quad (7)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να λυθεί η εξίσωση: (1)

ημ6xσυν3x = ημ5xσυν4x

ΛΥΣΗ

Έχουμε: (1) $\Leftrightarrow$ 2ημ6xσυν3x =

= 2ημ5xσυν4x

$\Leftrightarrow$ ημ9x + ημ3x =

= ημ9x + ημx

$\Leftrightarrow$ ημ3x = ημx

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + x \\ \quad\text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi - x \end{cases} ,\kappa \in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi \\ \quad ή \\ x = \dfrac{2\kappa\pi+\pi}{4} \end{cases} \quad ,\kappa \in Z$$

2ο Να λυθεί η εξίσωση:

$\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu 2x$ (1)

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\frac{3x+x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3x-x}{2} = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \quad (2)$$

ή $\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu x \quad (3)$ (2)

Αλλά $(2) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow x= 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in Z$$

και (3) $\Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \quad\text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in Z$$

3ο Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma =$$
$$= 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma =$$

$$= 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} +$$

$$+ 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} +$$

$\boxed{\text{γιατί}}$

$$+ 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \qquad \left(\frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left[\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2} + \\ + \sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}\end{array}\right]$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\, 2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} =$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα γινόμενα:

i) $συν75^{o}συν15^{o}$,

ii) $ημ105^{o}συν15^{o}$,

iii) $ημ\frac{13π}{12}συν\frac{π}{12}$

iv) $ημ\frac{11π}{12}ημ\frac{7π}{12}$

2. Να μετατρέψετε σε αθροίσματα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω γινόμενα:

i) $2ημxσυν2x$ ii) $2ημ4xημ2x$

iii) $2συν3xσυν5x$

iv) $συν6xημ2x$

v) $ημ\left(\frac{π}{4}-x\right)ημ\left(\frac{π}{4}+x\right)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) ημ3xσυνx = ημ6xσυν2x

ii) συν3xσυν2x = ημ2xημx

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα αθροίσματα:

i) $ημ75^{o}+ημ15^{o}$

ii) $ημ\frac{11π}{12} - ημ\frac{5π}{12}$

iv) $συν40^{o}+συν80^{o}+συν160^{o}$

5. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω αθροίσματα:

i) ημ4x+ημ2x ii) συν5x - συν3x

iv) συν3x+συνx iv) 1+ημx

v) 1+συνx

6. Αν Β και Γ είναι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $ημ2Β + ημ2Γ = 2συν(Β - Γ)$,

ii) $ημΒ - ημΓ = \sqrt{2ημ}\,\dfrac{Β - Γ}{2}$

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{συν3α - συν5α}{ημ3α + ημ5α} = εφα$

ii) $\dfrac{ημα + ημ3α + ημ5α}{συνα + συν3α + συν5α} = εφ3α$

iii) $\dfrac{ημαημ2α + ημ3αημ6α}{ημασυν2α + ημ3ασυν6α} = εφ5α$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $ημ3x - ημx = συν2x$

ii) $συν5x - συνx = ημ3x$

iii) $ημ3x + ημ6x + ημ9x = 0$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $2ημ50^{o} - \dfrac{1}{2συν20^{o}} = 1$

ii) $2\eta\mu 52^{o}\eta\mu 68^{o}$ -

$- 2\eta\mu 47^{o}\sigma\upsilon\nu 77^{o}\sigma\upsilon\nu 81^{o} = 1$

2. **Αν για τις οξείες γωνίες Β και Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει 4ημΒσυν Γ=1, να αποδείξετε ότι Β = 30^{o}.**

3. **Να αποδείξετε ότι:**

i) $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \leq \eta\mu^{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \leq \sigma\upsilon\nu^{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

4. **Να αποδείξετε ότι:**

i) $\frac{(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)}{2} \leq \eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

για οποιαδήποτε α, β$\in$[0,π]

ii) $\frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)}{2} \leq \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

για οποιαδήποτε α, β $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

i) ημΑ + ημ(Β - Γ) = 2ημΒσυνΓ

ii) συν(Β - Γ) - συνΑ = 2συνΒσυνΓ

iv) συνΑ + συνΒ + συνΓ =

$$= 1 + 4ημ\frac{Α}{2}\,ημ\frac{Β}{2}\,ημ\frac{Γ}{2}$$

6. Να αποδείξετε ότι για τις οξείες γωνίες Β, Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$$2\sqrt{2}συν\frac{Β}{2}\,συν\frac{Γ}{2} - 1 =$$

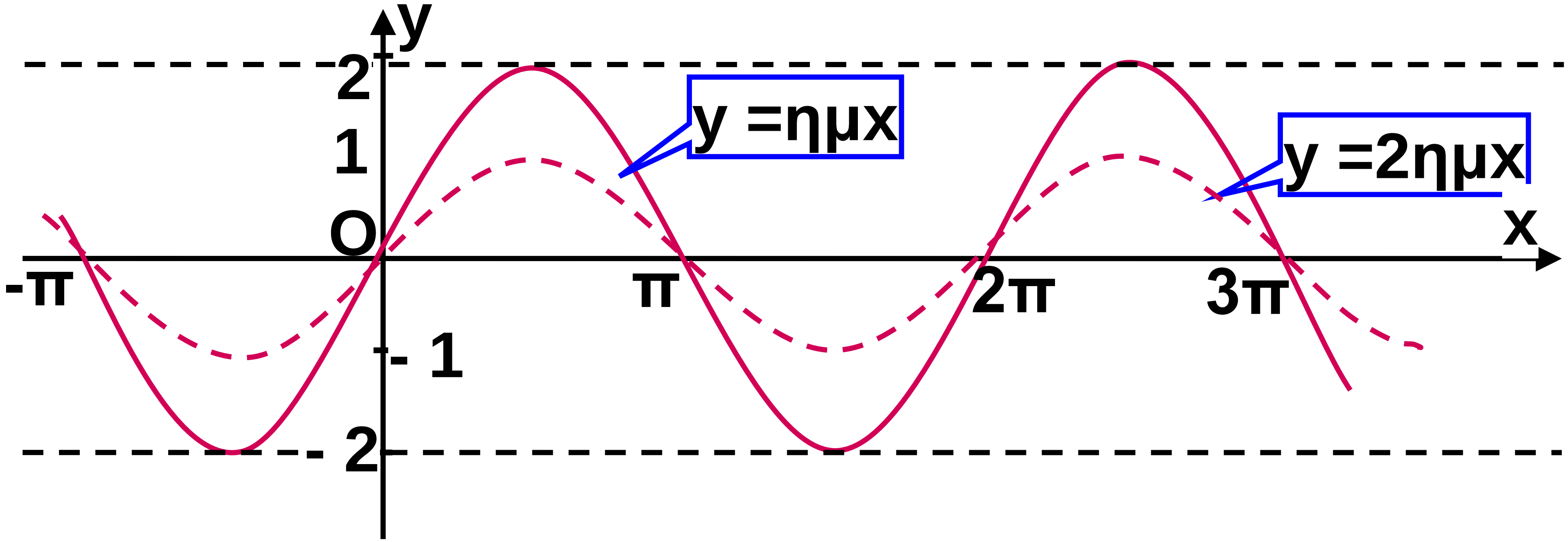
$$= \sqrt{2}συν\frac{Β - Γ}{2}$$

7. Αν για τις γωνίες Α, Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ημΑ = συνΒ + συνΓ, να αποδείξετε ότι $B=90^o$ ή $\Gamma = 90^o$ και αντιστρόφως.

1.6 Η συνάρτηση $f(x) = αημx + βσυνx$

Στην προηγούμενη τάξη είδαμε ότι μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = ρημx$, $ρ > 0$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με - ρ. Η γραφική της παράσταση είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη.

Μια τέτοια συνάρτηση είναι, π.χ., και η $f(x) = 2ημx$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:


y
x
2
1
O
- 1
- 2
-π
π
2π
3π
y =ημx
y =2ημx

Η συνάρτηση $f(x) = ρημ(x+φ)$

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = 2ημ\left(x + \frac{π}{4}\right)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από την $g(x) = 2ημx$ αν, όπου x, θέσουμε $x + \frac{π}{4}$, δηλαδή ισχύει

$$f(x) = g\left(x + \frac{π}{4}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά $\frac{π}{4}$ μονάδες, προς τα αριστερά.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = 2ημx$ έχει περίοδο 2π, μέγιστο ίσο με 2 και ελάχιστο ίσο με - 2.

Επομένως η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει

μέγιστο ίσο με 2 και ελάχιστο ίσο με - 2.
Ο σταθερός αριθμός $\frac{\pi}{4}$ λέγεται

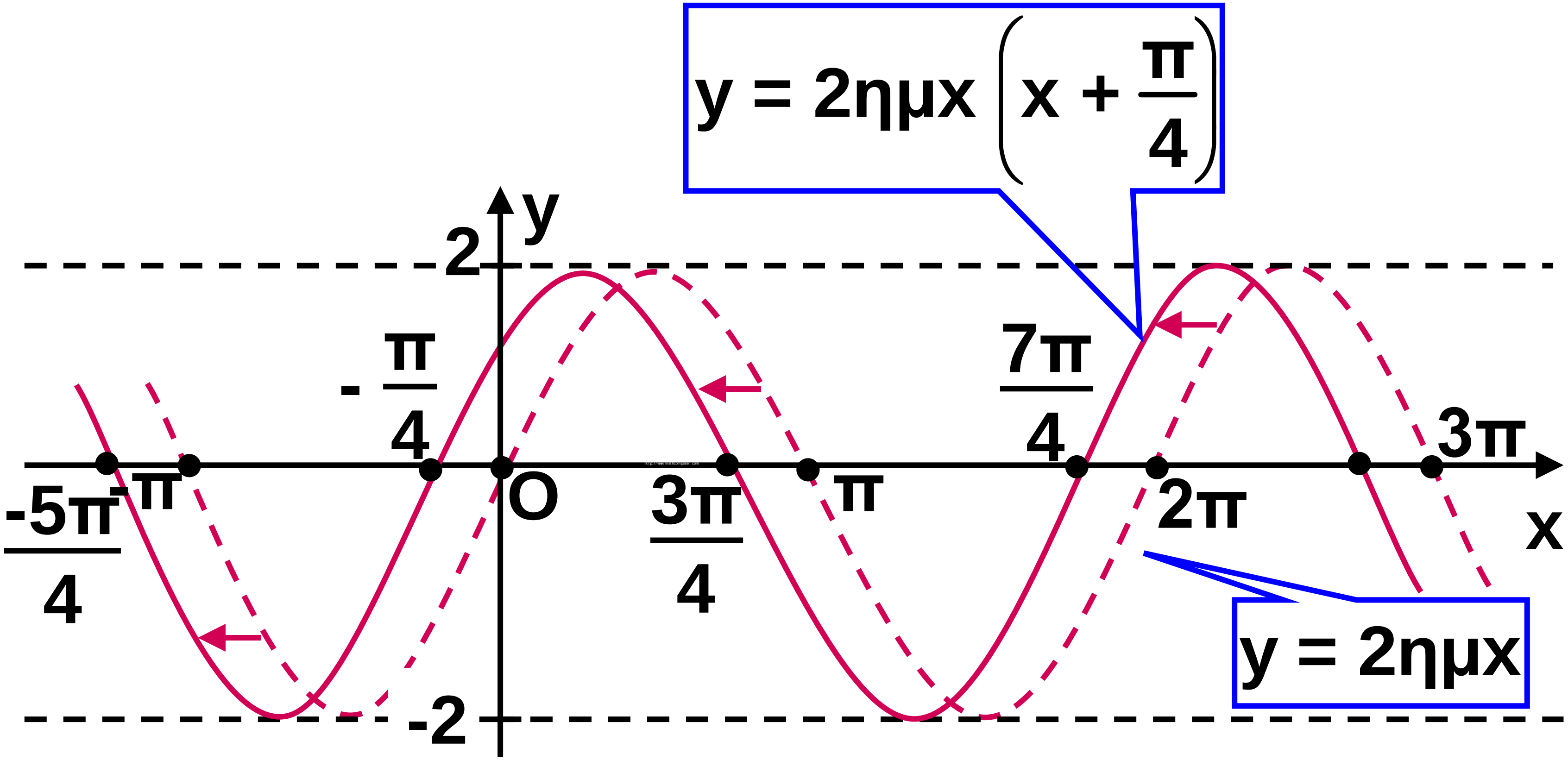
διαφορά φάσεως των καμπυλών

$y = 2ημx\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ και $y = 2ημx$.

Οι καμπύλες αυτές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

Γενικότερα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ρημ(χ+φ)$, $ρ > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = ρημx$. Επομένως:

Η συνάρτηση $f(x) = ρημ(x + φ)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με -ρ.



y = 2ημx (x + π/4)
y
2
-π/4
7π/4
3π
-5π/4
-π
O
3π/4
π
2π
x
y = 2ημx
-2

Η συνάρτηση $f(x) = αημx + βσυνx$, $α, β \neq 0$

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = ημx + συνx$. Για να τη μελετήσουμε θα προσπαθήσουμε να τη μετατρέψουμε σε άλλη συνάρτηση γνωστής μορφής. Έχουμε:

$$ημx + συνx = ημx + εφ\frac{π}{4}\,συνx =$$

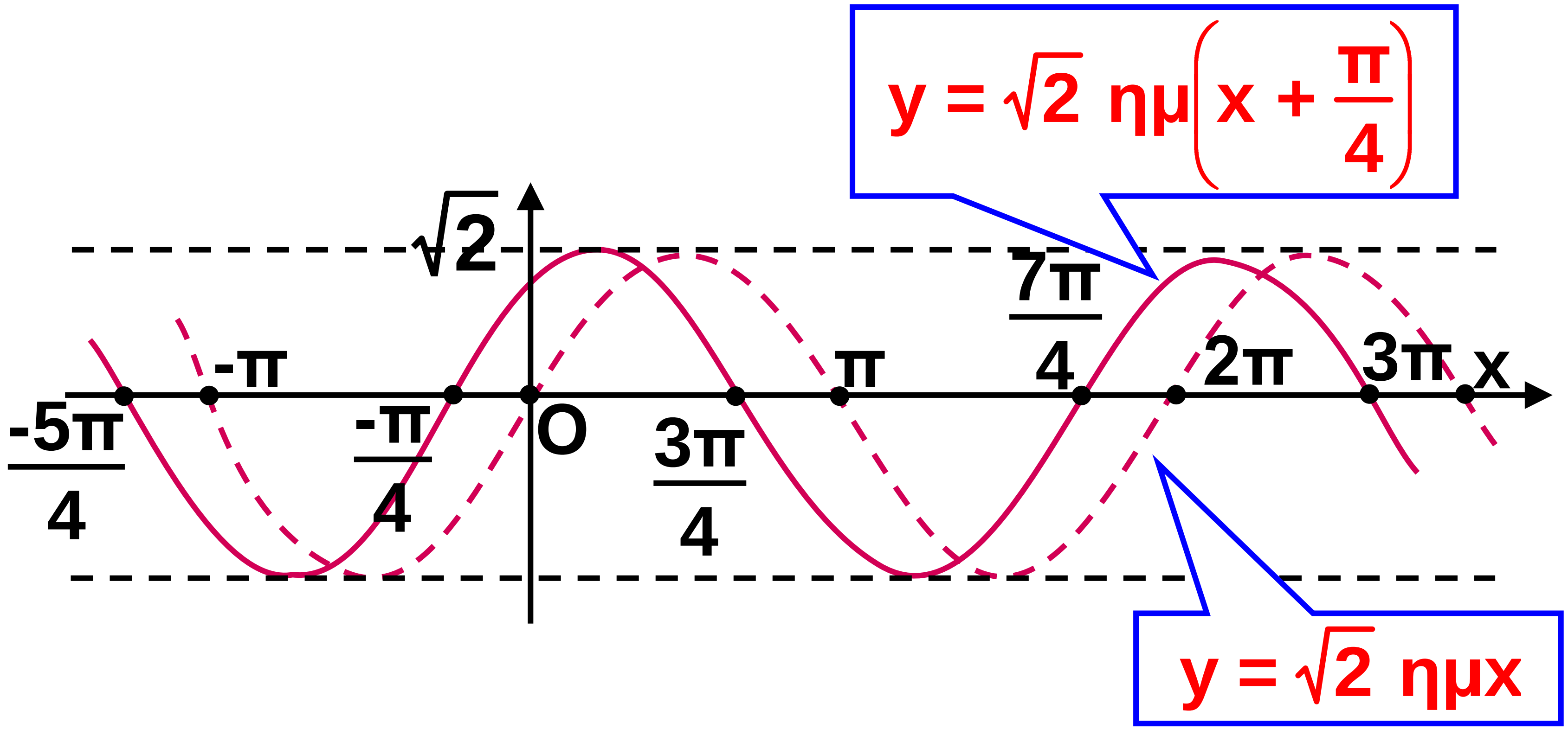
$$= ημx + \frac{ημ\frac{π}{4}}{συν\frac{π}{4}}\,συνx =$$

$$= \frac{ημx\ \ συν\frac{π}{4} + συνx\ \ ημ\frac{π}{4}}{συν\frac{π}{4}} =$$

$$= ημx + \frac{ημ\left(x + \frac{π}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\,ημ\left(x + \frac{π}{4}\right)$$

Επομένως $f(x) = \sqrt{2}\ ημx\left(x + \frac{π}{4}\right)$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με $\sqrt{2}$ και ελάχιστο ίσο με $-\sqrt{2}$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{2}ημx$ κατά $\frac{π}{4}$ μονάδες προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



y = √2 ημ(x + π/4)
y = √2 ημx
√2
-5π/4
-π
-π/4
O
3π/4
π
7π/4
2π
3π
x

Γενικότερα θα αποδείξουμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α, β ≠ 0, τότε για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x = \rho\eta\mu(x + \varphi)$$

όπου $\rho = \sqrt{\alpha^2 \ \beta^2}$

και $\varphi \in R$ με

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho} \\ \eta\mu\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} \end{cases}$$

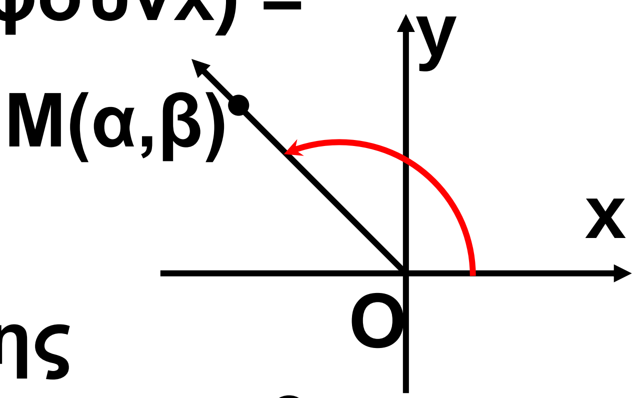
Έστω το σημείο Μ(α,β) και φ μια από τις γωνίες με αρχική πλευρά Οχ και τελική πλευρά ΟΜ. Τότε έχουμε:

$$\rho = (OM) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

και

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho} \quad \text{ή} \quad \alpha = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \\ \eta\mu\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} \quad \text{ή} \quad \beta = \rho\eta\mu\varphi \end{cases}$$

Επομένως
αημx+βσυνx =
= ρσυνφημx + ρημφσυνx =
= ρ(συνφημx + ημφσυνx) =
= ρημ(x+φ)



Η μελέτη λοιπόν της συνάρτησης φ(x)=αημx + βσυνx, α, β ≠ 0 μπορεί να γίνει με τη μελέτη της συνάρ-τησης f(x) = ρημ(x+φ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο i) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
ii) Ομοίως η συνάρτηση
$$f(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu 2x\,.$$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f γράφεται

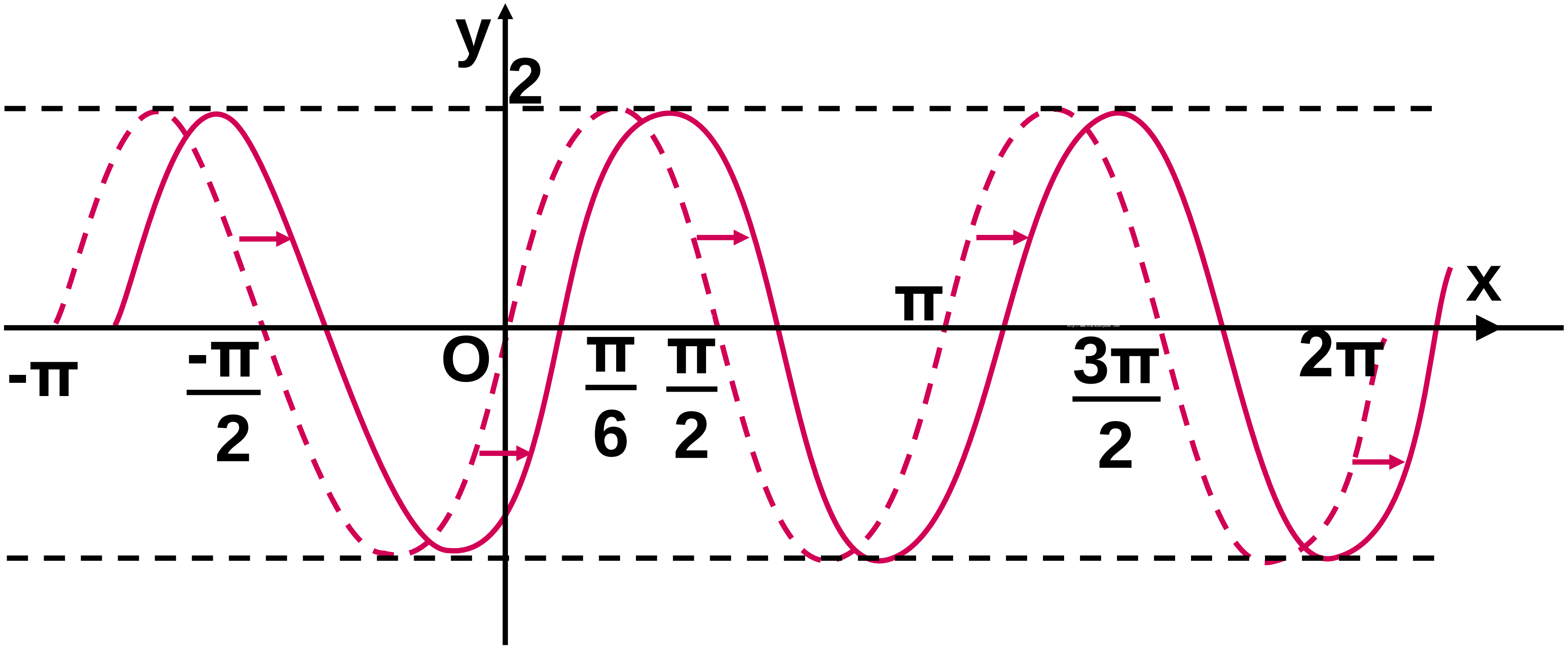
$f(x) = 2ημ\left(2x - \frac{π}{3}\right)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από τη συνάρτηση $g(x) = 2ημ2x$ αν, όπου x, θέσουμε $x - \frac{π}{6}$.

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{π}{6}$ μονάδες προς τα δεξιά.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = 2ημ2x$ έχει περίοδο $\frac{2π}{2} = π$, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2.

Άρα και η f είναι περιοδική με περίοδο π, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2.

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η παράσταση $ημ2x - \sqrt{3}συν2x$ είναι της μορφής αημt + βσυνt με α=1, β = $-\sqrt{2}$ και όπου t το 2x. Επομένως παίρνει τη μορφή ρημ(2x+φ).

Έχουμε $ρ = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

και $\begin{cases} συνφ = \dfrac{1}{2} \\ ημφ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ **, οπότε ένα** $φ = -\dfrac{π}{3}$

Άρα

$f(x) = ημ2x - \sqrt{3}\,συν2x = 2ημ(2x - \dfrac{π}{3})$

Τη συνάρτηση αυτή όμως τη μελετήσαμε προηγουμένως.

2ο Να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt{3}ημ4x + συν4x = \sqrt{2}$$

ΛΥΣΗ

Το 1ο μέλος της εξίσωσης είναι της μορφής αημt + βσυνt με $\alpha = \sqrt{3}$, β=1 και όπου t το 4x. Επομένως παίρνει τη μορφή ρημ(4x+φ).

Έχουμε $\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}^2\right) + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

και $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \eta\mu\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, οπότε ένα $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$

Άρα $\sqrt{3}\eta\mu 4x + \sigma\upsilon\nu 4x = 2\eta\mu\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

και η εξίσωση γίνεται

$$2\eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ημ4x + \dfrac{π}{6} = 2κπ + \dfrac{π}{4} \\ \text{ή} \\ 4x + \dfrac{π}{6} = 2κπ + \left(π - \dfrac{π}{4}\right) \end{cases}, κ \in R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = κ\dfrac{π}{2} + \dfrac{π}{48} \\ \text{ή} \\ x = κ\dfrac{π}{2} + \dfrac{7π}{48} \end{cases}$$

3ο Δυο ρεύματα με την ίδια κυκλική συχνότητα ω και με εντά-σεις $I_1 = 2ημωt$ και $I_2 = 2ημ\left(ωt + \dfrac{2π}{3}\right)$ διαρρέουν έναν αγωγό. Να δειχθεί ότι το άθροισμά τους έχει την ίδια κυκλική συχνότητα.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $I_{ολ} = I_1 + I_2 =$

$$= 2ημωt + 2ημ\left(ωt + \frac{2π}{3}\right)$$

$$= 2ημωt +$$

$$+2\left(ημωtσυν\frac{2π}{3} + συνωtημ\frac{2π}{3}\right)$$

$$= 2ημωt +$$

$$+2\left(-\frac{1}{2}ημωt + \frac{\sqrt{3}}{2}συνωt\right)$$

$$= ημωt + \sqrt{3}συνωt$$

$$= 2ημ\left(ωt + \frac{π}{3}\right),$$

που σημαίνει ότι το $I_{ολ}$ έχει την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων και στη συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά:

i) $f(x) = 2ημ\left(x + \frac{π}{3}\right)$

ii) $f(x) = ημ\left(x - \frac{π}{3}\right)$

2. Να γράψετε στη μορφή
$f(x) = ρημ(x+φ)$ τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \sqrt{3}ημx - συνx)$

ii) $f(x) = -ημx + συνx)$

iii) $f(x) = -ημx - \sqrt{3}συνx)$

iv) $f(x) = ημx - συνx)$

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις της άσκησης 2.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{3}$ημx - συνx = 2 ,

ii) συνx - ημx = 1,

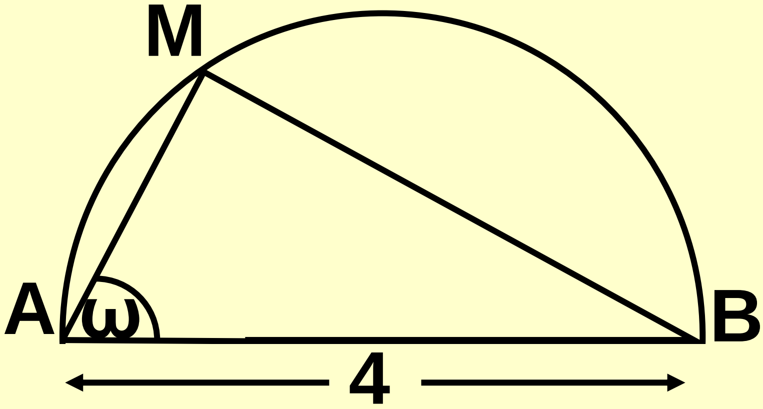
iii) $\sqrt{2}$ημx + $\sqrt{6}$συνx + 2 = 0

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος, έτσι ώστε να ισχύει:

(ΜΑ)+(ΜΒ) =

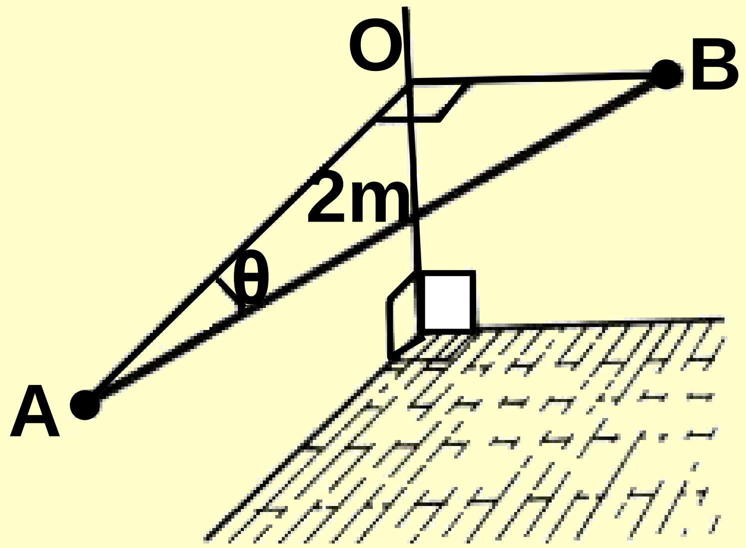
= $2\sqrt{6}$ημx



2. Μια μπάρα ΑΒ μήκους 2m τοποθετείται οριζόντια μεταξύ δυο κάθετων τοίχων. Για μεγαλύτερη αντοχή πρέπει να τοποθετηθεί, έτσι ώστε το (ΟΑ)+(ΟΒ) να γίνει μέγιστο.

i) Να εκφράσετε το (ΟΑ)+(ΟΒ) ως συνάρτηση του θ.

ii) Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το (ΟΑ)+(ΟΒ) γίνεται μέγιστο και να προσδιορίσετε το μέγιστο αυτό.



3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x) = 5ημx + 12συνx + 3$,

ii) $f(x) = 4συνx(ημx + συνx)$

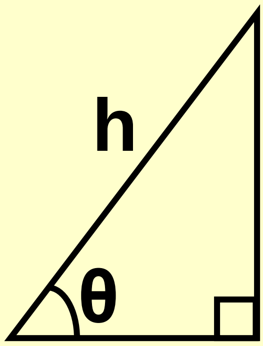
4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\eta\mu x\left(\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu - \eta\mu x\right) = \sqrt{2} - 1$$

5. Με συρματόπλεγμα μήκους 40m περιφράσσουμε τμήμα γης σχήματος ορθογωνίου τριγώνου. Αν η υποτείνουσα είναι h m και η μια οξεία γωνία θrad (Σχήμα)

i) Να αποδείξετε ότι:

$$h = \frac{40}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + 1}$$



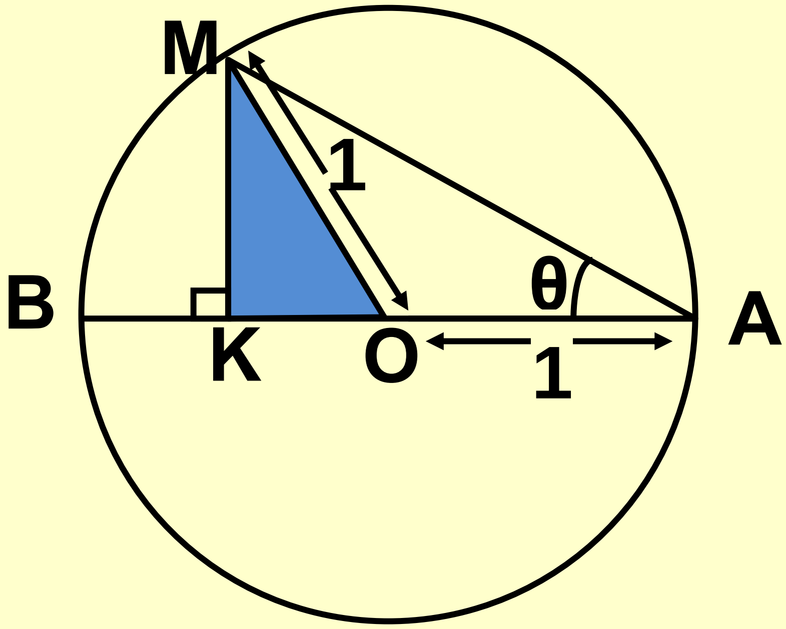
ii) Για ποια τιμή του θ το h παίρνει τη μικρότερη τιμή και ποια είναι αυτή;

6. Στο παρακάτω σχήμα:

i) Να δείξετε ότι η περίμετρος P του τριγώνου ΜΚΟ ισούται με

P = 1 + ημ2θ + συν2θ.

ii) Για ποια τιμή του θ το P παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή και ποια είναι αυτή;



1.7 Επίλυση τριγώνου

Το κλασικό πρόβλημα της Τριγωνομετρίας, από το οποίο πήρε και το όνομα της, είναι η επίλυση τριγώνου, δηλαδή ο υπολογισμός των άγνωστων κύριων στοιχείων

ενός τριγώνου, όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του.

Η επίλυση τριγώνου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των παρακάτω δυο βασικών θεωρημάτων, που είναι γνωστά το ένα ως **νόμος των ημίτονων** και το άλλο ως **νόμος των συνημίτονων.**

Νόμος των ημίτονων

ΘΕΩΡΗΜΑ Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

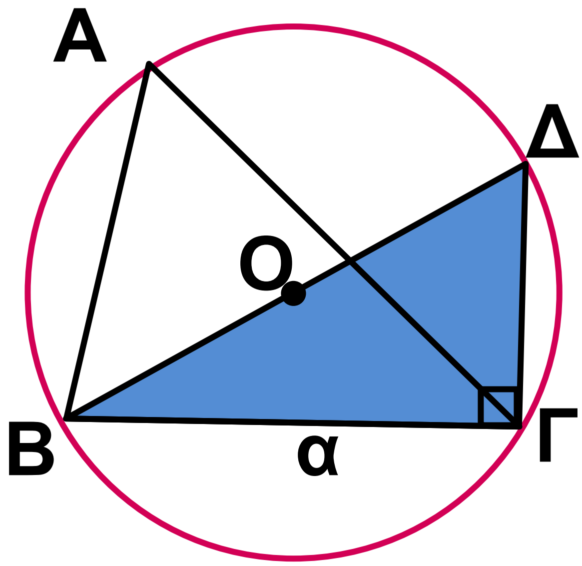
όπου R, η ακτίνα του περιγεγραμ-μένου κύκλου του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

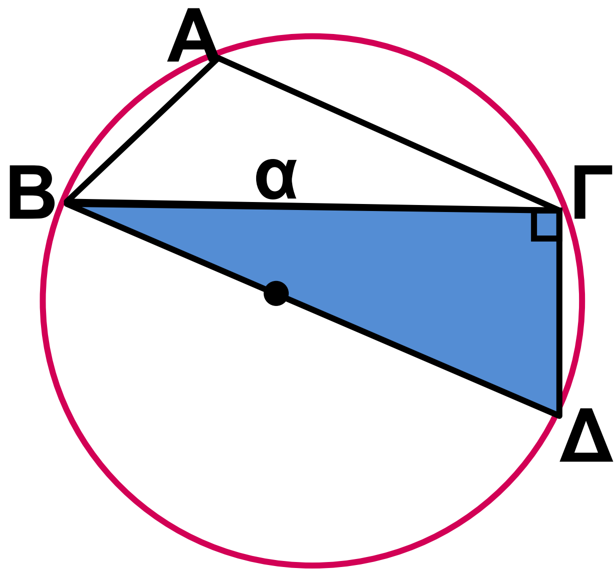
Έστω (Ο,Κ.) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ.

Αν φέρουμε τη διάμετρο ΒΔ και τη χορδή ΓΔ, τότε σχηματίζεται τρίγωνο ΓΒΔ που είναι ορθογώνιο στο Γ. Επομένως έχουμε:

$$\etaμΔ = \frac{(ΒΓ)}{(ΒΔ)} = \frac{α}{2R}, \text{ οπότε } \frac{α}{\etaμΔ} = 2R \quad (1)$$



Σχήμα 1



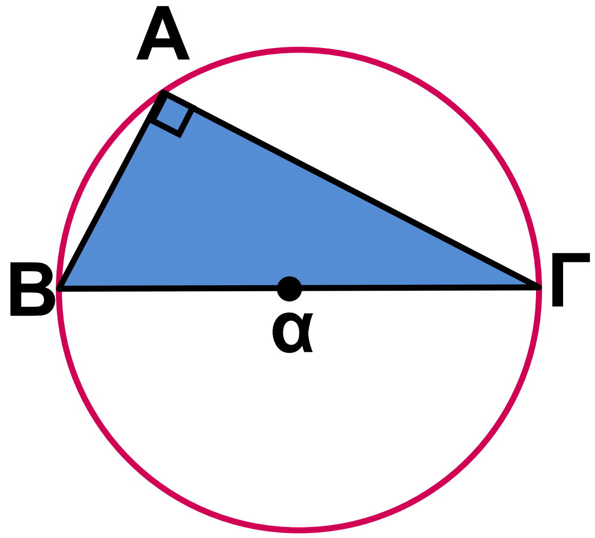
Σχήμα 2

Είναι όμως Δ = Α (Σχ. 1) ή Δ+Α = 180^o (Σχ. 2), οπότε ημΔ = ημΑ. Επομένως η (1) γράφεται

$$\frac{α}{\etaμΑ} = 2R$$

Αν Α = 90^{o}, τότε έχουμε: ημΑ = 1 και α = 2R. (Σχ. 3). Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει ισότητα

$$\frac{α}{ημΑ} = 2R$$



Σχ.(3)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:βΒ

$$\frac{β}{ημΒ} = 2R \quad \text{και} \quad \frac{γ}{ημΓ} = 2R$$

Επομένως: $\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ}$

Σχόλιο. Με το νόμο των ημίτονων μπορούμε εύκολα να επιλύσουμε ένα τρίγωνο, όταν δίνονται:

i) Μια πλευρά και δυο γωνίες του ή
ii) Δυο πλευρές και μια από τις μη περιεχόμενες γωνίες του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 15, Α = 43° και Β = 82°

ΛΥΣΗ

Επειδή Α+Β+Γ =180°, έχουμε:

$$Γ = 180^o - Α - Β = 180^o - 43^o - 82^o = 55^o$$

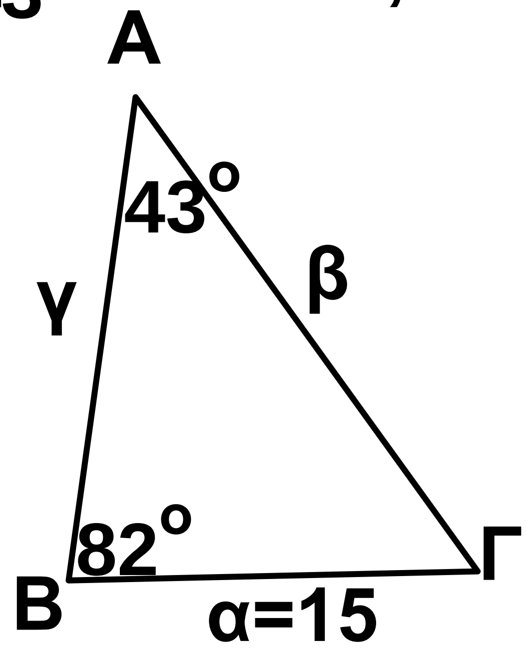
Έτσι, σύμφωνα με το νόμο των ημίτονων έχουμε:

$$\frac{15}{ημ43^o} = \frac{β}{ημ82^o} = \frac{γ}{ημ55^o}$$

οπότε:

$$β = \frac{15 \cdot ημ82^o}{ημ43^o} \simeq \frac{15 \cdot 0,9903}{0,6820} \simeq 22$$

$$\gamma = \frac{15 \cdot \eta\mu 55^{o}}{\eta\mu 43^{o}} \simeq \frac{15\ \ 0{,}8192}{0{,}6820} \simeq 18$$



2ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 23, β = 31 και Β = 35°

ΛΥΣΗ

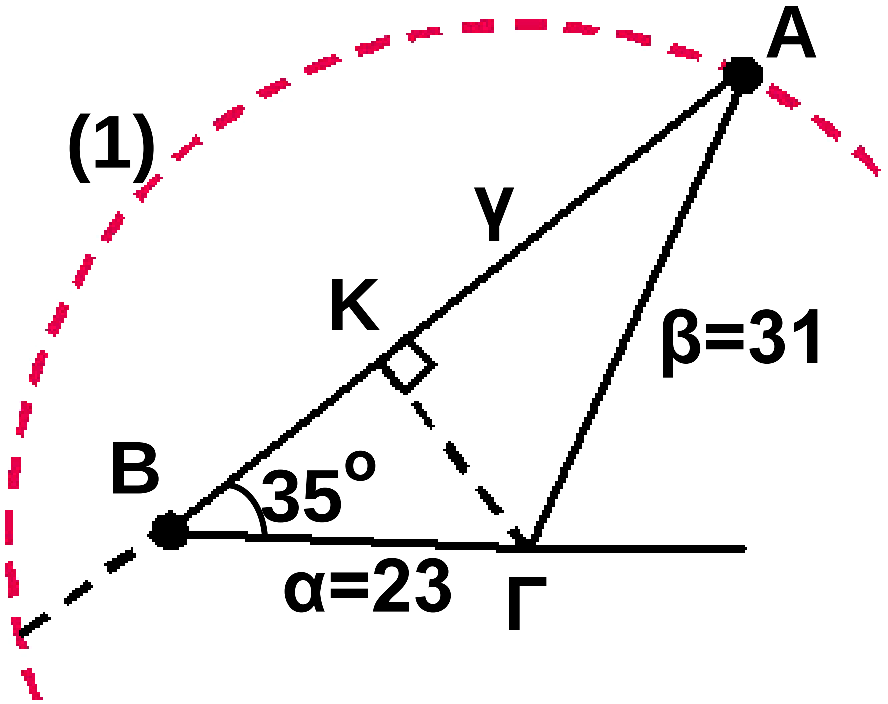
Έτσι, σύμφωνα με το νόμο των ημίτονων έχουμε:

$$\frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{\eta\mu 35^{o}} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

οπότε

$$\eta\mu A = \frac{23 \cdot \eta\mu 35^o}{31} \simeq \frac{23 \cdot 0{,}5736}{31} \simeq$$

$\simeq 0{,}4255$



Άρα

$$A \simeq 25^o \quad \text{ή} \quad A \simeq 155^o$$

Επειδή όμως α < β, θα είναι και A < B. Επομένως από τις παραπάνω τιμές της A δεκτή είναι μόνο η $A \simeq 25^o$.

Έτσι έχουμε

$$\Gamma = 180^o - A - B \simeq 180^o - 25^o - 35^o =$$

$$= 120^o$$

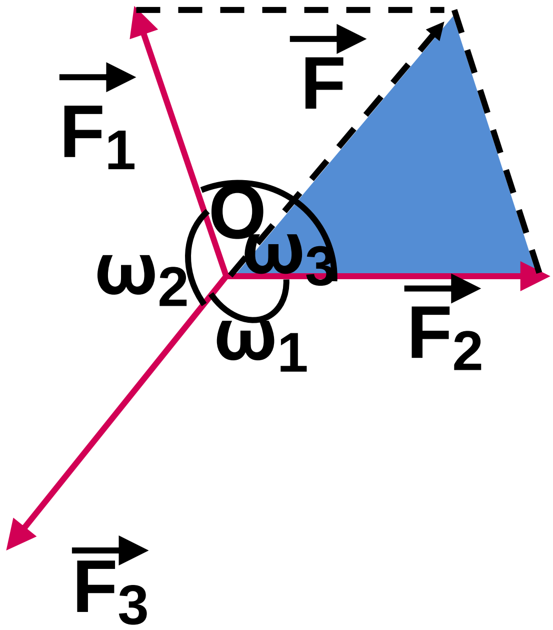
οπότε, λόγω της (1), ισχύει

$$\frac{31}{\eta\mu 35^o} = \frac{\gamma}{\eta\mu 120^o} \Leftrightarrow \gamma = \frac{31 \cdot \eta\mu 120^o}{\eta\mu 35^o} \simeq$$

$$\simeq \frac{31 \cdot 0{,}8660}{0{,}5736}$$

3ο Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις που έχουν μέτρα F_1, F_2 και F_3 αντιστοίχως και σχηματίζουν ανά δυο γωνίες (ω_1, ω_2 και ω_3, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το υλικό σημείο ισορροπεί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{F_1}{\eta\mu\omega_1} = \frac{F_2}{\eta\mu\omega_2} = \frac{F_3}{\eta\mu\omega_3}$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή το σημείο Ο ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}$ των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ θα έχει ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο με την $\vec{F}_3$. Επομένως από το νόμο των ημίτονων στο τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε:

$$\frac{(B\Gamma)}{\eta\mu\widehat{BO\Gamma}} = \frac{(OB)}{\eta\mu\widehat{B\Gamma O}} = \frac{(O\Gamma)}{\eta\mu\widehat{OB\Gamma}}$$

$$\frac{F_1}{\eta\mu\omega_1} = \frac{F_2}{\eta\mu\omega_2} = \frac{F_3}{\eta\mu\omega_3}$$

αφού $\widehat{BO\Gamma} = 180^o - \omega_1$,

$\widehat{B\Gamma O} = 180^o - \omega_2$ και $\widehat{OB\Gamma} = 180^o - \omega_3$.

Νόμος των συνημίτονων

Όταν είναι γνωστές οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου ή οι δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία τους δεν μπορούμε εύκολα με μόνο το νόμο των ημίτονων να υπολογίσουμε τα άλλα στοιχεία του. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα που είναι

γνωστό ως **νόμος των συνημίτονων.**

ΘΕΩΡΗΜΑ Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:
$α^2 = β^2+γ^2-2βγσυνΑ$
$β^2 = γ^2+α^2-2γασυνΒ$
$γ^2 = α^2+β^2-2αβ\ συνΓ$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

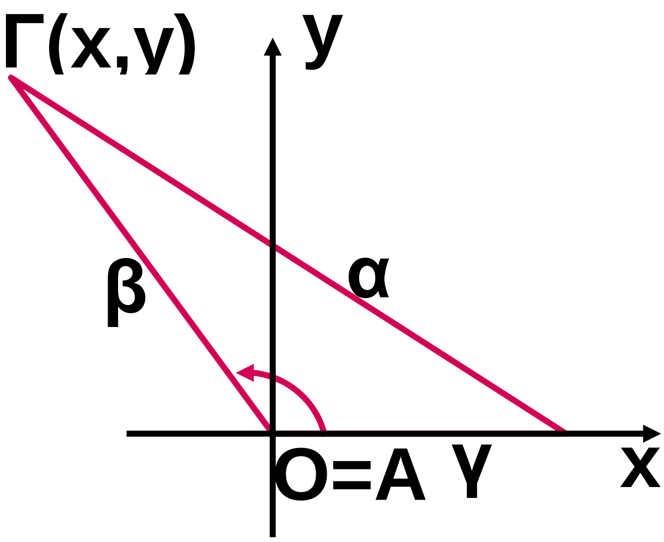
Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ισότητες.

Στο επίπεδο του τριγώνου θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Α και θετικό ημιάξονα των x την ημιευθεία ΑΒ. Έτσι οι συντεταγμένες του Β θα είναι (γ,O), ενώ για τις συντεταγμένες (x, y) του Γ θα ισχύει

$$\text{συν}\,A = \frac{x}{\beta} \quad \text{και} \quad \text{ημ}A = \frac{y}{\beta}$$

ή ισοδύναμα

$$x = \beta\,\text{συν}A \quad \text{και} \quad y = \beta\,\text{ημ}A \qquad (1)$$



Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο της απόστασης για τα σημεία Β(γ, Ο) και Γ(x, y), βρίσκουμε ότι:

$$\alpha = (\text{ΒΓ}) = \sqrt{(x - \gamma)^2 + (y - 0)^2}$$

οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= (x-\gamma)^2 + y^2 = \\
&= (\beta\sigma\upsilon\nu A - \gamma)^2 + + (\beta\eta\mu A)^2 \\
&= \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 A + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A + \\
&\quad + \beta^2\eta\mu^2 A \\
&= \beta^2(\sigma\upsilon\nu^2 A + \eta\mu^2 A) + \gamma^2 - \\
&\quad - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\
&= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.
\end{aligned}$$

Σχόλιο. Είναι φανερό ότι με το νόμο των συνημίτονων μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ενός τριγώνου, αρκεί να δοθούν οι άλλες δύο και η περιεχόμενη τους γωνία. Με τον ίδιο νόμο μπορούμε επιπλέον να υπολογίσουμε και τις γωνίες ενός τριγώνου, του οποίου είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές, αφού οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\gamma\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 35$, $\beta = 20$ και $\gamma = 42$

ΛΥΣΗ

Από το νόμο των συνημίτονων έχουμε:

- $35^2 = 20^2 + 42^2 - 2 \cdot 20 \cdot 42\ \sigma\upsilon\nu A,$

οπότε $\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{20^2 + 42^2 - 35^2}{2 \cdot 20 \cdot 42} \simeq$

$\simeq 0{,}5589$ Άρα $A \simeq 56^{\circ}$

- $20^2 = 35^2 + 42^2 - 2 \cdot 35 \cdot 42\ \sigma\upsilon\nu B,$

οπότε $\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{35^2 + 42^2 - 20^2}{2 \cdot 35 \cdot 42} \simeq$

$\simeq 0,8806$ Άρα $B \simeq 28^o$

Άρα $\Gamma \simeq 96^o$

2ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με β= 20, γ = 42 και Α = 56°

ΛΥΣΗ

Από το νόμο των συνημίτονων έχουμε

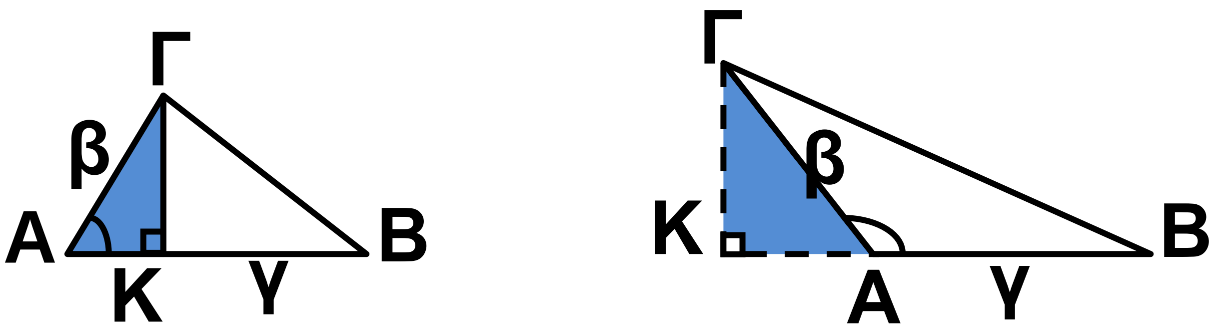
$\alpha^2 = 20^2 + 42^2 - 2 \cdot 20 \cdot 42 \sigma\upsilon\nu 56^o \simeq 1225$,

οπότε $\alpha \simeq 35$.

Έτσι γνωρίζουμε και τις τρεις πλευρές του τριγώνου, οπότε αναγόμαστε στο προηγούμενο πρόβλημα.

3ο Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Αν φέρουμε το ύψος ΓΚ του τριγώνου, έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}(AB)\cdot(\Gamma K)) =$$

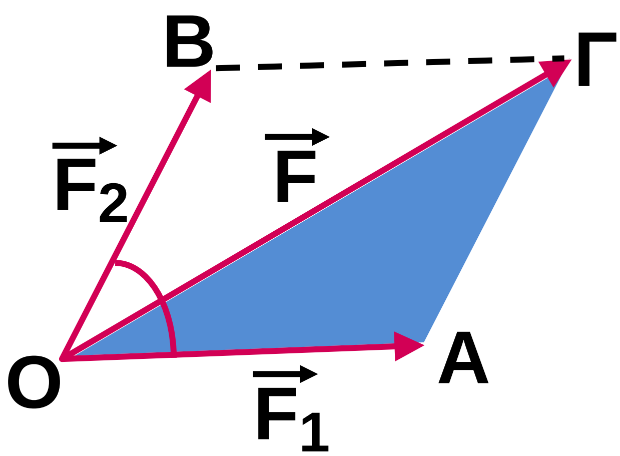
$$= \frac{1}{2}\ (AB)\cdot(A\Gamma)\cdot\eta\mu A$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\cdot\beta\cdot\eta\mu A$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που Α = 90°.

4ο **Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται δυο δυνάμεις που έχουν μέτρα F_1 και F_2 αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία ω. Να αποδειχθεί ότι το μέτρο F της συνισταμένης τους δίνεται από τον τύπο:**

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \text{ συνω}$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή (ΟΑ) = F_1, (ΑΓ) = F_2 και (ΟΓ) = F, στο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε:

$$F^2 = (\text{ΟΓ})^2 =$$

$$= (\text{ΟΑ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 - 2(\text{ΟΑ})(\text{ΑΓ})\text{συν}A =$$

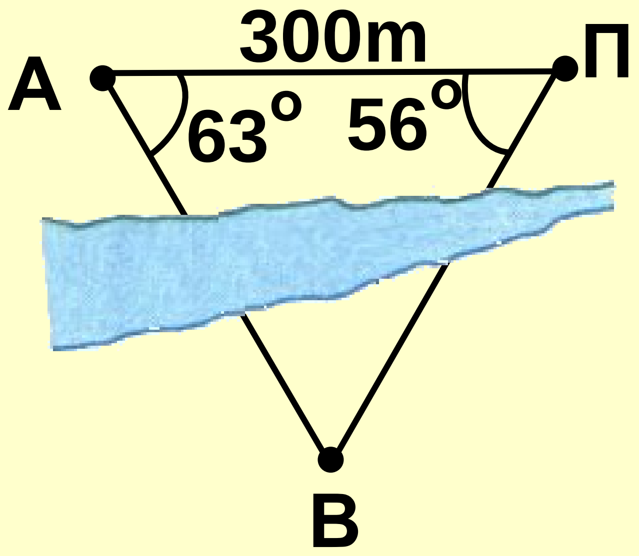
$$= F_1^2 + F_1^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}(180^o - ω) =$$

$$= F_1^2 + F_1^2 + 2F_1F_2\text{συν}ω$$

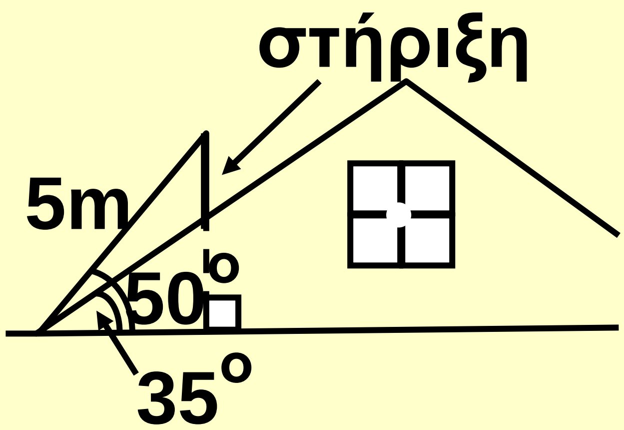
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **Δυο πύργοι Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν ενός ποταμού. Ένας παρατηρητής Π βρίσκεται προς το ίδιο μέρος του ποταμού με τον πύργο Α. Αν στο τρίγωνο ΠΑΒ είναι ΠΑ = 300m, Α = 63^o και Π = 56^o, να βρείτε την απόσταση των πύργων Α και Β.**



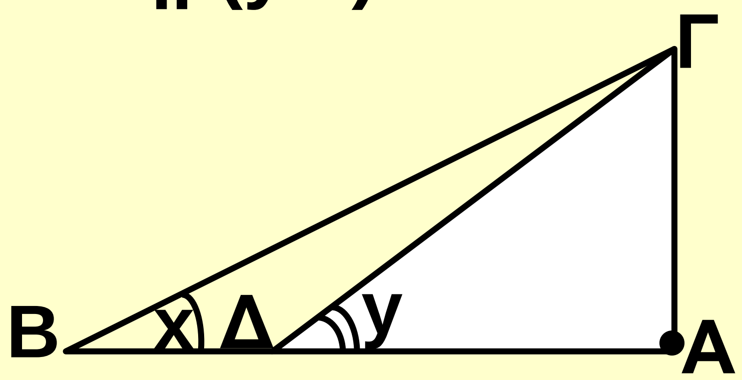
2. Ένας συλλέκτης ηλιακής ακτινοβολίας μήκους 5 m είναι τοποθετημένος στην οροφή ενός κτιρίου, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του βραχίονα με τον οποίο στηρίζεται ο συλλέκτης.



3. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

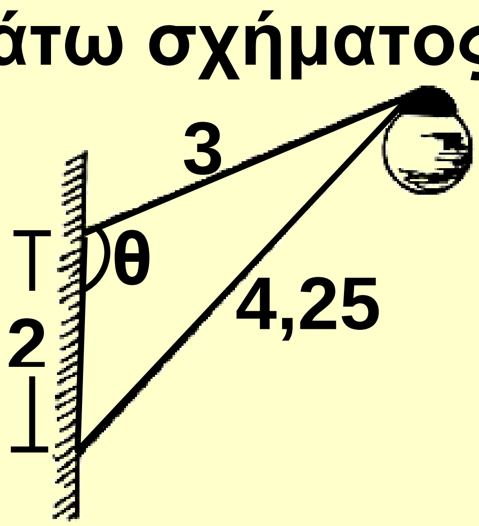
i) $Γ\Delta = \dfrac{d ημx}{ημ(y-x)}$,

ii) $ΑΓ = \dfrac{d ημx \;\; ημy}{ημ(y-x)}$

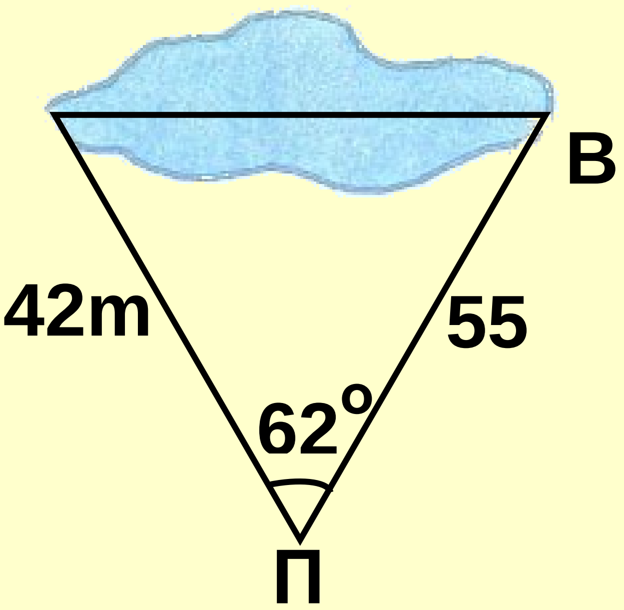


4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με α= 30, β = 10 και $B = 31^{o}$.

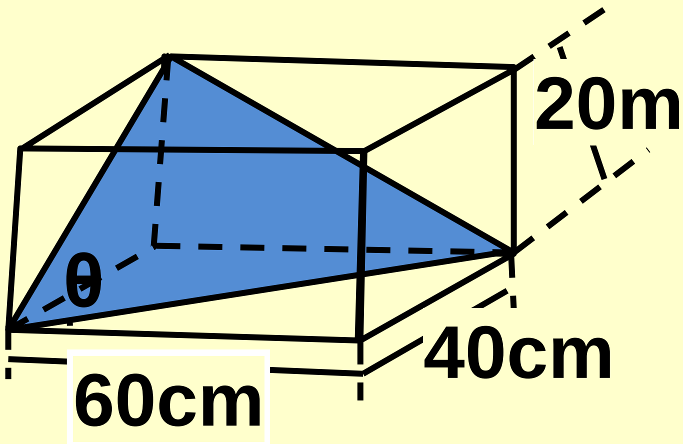
5. Να υπολογίσετε τη γωνία θ του παρακάτω σχήματος.



6. **Να υπολογίσετε το μήκος του έλους του παρακάτω σχήματος.**



7. **Να υπολογίσετε τη γωνία θ του ορθογωνίου κουτιού του παρακάτω σχήματος:**



8. **Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα**

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα: βσυνΓ + γσυνΒ = α

10. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα βσυνΓ = γσυνΒ, να αποδείξετε ότι β = γ και αντιστρόφως.

11. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα α = 2βσυνΓ, να αποδείξετε ότι β = γ και αντιστρόφως.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

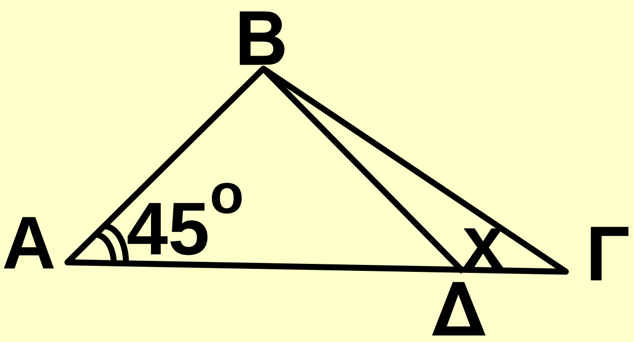
* **1.** Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα Β = 2Α, να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta}{2\alpha}$

ii) $\beta^2 - \alpha^2 = \alpha\gamma$

2. **Στο παρακάτω σχήμα να αποδεί-ξετε ότι:**

$$\Gamma\Delta = \alpha(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$$



3. **Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει μια από τις ισότητες:**

i) $\beta = \alpha\eta\mu B$,

ii) $\alpha\eta\mu A = \beta\eta\mu B + \gamma\eta\mu\Gamma$,

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

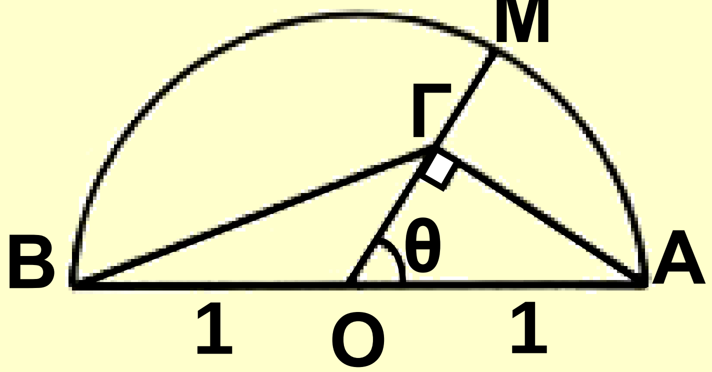
4. **Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα** $\alpha\sigma\upsilon\nu A = \beta\sigma\upsilon\nu B$, **να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.**

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα:

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \varepsilon\varphi\frac{A - B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

6. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

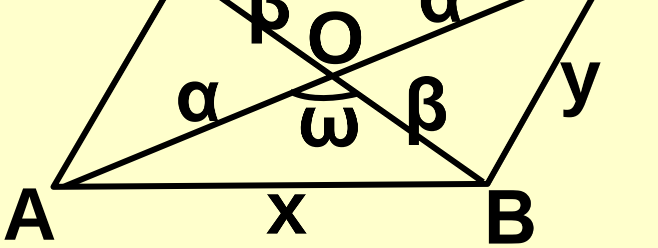
$$(B\Gamma)^2 = \frac{5 + 3\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$$



6. Να αποδείξετε ότι για το παρακάτω παραλληλόγραμμο ισχύουν οι ισότητες:

i) $x^2 + y^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2$

ii) $(AB\Gamma\Delta) = 2\alpha\beta\eta\mu\omega$



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος του ΑΔ είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι ισχύει
εφΒ + εφΓ = 2εφΒεφΓ και
σφΒ + σφΓ = 2.

2. Αν για τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\frac{\text{εφ}B}{\text{εφ}\Gamma} = \frac{\text{ημ}^2 B}{\text{ημ}^2 \Gamma}$,
να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ(x ,y) του επιπέδου με
x = 1 + 2συννt, y = 3 + 2ημt, βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Κ(1,3) και ακτίνας ρ = 2.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\dfrac{1 + ημx}{συνx} + \dfrac{συνx}{1 + ημx} = 4$

ii) $\dfrac{συνx \cdot σφx}{1 - ημx} = 3$

5. i) Αν $0 < x < \dfrac{π}{2}$,να αποδείξετε ότι $εφx + σφx \geq 2$

ii) Αν $0 < α < β < \dfrac{π}{2}$, να αποδείξετε

ότι $εφα < \dfrac{ημα \cdot ημβ}{συνα \cdot συνβ} < εφβ$

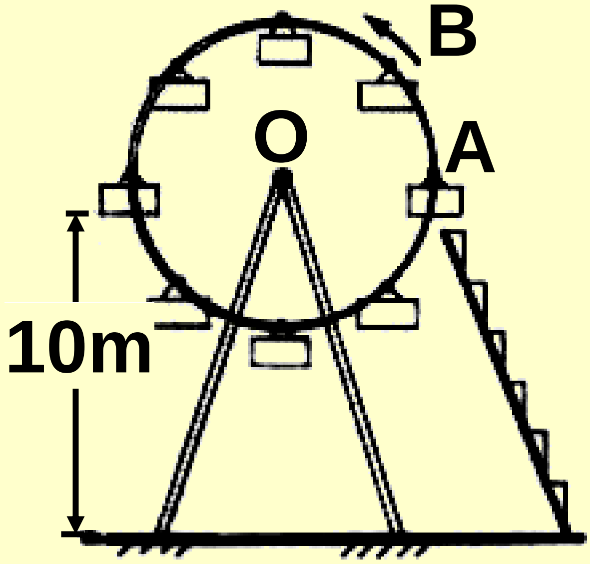
6. Να λύσετε την εξίσωση

$$2συν\left(\frac{π}{3} - 2x\right) = 1$$

στο διάστημα (4π, 5κ).

7. Σε ένα λούνα-παρκ ο περιστρε-φόμενος τροχός έχει ακτίνα 4m, το κέντρο του απέχει από το έδαφος

10m και όταν αρχίζει να κινείται εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 δευτερόλεπτα με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το ύψος του βαγονιού Α από το έδαφος ύστερα από χρόνο 1sec, 2sec, 5sec και γενικότερα ύστερα από χρόνο t sec. Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για το βαγόνι Β.



8. Να αποδείξετε ότι

i) σφx - εφx = 2σφ2x

ii) σφx - 2εφ2x - 4εφx - 8εφx = εφx

9. Με τη βοήθεια του τύπου

ημ3α = 3ημα - 4ημ^{3}α να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $8x^3-6x+\sqrt{2}=0$

ii) $8x^3 - 6x - 1 = 0$

10. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων Μ(x,y). με x = συνθ και y = συνθ2»1, όπου θ∈(ο, π). είναι το τόξο της παραβολής $y = 2x^2$, με x∈(-1,1).

11. Με τη βοήθεια των τύπων

$$ημ2α = \frac{2εφα}{1 + εφ^2α} \quad συν2α = \frac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}$$

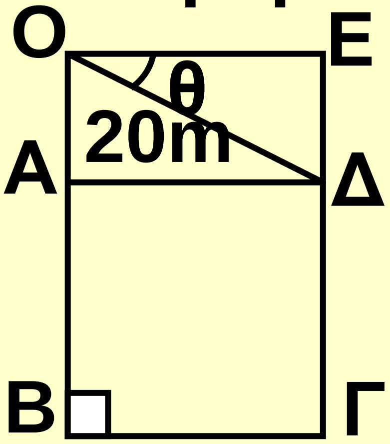
να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1 + ημx}{5 + 4συνx} \quad x \in(-π,π)$$

12. Να λύσετε την εξίσωση:

$$ημx + συνx - \frac{ημ2x}{\sqrt{2} + 1} - συν\left(\frac{π}{4} - x\right)$$

13. Ένα γκαράζ σχήματος ορθογωνίου έχει σχεδιασθεί, έτσι ώστε να αποτελείται από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα ορθογώνιο ΟΑΔΕ με ΟΔ = 20m, όπως περιγράφει το παρακάτω σχήμα. Για ποια τιμή της γωνίας 0 rad το εμβαδό S m^2 του γκαράζ γίνεται μέγιστο;



Υπόδειξη

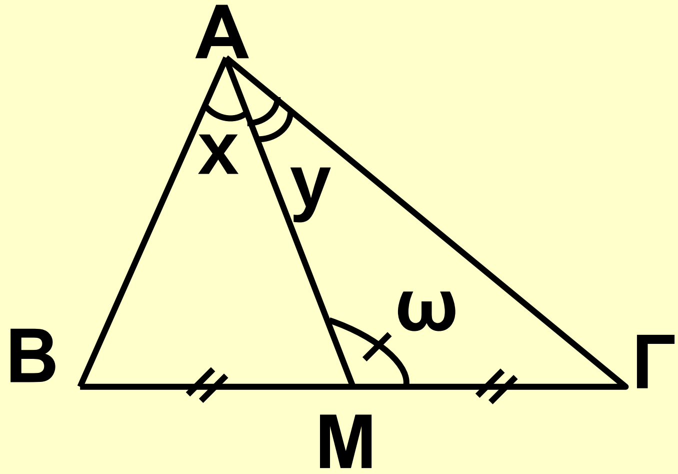
i) Να δείξετε ότι
$S = 400συν^2θ + 400ημθσυνθ$

ii) Να εκφράσετε το S στη μορφή
$$S = ρημ\,(20+φ) + c$$

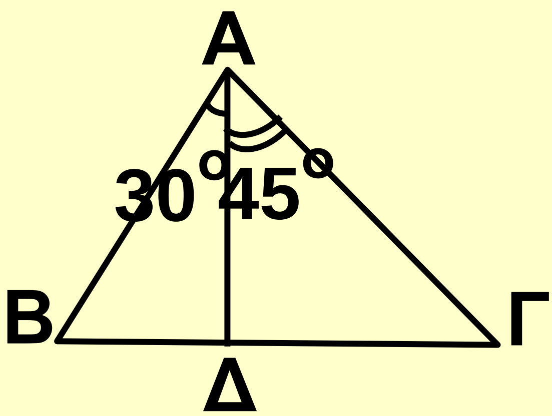
iii) Να βρείτε την τιμή του θ, για την οποία το S παίρνει τη μέγιστη τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

14. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν $\widehat{MAB} = x$, $\widehat{MA\Gamma} = y$ και $\widehat{AM\Gamma} = \omega$, να αποδείξετε ότι:

$$2\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi x - \sigma\varphi y$$



15. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του παρακάτω σχήματος, αν ισχύει $\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \sqrt{3}$



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Τριγωνομετρία

Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο, θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7, του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).

ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ