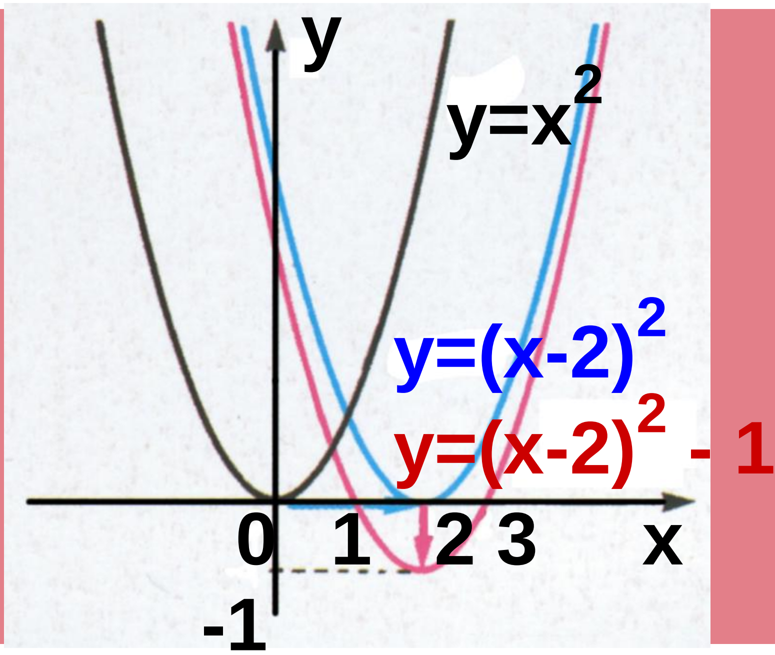
Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Τόμος 1ος

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Παπασταυρίδης Σταύρος
Πολύζος Γεώργιος
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος
Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.
Σβέρκος Ανδρέας
Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π.Ι.

Σκούρας Αθανάσιος

Σύμβουλος του Π.Ι.

Πολύζος Γεώργιος

Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης

Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.

Ζώτος Ιωάννης ***Καθηγητής Μαθ/κών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.***

Καλλιπολίτου Ευρυδίκη ***Καθηγήτρια Μαθ/κών, Αποσπασμένη στο Π.Ι.***

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.
Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της Α΄ έκδοσης (1990) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούσαν οι Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος, Σβέρκος Ανδρέας, ενώ, την ομάδα κριτών αποτελούσαν οι Αχτσαλωτίδης Χριστόφορος, Δικαιάκου- Μαυρουδαία Καλλιόπη, Καλομητσίνης Σπύρος, Κουζέλης Ανδρέας και Παντελίδης Γεώργιος.
Στην αναμόρφωση του βιβλίου, που έγινε από την ίδια συγγραφική

ομάδα με απόφαση και εποπτεία του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, ελήφθησαν υπόψη:

- **Οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδασκαλία της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, οι οποίες αναφέρονταν στην αναδιάταξη των περιεχομένων και στη διδακτική μεθοδολογία.**
- **Τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και τα νέα διδακτικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου και**
- **Ο τρόπος αξιολόγησης των μαθητών Λυκείου στα Μαθηματικά, όπως αυτός ορίζεται από το Π. Δ 60/2006.**

Κρίθηκε αναγκαίο να προηγηθεί της διδακτέας ύλης του βιβλίου ένα εισαγωγικό κεφάλαιο με τα απολύτως απαραίτητα στοιχεία από τη μαθηματική λογική και τη θεωρία συνόλων, τα οποία θεωρούνται

χρήσιμα για τη σαφέστερη διατύπωση των μαθηματικών εννοιών, των προτάσεων κτλ. Τα στοιχεία αυτά, που ήταν διάσπαρτα στην Α΄ έκδοση του βιβλίου, παρουσιάζονται στην αναμορφωμένη έκδοση με οργανωμένο τρόπο.
Το περιεχόμενο του βιβλίου, που αποτελεί και την διδακτέα ύλη της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, έχει σε γενικές γραμμές έχει ως εξής:
1. Στο 1ο Κεφάλαιο επαναλαμβάνονται, συμπληρώνονται και επεκτείνονται τα βασικά στοιχεία του αλγεβρικού λογισμού που διδάχτηκαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο.
2. Στο 2ο Κεφάλαιο επαναλαμβάνονται και εξετάζονται συστηματικότερα όσα ήταν γνωστά από το Γυμνάσιο για τις εξισώσεις 1ου βαθμού, τις εξισώσεις 2ου βαθμού,

καθώς και για εξισώσεις που η επίλυσή τους ανάγεται σε εξισώσεις 1 ου και 2ου βαθμού.
3. Στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται η επίλυση ανισώσεων 1ου και 2ου βαθμού, καθώς και ανισώσεων που η επίλυσή τους ανάγεται σε ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού.
Με τη διδασκαλία των τριών πρώτων κεφαλαίων ολοκληρώνεται ο αλγεβρικός λογισμός στο βαθμό που είναι απαραίτητος όχι μόνο για την απρόσκοπτη συνέχεια της διδασκαλίας Άλγεβρας, αλλά και για την εξυπηρέτηση των συναφών μαθημάτων.
4. Το 4ο Κεφάλαιο αναφέρεται στις συναρτήσεις. Η συνάρτηση είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών, η οποία είναι το εργαλείο έκφρασης ενός μεγάλου φάσματος φαινομένων της φύσης

και της κοινωνίας. Η έννοια της συνάρτησης θα είναι αντικείμενο συστηματικής μελέτης και εμβάθυνσης σε όλο το Λύκειο.

5. Στο 5ο Κεφάλαιο γίνεται κατ' αρχήν η μελέτη των συναρτήσεων

$y = \alpha x^2$ και $y = \dfrac{\alpha}{x}$ και ακολουθεί

η μελέτη της συνάρτησης τριώνυμο $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, που αποτελεί τον κεντρικό στόχο του κεφαλαίου αυτού.

6. Στο 6ο Κεφάλαιο κατ' αρχήν επαναλαμβάνονται και συμπληρώνονται όσα διδάχτηκαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο για γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους και στη συνέχεια επιλύονται γραμμικά συστήματα με τρεις αγνώστους, καθώς και μη γραμμικά συστήματα. Για την

παρουσίαση των εννοιών του κεφαλαίου αυτού χρησιμοποιήθηκαν αναπαραστάσεις από τα κεφάλαια των συναρτήσεων.

7. Στο 7ο Κεφάλαιο, που είναι και το τελευταίο του βιβλίου, επαναλαμβάνονται και επεκτείνονται οι γνωστές από το Γυμνάσιο έννοιες των τριγωνομετρικών αριθμών και των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και παρουσιάζεται η αναγωγή του υπολογισμού τριγωνομετρικών αριθμών στο 1ο τεταρτημόριο.

Εκτιμούμε ότι η παρούσα αναμορφωμένη έκδοση του βιβλίου θα συμβάλει στην αναβάθμιση της διδασκαλίας της Άλγεβρας στο Λύκειο. Ωστόσο, για περαιτέρω βελτίωση του βιβλίου, οποιοσδήποτε μαθητής, καθηγητής ή ενδιαφερόμενος για την παιδεία

στον τόπο μας θέλει να κάνει σχόλια, παρατηρήσεις ή κρίσεις για το βιβλίο αυτό, παρακαλείται να τις στείλει στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 15310 Αγία Παρασκευή.

Δεκέμβριος 2009
Οι Συγγραφείς

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στη παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β . Είναι γνωστό ότι: Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός « $α = β$ » είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός « $α^2 = β^2$ » θα είναι αληθής.
Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$α^2 = β^2$» <u>συνεπάγεται</u> τον ισχυρισμό « $α = β$ » και γράφουμε:
$α = β \Rightarrow α^2 = β^2$.

Γενικά:

Ρ και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο Ρ να αληθεύει και ο Q , τότε λέμε ότι ο Ρ συνεπάγεται τον Q και γράφουμε $P \Rightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός «Ρ $\Rightarrow$ Q » λέγεται συνεπαγωγή και πολλές φορές διαβάζεται «αν Ρ, τότε Q». Ο Ρ λέγεται υπόθεση της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται συμπέρασμα αυτής[1].

(1) Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι η συνεπαγωγή « $P \Rightarrow Q$ » να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή « $P \Rightarrow Q$ » είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:
$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ (1)
και
$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ (2),
που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α, β και γ.
Παρατηρούμε ότι:

✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή <u>δεν ισχύει</u> η συνεπαγωγή
$\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αφού για παράδειγμα είναι
$(-3)^2 = 3^2$, ενώ $-3 \neq 3$.
✓ Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλα-

δή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$

Γι’ αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι <u>ισοδύναμοι</u> και γράφουμε:

$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

Γενικά:

> Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι ο **P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και γράφουμε **$P \Leftrightarrow Q$.**

Ο ισχυρισμός « **$P \Leftrightarrow Q$** » λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται «**P αν και μόνο αν Q**».

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.
Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P ή Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>ένας τουλάχιστον</u> από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός «**P ή Q**» λέγεται **διάζευξη** των P και Q . Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 -1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \quad ή \quad x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

✓ Για x = 1 αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ

✓ Για x = 0 αληθεύει μόνο η πρώτη και για x = -1 αληθεύει μόνο η δεύτερη.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών

αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».
Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>και οι δύο</u> ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός «P και Q» λέγεται σύζευξη των P και Q .
Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x-1) = 0 \text{ και } (x-1)(x+1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για x = 1 .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	**Α Ψ**
2.	$\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	**Α Ψ**
3.	$\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	**Α Ψ**
4.	$\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	**Α Ψ**
5.	$\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	**Α Ψ**
6.	$\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	**Α Ψ**
7.	$\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	**Α Ψ**

8. $\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$ **Α Ψ**

9. $\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$ **Α Ψ**

ΙΙ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α' με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από τη ομάδα Β'.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x - 2) = 0$
2	$x(x - 2) \neq 0$
3	$x^2 = 4$
4	$x^2 = 4$ και $x < 0$
5	$x(x - 2) = 0$ και $x(x-1) = 0$
6	$x^2 = 4$ και $x > 0$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$x \neq 0$ και $x \neq 2$
Β	$x = 2$
Γ	$x = -2$ ή $x = 2$
Δ	$x = 0$
Ε	$x = 0$ ή $x = 2$
Ζ	$x = -2$

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.
Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π. χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.
Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες

αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά **σύνολα**. Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να

αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

✓ με N συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,

✓ με Z το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
✓ με Q το σύνολο των ρητών αριθμών και
✓ με R το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A». Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5} \in N, \ \frac{3}{5} \in Q, \ -2 \in Z,$$

$$\sqrt{2} \in Q, \ \sqrt{2} \in R \text{ κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο Α έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B = \{1, 2, 3, \ldots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$\{x \in R \mid x > 0\}$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in R$, όπου $x > 0$ ».

Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$\{x \in Z \mid x$ άρτιος$\}$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα I, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in D$, όπου x έχει την ιδιότητα I». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$A = \{1, 2\}$ και

$B = \{x \in R \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x - 1)(x - 2) = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο Β έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το Α. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα Α και Β είναι ίσα.

Γενικά:

Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:
«Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α».
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A = B$.

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα
Α={1, 2, 3, ... , 15}   και
Β={1, 2, 3, ... , 100}
Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β.

Γενικά:

Ένα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε Α $\subseteq$ Β . Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:
i) Α $\subseteq$ Α, για κάθε σύνολο Α.
ii) Αν Α $\subseteq$ Β και Β $\subseteq$ Γ, τότε Α $\subseteq$ Γ .
iii) Αν Α $\subseteq$ Β και Β $\subseteq$ Α, τότε Α = Β .

Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου Α = {x ∈ R | x^2 = -1. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση x^2 = -1 είναι αδύνατη στο R. Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με Ø ή { }.

Δηλαδή:

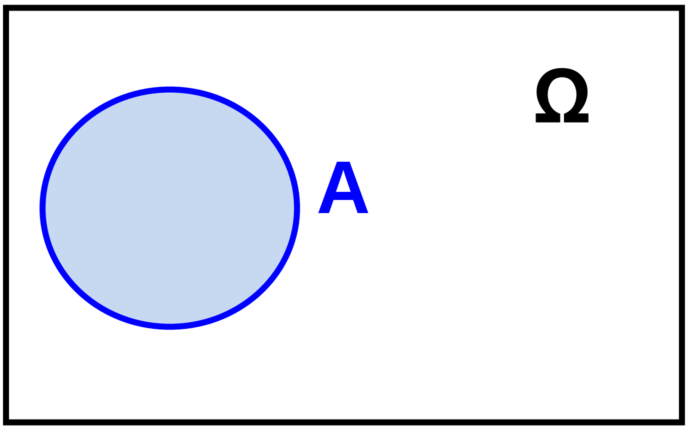
Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Διαγράμματα Venn

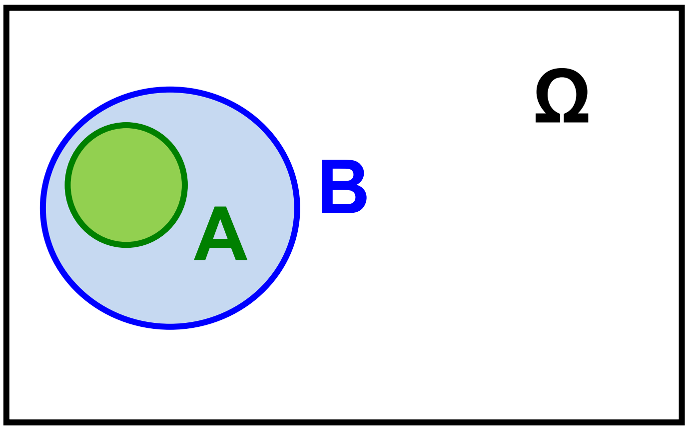
Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

• **Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται βασικό σύνολο και συμβολίζεται με Ω. Για παράδειγμα, τα σύνολα R, Z και Q, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω = R.**



Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

• **Αν $A \subseteq B$, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.**



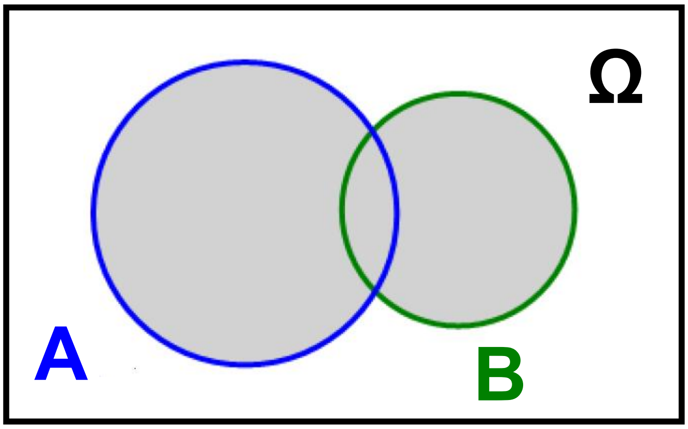
Πράξεις με σύνολα

Έστω Ω = {1, 2, 3, ...,10} ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:
Α = {1, 2, 3, 4}   και   Β = {3, 4, 5, 6} .

• **Το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5, 6}, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των Α και Β, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα Α και Β λέγεται ένωση των συνόλων Α και Β.**

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με **Α U Β .**



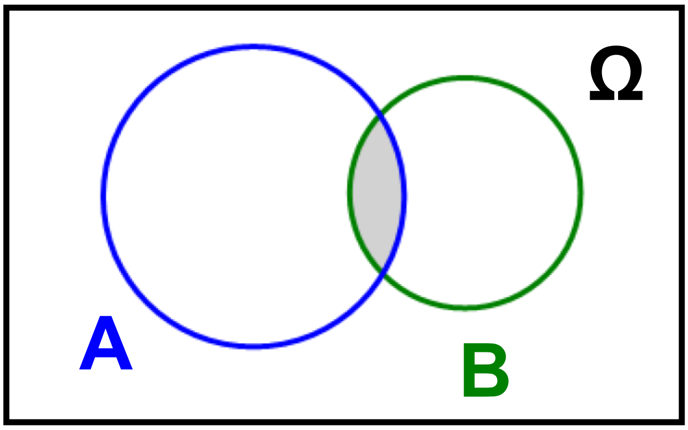
Δηλαδή είναι:

$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A$ και $x \in B\}$

- Το σύνολο {3, 4} που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των Α και Β λέγεται τομή των Α και Β.

Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με Α ∩ Β



Δηλαδή είναι:

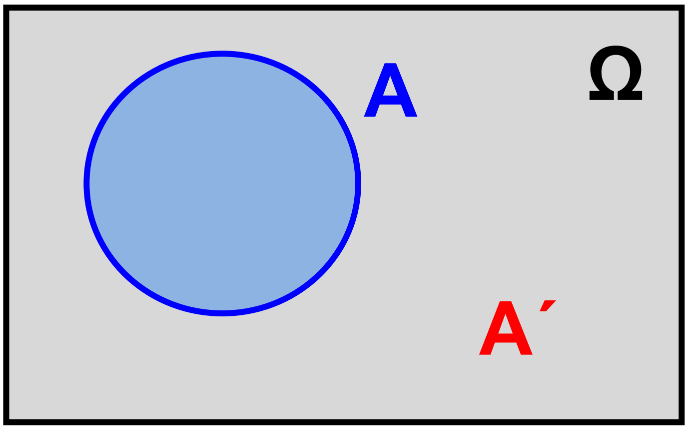
$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν Α ∩ Β = 0 , τα δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους.

• **Το σύνολο {5, 6, 7, 8, 9, 10} που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, λέγεται <u>συμπλήρωμα</u> του συνόλου Α.**

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με Α΄.



Δηλαδή είναι:

$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. 1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο "✓" εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;

3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων N, Z, Q και R και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	∈ N	∈ Z	∈ Q	∈ R
-3,5				
0				
$\sqrt{10}$				
$-\dfrac{13}{5}$				
π				
2,3				
$\dfrac{20}{5}$				
$\sqrt{100}$				
-5				

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν A= {x∈ N |x διαιρέτης του 16} και B= {x ∈ N |x διαιρέτης του 24} , τότε:

α) A U B ………………………………
β) A ∩ B ………………………………

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του A= {x ∈ Ω| x φωνήεν}
και B= {x ∈ Ω| x σύμφωνο}.

Τότε:
α) A U B = ...   β) A ∩ B = ...
γ) A΄ = ...   δ) B΄ = ...

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

1. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:
α) $A \subseteq A \cap B$ β) $B \subseteq A \cap B$
γ) $A \cap B \subseteq A$ δ) $A \cap B \subseteq B$

2. Έστω δύο σύνολα Α και Β . Τότε:
α) $A \subseteq A \cup B$ β) $A \cup B \subseteq B$
γ) $A \cup B \subseteq A$ δ) $A \cup B \subseteq B$

IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

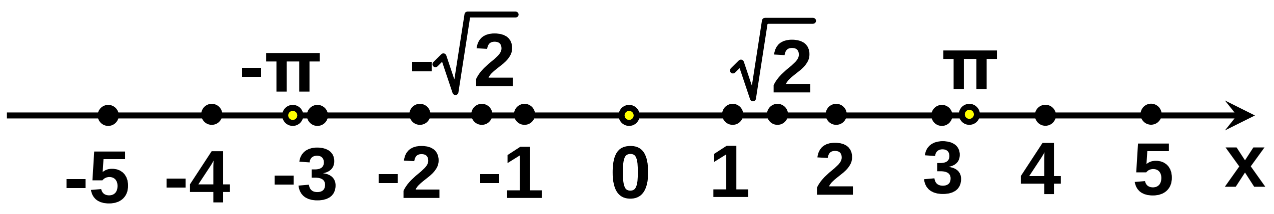
1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, Ø το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$.Τότε:
α) Ø΄ = ... β) Ω΄ = ... γ) (Α΄)΄ =.....
2. Έστω $A \subseteq B$.Τότε
α) $A \cap B$ = ... β) $A \cup B$ = ...

1 ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ
(Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις)

Εισαγωγή

Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.



Θυμίζουμε ότι:

✓ **Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική**

μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

✓ Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα,

$$\frac{14}{5} = 2{,}8, \quad -\frac{9}{8} = -1{,}25, \quad \frac{60}{11} = 5{,}\overline{45},$$

$$2{,}25 = \frac{225}{100} \quad \text{και} \quad 2{,}\overline{32} = \frac{230}{99}$$

Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς. Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, κτλ., που δεν μπορούν

να πάρουν τη μορφή $\frac{α}{β}$, όπου α, β ακέραιοι, με β ≠ 0 (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται άρρητοι αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους, η αφαίρεση και η διαίρεση.

- **Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.**

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλα-σιασμός
Αντιμετα-θετική	$\alpha + \beta =$ $= \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) =$ $= (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) =$ $= (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος /Αντί-στροφος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,$ $\alpha \neq 0$
Επιμερι-στική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Στον πίνακα αυτόν, αλλά και στη συνέχεια του βιβλίου, τα γράμματα που χρησιμοποιούνται παριστάνουν <u>οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς</u>, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά.

Ο αριθμός 0 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Επίσης ο αριθμός 1 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

ΣΧΟΛΙΟ

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης έχουν ως συνέπεια, κάθε άθροισμα με περισσότερους από δυο προσθετέους, να ισούται με οποιοδήποτε άλλο άθροισμα που σχηματίζεται από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$-3 + 2 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} + 5 - 2 =$$
$$= -3 + 3 + 2 - 2 + 5 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 5.$$

Ομοίως, ένα γινόμενο με περισσότερους από δυο παράγοντες ισούται με οποιοδήποτε άλλο γινόμενο που μπορεί να σχηματισθεί από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε.
Για παράδειγμα,

$$(-3)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-6)4\left(-\frac{5}{2}\right) =$$

$$= (-3)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-6)4 = -24$$

(Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών είναι αρκετά πολύπλοκη και παραλείπεται).

- Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής:

$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

και $\alpha : \beta = \dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$

Δηλαδή:
Για να βρούμε τη διαφορά α - β , προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο $\frac{α}{β}$, με $β \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Επειδή διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται, όπου στο εξής συναντάμε το πηλίκο $\frac{α}{β}$, εννοείται ότι $β \neq 0$ και δεν θα τονίζεται ιδιαίτερα.

- **Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:**

1.

(α = β και γ = δ)   α + γ = β + δ

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2.

(α = β και γ = δ) $\Longrightarrow$ αγ = βδ

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3.

α = β $\Leftrightarrow$ α + γ = β + γ

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4.

Αν γ ≠ 0, τότε: α = β $\Leftrightarrow$ αγ = βγ

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5.

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.
Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν από την ισότητα $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ ή από την ισότητα $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ μεταβαίνουμε στην ισότητα $\alpha = \beta$, τότε λέμε ότι διαγράφουμε τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να

οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.
Έστω α = 1. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \alpha \cdot \alpha &= \alpha \cdot 1 \\ \alpha^2 &= \alpha \\ \alpha^2 - 1 &= \alpha - 1 \\ (\alpha + 1)(\alpha - 1) &= (\alpha - 1) \cdot 1 \\ \alpha + 1 &= 1 \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Όμως έχουμε και α = 1, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα

$$(\alpha + 1)(\alpha - 1) = (\alpha - 1) \cdot 1$$

διαγράψαμε τον παράγοντα (α - 1) ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Δυνάμεις

Είναι γνωστή από το Γυμνάσιο η έννοια της δύναμης αριθμού με εκθέτη ακέραιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha - \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, \quad \text{για } \nu > 1 \text{ και}$$

$$\alpha^{1} = \alpha, \quad \text{για } \nu = 1.$$

Αν επιπλέον είναι $\alpha \neq 0$, τότε ορίσαμε ότι:

$$\alpha^{0} = 1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ενώ είναι φανερό ότι, αν α = β, τότε $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$, δεν ισχύει το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα είναι $(-2)^2 = 2^2$, αλλά $-2 \neq 2$.

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

$$\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha\beta)^{\kappa} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$$

$$(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Η έννοια της ταυτότητας είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα, κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται ταυτότητα.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι γνωστές μας πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$
$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$
$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 =$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

Μέθοδοι απόδειξης

1η) Ευθεία Απόδειξη

Έστω ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$,

δηλαδή έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

« Αν $α + β + γ = 0$, τότε
$α^3 + β^3 + γ^3 = 3αβγ$ ».

Επειδή $α + β + γ = 0$, είναι
$α = -(β + γ)$, οπότε θα έχουμε:

$α^3 + β^3 + γ^3 = [-(β + γ)]^3 + β^3 + γ^3$
$= -(β + γ)^3 + β^3 + γ^3$
$= -β^3 - 3β^2γ - 3βγ^2 - γ^3 + β^3 + γ^3$
$= - 3β^2γ - 3βγ^2$
$= -3βγ(β + γ)$
$= 3αβγ$, (αφού $β + γ = -α$).

Για την απόδειξη της παραπάνω συνεπαγωγής ξεκινήσαμε με την υπόθεση $α + β + γ = 0$ και με διαδοχικά βήματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα $α^3 + β^3 + γ^3 = 3αβγ$. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται ευθεία απόδειξη.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο) Ευθεία απόδειξη χρησιμοποιήσαμε και στο Γυμνάσιο για την απόδειξη των γνωστών μας ταυτοτήτων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, με $\alpha, \beta \in R$, έχουμε διαδοχικά:

$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$

[Ορισμός δύναμης]

$= \alpha(\alpha + \beta) + \beta(\alpha + \beta)$

[Επιμεριστική ιδιότητα]

$= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$

[Επιμεριστική ιδιότητα]

$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

[Αναγωγή όμοιων όρων]

2ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά

ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

Για παράδειγμα, έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα:

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (y - \beta x)^2$$

Έχουμε διαδοχικά:

$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) =$

$= (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 =$

$= \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 -$

$- 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 =$

$= \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$,

που ισχύει.

3ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν είναι πάντα

αληθής, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**. Έτσι ο ισχυρισμός

«για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^2 > \alpha$ »

δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \dfrac{1}{2}$

έχουμε $\alpha^2 = \dfrac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2 < \alpha$.

<u>2η) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο</u>

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:
«Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος»,
δηλαδή
«Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής: Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή α = 2κ + 1, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:

$α^2 = (2κ + 1)^2$

$= 4κ^2 + 4κ + 1$

$=2(2κ^2 + 2κ) + 1$

$= 2λ + 1$ (όπου $λ = 2κ^2 + 2κ$).

Δηλαδή $α^2 = 2λ + 1$, $λ \in Z$, που σημαίνει ότι ο $α^2$ είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο $α^2$ είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα ο α είναι άρτιος.

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και

χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε άτοπο.

Η μέθοδος αυτή απόδειξης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και λέγεται απαγωγή σε άτοπο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες των αναλογιών:

i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

(εφόσον $\beta\delta \neq 0$)

ii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

(εφόσον $\beta\gamma\delta \neq 0$)

iii) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha + \beta}{\beta} = \dfrac{\gamma + \delta}{\delta}$

(εφόσον $\beta\delta \neq 0$)

iv) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

(εφόσον $\beta\delta(\beta + \delta) \neq 0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Για $\beta\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \beta\delta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \beta\delta \cdot \frac{\gamma}{\delta}\ \alpha\delta = \beta\gamma$$

ii) Για $\beta\gamma\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta} = \frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

iii) Για βδ ≠ 0 έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\gamma}{\delta} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$$

iv) Για βδ (β + δ) ≠ 0, αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, **έχουμε:**

α = λβ και γ = λδ,
οπότε α + γ = λ(β + δ).

Επομένως, $\lambda = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$, **δηλαδή**

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

2η Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στη συνέχεια, με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη, να παρασταθούν οι $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$

στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$,

όπου κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ ανάγωγο κλάσμα (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$

$$2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

$$\kappa^2 = 2\lambda^2$$

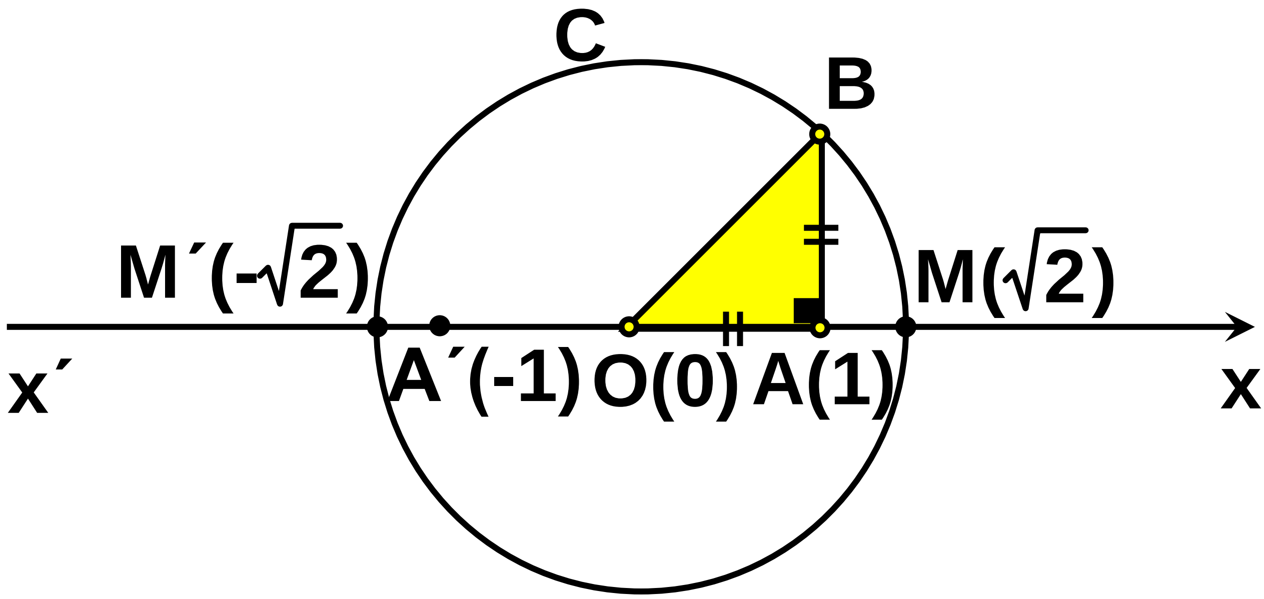
που σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε (σελ. 60-61) και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής κ = 2μ.

Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\kappa^2 = 2\lambda^2$$
$$(2\mu)^2 = 2\lambda^2$$
$$4\mu^2 = 2\lambda^2$$
$$\lambda^2 = 2\mu^2$$

Που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ δεν είναι ανάγωγο (άτοπο).



Στο σημείο Α του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ = $\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Μ και Μ΄ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παράσταση

$$A = \left[(x^2y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4 \right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-3}$$

i) Να δείξετε ότι $A = x^9 \cdot y^9$

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2010$ και $y = \dfrac{1}{2010}$.

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \left[(xy^{-1})^2 : (x^3y^7)^{-1} \right]^2$$

για $x = 0{,}4$ και $y = -2{,}5$.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $1001^2 - 999^2$

ii) $99 \cdot 101$

iii) $\dfrac{(7{,}23)^2 - (4{,}23)^2}{11{,}46}$

4. i) Να δείξετε ότι

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta\ .$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2$$

5. i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 1.$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(1{,}3265)^2 - 0{,}3265 \cdot 2{,}3265.$$

6. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμά τους.

7. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

<u>Β΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$ ii) $\dfrac{\left(\alpha^2 - \alpha\right) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \dfrac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3}$

ii) $\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1}$

3. **Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:**

i) $(x + y)^2 \cdot (x^{-1} + y^{-1})^{-2}$

ii) $\dfrac{x + y}{x - y} \cdot \dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-2} - y^{-2}}$

4. **Να δείξετε ότι**

$$\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) = 1$$

5. **Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:**

i) Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

ii) Αν $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha$.

6. Να δείξετε ότι, αν ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $L = 4\alpha$ και εμβαδόν $E = \alpha^2$, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με α.

7. Να δείξετε ότι:

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε $\alpha + \beta$ άρρητος.

ii) Αν α ρητός, με $\alpha \neq 0$, και β άρρητος, τότε $\alpha \cdot \beta$ άρρητος.

1.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

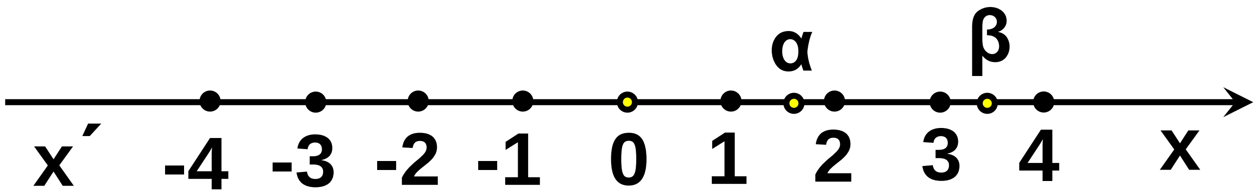
Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α - β** είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε **β < α**
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

• Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
• Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Γεωμετρικά η ανισότητα α > β σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β .



Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει α > β ή α = β , τότε γράφουμε α > β και διαβάζουμε: «α μεγαλύτερος ή ίσος του β».
Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης

και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

- $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
  $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$

- α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$
  α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

- $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
  (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

Από την τελευταία εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1.

$$(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$$

2.

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3.

- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Η ιδιότητα 3. ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:

✓ $(\alpha_1 > \beta_1$ **και** $\alpha_2 > \beta_2$ **και … και** $\alpha_\nu > \beta_\nu)$
$\Longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$

✓ **Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί, τότε:**

✓ $(\alpha_1 > \beta_1$ **και** $\alpha_2 > \beta_2$ **και … και** $\alpha_\nu > \beta_\nu)$
$\Longrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu \quad (*)$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε και την παρακάτω ιδιότητα.

4.

Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- **Έστω $α > β$. Τότε, από τη (*), για $α_1 = α_2 = ... = α_ν = α > 0$ και $β_1 = β_2 = ... = β_ν = β > 0$, προκύπτει ότι: $α^ν > β^ν$.**
- **Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $α^ν > β^ν$ και $α < β$. Τότε:**

✓ **αν ήταν $α = β$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $α^ν = β^ν$ (άτοπο), ενώ**

✓ **αν ήταν $α < β$, θα είχαμε $α^ν < β^ν$ (άτοπο). Άρα, $α > β$.**

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας θα αποδείξουμε τώρα ότι: Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$α = β \Leftrightarrow α^ν = β^ν$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$.

• Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:

✓ αν ήταν $\alpha > \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ

✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

Άρα, $\alpha = \beta$.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι $10 > 6$ και $7 > 2$, αλλά $10 - 7 < 6 - 2$.

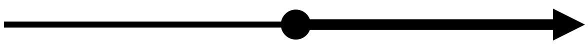
2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση. Για παράδειγμα, είναι $24 > 10$ και $6 > 2$, αλλά $\frac{24}{6} < \frac{10}{2}$.

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $α \le x \le β$ λέγεται

κλειστό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται με **[α, β]**.
Αν τώρα από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με (α, β) .
Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των **α** και **β** λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.
Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.
Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:
✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα** **[α, β)** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει **α ≤ x ≤ β** και

✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα** (α, β] που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $\alpha < x \leq \beta$.
Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,
✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x$ συμβολίζεται με $[\alpha, +\infty)$, ενώ
✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq \alpha$ συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$.
Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα $(\alpha, +\infty)$ και $(-\infty, \alpha)$. Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται «**συν άπειρο**» και «**πλην άπειρο**» αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.
Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟ-ΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟ-ΛΙΣΜΟΣ
	α ≤ x ≤ β	[α, β]
	α ≤ x ≤ β	[α, β)
	α < x ≤ β	(α, β]
	α < x ≤ β	(α, β)
	x ≥ α	[α, +∞)
	x > α	(α, +∞)
	x ≤ α	(-∞, α]
	x < α	(-∞, α)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθεί ότι :

i) Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

ii) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$$

iii) Αν α > 0, τότε $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αφού α, β είναι ομόσημοι αριθμοί έχουμε αβ > 0 . Επομένως ισχύει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

ii) Έχουμε:

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει

iii) Έχουμε:

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$,

που ισχύει.

2η Αν $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{4}$ και

$-\dfrac{2}{3} < y < \dfrac{5}{6}$, να αποδειχθεί ότι:

$$-11 < 8x - 12y + 3 < 17$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ανισότητα $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{4}$

έχουμε διαδοχικά:

$$8\left(-\frac{1}{2}\right) < 8x < 8 \cdot \frac{3}{4}$$

$$-4 < 8x < 6 \qquad (1)$$

Ομοίως από την $-\frac{2}{3} < y < \frac{5}{6}$

έχουμε διαδοχικά:

$$12\left(-\frac{2}{3}\right) < 12y < 12 \cdot \frac{5}{6}$$

$$-8 < 12y < 10$$

$$8 > -12y > -10$$

$$-10 < -12y < 8 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-14 < 8x - 12y < 14,$$

οπότε θα ισχύει:

$$-14 + 3 < 8x - 12y + 3 < 14 + 3$$

Άρα

$$-11 < 8x - 12y + 3 < 17$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ ii) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

2. Να αποδείξετε ότι
$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$

ii) Αν $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

4. Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $x + y$ ii) $x - y$ iii) $\frac{x}{y}$ iv) $x^2 + y^2$

5. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:
i) της περιμέτρου ii) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

6. Αν $0 < α < β$, να δείξετε ότι

$$\frac{α}{1+α} < \frac{β}{1+β}.$$

7. Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:
Έστω $x > 5$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} x &> 5 \\ 5x &> 25 \\ 5x - x^2 &> 25 - x^2 \\ x(5-x) &> (5+x)(5-x) \\ x &> 5 + x \\ 0 &> 5. \end{aligned}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται ένα κλάσμα α με $\frac{\alpha}{\beta}$ θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$

ii) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$

2. Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$

3. Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$.

4. Να αποδείξετε ότι:

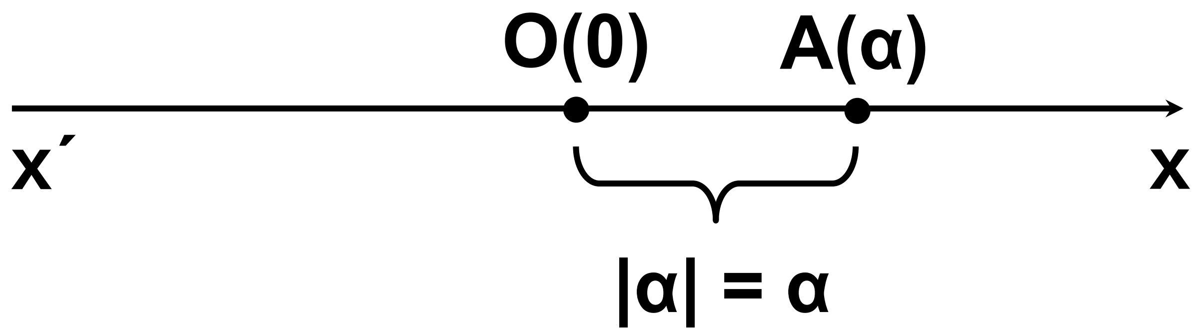
i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

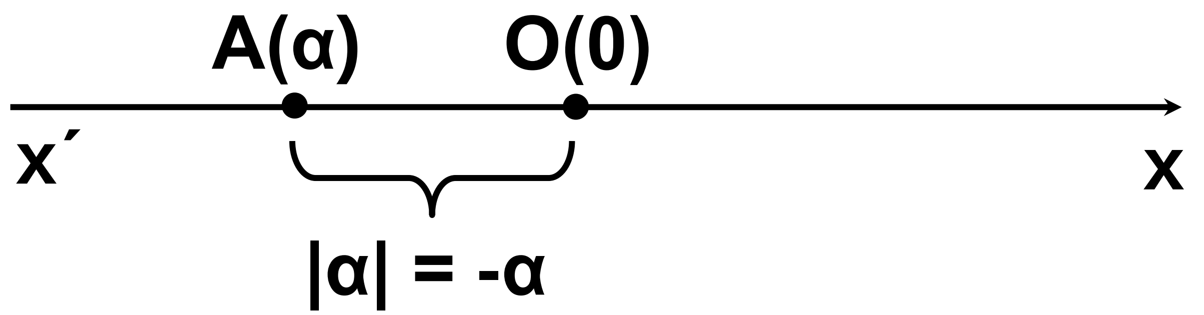
ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

1.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.





Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται απόλυτη τιμή του αριθμού α και την συμβολίζεται με |α|.

Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι:

- $|2| = 2, \left|-\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}, |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ **και**

γενικά: $|α| = α$, για κάθε $α > 0$.
Δηλαδή:
Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- $|-2| = 2, \left|-\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}, |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ **και**

γενικά $|α| = -α$, για κάθε $α < 0$.
Δηλαδή:
Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Για παράδειγμα,

✓ $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

✓ $|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta|$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta$ ή $\alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta$ ή $\alpha = \dfrac{4}{3}\beta$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Οι ιδιότητες αυτές, όμως, μπορούν να αποδειχθούν και με τη βοήθεια των προηγούμενων συμπερασμάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$
$$\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2$$
$$\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2 \text{, που ισχύει.}$$

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$
$$\Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta|$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta|$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta| \text{, που ισχύει.}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα $αβ = |αβ|$ ισχύει αν και μόνο αν $αβ \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- **Η ισότητα $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα:**

$$|α_1 \cdot α_2 \cdot ... \cdot α_ν| = |α_1| \cdot |α_2| \cdot ... \cdot |α_ν|$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $α_1 = α_2 = ... = α_ν = α$, έχουμε:

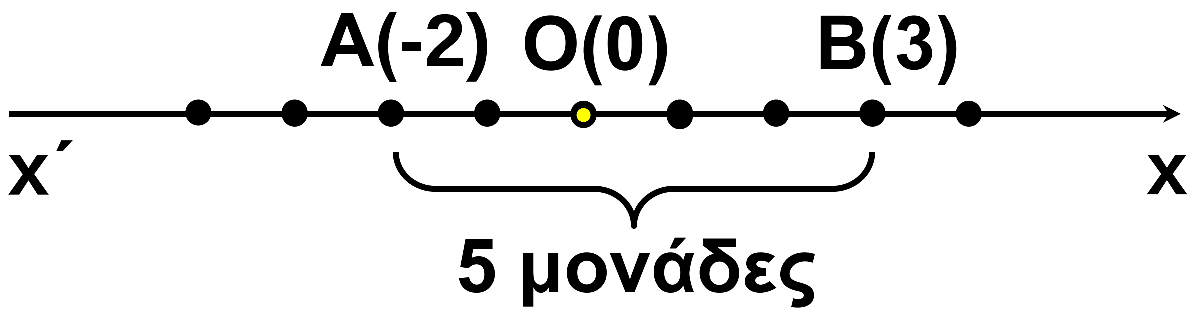
$$|α^ν| = |α|^ν$$

- **Η ανισότητα $|α + β| \leq |α| + |β|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα:**

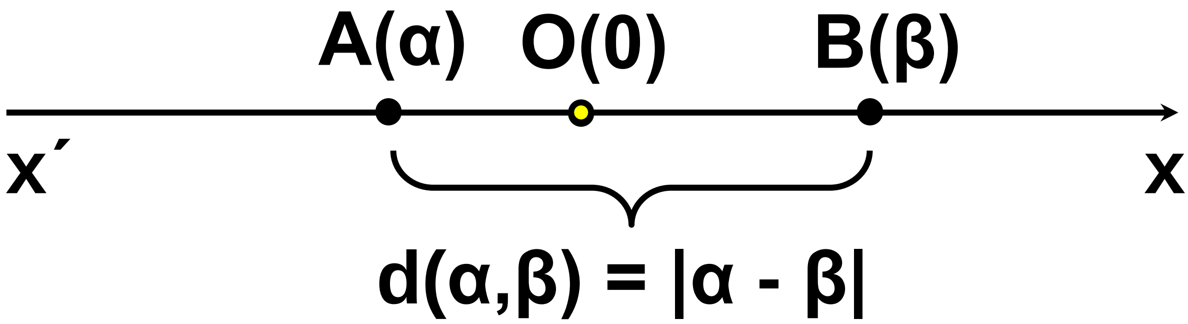
$$|α_1 + α_2 + ... + α_ν| \leq |α_1| + |α_2| + ... + |α_ν|$$

Απόσταση δυο αριθμών

• Ας πάρουμε τώρα δυο αριθμούς, για παράδειγμα τους -2 και 3, που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών -2 και 3. Παρατηρούμε ότι
(ΑΒ) = 5 = |(-2) - 3| = |3 - (-2)|.
Γενικότερα, ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.

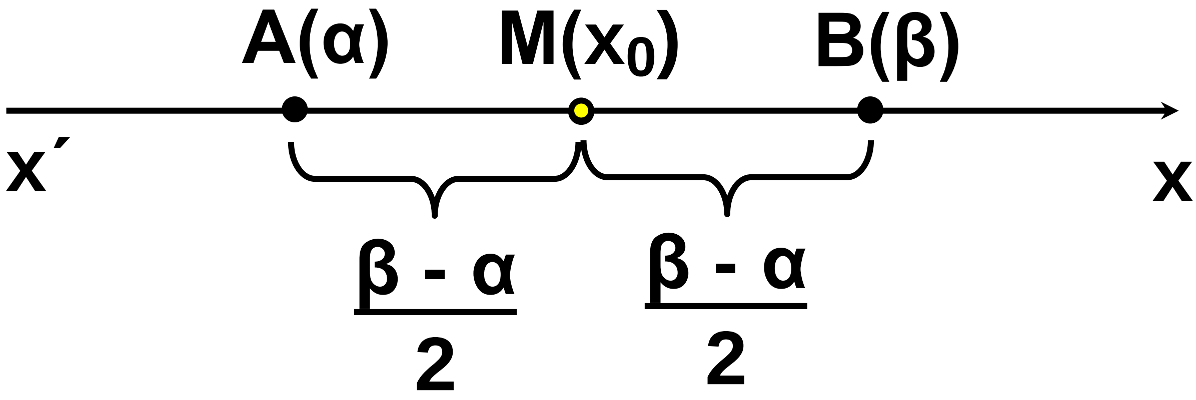


Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με |α- β|. Είναι δηλαδή:

$$\boxed{d\,(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|}$$

Προφανώς ισχύει $d\,(\alpha, \beta) = d\,(\beta, \alpha)$. Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $\alpha < \beta$, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με $\beta - \alpha$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος [α, β].

• Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα [α, β] και ας ονομάσουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



Αν Μ (x_0) είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε

(ΜΑ) = (ΜΒ)

$\Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)$

$\Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|$

$\Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0, \quad (\text{αφού } \alpha < x_0 < \beta)$

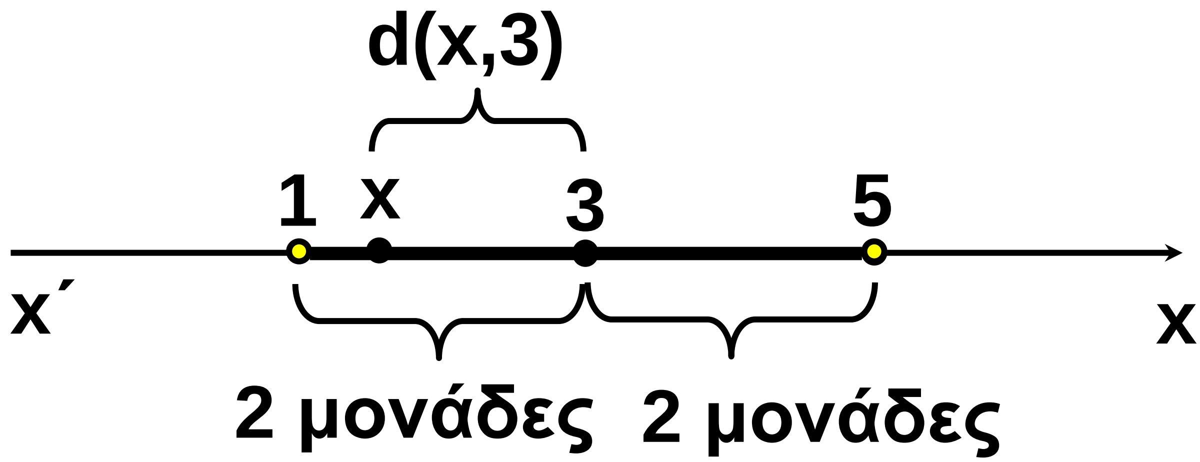
$\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται κέντρο του διαστήματος [α, β], ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$ λέγεται ακτίνα του [α, β].

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), [α, β) και (α, β] ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος [α, β].

- **Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| < 2$.**



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

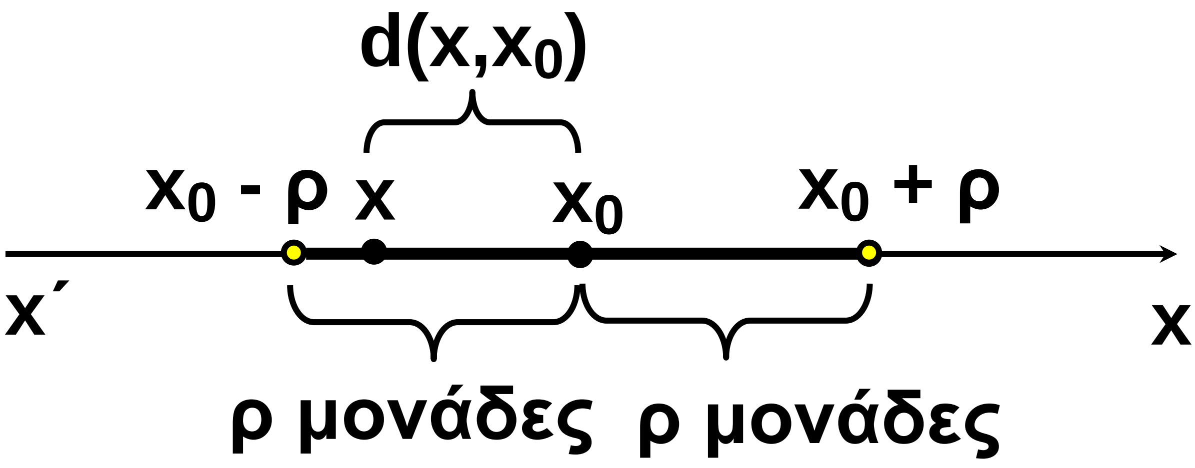
$$
\begin{aligned}
|x - 3| < 2 &\Leftrightarrow d(x,3) < 2\\
&\Leftrightarrow 3 - 2 < x < 3 + 2\\
&\Leftrightarrow x \in (3 - 2, 3 + 2)
\end{aligned}
$$

Γενικά:

Για $x_0 \in R$ και ρ > 0, ισχύει:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho,\ x_0 + \rho)$$
$$\Leftrightarrow x_o - \rho < x < x_0 + \rho$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| < \rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0 - \rho,\ x_0 + \rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



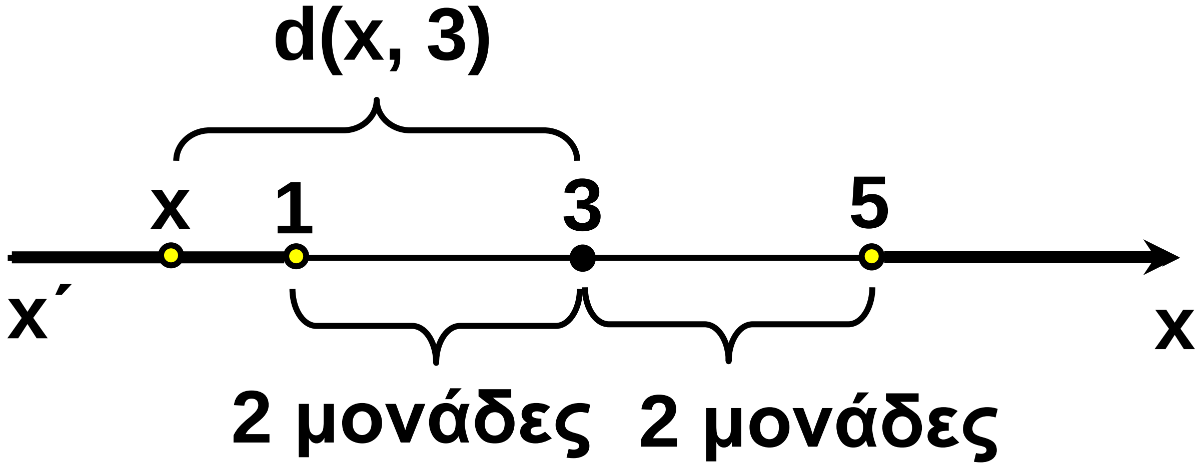
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε:

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho,\ \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho\ .$$

Για παράδειγμα,

$$|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2,\ 2) \Leftrightarrow -2 < x < 2\ .$$

• Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| > 2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

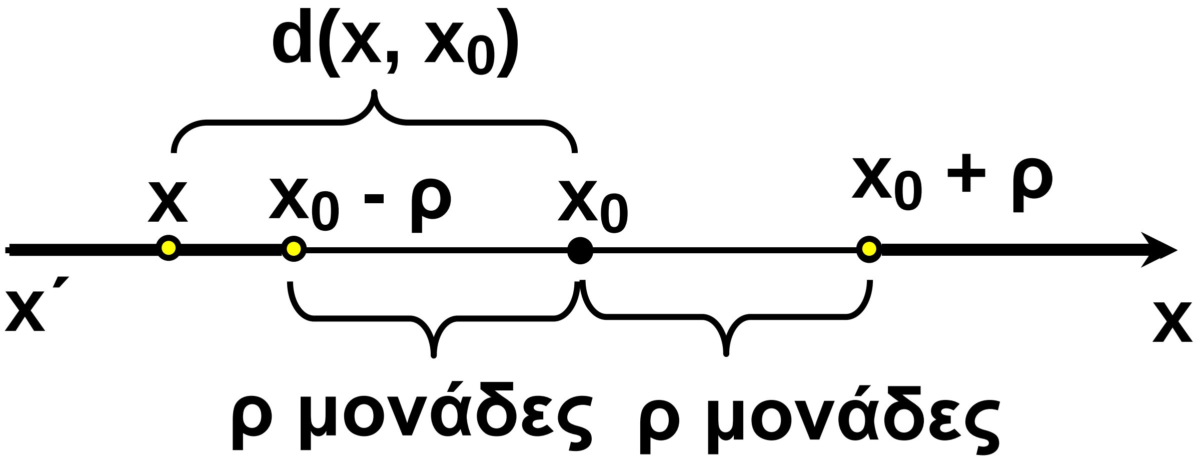
$$|x - 3| > 2$$
$$\Leftrightarrow d(x,3) > 2$$
$$\Leftrightarrow x < 3 - 2 \quad ή \quad x > 3 + 2$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 3 - 2) \cup (3 + 2, +\infty).$$

Γενικά:

Για $x_0 \in R$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$|x - x_0| < \rho$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x < x_o - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > ρ$ αντιστοιχούν σε σημεία Μ(x) του άξονα x΄x που απέχουν από το σημείο Κ(x_0) απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > ρ \Leftrightarrow x < -ρ \text{ ή } x > ρ$$

Για παράδειγμα:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi - 3|$ ii) $|\pi - 4|$

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi|$

iv) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$.

2. Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x - 3| + |x - 4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x - 3| - |4 - x|$, όταν:

i) $x < 3$ ii) $x > 4$.

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha}\right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:
i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης
ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x - 4\| \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2, 6]$
$\|x + 3\| < 4$		
$\|x - 4\| > 2$		
$\|x + 3\| \geq 4$		
	$d(x,5) < 1$	
	$d(x,-1) > 2$	
	$d(x,5) \geq 1$	
	$d(x,-1) \leq 2$	
		$(-2, 2)$
		$[-5, 1]$
		$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

<u>Β΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|.$$

2. Αν $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \dfrac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$

ii) $\beta = \dfrac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$

3. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y :

i) Η ισότητα $|x| + |y| = 0$;

ii) Η ανισότητα $|x| + |y| > 0$;

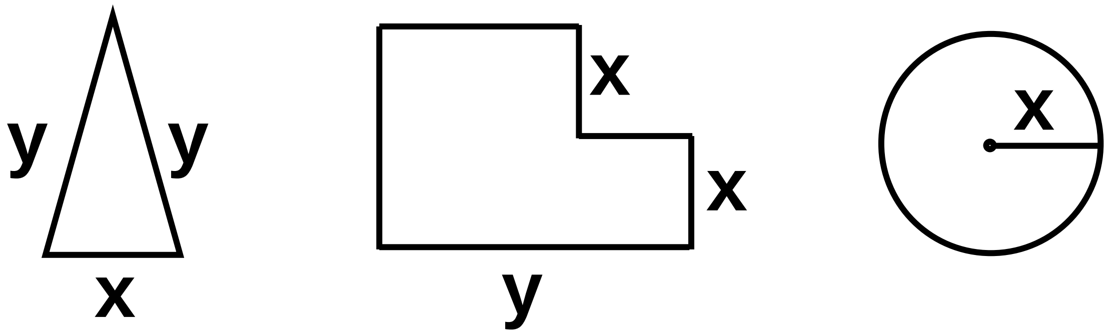
4. Έστω $0 < \alpha < \beta$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$1,\ \frac{\alpha}{\beta}\ \text{και}\ \frac{\beta}{\alpha}.$$

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$.

5. Αν $|x - 2| < 0,1$ και $|y - 4| < 0,2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



1.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

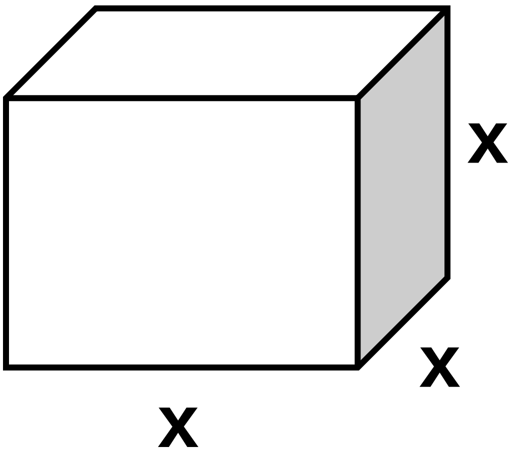
Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο <u>μη αρνητικός αριθμός</u> που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι: Αν α > 0, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού



Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυβική δεξαμενή χωρητικότητας 64 κυβικών μέτρων και ζητάμε την πλευρά της. Αν x μέτρα είναι η πλευρά της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα είναι x^3 κυβικά μέτρα και επομένως θα ισχύει: $x^3 = 64$.

Αναζητούμε λοιπόν έναν αριθμό x που, όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 64. Ο αριθμός αυτός, αφού παριστάνει μήκος, πρέπει να είναι θετικός. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 4, διότι $4^3 = 64$.

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend left, "4^3"] & 64 \arrow[l, bend left, "\sqrt[3]{64}"] \end{tikzcd}$$

Ο αριθμός 4 λέγεται **τρίτη ρίζα** του 64 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{64}$.

Δηλαδή $\sqrt[3]{64} = 4$. Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα** του αριθμού αυτού.

Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω για κάθε **θετικό ακέραιο ν**, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ν-οστή ρίζα ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο <u>μη αρνητικός αριθμός</u>[(1)] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha} .$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$.

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι $10^4 = 10000$, οπότε $\sqrt[4]{10000} = 10$.
Είναι επίσης και $(-10)^4 = 10000$.
Όμως, <u>δεν επιτρέπεται</u> να

[(1)] Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός

γράφουμε $\sqrt[4]{10000}$ = -10, αφού, σύμ-
φωνα με τον παραπάνω ορισμό, η $\sqrt[4]{10000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^4 = 10000$.

Ιδιότητες των ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α , συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- Αν $α \geq 0$, τότε:

$$\left(\sqrt[ν]{α}\right)^ν = α \quad \text{και} \quad \sqrt[ν]{α^ν} = α$$

- Αν $α \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[ν]{α^ν} = |α|$$

Για παράδειγμα:

$$\sqrt[6]{2^6} = 2 \text{ , ενώ } \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2 \text{ .}$$

Ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας:

Αν α, β ≥ 0, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον β ≠ 0)

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \alpha \cdot \beta$$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$, που ισχύει.

2. **Αποδεικνύεται όπως και η 1.**

3. **Έχουμε:**

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left(\sqrt[\mu\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha,$$

που ισχύει

4. **Έχουμε:**

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\left(\alpha^{\mu}\right)^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} =$$

$$= \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $α_1 = α_2 = ... = α_κ = α > 0$, ισχύει:

$$\sqrt[ν]{α^κ} = (\sqrt[ν]{α})^κ ,$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1, για α , $β \geq 0$ έχουμε

$$\sqrt[ν]{α^ν β} = α \cdot \sqrt[ν]{β} .$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $α^{\frac{μ}{ν}}$, όπου $α > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.
Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να

σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $\left(\alpha^{p}\right)^{q} = \alpha^{pq}$ και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{5} = 3^{\frac{2}{5}\cdot 5} = 3^{2}$. Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^{5} = 3^{2}$.

Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{2}}$.
Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

> **Αν α > 0**, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:
>
> $$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι,

τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$. Για παράδειγμα:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{και}$$

$$27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4}$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι έχουμε για παράδειγμα είναι:

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{7}{12}} =$$

$$= \sqrt[12]{\alpha^7}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}$$

$\Leftrightarrow$ $\alpha < \beta$, **που ισχύει.**

2η Να τραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρονομαστές:

i) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ ii) $\dfrac{10}{\sqrt{5}-1}$ iii) $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

i) $\dfrac{15}{\sqrt{3}} = \dfrac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{15\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$.

ii) $\dfrac{10}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} =$

$= \dfrac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \dfrac{10(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$

$= \dfrac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$

iii) $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \dfrac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} =$

$= \dfrac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} =$

$= 3(\sqrt{7}-\sqrt{5})$.

3η Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40} = 10\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{40} = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 40^{\frac{1}{6}} =$$

$$= (2 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot (2^3 \cdot 5)^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 2^1 \cdot 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2 \cdot 5 = 10$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[5]{100000}$.

ii) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$.

iii) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt[3]{0.001}$, $\sqrt[4]{0.0001}$, $\sqrt[5]{0,00001}$.

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά

i) $\sqrt{(\pi - 4)^2}$ ii) $\sqrt{(-20)^2}$

iii) $\sqrt{(x - 1)^2}$ iv) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = 1 .$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$(\sqrt{x-5} - \sqrt{x+3}) \cdot (\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3}) = -8$$

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\sqrt{8} - \sqrt{18}) \cdot (\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32}) = -14.$

ii) $(\sqrt{28} + \sqrt{7} + \sqrt{32}) \cdot (\sqrt{63} - \sqrt{32}) = 31.$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2$

ii) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}} = 2$.

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2}$ ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2}$.

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[12]{3}$

ii) $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[18]{2^{13}}$

iii) $\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4} = 25 \cdot \sqrt{5}$.

9. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{25 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{75}} = 10$ ii) $\dfrac{\sqrt{216} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{50}} = 18$.

10. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές:

i) $\dfrac{4}{5 - \sqrt{3}}$ ii) $\dfrac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ iii) $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sqrt{162} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} - \sqrt{32}} = 16$ ii) $\sqrt{\dfrac{9^{12} + 3^{20}}{9^{11} + 27^{6}}} = 3$,

αφού αναλύσετε τα υπόριζα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

<u>Β΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. i) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 5 + \sqrt{6}$$

ii) Αν α, β > 0 να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = (\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta} \ .$$

2. i) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$$(3 + 2\sqrt{7})^2 \text{ και } (3 - 2\sqrt{7})^2 \ .$$

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{37 + 12\sqrt{7}} - \sqrt{37 - 12\sqrt{7}} = 6 \ .$$

3. i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός είναι ρητός $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$

ii) Αν α θετικός ρητός, να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4$$

ii) $$\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}=8\sqrt{3}\ .$$

5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $AB=\sqrt{\alpha}$ και $A\Gamma=\sqrt{\beta}$

i) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

ii) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\ .$$

iii) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β , να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha+\beta}\leq\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής <u>για όλους</u> τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	($\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$) $\Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$.	Α Ψ
2.	Αν $\alpha^2 = \alpha\beta$, τότε $\alpha = \beta$.	Α Ψ
3.	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.	Α Ψ
4.	Το άθροισμα $\alpha + \beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός	Α Ψ
5.	Το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός.	Α Ψ

6.	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.	Α Ψ
7.	Αν $\alpha^2 > \alpha\beta$, τότε $\alpha > \beta$.	Α Ψ
8.	Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\alpha > \beta$.	Α Ψ
9.	Αν $\alpha > \beta$ και $\alpha >- \beta$, τότε $\alpha > 0$.	Α Ψ
10.	Αν $\alpha > \frac{1}{\alpha}$, τότε $\alpha > 1$.	Α Ψ
11.	Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 > \beta^2$.	Α Ψ
12.	Αν $\alpha >-2$ και $\beta > -3$, τότε $\alpha\beta > 6$.	Α Ψ
13.	Αν $\alpha <-2$ και $\beta <-3$, τότε $\alpha\beta > 6$.	Α Ψ
14.	$4\alpha^2 - 20\alpha\beta + 25\beta^2 \geq 0$.	Α Ψ
15.	$(\alpha - 1)^2 +(\alpha + 1)^2 > 0$.	Α Ψ
16.	$(\alpha^2 - 1)^2 +(\alpha + 1)^2 > 0$.	Α Ψ
17.	$(\alpha + \beta)^2 +(\alpha - \beta)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.	Α Ψ

18.	**Αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε $\lvert\alpha + \beta\rvert = \lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert$.**	**Α Ψ**
19.	**Αν $\alpha^2 = \beta$, τότε $\alpha = \sqrt{2}$**	**Α Ψ**
20.	**$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$.**	**Α Ψ**
21.	**Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.**	**Α Ψ**
22.	**Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$.**	**Α Ψ**
23.	**Αν $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$.**	**Α Ψ**
24.	**$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$.**	**Α Ψ**
25.	**Αν $\alpha \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{\alpha}$.**	**Α Ψ**
26.	**Μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$.**	**Α Ψ**
27.	**$5^{25} > 25^5$.**	**Α Ψ**
28.	**$11^{22} > 22^{11}$.**	**Α Ψ**

ΙΙ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $2 < x < 5$ τότε η παράσταση $|x - 2| + |x - 5|$ είναι ίση με:

Α) $2x - 7$ Β) $7 - 2x$ Γ) -3 Δ) 3.

2. Αν $10 < x < 20$ τότε η τιμή της παράστασης $\dfrac{|x - 10|}{x - 10} + \dfrac{|x - 20|}{x - 20}$ είναι ίση με:

Α) 2 Β) -2 Γ) 10 Δ) 0.

3. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$ τότε:

Α) $\alpha < \beta < \gamma$ Β) $\alpha < \gamma < \beta$

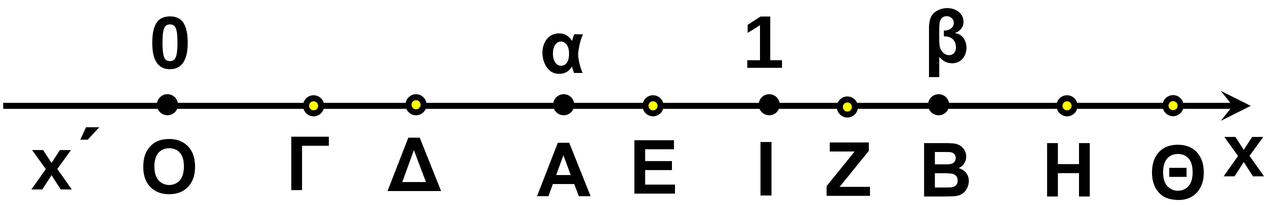
Γ) $\gamma < \alpha < \beta$ Δ) $\beta < \gamma < \alpha$.

4. Ο αριθμός $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ είναι ίσος με:

Α) $3 + 2\sqrt{5}$ Β) $3 + 2\sqrt[4]{5}$

Γ) $2 + \sqrt{5}$ Δ) $2 + \sqrt[4]{5}$.

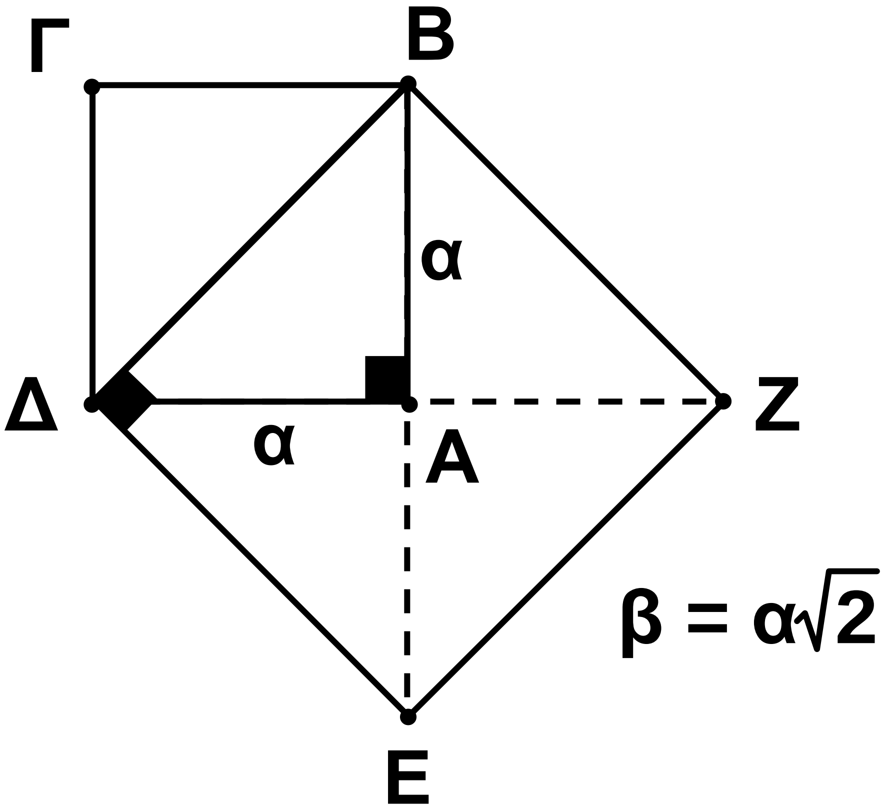
III. Στον παρακάτω άξονα τα σημεία Ο, Ι, Α και Β παριστάνουν τους αριθμούς 0, 1, α και β αντιστοίχως, με 0 < α < 1 και β > 1, ενώ τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, α^2 , β^2, α^3 και β^3, όχι όμως με την σειρά που αναγράφονται. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ με τους αριθμούς που παριστάνουν.



Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο «διπλασιασμός του τετραγώνου», δηλαδή η κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδό διπλάσιο ενός άλλου δοθέντος τετραγώνου, μπορεί να γίνει με μια απλή «γεωμετρική» κατασκευή. Λέγοντας «γεωμετρική» κατασκευή εννοούμε κατασκευή με χάρακα και διαβήτη.



Ωστόσο, η πλευρά β, του τετραγώνου με το διπλάσιο εμβαδό, δεν προκύπτει από την πλευρά α με

πολλαπλασιασμό επί ρητό αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα (ως μονάδα μέτρησης) με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε ακριβώς τα δυο αυτά τμήματα, πλευρά και διαγώνιο τετραγώνου. Η απόδειξη της ύπαρξης άρρητων αριθμών θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Πυθαγορείων. (Πυθαγόρας: 6ος π. Χ. αιώνας). Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν μια βαθειά πίστη ότι πάντοτε δυο ευθύγραμμα τμήματα έχουν κοινό μέτρο. Γι' αυτό, στα πλαίσια της εποχής εκείνης, η ανακάλυψη αυτή των Πυθαγορείων δεν ήταν απλά και μόνο μια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση, αλλά σήμαινε την ανατροπή θεμελιωδών φιλοσοφικών αντιλήψεων για τον κόσμο και τη φύση.

Ήταν κεντρική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι η ουσία κάθε όντος μπορεί να αναχθεί σε φυσικούς αριθμούς. Ο νεοπυθαγόρειος Φιλόλαος γύρω στα 450 π.Χ., έγραφε:

«Πραγματικά το καθετί που γνωρίζουμε έχει έναν αριθμό (δηλαδή φυσικό). Αλλιώς θα ήταν αδύνατο να το γνωρίσουμε και να το καταλάβουμε με τη λογική. Το ένα είναι η αρχή του παντός».

Η ανακάλυψη λοιπόν ότι υπάρχουν μεγέθη και μάλιστα απλά, όπως η υποτείνουσα τετραγώνου, τα οποία δεν μπορούν να εκφραστούν στα πλαίσια των φυσικών αριθμών, θεωρήθηκε αληθινή συμφορά για την πυθαγόρεια φιλοσοφία. Χαρακτηριστικοί είναι οι θρύλοι που περιβάλλουν το γεγονός αυτό. Κατά

έναν από αυτούς, η ανακάλυψη της ύπαρξης των άρρητων αριθμών έγινε από τον πυθαγόρειο Ίπασσο, όταν αυτός και άλλοι Πυθαγόρειοι ταξίδευαν με πλοίο. Η αντίδραση των Πυθαγορείων ήταν να πνίξουν τον Ίπασσο και να συμφωνήσουν μεταξύ τους να μη διαδοθεί η ανακάλυψη προς τα έξω.
Η υπέρβαση των «δυσκολιών» που φέρνει στα Μαθηματικά η ύπαρξη άρρητων αριθμών, κατέστη δυνατή από τον Εύδοξο (360 π.Χ.) με την ιδιοφυή «θεωρία των Λόγων». Η απόδειξη για το ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι άρρητος είναι ένα πρόβλημα που απαιτεί πολλές φορές πολύπλοκούς συλλογισμούς.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο, θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7, του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).

ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ