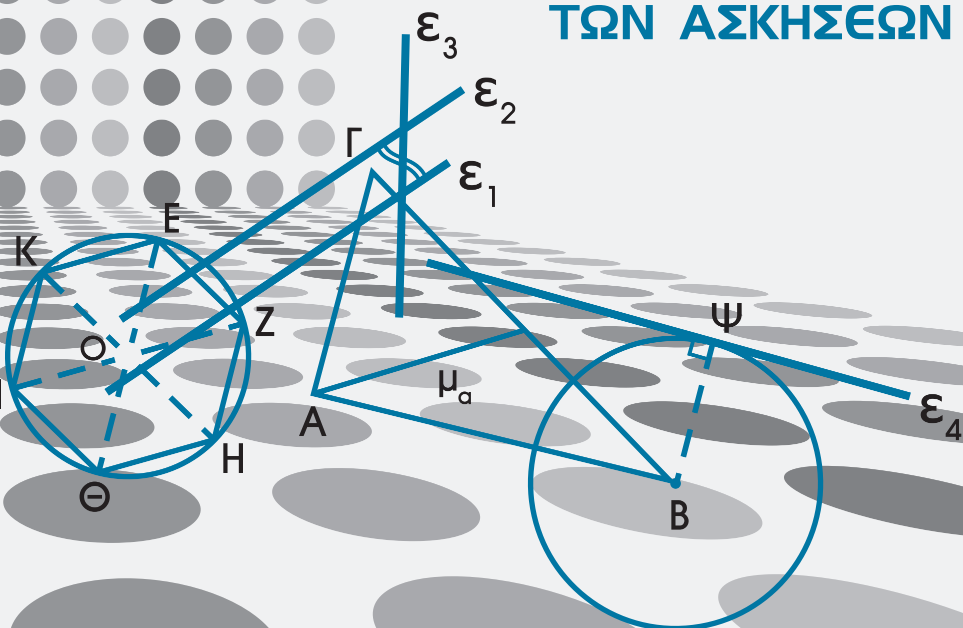
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Α΄

ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ 22-0280

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α΄ ΤΕΥΧΟΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ: **ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας

Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Βλάμος Παναγιώτης

Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος

Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός

Επίκουρος Καθηγητής Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης

Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: *Βανδουλάκης Ιωάννης*
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου M. Lomonosov Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια: *Δημητρίου Ελένη*

Επιλογή εικόνων: *Παπαδοπούλου Μπία*

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση: *Αλεξοπούλου Καίτη*

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Αγαπητοί Μαθητές,

το τεύχος που κρατάτε στα χέρια σας περιέχει τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού σας βιβλίου. Αν χρησιμοποιηθεί σωστά μπορεί να αποτελέσει πολύτιμη βοήθεια στην προσπάθειά σας να καταλάβετε τις γεωμετρικές έννοιες που εισάγονται στο βιβλίο σας και να τις χρησιμοποιήσετε δημιουργικά.

Σε καμμία περίπτωση το τεύχος των λύσεων δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στην πρώτη δυσκολία που παρουσιάζει μία άσκηση ή για να καλύψει την "επιμέλεια" ενός μαθητή προς τον καθηγητή του στο σχολείο.

Για να χρησιμοποιήσετε σωστά τις λύσεις των ασκήσεων πρέπει να ακολουθήσετε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία. Αρχικά, προσπαθήστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης. Αν αποτύχετε κάντε μία επανάληψη στην αντίστοιχη θεωρία για να διαπιστώσετε ότι δεν έχετε κενά. Κατόπιν, ξαναπροσπαθήστε την άσκηση διαβάζοντας και την υπόδειξη που βρίσκεται στο τέλος του σχολικού βιβλίου. Αν πάλι δυσκολεύεστε να λύσετε την άσκηση, τότε διαβάστε την ολοκληρωμένη λύση της. Φροντίστε να εντοπίσετε τα κύρια βήματα της λύσης, καθώς και τα κενά που σας οδήγησαν στο να μην αντιμετωπίζετε σωστά την άσκηση. Προσπαθήστε να διορθώσετε τα κενά αυτά και να ξαναλύσετε την άσκηση, χωρίς όμως να επαναλαμβάνετε τη λύση με στείρα απομνημόνευση, αλλά υλοποιώντας τα κύρια βήματά της. Τέλος, δοκιμάστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικό και ίσως καλύτερο τρόπο.

Πρέπει να τονισθεί ότι οι λύσεις είναι προτεινόμενες, με την έννοια ότι είναι δυνατόν και ελπίζουμε να βρεθούν κομψότερες από τους μαθητές.

Σημαντική είναι η προσπάθεια που έχει καταβληθεί, ώστε η κάθε άσκηση να προωθεί συγκεκριμένες αντιλήψεις και συνήθειες στο μαθητή, ενώ το σύνολο των ασκήσεων σε κατηγορία και διαβάθμιση οδηγούν τον μαθητή στην καλλιέργεια συγκεκριμένων ικανοτήτων.

Για να επιτευχθούν οι στόχοι αυτοί, είτε μέσα στη λύση της κάθε άσκησης, είτε μετά την ολοκλήρωσή της, αναγράφεται ο διδακτικός της στόχος, ενώ οι ασκήσεις χωρίστηκαν στις παρακάτω κατηγορίες, δίνοντας φυσικά βαρύτητα στη διαβάθμιση των ασκήσεων κάθε κατηγορίας:

1) Ασκήσεις Εμπέδωσης:

Οι ασκήσεις αυτές εισάγονται αμέσως μετά τη Θεωρία και τις Εφαρμογές, με σκοπό την εμπέδωση των εννοιών από τους μαθητές και τη χρήση τους σε απλές ασκήσεις.

2) Αποδεικτικές Ασκήσεις:

Είναι ασκήσεις που ταιριάζουν στη φύση της Γεωμετρίας, καλλιεργώντας την αποδεικτική διαδικασία στους μαθητές.

3) Σύνθετα θέματα:

Είναι θέματα που συνδυάζουν περισσότερες από μία γεωμετρικές έννοιες ή γνώσεις, είτε από το ίδιο κεφάλαιο, είτε από διαφορετικά, αναδεικνύοντας την κριτική σκέψη και συνδυαστική ικανότητα των μαθητών.

4) Γενικές Ασκήσεις:

Είναι ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας, που παρατίθενται στο τέλος κάθε Κεφαλαίου και απευθύνονται σε μαθητές με ιδιαίτερο ζήλο και αγάπη προς τη Γεωμετρία.

5) Δραστηριότητες:

Είναι αντικείμενο μελέτης ομάδας μαθητών ή και ενός, εφόσον του παρέχεται το κατάλληλο χρονικό διάστημα, ενώ θα πρέπει να δοθεί κάθε δυνατή βοήθεια και υποδείξεις από τον καθηγητή.

Κάθε κεφάλαιο, τέλος, πλαισιώνεται από ερωτήσεις κατανόησης που συντελούν στη σωστή επανάληψη και καλύτερη οργάνωση της ύλης.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Από τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία το ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων. Για την επίλυση σχετικών ασκήσεων διακρίνουμε περιπτώσεις.
(**Ασκήσεις:** § 2.1-2.10 Αποδεικτικές 3, Σύνθετα 1)

- Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο Ο τότε ΟΑ = ΟΒ και ΟΓ = ΟΔ. Για να αποδείξουμε ότι δυο τμήματα έχουν κοινό μέσο, θεωρούμε το μέσο του ενός και αποδεικνύουμε ότι είναι μέσο και του άλλου τμήματος.
(**Ασκήσεις:** Γενικές 2)

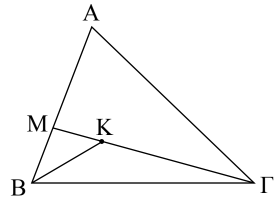
- Για να υπολογίσουμε την παραπληρωματική $\hat{\varphi}$ ή την συμπληρωματική $\hat{\theta}$ μιας γωνίας $\hat{\omega}$ θέτουμε: $\hat{\varphi} = 180^\circ - \hat{\omega}$ και $\hat{\theta} = 90^\circ - \hat{\omega}$.
(**Ασκήσεις:** § 2.19 Αποδεικτικές 1, 2)

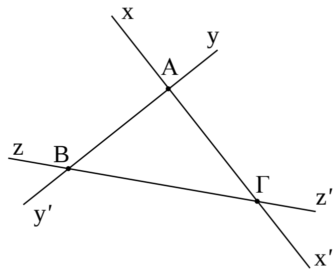
§ 2.1-2.10

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

1. i) Έξι ευθύγραμμα τμήματα, τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ.

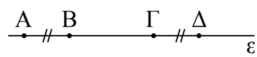
ii) Τα τμήματα που έχουμε στο σχήμα είναι τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΜ, ΒΚ, ΒΓ, ΒΜ, ΓΚ, ΓΜ, ΜΚ και το ΑΚ που δεν είναι σχεδιασμένο.



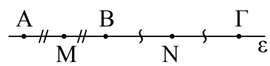


2. i) Τα σημεία τομής είναι τρία, τα Α, Β και Γ.

ii) Ορίζονται τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, και 12 ημιευθείες, οι εξής: Αx, Αx′, Αy, Αy′, Βy, Βy′, Βz, Βz′, Γx, Γx′, Γz, Γz′.



3. Είναι $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΓΔ + ΒΓ = ΒΔ$, αφού $ΑΒ = ΓΔ$.

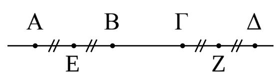


4. $ΑΓ = ΑΜ + ΜΒ + ΒΝ + ΝΓ = 2ΜΒ + 2ΒΝ =$

$= 2(ΜΒ + ΒΝ) = 2ΜΝ$,

αφού $ΑΜ = ΜΒ$ και $ΒΝ = ΝΓ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. i) Έχουμε $ΑΔ = ΑΕ + ΕΖ + ΖΔ$

και $ΒΓ = ΕΖ - ΕΒ - ΓΖ$,

οπότε $ΑΒ + ΒΓ = 2ΕΖ$ $(ΑΕ = ΕΒ,\ ΖΔ = ΓΖ) \Leftrightarrow ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$.

ii) Έχουμε

$$ΑΓ + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΓ) + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΔ) + ΒΓ = ΑΔ + ΒΓ.$$

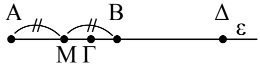
2. i) Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} ΓΑ &= ΓΜ + ΜΑ \\ ΓΒ &= ΜΒ - ΓΜ \end{aligned}\right\} \text{Άρα } ΓΑ - ΓΒ = 2ΓΜ\ (ΜΑ = ΜΒ) \Leftrightarrow$$

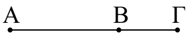
$$\Leftrightarrow ΓΜ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}.$$

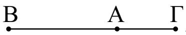
ii) Έχουμε

$$\left.\begin{aligned}\Delta A &= AM + \Delta M\\ \Delta B &= \Delta M - BM\end{aligned}\right\}\ \text{Άρα}\ \Delta A + \Delta B = 2\Delta M \Leftrightarrow \Delta M = \frac{\Delta A + \Delta B}{2}.$$



3. α) i)  Αν το Γ είναι μεταξύ των Α και Β τότε $AB = A\Gamma + \Gamma B$.

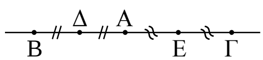
ii)  Αν το Β είναι μεταξύ των Α και Γ τότε $AB < A\Gamma$, οπότε $AB < A\Gamma + \Gamma B$.

iii)  Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε $AB < \Gamma B$, οπότε $AB < A\Gamma + \Gamma B$. Άρα πάντα έχουμε $AB \leq A\Gamma + \Gamma B$.

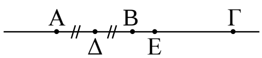
β) Για τα Α, Β, Γ ισχύει $AB \leq A\Gamma + \Gamma B$ (1) ενώ για τα Α, Β, Δ ισχύει $A\Delta \leq AB + B\Delta$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι $A\Delta \leq A\Gamma + \Gamma B + B\Delta$.

Σύνθετα Θέματα

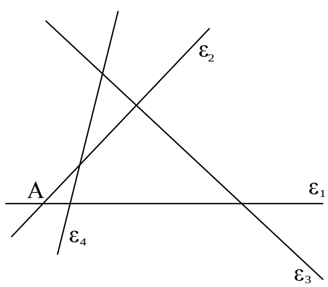
1. i) Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε: 

$$\Delta E = A\Delta + AE = \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB + A\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2}.$$

ii)  Αν το Α είναι στην προέκταση του ΒΓ, π.χ. προς το μέρος του Β, τότε:

$$\Delta E = AE - A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2}.$$

2. Αν παραστήσουμε με ε_1, ε_2, ε_3 και ε_4 τις τέσσερις ευθείες οδούς αρκεί να βρούμε πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών αυτών. Σε κάθε μια ευθεία, π.χ. την ε_1, οι άλλες $(4-1)=3$ ευθείες ορίζουν $(4-1)=3$ σημεία. Άρα συνολικά θα ορίζονταν $4(4-1)=12$ σημεία. Αλλά κάθε σημείο το υπολογίσαμε 2 φορές, π.χ. το Α ως σημείο της ε_1 και της ε_2.

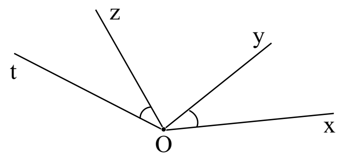


Άρα τελικά ορίζονται $\dfrac{4(4-1)}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ σημεία.

Επομένως χρειάζονται 6 τροχονόμοι. Όμοια οι ν ευθείες ορίζουν $\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$ σημεία.

§ 2.11-2.16

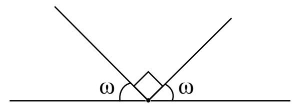
Ασκήσεις **Εμπέδωσης**



1. Έχουμε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$

ή $x\hat{O}y + y\hat{O}z = y\hat{O}z + z\hat{O}t$.

Άρα $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.

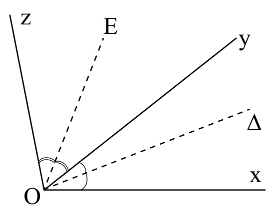


2. Είναι $\hat{\omega} + 1$ ορθή $+ \hat{\omega} = 2$ ορθές,

οπότε $2\hat{\omega} = 1$ ορθή ή $\hat{\omega} = \frac{1}{2}$ ορθής.

3. Όταν το ρολόι δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς οι δείκτες σχηματίζουν ορθή γωνία. Οι δείκτες θα σχηματίζουν και πάλι ορθή γωνία μετά από 6 ώρες. Τότε το ρολόι δείχνει τρεις η ώρα ακριβώς.

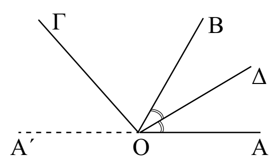
Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Έστω $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ δύο εφεξής γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα.

Τότε $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}y + y\hat{O}E = \frac{x\hat{O}y}{2} + \frac{y\hat{O}z}{2}$.

Άρα $\Delta\hat{O}E = \frac{x\hat{O}y + y\hat{O}z}{2}$.



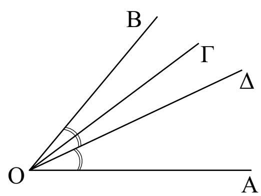
2. Έχουμε: $\left.\begin{aligned} \Gamma\hat{O}A &= \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B &= \Gamma\hat{O}\Delta - \Delta\hat{O}B \end{aligned}\right\}$

Άρα

$$\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \ \ (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}.$$

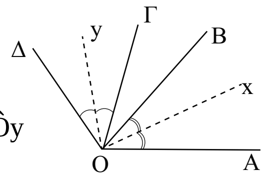
3. Έχουμε:

$\left.\begin{aligned} \Gamma\hat{O}A &= \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B &= \Delta\hat{O}B - \Gamma\hat{O}\Delta \end{aligned}\right\}$ Άρα



$$\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \ \ (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B}{2}$$

Σύνθετα Θέματα

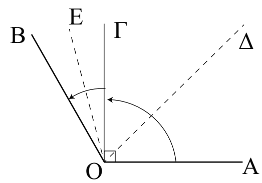


1. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A\hat{O}\Delta &= A\hat{O}x + x\hat{O}y + y\hat{O}\Delta \\ B\hat{O}\Gamma &= x\hat{O}y - B\hat{O}x - \Gamma\hat{O}y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Άρα} \\ &A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma = 2x\hat{O}y \end{aligned}$$

(γιατί $A\hat{O}x = B\hat{O}x,\ y\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}y$)

$$\Leftrightarrow x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}.$$



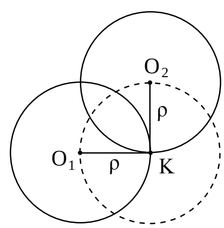
2. Έχουμε:

$$\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Delta - B\hat{O}E = \frac{A\hat{O}B}{2} - \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} =$$

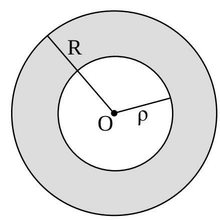
$$= \frac{A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{1}{2}\llcorner \quad (O\Gamma \perp OA)$$

§ 2.17-2.18

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

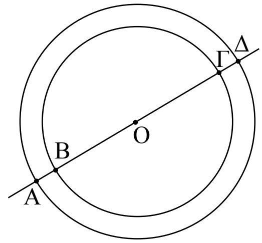


1. Υπάρχουν άπειροι κύκλοι ακτίνας ρ που διέρχονται από το Κ. Τα κέντρα τους βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ρ.

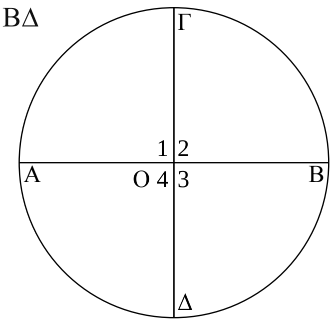


2. Τα σημεία που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις



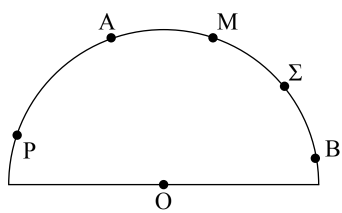
1. Επειδή η ε διέρχεται από το κοινό κέντρο Ο των κύκλων τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι διάμετροι αυτών με κοινό μέσον το Ο και επομένως έχουμε:
$ΑΟ = ΟΔ$ και $ΒΟ = ΟΓ$.
Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη προκύπτει:
$ΑΟ - ΒΟ = ΟΔ - ΟΓ \Leftrightarrow ΑΒ = ΓΔ$,
σύμφωνα με το σχήμα. Επίσης έχουμε:
$ΑΒ = ΓΔ \Leftrightarrow ΑΒ + ΒΓ = ΒΓ + ΓΔ \Leftrightarrow ΑΓ = ΒΔ$



2. Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο διάμετροι ενός κύκλου (Ο, R) τέτοιες ώστε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Τότε η ΟΓ είναι διχοτόμος της ευθείας γωνίας $Α\hat{Ο}Β$, επομένως κάθε μια από τις $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ είναι ορθή γωνία. Η $\hat{O}_3$, ως κατακορυφήν της $\hat{O}_1$, είναι κι αυτή ορθή. Όμοια και η $\hat{O}_4$. Έτσι οι επίκεντρες γωνίες $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$, $\hat{O}_3$ και $\hat{O}_4$ είναι ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών είναι ίσα, δηλαδή $\overparen{ΑΓ} = \overparen{ΓΒ} = \overparen{ΒΔ} = \overparen{ΔΑ}$ και επειδή τα τόξα αυτά αποτελούν ολόκληρο τον κύκλο προκύπτει το ζητούμενο.

§ 2.19

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**



1. Έστω ημικύκλιο κέντρου Ο, δύο σημεία Α, Β αυτού και το σημείο Μ του $\overparen{ΑΒ}$ ώστε $\overparen{ΜΑ} = \overparen{ΜΒ}$.

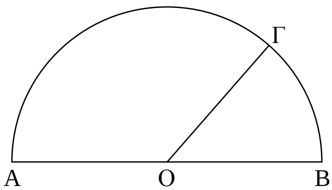
i) Για σημείο Ρ του ημικυκλίου, που δεν ανήκει στο $\overparen{ΑΒ}$ έχουμε:
$\overparen{ΡΑ} = \overparen{ΡΜ} - \overparen{ΑΜ}$ και $\overparen{ΡΒ} = \overparen{ΡΜ} + \overparen{ΜΒ}$.
Με πρόσθεση αυτών κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\overparen{ΑΜ} = \overparen{ΜΒ}$ προκύπτει

$$\overparen{ΡΑ} + \overparen{ΡΒ} = 2\overparen{ΡΜ} \Leftrightarrow \overparen{ΡΜ} = \frac{1}{2}(\overparen{ΡΑ} + \overparen{ΡΒ}).$$

ii) Έστω σημείο Σ του τόξου $\overset{\frown}{MB}$. Έχουμε (βλέπε σχήμα) $\overset{\frown}{ΣA} = \overset{\frown}{ΣM} + \overset{\frown}{MA}$ και $\overset{\frown}{ΣB} = \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{ΣM}$. Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη, λαμβάνοντας πάλι υπόψη ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ προκύπτει:

$\overset{\frown}{ΣA} - \overset{\frown}{ΣB} = 2\overset{\frown}{ΣM} \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΣM} = \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{ΣA} - \overset{\frown}{ΣB})$.

2. α) Είναι $\overset{\frown}{AΓ} - \overset{\frown}{ΓB} = 80^\circ$ και $\overset{\frown}{AΓ} + \overset{\frown}{ΓB} = 180^\circ$, από τις οποίες με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε αντίστοιχα $\overset{\frown}{AΓ} = 130^\circ$ και $\overset{\frown}{ΓB} = 50^\circ$, οπότε και $(\overset{\frown}{AΓ}) = 130^\circ$, $(\overset{\frown}{ΓB}) = 50^\circ$.



β) Η $A\hat{O}Γ$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{AΓ}$, άρα $(A\hat{O}Γ) = (\overset{\frown}{AΓ}) = 130^\circ$. Όμοια $(B\hat{O}Γ) = 50^\circ$.

3. Έστω $\hat{ω}$ και $\hat{φ}$ δύο συμπληρωματικές γωνίες με $\hat{ω} = 2\hat{φ}$. Πρέπει $\hat{ω} + \hat{φ} = 90^\circ$ ή $2\hat{φ} + \hat{φ} = 90^\circ$ ή $3\hat{φ} = 90^\circ$. Άρα $\hat{φ} = 30^\circ$, οπότε $\hat{ω} = 60^\circ$.

4. Είναι $\hat{ω} = \dfrac{6}{5}$ ορθής $= \dfrac{6}{5} \cdot 90^\circ = 108^\circ$. Άρα η παραπληρωματική της $\hat{ω}$ είναι $\hat{φ} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Η γωνία $\hat{ω}$ δεν έχει συμπληρωματική, αφού είναι αμβλεία γωνία.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω $\hat{φ}$ η παραπληρωματική της $\hat{ω}$ και $\hat{θ}$ η συμπληρωματική της.

Τότε $\hat{φ} = 180^\circ - \hat{ω}$, $\hat{θ} = 90^\circ - \hat{ω}$ και $\hat{φ} = 3\hat{θ}$. Άρα $180^\circ - \hat{ω} = 3(90^\circ - \hat{ω})$ ή $180^\circ - \hat{ω} = 270^\circ - 3\hat{ω}$ ή $2\hat{ω} = 90^\circ$.
Άρα $\hat{ω} = 45^\circ$.

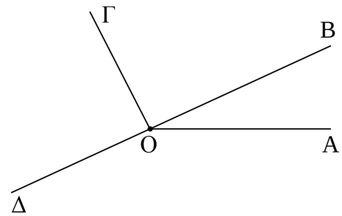
2. Έστω $\hat{ω}$ η συμπληρωματική της $\hat{φ}$. Τότε $\hat{φ} = 90^\circ - \hat{ω}$ και $\hat{φ} = \hat{ω} - 20^\circ$. Άρα $90^\circ - \hat{ω} = \hat{ω} - 20^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ω} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{ω} = 55^\circ$.

Άρα $\hat{ω} = 55^\circ$ και $\hat{φ} = 35^\circ$.

3. Έχουμε $\dfrac{A\hat{O}B}{1} = \dfrac{B\hat{O}Γ}{2} = \dfrac{Γ\hat{O}Δ}{3} = \dfrac{Δ\hat{O}A}{4}$. Θέτουμε

$\dfrac{A\hat{O}B}{1} = \dfrac{B\hat{O}Γ}{2} = \dfrac{Γ\hat{O}Δ}{3} = \dfrac{Δ\hat{O}A}{4} = λ$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = \lambda \\ B\hat{O}\Gamma = 2\lambda \\ \Gamma\hat{O}\Delta = 3\lambda \\ \Delta\hat{O}A = 4\lambda \end{array}\right\}$$ Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι



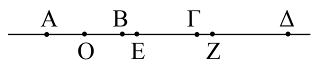
$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A = 10\lambda \Leftrightarrow 360^\circ = 10\lambda$.

Άρα $\lambda = 36^\circ$.

Επομένως $A\hat{O}B = 36^\circ$, $B\hat{O}\Gamma = 2(36^\circ) = 72^\circ$, $\Gamma\hat{O}\Delta = 3(36^\circ) = 108^\circ$ και $\Delta\hat{O}A = 4(36^\circ) = 144^\circ$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω Ο το μέσο του ΑΒ.



Τότε $EZ = OZ - OE$ (1)

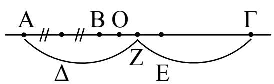
Αλλά

$$OZ = OB + BZ = \frac{AB}{2} + \frac{B\Delta}{2} = \frac{AB + B\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2} \quad (2) \text{ και}$$

$$OE = AE - AO = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2} \quad (3)$$

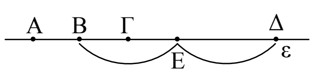
Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $EZ = \dfrac{A\Delta - B\Gamma}{2}$.

2. Έστω Ο το μέσο του ΒΖ. Τότε $OB = OZ$. Για να είναι το Ο μέσο και του ΔΕ αρκεί $\Delta B = ZE$ (αφού $OB = OZ$).



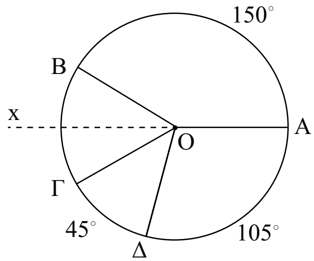
Πράγματι $ZE = Z\Gamma - E\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma - B\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2} = \Delta B$.

3. Έχουμε: $AE = AB + BE =$



$$= AB + \frac{B\Delta}{2} = \frac{2AB + B\Delta}{2} = \frac{2AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} =$$

$$= \frac{AB + B\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} > \frac{A\Gamma}{2}.$$



4. Έχουμε $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}+\overset{\frown}{\Delta A}=360^\circ$, οπότε

$\overset{\frown}{B\Gamma}=360^\circ-150^\circ-105^\circ-45^\circ=60^\circ$.

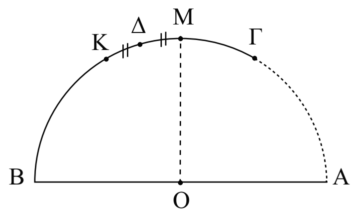
Άρα οι επίκεντρες γωνίες είναι:

$A\hat{O}B=150^\circ$ και $B\hat{O}\Gamma=60^\circ$.

Επομένως

$$A\hat{O}B+B\hat{O}x=A\hat{O}B+\frac{B\hat{O}\Gamma}{2}\ (\text{Οx διχοτόμος } B\hat{O}\Gamma)=150^\circ+\frac{60^\circ}{2} \text{ ή}$$

$A\hat{O}B+B\hat{O}x=180^\circ$, δηλαδή ΟΑ, Οx αντικείμενες ημιευθείες.



5. Αφού $\overset{\frown}{AB}$ ημικύκλιο και Μ μέσο $\overset{\frown}{AB}$,

είναι $\overset{\frown}{AM}=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$.

Άρα

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=\overset{\frown}{A\Delta}-\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{M\Delta}-\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{AM}+\frac{\overset{\frown}{MK}}{2}-\frac{\overset{\frown}{AK}}{2}=$$

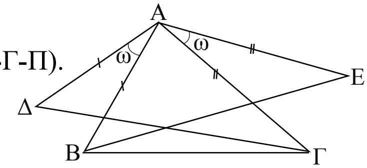
$$=\overset{\frown}{AM}-\left(\frac{\overset{\frown}{AK}}{2}-\frac{\overset{\frown}{MK}}{2}\right)=\overset{\frown}{AM}-\frac{\overset{\frown}{AM}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AM}}{2}=\frac{90^\circ}{2}=45^\circ.$$

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

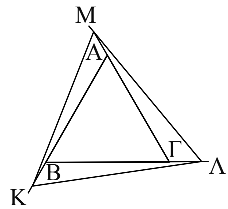
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο ενός τμήματος αν ισαπέχει από τα άκρα του. Αντίστοιχα ένα εσωτερικό σημείο γωνίας ανήκει στη διχοτόμο της αν ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
  (**Ασκήσεις:** § 3.4 Σύνθετα 2)
- Αν **δύο** σημεία μιας ευθείας ε ισαπέχουν από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος.
  (**Ασκήσεις:** § 3.12 Εμπέδωσης 2)
- Σε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες, οπότε και οι αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες του τριγώνου είναι ίσες (παραπληρώματα ίσων γωνιών).
  (**Ασκήσεις:** § 3.4 Σύνθετα 3 και § 3.12 Εμπέδωσης 8)
- Για να συγκριθούν ανισοτικά δύο τρίγωνα πρέπει να έχουν απαραίτητα δυο πλευρές ίσες.
  (**Ασκήσεις:** § 3.12 Αποδεικτικές 2, 7)
- Όταν η διάμεσος είναι βασικό στοιχείο σε μια άσκηση, συχνά χρειάζεται να την προεκτείνουμε.
  (**Ασκήσεις:** § 3.12 Αποδεικτικές 3 και Γενικές 7)

§ 3.1-3.2

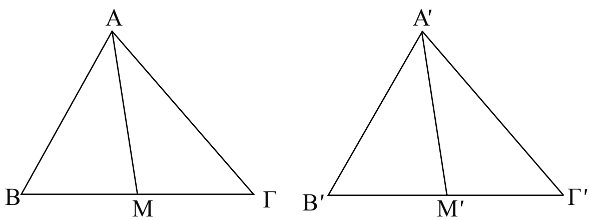


1. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}E$ και $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ είναι ίσα. (Π-Γ-Π).
($AB = A\Delta$, $A\Gamma = AE$, $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}\Delta$).
Άρα $BE = \Gamma\Delta$.

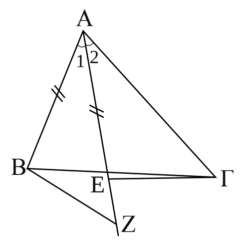


2. Τα τρίγωνα $K\overset{\triangle}{B}\Lambda$, $\Gamma\overset{\triangle}{\Lambda}M$, $M\overset{\triangle}{A}K$ είναι ίσα. (Π-Γ-Π)
($BK = \Gamma\Lambda = AM$, $B\Lambda = \Gamma M = AK$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων και $K\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Gamma}M = M\hat{A}K$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών).
Άρα $K\Lambda = \Lambda M = MK$.

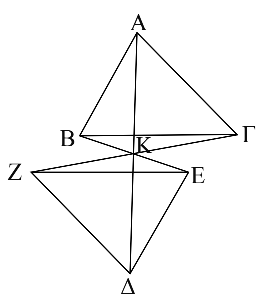
3. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{M}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{M'}\Gamma'$ είναι ίσα (Π-Γ-Π)
($AB = A'B'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $BM = B'M'$ ως μισά ίσων πλευρών).
Άρα $AM = A'M'$.



4. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{E}\Gamma$ και $A\overset{\triangle}{B}Z$ είναι ίσα, αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $AB = AE$ και $AZ = A\Gamma$ (Π-Γ-Π). Άρα $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.

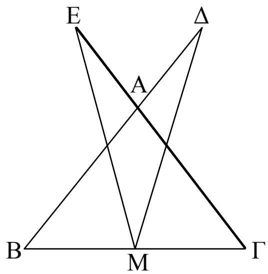


Αποδεικτικές Ασκήσεις

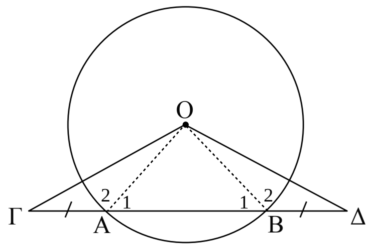


1. Τα τρίγωνα $\Delta\overset{\triangle}{K}E$ και $B\overset{\triangle}{K}A$ είναι ίσα αφού $AK = K\Delta$, $BK = KE$ και $A\hat{K}B = \Delta\hat{K}E$ ως κατακορυφήν.
Άρα $E\hat{\Delta}K = B\hat{A}K$ (1)
Όμοια τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{K}\Gamma$ και $Z\overset{\triangle}{K}\Delta$ είναι ίσα, οπότε $Z\hat{\Delta}K = \Gamma\hat{A}K$ (2)
Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$.

2. Τα τρίγωνα $\mathrm{M}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\Gamma$ είναι ίσα. (Π-Γ-Π) ($\mathrm{BM} = \mathrm{M}\Gamma$, $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ αφού $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$ και $\mathrm{B}\Delta = \Gamma\mathrm{E}$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων). Άρα $\mathrm{M}\Delta = \mathrm{ME}$.



3. Το τρίγωνο $\mathrm{O}\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$ και επομένως $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{B}}_2$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών. Έτσι τα τρίγωνα $\mathrm{O}\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\Gamma$ και $\mathrm{O}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Delta$ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$.



Σχόλιο:

Στις παραπάνω ασκήσεις χρησιμοποιούμε ισότητες τριγώνων για να αποδείξουμε ισότητες τμημάτων ή γωνιών.

§ 3.3-3.4

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

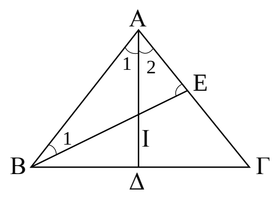
1. Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{A}'\overset{\triangle}{\mathrm{B}'}\Gamma'$ είναι ίσα (Π-Γ-Π).

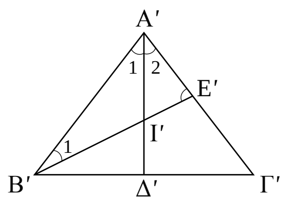
α) Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Delta$ και $\mathrm{A}'\overset{\triangle}{\mathrm{B}'}\Delta'$ είναι ίσα ($\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$, $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$,

$$\hat{\mathrm{A}}_1 = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}'}{2} = \hat{\mathrm{A}}_1').$$

Άρα $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}'\Delta'$.

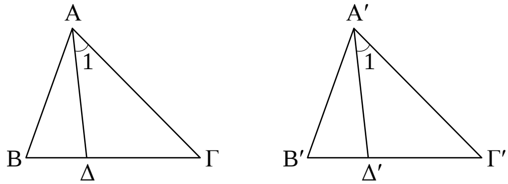
Επίσης τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{A}'\overset{\triangle}{\mathrm{B}'}\mathrm{E}'$ είναι ίσα (Γ-Π-Γ). Άρα $\mathrm{BE} = \mathrm{B'E'}$.





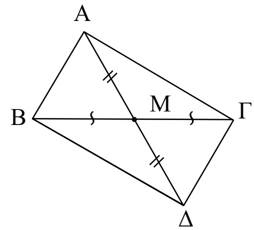
β) Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{I}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{A}'\overset{\triangle}{\mathrm{I}'}\mathrm{E}'$ είναι ίσα γιατί $\mathrm{AE} = \mathrm{A'E'}$ (από το (α)), $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{E}}'$ και $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{A}}_1$ (Γ-Π-Γ). Άρα $\mathrm{AI} = \mathrm{A'I'}$. Όμοια, από την ισότητα των τριγώνων $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{I}}\Delta$ και $\mathrm{B}'\overset{\triangle}{\mathrm{I}'}\Delta'$ προκύπτει ότι $\mathrm{BI} = \mathrm{B'I'}$.

2. i) Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{\Delta'}\Gamma'$ είναι ίσα γιατί $A\Gamma = A'\Gamma'$, $A\Delta = A'\Delta'$ και $\hat{A}_1 = \hat{A}_1'$ (Π-Γ-Π). Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.



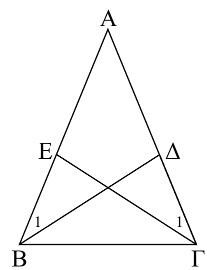
ii) Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ είναι ίσα γιατί $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ από το (α) (Γ-Π-Γ). Άρα $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.

3. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{M}B$ και $\Gamma\overset{\triangle}{M}\Delta$ είναι ίσα (Π-Γ-Π). Άρα $AB = \Gamma\Delta$. Όμοια τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{M}\Gamma$ και $B\overset{\triangle}{M}\Delta$ είναι ίσα. Άρα $A\Gamma = B\Delta$. Επομένως τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $B\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ έχουν τις πλευρές τους ίσες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (Π-Π-Π).

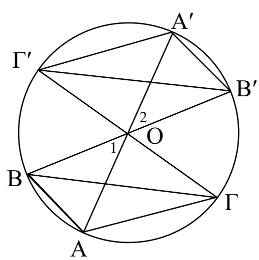


Αποδεικτικές Ασκήσεις

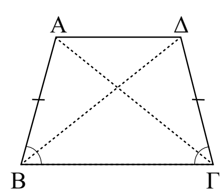
1. Έστω $B\Delta$ και ΓE οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ και $A\overset{\triangle}{\Gamma}E$ είναι ίσα γιατί έχουν:
$AB = A\Gamma$, $\hat{A}$ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (μισά ίσων γωνιών).
Από την ισότητα αυτή προκύπτει το ζητούμενο.



2. Τα τρίγωνα $O\overset{\triangle}{A}B$ και $O\overset{\triangle}{A'}B'$ είναι ίσα, γιατί έχουν: $OA = OA'$ και $OB = OB'$, ως ακτίνες, και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, ως κατακορυφήν. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $AB = A'B'$. Όμοια βρίσκουμε ότι $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$. Έτσι τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, επομένως είναι ίσα.

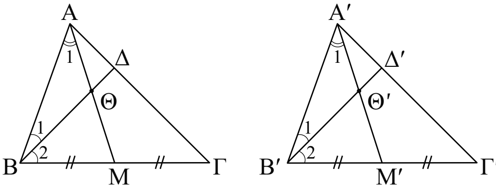


3. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $\Delta\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι ίσα, γιατί έχουν: $AB = \Gamma\Delta$, $B\Gamma$ κοινή και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $A\Gamma = B\Delta$, οπότε και τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ και $A\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ είναι ίσα (Π-Π-Π). Άρα $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



Σύνθετα Θέματα

1. i) Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Delta'$ είναι ίσα ($AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_1'$) (Γ-Π-Γ). Άρα $B\Delta = B'\Delta'$.

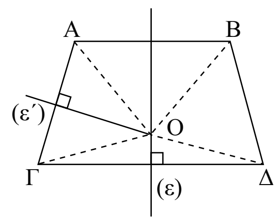


ii) Τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{A}M$ και $B'\overset{\triangle}{A'}M'$ είναι ίσα ($AB = A'B'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $BM = B'M'$) (Π-Γ-Π). Άρα $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$.

iii) Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Theta$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Theta'$ είναι ίσα ($AB = A'B'$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_1'$ και $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$ από το (β)) (Γ-Π-Γ).

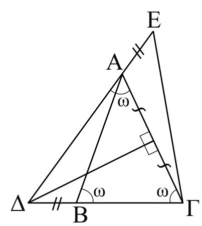
δ) Από το (γ) προκύπτει ότι $A\Theta = A'\Theta'$. Επίσης $B\Theta = B'\Theta'$. Άρα $B\Delta - B\Theta = B'\Delta' - B'\Theta'$ ή $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$.

2. Έστω ε′ η μεσοκάθετος του ΑΓ και Ο το σημείο τομής των ε και ε′. Επειδή ε μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι $OA = OB$ (1). Όμοια $O\Gamma = O\Delta$ (2). Αλλά το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΑΓ. Άρα $OA = O\Gamma$ (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $OB = O\Delta$, δηλαδή το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΔ.



3. i) Επειδή το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΓ είναι $\Delta A = \Delta\Gamma$. Άρα το τρίγωνο $\Delta\overset{\triangle}{A}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

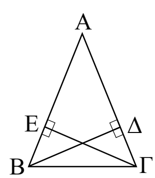
ii) Τα τρίγωνα $\Gamma\overset{\triangle}{A}E$ και $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ είναι ίσα, γιατί $AE = B\Delta$, $A\Gamma = AB$ και $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}E$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών ($\hat{B} = \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma = \omega$) (Π-Γ-Π).
Άρα $\Gamma E = \Gamma\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $\Gamma\overset{\triangle}{\Delta}E$ είναι ισοσκελές.



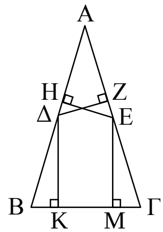
§ 3.5-3.6

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ και $A\overset{\triangle}{E}\Gamma$ είναι ίσα ($\hat{A}$ κοινή, $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$, $AB = A\Gamma$). Άρα $B\Delta = \Gamma E$.



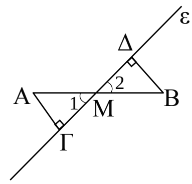
2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.



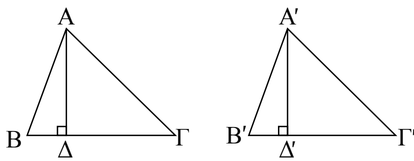
i) Αν $\Delta\mathrm{K} \perp \mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{EM} \perp \mathrm{B\Gamma}$ τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Delta K}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{ME\Gamma}}$ είναι ίσα ($\hat{\mathrm{K}} = \hat{\mathrm{M}} = 90^\circ$, $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{B} = \mathrm{E\Gamma}$ ως μισά ίσων πλευρών).
Άρα $\Delta\mathrm{K} = \mathrm{ME}$.

ii) Αν $\Delta\mathrm{Z} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{EH} \perp \mathrm{AB}$, τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AHE}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta Z}}$ είναι ίσα ($\hat{\mathrm{A}}$ κοινή, $\hat{\mathrm{Z}} = \hat{\mathrm{H}} = 90^\circ$, $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$). Άρα $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{EH}$.

3. Έστω ευθεία ε που διέρχεται από το μέσο Μ του ΑΒ. Αν $\mathrm{A\Gamma} \perp \varepsilon$ και $\Delta\mathrm{B} \perp \varepsilon$ τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{MA\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{M\Delta B}}$ είναι ίσα ($\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$, $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2$, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$). Άρα $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$.



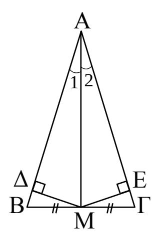
4. Έστω ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$ είναι ίσα με $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'}$. Αν ΑΔ, Α′Δ′ τα αντίστοιχα ύψη, τότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Delta'}}$ είναι ίσα. ($\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$, $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$, $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90^\circ$).
Άρα $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$.



Σχόλιο:
Παρατηρήστε ότι αν το Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ τότε και το Δ′ ανήκει στην πλευρά Β′ Γ′.

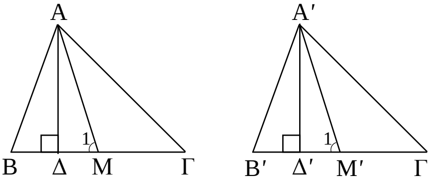
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω $\mathrm{M\Delta} \perp \mathrm{AB}$ και $\mathrm{ME} \perp \mathrm{A\Gamma}$. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AM\Delta}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{AME}}$ είναι ίσα (ΑΜ κοινή, $\hat{\Delta} = \hat{\mathrm{E}} = 90^\circ$, $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$, αφού ΑΜ διάμεσος και διχοτόμος).
Άρα i) ΜΔ = ΜΕ και ii) $\mathrm{A\hat{M}\Delta} = \mathrm{A\hat{M}E}$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}$.



Σχόλιο:
Αποφύγαμε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{MB\Delta}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{M\Gamma E}}$ γιατί δεν έχουμε αποδείξει ακόμη ότι τα Δ, Ε είναι προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Αυτό προκύπτει μετά τη διαπίστωση ότι οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$, $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες.

2. Τα τρίγωνα $A\Delta M$ και $A'\Delta'M'$ είναι ίσα ($\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\ \ = 90$, $A\Delta = A'\Delta'$, $AM = A'M'$).

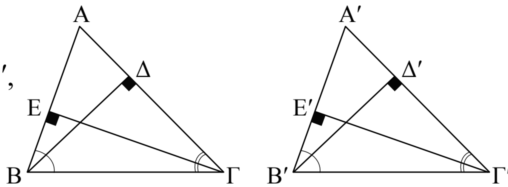


Άρα $\hat{M}_1 = \hat{M}_1{}'$ (1).

Επίσης τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}M$ και $A'\overset{\triangle}{B'}M'$ είναι ίσα ($AM = A'M'$, $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$ από (1) και $BM = B'M'$ ως μισά ίσων πλευρών). Άρα $AB = A'B'$ (2) και $\hat{B} = \hat{B}'$ (3).

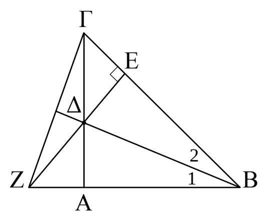
Από τις (2), (3) και την υπόθεση ($\alpha = \alpha'$), προκύπτει ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ είναι ίσα (Π-Γ-Π).

3. Τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{E}\Gamma$ και $B'\overset{\triangle}{E'}\Gamma'$ είναι ίσα ($B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Gamma E = \Gamma'E'$, $\hat{E} = \hat{E}' = 90^\circ$). Άρα $\hat{B} = \hat{B}'$ (1). Όμοια από τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ και $B'\overset{\triangle}{\Delta'}\Gamma'$ προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ (2).



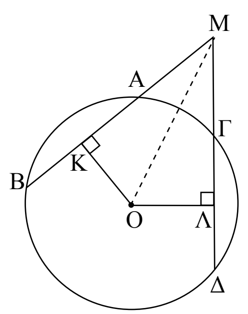
Από τις (1), (2) και την υπόθεση ($\alpha = \alpha'$), προκύπτει ότι τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ είναι ίσα (Γ-Π-Γ).

4. Τα τρίγωνα $E\overset{\triangle}{\Delta}B$ και $A\overset{\triangle}{\Delta}B$ έχουν $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $B\Delta$ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, άρα είναι ίσα, οπότε $AB = BE$ (1). Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $E\overset{\triangle}{B}Z$ έχουν $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$, $AB = BE$ (από (1)) και $\hat{B}$ κοινή, άρα είναι ίσα, οπότε $BZ = B\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $B\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ είναι ισοσκελές.

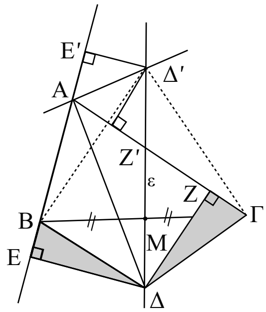


5. i) Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ θα είναι $OK = O\Lambda$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $M\overset{\triangle}{O}K$ και $M\overset{\triangle}{O}\Lambda$ είναι ίσα γιατί έχουν OM κοινή και $OK = O\Lambda$.

ii) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $MK = M\Lambda$ (1). Όμως τα Κ, Λ είναι μέσα των ίσων χορδών ΑΒ και ΓΔ, οπότε $AK = \Gamma\Lambda$ (2) και $BK = \Delta\Lambda$ (3). Από τις (1), (2) προκύπτει $MA = M\Gamma$ και από τις (1), (3) ότι $MB = M\Delta$.



Σύνθετα Θέματα



1. i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{E\Delta B}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta Z\Gamma}}$ είναι ορθογώνια ($\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{Z}} = 90^\circ$) και έχουν $\mathrm{\Delta B = \Delta\Gamma}$ (Δ σημείο της μεσοκαθέτου), $\mathrm{\Delta E = \Delta Z}$ (αποστάσεις σημείου της διχοτόμου), άρα είναι ίσα.

ii) Για τους ίδιους λόγους και τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta' B E'}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta' \Gamma Z'}}$ είναι ίσα.

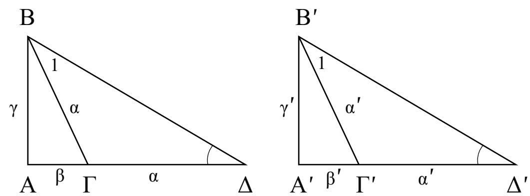
iii) Από τις παραπάνω ισότητες τριγώνων προκύπτουν: $\mathrm{AE = AZ}$ και $\mathrm{\Gamma Z' = BE'}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές παίρνουμε:

$\mathrm{AE + \Gamma Z' = AZ + BE' \Leftrightarrow AB + BE + A\Gamma - AZ' =}$

$\mathrm{= A\Gamma - \Gamma Z + AB + AE' \Leftrightarrow BE + \Gamma Z = AE' + AZ' \Leftrightarrow}$

$\mathrm{\Leftrightarrow 2BE = 2AZ' \Leftrightarrow BE = AZ'}$, οπότε: $\mathrm{EE' = AE + AE' = AZ + Z\Gamma = A\Gamma}$ και $\mathrm{ZZ' = AZ - AZ' = AE - BE = AB}$.



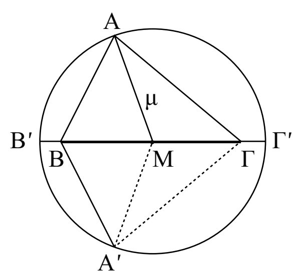
2. Έστω ότι $\gamma = \gamma'$. Προεκτείνουμε τις ΑΓ, Α′Γ′ κατά τμήματα $\mathrm{\Gamma\Delta} = \alpha$ και $\mathrm{\Gamma'\Delta'} = \alpha'$ αντίστοιχα. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Delta'}}$ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και επομένως είναι ίσα.

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $\mathrm{A\hat{B}\Delta = A'\hat{B}'\Delta'}$ (1) και $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$, οπότε και $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}'_1$ (2) (γιατί τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}$, $\overset{\triangle}{\mathrm{B'\Gamma'\Delta'}}$ είναι ισοσκελή).

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$, οπότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$ έχουν $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}' = 90^\circ$, $\mathrm{AB = A'B'}$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$, επομένως είναι ίσα.

§ 3.7

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**



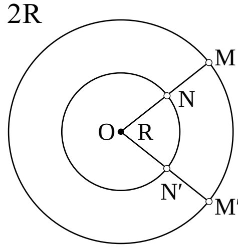
1. Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με σταθερή την πλευρά $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$ και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος μ. Επειδή το Α απέχει από το σταθερό σημείο Μ σταθερή απόσταση μ, βρίσκεται στον κύκλο (Μ, μ).

• ***Αντίστροφα***: Έστω Α′ σημείο του κύκλου (Μ, μ) τότε $\mathrm{A'M} = \mu$, ως ακτίνα του κύκλου, και Α′Μ διάμεσος του $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B\Gamma}}$. Το Α δεν είναι σημείο της ευθείας ΒΓ. Επομένως γ.τ. του Α είναι ο κύκλος (Μ, μ) χωρίς τα σημεία του Β′ και Γ′.

2. Αν M είναι ένα σημείο του ζητούμενου γ.τ., θα είναι $OM = 2R$ και επομένως το M ανήκει στον κύκλο (O, 2R).

• ***Αντίστροφα*:** Αν M′ είναι ένα σημείο του (O, 2R) και N′ η τομή του OM′ με τον (O, R) τότε $ON' = R$, οπότε $N'M' = 2R - R = R$, δηλαδή $ON' = N'M'$.

Άρα ο γ.τ. του M είναι ο κύκλος (O, 2R).



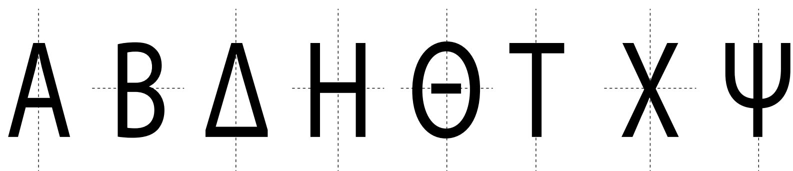
Σχόλιο:

Στα προβλήματα γ.τ. εξετάζουμε ευθύ και αντίστροφο.

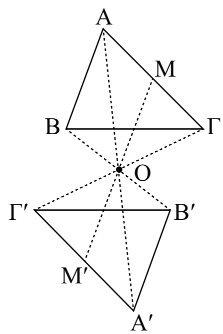
§ 3.8-3.9

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

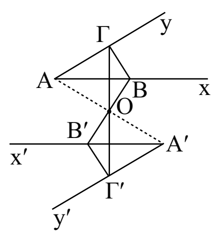
1. Οι ζητούμενοι άξονες συμμετρίας φαίνονται στα επόμενα σχήματα:



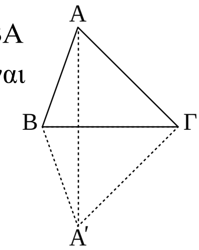
2. Σύμφωνα με την εφαρμογή της § 3.8 το συμμετρικό M′ ενός σημείου M του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι σημείο του τριγώνου $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ και αντίστροφα. Άρα τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$, $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ είναι συμμετρικά ως προς το O. Εξάλλου από $A'B' = AB$, $B'\Gamma' = B\Gamma$ και $\Gamma'A' = \Gamma A$ προκύπτει ότι $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma' = A\overset{\triangle}{B}\Gamma$.



3. Έστω B, Γ σημεία των Ax, Ay αντίστοιχα και B′, Γ′ τα συμμετρικά αυτών ως προς το O. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση είναι $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma' = A\overset{\triangle}{B}\Gamma$, οπότε $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.



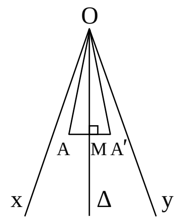
4. Σύμφωνα με την εφαρμογή της § 3.9 είναι $ΒΑ' = ΒΑ$ και $ΓΑ' = ΓΑ$, οπότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{Α'ΒΓ}$ είναι ίσα (Π-Π-Π).



5. Έστω ΟΔ η διχοτόμος της $x\hat{O}y$ και Α σημείο της $x\hat{O}y$, π.χ. της $x\hat{O}Δ$. Αν Α′ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ΟΔ τότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΟΑΑ'}$ είναι ισοσκελές, οπότε έχουμε:

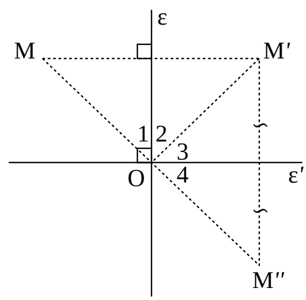
$Α'\hat{Ο}Μ = Α\hat{Ο}Μ \leq Μ\hat{Ο}x = Μ\hat{Ο}y$.

Το Α′ επομένως είναι σημείο της $Δ\hat{O}y$, δηλαδή της $x\hat{O}y$. Άρα η ΟΔ είναι άξονας συμμετρίας.



6. i) Επειδή Μ′ συμμετρικό του Μ ως προς ε, η ε είναι μεσοκάθετη του ΜΜ′, οπότε $ΟΜ = ΟΜ'$ (1). Για τους ίδιους λόγους είναι και $ΟΜ' = ΟΜ''$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει $ΟΜ = ΟΜ''$.

ii) Η ε είναι άξονας συμμετρίας του ΜΜ′, οπότε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Όμοια $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$, οπότε έχουμε:



$$Μ\hat{Ο}Μ'' = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \cdot 1∟ = 2∟$$

αφού οι ε, ε′ είναι κάθετες. Η ισότητα $Μ\hat{Ο}Μ'' = 2∟$ σημαίνει ότι τα Μ, Ο, Μ″ είναι συνευθειακά.

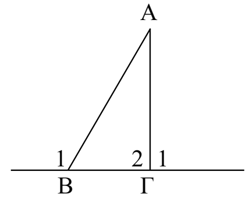
Σχόλιο:

Από την άσκηση αυτή συμπεραίνουμε ότι: αν ένα σχήμα έχει δύο κάθετους άξονες συμμετρίας, τότε το σημείο τομής τους είναι κέντρο συμμετρίας του σχήματος.

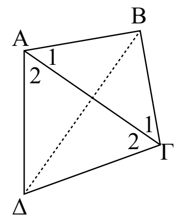
§ 3.10-3.12

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

1. Επειδή η $\hat{\mathrm{B}}_1$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 > \hat{\Gamma}_2$ (1).
Από υπόθεση όμως $\hat{\mathrm{B}}_1 > \hat{\Gamma}_1$ (2).
Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει $2\hat{\mathrm{B}}_1 > 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}}_1 > 90^\circ$.

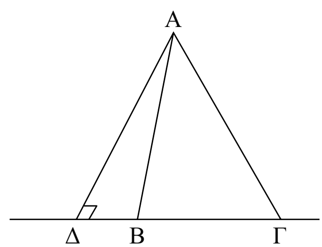


2. Το $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και αφού $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\Gamma}_2$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει $\mathrm{A}\Delta = \Gamma\Delta$. Επειδή τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από το Α και Γ, η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

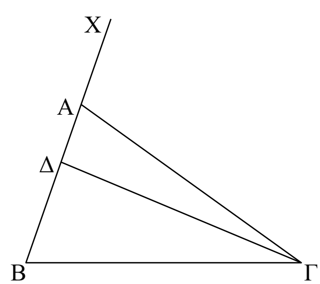


3. i) Επειδή $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} < 180^\circ$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} < 90^\circ$.

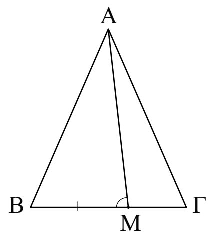
ii) Έστω ΑΔ το ύψος. Αν $\Delta \equiv \mathrm{B}$ θα είχαμε $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\mathrm{B}}$, δηλαδή $90^\circ = \hat{\mathrm{B}}$ άτοπο. Αν το Δ ήταν σημείο της προέκτασης της ΓΒ προς το Β θα είχαμε $\hat{\mathrm{B}} > \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} > 90^\circ$ άτοπο. Άρα το Δ είναι εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.



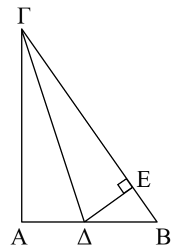
4. Αν το Δ βρίσκεται μεταξύ των Β, Α τότε η $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $\Delta\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma > \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Ομοίως για τις άλλες περιπτώσεις.



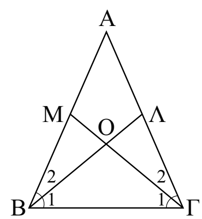
5. Είναι $\hat{M} > \hat{\Gamma}$ (1), αφού $\hat{M}$ εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$. Όμως $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ (2). Από (1), (2) παίρνουμε $\hat{M} > \hat{B}$ οπότε από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABM}$ προκύπτει $AB > AM$.

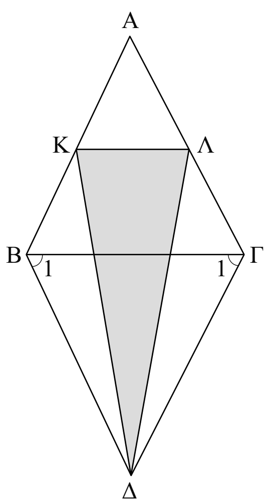


6. Φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Επειδή $\Gamma\Delta$ διχοτόμος θα είναι $A\Delta = \Delta E$ (1). Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{E\Delta B}$ προκύπτει $\Delta E < \Delta B$ (2). Από (1), (2) παίρνουμε $A\Delta < \Delta B$.



7. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OMB}$ και $\overset{\triangle}{O\Gamma\Lambda}$ είναι ίσα (Π-Γ-Π), επομένως $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.
Είναι και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ αφού $OB = O\Gamma$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.



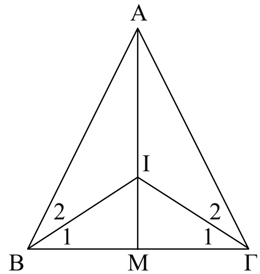


8. Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$, οπότε και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και επομένως $B\Delta = \Delta\Gamma$.
Έτσι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{KB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{\Lambda\Gamma\Delta}$ έχουν $KB = \Lambda\Gamma$, $B\Delta = \Gamma\Delta$ και $K\hat{B}\Delta = \Lambda\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε είναι ίσα και επομένως $\Delta K = \Delta\Lambda$.

9. i) Είναι $\hat{B}_1 = \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1$,

οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{BI\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AIB}$ και $\overset{\triangle}{AI\Gamma}$ είναι ίσα (Π-Π-Π), αφού έχουν $BI = \Gamma I$, $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ ($\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$).

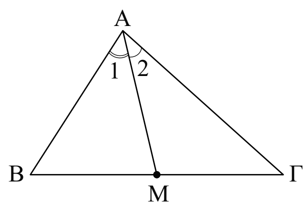


10. Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Pi K_1 K_2}$, $\overset{\triangle}{\Pi K_1 K_3}$ και $\overset{\triangle}{\Pi K_3 K_2}$ (σχ. Βιβλίου) παίρνουμε αντίστοιχα $K_1K_2 < 13$, $K_1K_3 < 17$ και $K_3K_2 < 16$. Προσθέτοντας αυτές κατά μέλη βρίσκουμε $K_1K_2 + K_1K_3 + K_3K_2 < 46$. Επομένως ο χιλιομετρητής θα έπρεπε να γράψει απόσταση μικρότερη του 46 και όχι 48.

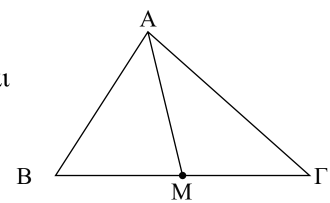
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Από την $\mu_\alpha < \dfrac{\alpha}{2}$ προκύπτουν $AM < BM$ και $AM < M\Gamma$. Απ' αυτές παίρνουμε αντίστοιχα $\hat{B} < \hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma} < \hat{A}_2$, απ' όπου με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$.

Όταν $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \dfrac{\alpha}{2}$ ισχύουν αντίστοιχα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}$ ή $\hat{B} + \hat{\Gamma} > \hat{A}$.



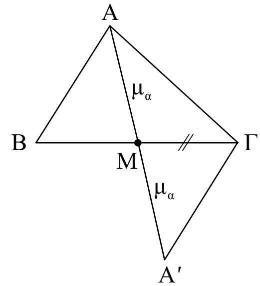
2. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AMB}$ και $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ έχουν δύο πλευρές ίσες (AM = κοινή, $BM = M\Gamma$) και τις τρίτες άνισες ($AB < A\Gamma$), οπότε (εφαρμογή § 3.12) οι απέναντι γωνίες θα είναι ομοίως άνισες $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.



3. α) Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα MA'. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AMB}$ και $\overset{\triangle}{A'M\Gamma}$ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\Gamma A' = AB$ και $B\hat{A}M = \Gamma\hat{A}'M$ (1). Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Gamma A'}$ είναι $A\Gamma > \Gamma A'$ (γιατί $A\Gamma > AB$), οπότε $M\hat{A}'\Gamma > M\hat{A}\Gamma$, από την οποία σύμφωνα με την (1) προκύπτει $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$.

β) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Gamma A'}$ παίρνουμε:

$A\Gamma - \Gamma A' < AA' < A\Gamma + \Gamma A' \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow \beta-\gamma < 2\mu_\alpha < \beta+\gamma \Leftrightarrow \frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

γ) Σύμφωνα με το β) έχουμε:

$$\mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2},\ \mu_\beta < \frac{\gamma+\alpha}{2} \text{ και } \mu_\gamma < \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha+\beta+\gamma = 2\tau$.

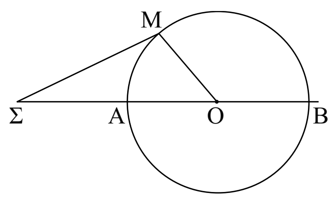
4. Αν τα Σ, Ο, Μ δεν είναι συνευθειακά με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Sigma M O}$ παίρνουμε:

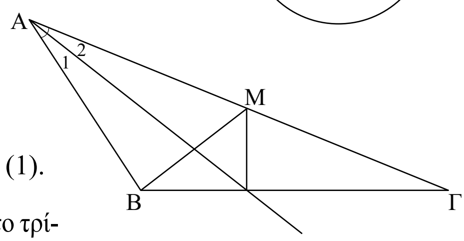
$\Sigma O - OM < \Sigma M < \Sigma O + OM \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Sigma O - OA < \Sigma M < \Sigma O + OB \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Sigma A < \Sigma M < \Sigma B$.

• Αν $M \equiv A$ τότε: $\Sigma A = \Sigma M < \Sigma B$ και
• αν $M \equiv B$ είναι $\Sigma A < \Sigma M = \Sigma B$.





5. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABM}$ η διχοτόμος είναι και ύψος, επομένως είναι ισοσκελές, δηλαδή

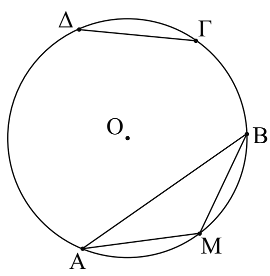
$$AB = AM = \frac{1}{2}A\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma = 2AB \quad (1).$$

Με εφαρμογή της τριγ. ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ βρίσκουμε $A\Gamma < AB + B\Gamma \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow 2AB < AB + B\Gamma \Leftrightarrow AB < B\Gamma$.

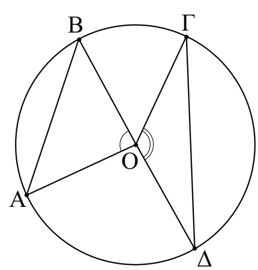
6. Θεωρούμε το μέσο του τόξου ΑΒ, οπότε

$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $AM = MB = \Gamma\Delta$.

Τότε, λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AMB}$, έχουμε ότι: $AM + MB > AB$ ή $2\Gamma\Delta > AB$.

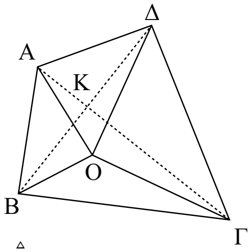


7. Έστω ότι $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} > \overset{\frown}{AB}$, οπότε η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{O}B$. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Gamma O \Delta}$ και $\overset{\triangle}{AOB}$ έχουν δύο ζεύγη πλευρών ίσα ($OA = OB = O\Gamma = O\Delta = R$) και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, οπότε $\Gamma\Delta > AB$. (εφ. § 3.11).
Το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο.



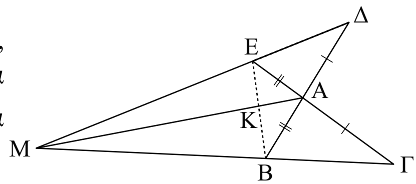
Σύνθετα Θέματα

1. i) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AOB}$, $\overset{\triangle}{BO\Gamma}$, $\overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}$ και $\overset{\triangle}{\Delta OA}$ παίρνουμε αντίστοιχα: $AB < OA + OB$, $B\Gamma < OB + O\Gamma$, $\Gamma\Delta < O\Gamma + O\Delta$ και $A\Delta < O\Delta + OA$ από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.



ii) Αν το O δεν είναι σημείο της ΑΓ από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AO\Gamma}$ προκύπτει ότι: $OA + O\Gamma > A\Gamma$ και αν το O είναι σημείο της ΑΓ θα είναι $OA + O\Gamma \geq A\Gamma$ (1). Όμοια παίρνουμε $OB + O\Delta \geq B\Delta$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει $OA + OB + O\Gamma + O\Delta \geq A\Gamma + B\Delta$ η οποία σημαίνει ότι ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ είναι η $A\Gamma + B\Delta$ και συμβαίνει όταν το O είναι σημείο της ΑΓ και της ΒΔ, δηλαδή όταν $O \equiv K$.

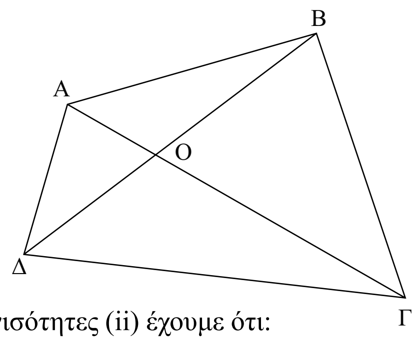
2. Αφού το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AEB}$ είναι ισοσκελές, θα είναι $A\hat{E}B = A\hat{B}E$ και επειδή τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AE\Delta}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ίσα, θα είναι $A\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma$.
Επομένως $B\hat{E}\Delta = E\hat{B}\Gamma$
και $M\hat{E}B = M\hat{B}E$, οπότε το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές.



ii) Αν φέρουμε τη διάμεσο ΑΚ του ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\triangle}{AEB}$ θα είναι ύψος και διχοτόμος, όμοια και η ΜΚ, οπότε τα σημεία Μ, Κ, Α είναι συνευθειακά.

3. i) Είναι $A\Gamma < AB + B\Gamma$ (από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$) $A\Gamma < A\Delta + \Delta\Gamma$ (από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$) και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.

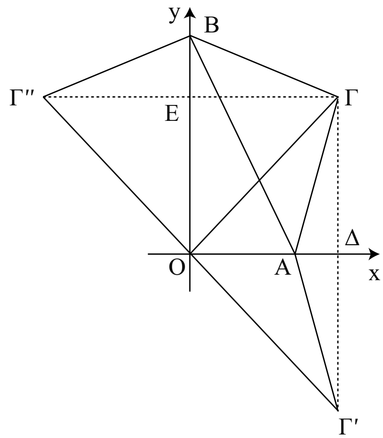
ii) Είναι $AO + OB > AB$ και $\Delta O + O\Gamma > \Gamma\Delta$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.



iii) Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισότητες (ii) έχουμε ότι:

$$\frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} < A\Gamma + B\Delta.$$

Επίσης προσθέτοντας κατά μέλη τις $A\Gamma < AB + B\Gamma$, $A\Gamma < A\Delta + \Delta\Gamma$, $B\Delta < AB + A\Delta$ και $B\Delta < B\Gamma + \Gamma\Delta$ καταλήγουμε ότι $A\Gamma + B\Delta < AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$.

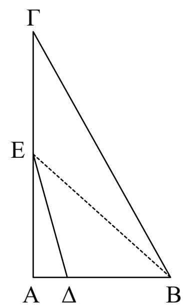


4. Από το Γ φέρουμε κάθετες στις Οx, Oy που τις τέμνουν στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα και παίρνουμε τμήματα $ΓΔ = Γ'Δ$ και $ΓΕ = Γ''Ε$ (συμμετρικά). Τότε η περίμετρος του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι $Γ'Α + ΑΒ + ΒΓ'' > Γ'Γ'' = 2ΟΓ$.

Σχόλιο:
Τα σημεία Γ′, Ο, Γ″ είναι συνευθειακά.
(Άσκηση 6-§ 3.8-3.9).

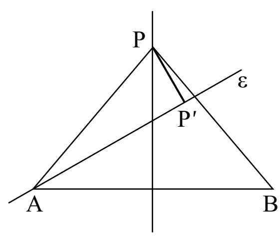
§ 3.13

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**



1. Επειδή ΕΑ κάθετος στην ΑΒ και $ΑΔ < ΑΒ$ θα είναι $ΔΕ < ΕΒ$ (1).
Επίσης ΒΑ κάθετος στην ΑΓ και $ΑΕ < ΑΓ$. Άρα συνεπάγεται ότι $ΕΒ < ΒΓ$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει ότι $ΔΕ < ΒΓ$.

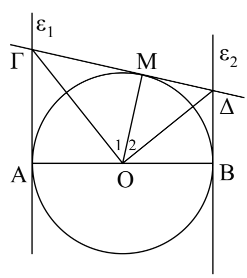
2. Το ΑΗ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ (σχ. Βιβλίου), άρα $ΑΒ = ΑΓ$. Τα τμήματα ΑΓ και ΑΔ είναι πλάγια και επειδή $ΗΓ < ΗΔ$ και ΑΗ κάθετος προκύπτει ότι $ΑΓ < ΑΔ$.



3. i) Έστω P′ το ίχνος της καθέτου από το P στην ε. Αν το P′ δεν ταυτίζεται με το A τότε θα είναι $PB = PA > PP'$.
ii) Θα πρέπει το P′ να ταυτίζεται με το A, επομένως η ε να είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα PA, στο σημείο A.

§ 3.14-3.15

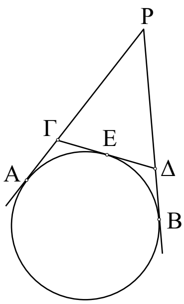
Ασκήσεις **Εμπέδωσης**



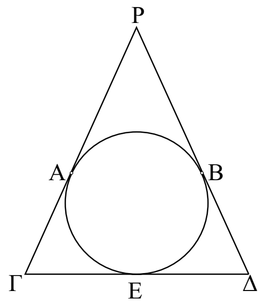
1. Οι χορδές είναι ίσες γιατί έχουν ίσα αποστήματα, αφού το απόστημα κάθε χορδής ισούται με την ακτίνα ρ του μικρού κύκλου.

2. Έστω Μ το σημείο επαφής της ε με τον κύκλο. Η ΟΓ είναι διχοτόμος της $Α\hat{Ο}Μ$ και η ΟΔ διχοτόμος της $Μ\hat{Ο}Β$, οπότε $ΟΓ \perp ΟΔ \Leftrightarrow Γ\hat{Ο}Δ = 90^\circ$ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).

3. Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:
Για το Σχ. 1 έχουμε ότι:
$P\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta P = PA - A\Gamma + \Gamma E + E\Delta + PB - P\Delta = 2PA.$
Για το Σχ. 2 έχουμε ότι:
$P\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta P = PA + A\Gamma + \Gamma E + E\Delta + BP = 2(PA + \Gamma\Delta).$

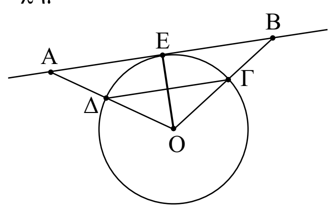


Σχήμα 1

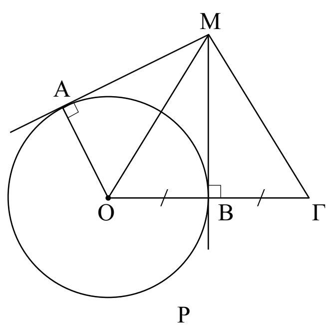


Σχήμα 2

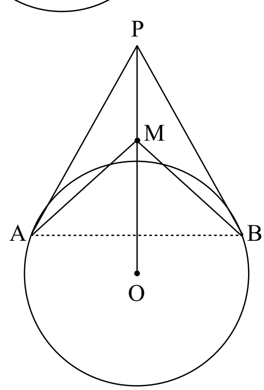
Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ η ΟΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή $OA = OB$ (1).
Όμως και $O\Delta = O\Gamma$ (2) (ως ακτίνες). Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει $A\Delta = B\Gamma$.



2. Φέρουμε τη ΜΟ, οπότε οι γωνίες $A\hat{M}O$ και $O\hat{M}B$ είναι ίσες. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OM\Gamma}$ είναι ισοσκελές, οπότε η ΜΒ είναι και διχοτόμος, άρα $O\hat{M}B = B\hat{M}\Gamma$. Άρα $A\hat{M}\Gamma = 3B\hat{M}\Gamma$.



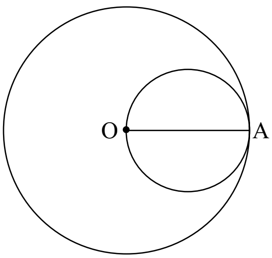
3. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΑ και ΡΒ είναι ίσα, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από ένα σημείο προς τον κύκλο. Επομένως το τρίγωνο $\overset{\triangle}{PAB}$ είναι ισοσκελές, οπότε $P\hat{A}B = P\hat{B}A$.
Επίσης, η ΡΟ είναι μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, οπότε $MA = MB$ και επομένως $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.

§ 3.16

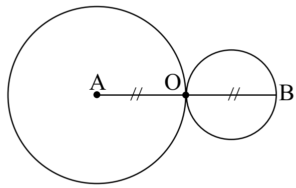
Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

1. i) Ο ένας κύκλος εσωτερικός του άλλου.
ii) Εφάπτονται εσωτερικά.
iii) Τέμνονται.
iv) Εφάπτονται εξωτερικά.
v) Ο ένας κύκλος εξωτερικός του άλλου.

2. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



3. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

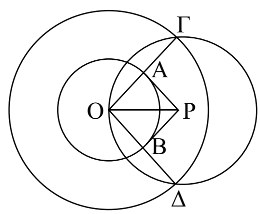


Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Για να τέμνονται οι κύκλοι (O, 2R) και (P, PO) πρέπει να ισχύει: $2R - PO < PO < PO + 2R$, γιατί $PO < 2R$.
Η δεξιά ανισότητα προφανώς ισχύει. Για την αριστερή έχουμε:
$2R - PO < PO \Leftrightarrow 2R < 2PO \Leftrightarrow PO > R$
που ισχύει αφού P εξωτερικό σημείο του (O, R).

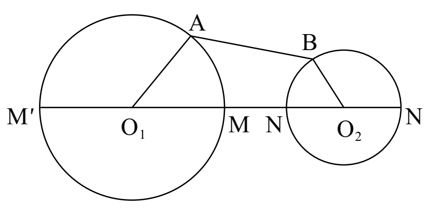
ii) Επειδή $(O\Gamma) = 2R > R$ το Γ είναι εξωτερικό σημείο του (O, R), άρα η ΟΓ τέμνει τον (O, R) στο Α. Όμοια η ΟΔ τέμνει τον (O, R) στο Β.

iii) Επειδή $(OA) = R$ και $(O\Gamma) = 2R$ το Α είναι μέσο της χορδής ΟΓ του κύκλου (P, PO), οπότε $PA \perp O\Gamma$, επομένως PA εφαπτόμενη του (O, R). Όμοια αποδεικνύεται ότι και η PB είναι εφαπτόμενη του (O, R).



2. i) Επειδή $O_1O_2 > R_1 + R_2$ ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.

ii) • Έστω ότι το Α δεν συμπίπτει με το Μ ή το Β δεν συμπίπτει με το Ν. Τότε σύμφωνα με το σχόλιο της

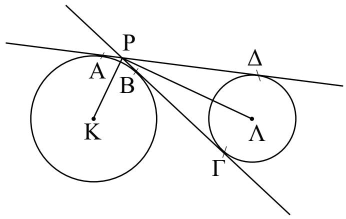


§ 3.11 έχουμε: $O_1O_2 < O_1A + AB + BO_2$ ή $R_1 + MN + R_2 < R_1 + AB + R_2$ ή $MN < AB$.

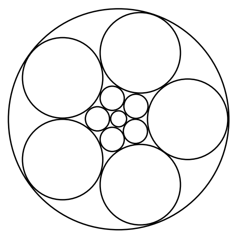
Όταν $A \equiv M$ και $B \equiv N$ τότε $MN = AB$. Άρα γενικά $MN \leq AB$.

- Έστω πάλι ότι το Α δεν συμπίπτει με το Μ′ ή το Β με το Ν′ τότε: $AB < AO_1 + O_1O_2 + O_2B$ ή $AB < M'O_1 + O_1O_2 + O_2N'$ ή $AB < M'N'$. Όταν $A \equiv M'$ και $B \equiv N'$ τότε $AB = M'N'$, γενικά λοιπόν θα ισχύει $AB \leq M'N'$.

3. Η ΚΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{P}B$ και η ΡΛ διχοτόμος της $\Gamma\hat{P}\Delta$. Όμως οι γωνίες $A\hat{P}B$ και $B\hat{P}\Delta$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, επομένως $K\hat{P}\Lambda = 90^\circ$.



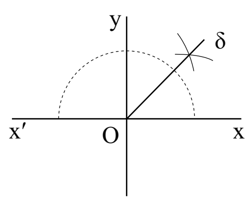
4. Η απάντηση είναι καταφατική και οι κύκλοι φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



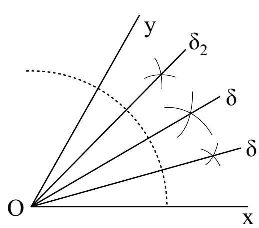
§ 3.17-3.18

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

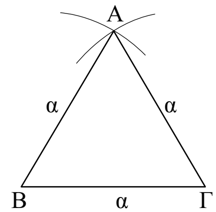
1. Κατασκευάζουμε γεωμετρικά μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη διχοτόμο Οδ αυτής. Τότε $(x\hat{O}\delta) = 45^\circ$.



2. Έστω γωνία $x\hat{O}y$. Κατασκευάζουμε τη διχοτόμο Οδ αυτής και στη συνέχεια τις διχοτόμους $O\delta_1$ και $O\delta_2$ των $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ αντίστοιχα.

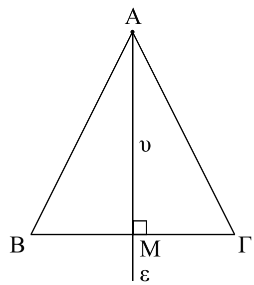


3. Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = \alpha$ και γράφουμε τους κύκλους $(B,\ \alpha)$ και $(\Gamma,\ \alpha)$. Αν A είναι ένα κοινό σημείο των κύκλων αυτών το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο.



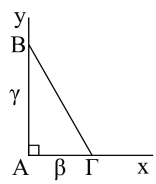
- Πράγματι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο με ΒΓ = α, από υπόθεση, ΑΒ = ΑΓ = α, ως ακτίνες των κύκλων $(B,\ \alpha)$ και $(\Gamma,\ \alpha)$.
- Επειδή $\alpha - \alpha < \alpha < \alpha + \alpha$, οι κύκλοι τέμνονται και το πρόβλημα έχει πάντα λύση. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A'B\Gamma}$ με A' το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων $(B,\ \alpha)$ και $(\Gamma,\ \alpha)$ είναι ίσο με το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, επομένως η λύση είναι μοναδική.

4. Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο ε αυτού. Αν η ε τέμνει τη ΒΓ στο Μ και πάνω σ' αυτήν πάρουμε σημείο Α ώστε ΑΜ = υ, τότε το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

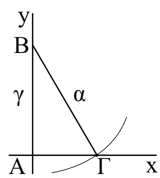


- Πράγματι, ΑΒ = ΑΓ και προφανώς ΒΓ = α και ΑΜ = υ.
- Το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.

5. α) Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$ και πάνω στις πλευρές της Αx, Αy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Β ώστε $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$. Το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.

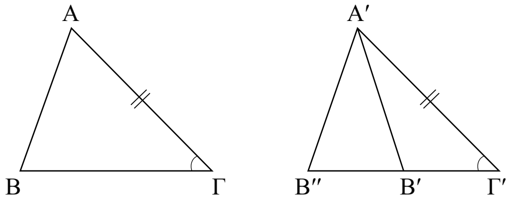


β) Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$ και πάνω στην Αy παίρνουμε σημείο Β ώστε $AB = \gamma$. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο (Β, α) που τέμνει την Αx στο Γ. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι προφανώς το ζητούμενο και υπάρχει λύση όταν $\alpha > \gamma$.



Γενικές Ασκήσεις

1. i) Στην προέκταση της $\Gamma'B'$ θεωρούμε σημείο B'' ώστε $\Gamma'B'' = \Gamma B$. Τότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B''\Gamma'}$ είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}''$ (1) και $A'B'' = AB$ (2). Όμως από υπόθεση $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$ η οποία, λόγω της (1), γίνεται $\hat{B}'' + \hat{B}' = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}'' = 180^\circ - \hat{B}' = \hat{B}'_{\varepsilon\xi}$



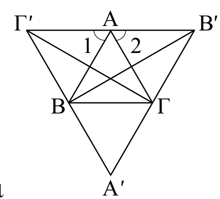
δηλαδή $\hat{B}'' = \hat{B}'_{\varepsilon\xi}$ και επομένως $A'B'' = A'B'$ η οποία με τη βοήθεια της (2) δίνει $A'B' = AB$.

ii) Αν δύο τρίγωνα είναι τέτοια ώστε:

- μια πλευρά και μια προσκείμενη σ' αυτή γωνία του ενός να είναι ίση με μια πλευρά και μια προσκείμενη γωνία του άλλου, αντίστοιχα και
- οι μη προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες των τριγώνων είναι παραπληρωματικές.

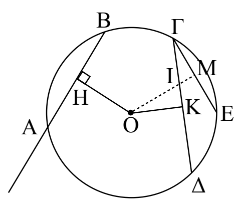
Τότε, οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες προσκείμενες γωνίες είναι ίσες.

2. Επειδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB'\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma'}$ είναι ισόπλευρα και ίσα μεταξύ τους, οπότε θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \varphi$ (1).



Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{BAB'}$ και $\overset{\triangle}{\Gamma'A\Gamma}$ έχουνε $A\Gamma' = AB$, $A\Gamma = AB'$ και $B\hat{A}B' = \Gamma'\hat{A}\Gamma = \hat{A} + \hat{\varphi}$, άρα είναι ίσα και επομένως $BB' = \Gamma\Gamma'$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $BB' = AA'$.

3. Έστω ότι η χορδή $\Gamma\Delta$ είναι μεγαλύτερη της AB. Μεταφέρουμε την AB σε ίση χορδή ΓE, οπότε το απόστημα OH της AB ισούται με το απόστημα OM της ΓE. Αφού τα σημεία O και E βρίσκονται εκατέρωθεν της $\Gamma\Delta$, η OM τέμνει τη $\Gamma\Delta$ σε σημείο I που είναι εσωτερικό του τμήματος OM. Τότε έχουμε ότι $OK < OI < OM = OH$.

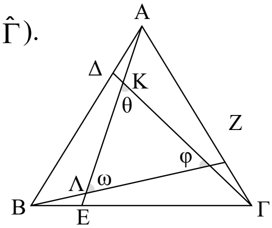


Αντίστροφα: Έστω ότι $OK < OH$. Τότε:

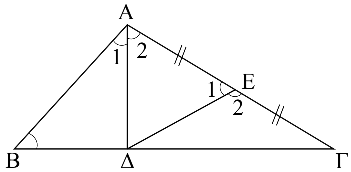
- αν $AB = \Gamma\Delta$ θα ήταν $OK = OH$ (άτοπο).
- αν $AB > \Gamma\Delta$ θα ήταν $OK > OH$ (άτοπο).

Άρα $AB < \Gamma\Delta$.

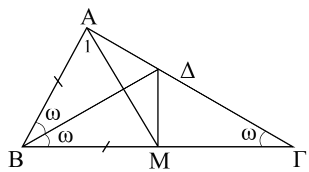
4. Έχουμε $A\overset{\triangle}{B}E = B\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ ($AB = B\Gamma$, $BE = \Gamma Z$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$). Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (1). Επίσης $A\overset{\triangle}{B}Z = B\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ ($AB = B\Gamma$, $\hat{A} = \hat{B}$, $AZ = B\Delta$). Άρα $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$. Από (1), (2), αφού $AB = B\Gamma$ προκύπτει ότι $A\overset{\triangle}{B}\Lambda = B\overset{\triangle}{\Gamma}M$.
Επομένως $\hat{\Lambda} = \hat{M}$, οπότε $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.
Όμοια $\hat{\omega} = \hat{\theta}$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = \hat{\theta}$.



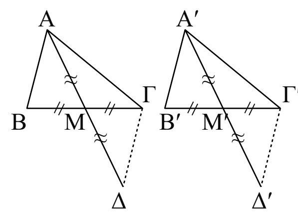
5. Φέρουμε ΑΔ διχοτόμο. Έστω Ε το μέσο της ΑΓ. Τότε $A\overset{\triangle}{B}\Delta = A\overset{\triangle}{\Delta}E$
$\left(A\Delta \text{ κοινή}, \ \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \ AB = AE = \dfrac{A\Gamma}{2}\right)$.
Άρα $\hat{B} = \hat{E}_1 < 90^\circ$, οπότε $\hat{E}_2 > 90^\circ$.
Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{E}\Delta$ και $\Delta\overset{\triangle}{E}\Gamma$ έχουν:
ΔΕ κοινή, $AE = E\Gamma$, $\hat{E}_2 > \hat{E}_1$.
Άρα $\Delta\Gamma > A\Delta$. Επομένως στο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ είναι $\hat{A}_2 > \hat{\Gamma}$ ή $\dfrac{\hat{A}}{2} > \hat{\Gamma}$.



6. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}M$ είναι ισοσκελές. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας Β. Τότε το τρίγωνο $\Delta\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές και η ΔΜ ύψος και διχοτόμος, οπότε $\Delta\hat{M}B = 1\llcorner$. Τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{\Delta}A$ και $B\overset{\triangle}{M}\Delta$ είναι ίσα (Π-Γ-Π), οπότε $B\hat{M}\Delta = B\hat{A}\Delta = 1\llcorner$.

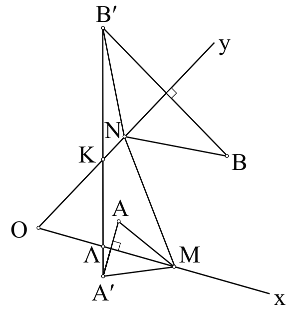


7. Θεωρούμε τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ με $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AM = A'M'$.
Προεκτείνουμε τις ΑΜ, Α′Μ′ κατά τμήματα $AM = M\Delta$ και $A'M' = M'\Delta'$.
Τότε $A\overset{\triangle}{B}M = M\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ και $A'\overset{\triangle}{B'}M' = M'\overset{\triangle}{\Gamma'}\Delta'$, οπότε $\Gamma\Delta = AB$ και $\Gamma'\Delta' = A'B'$.
Επομένως τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ και $A'\overset{\triangle}{\Gamma'}\Delta'$ είναι ίσα (Π-Π-Π). Άρα $\Gamma M = \Gamma'M'$, οπότε $B\Gamma = B'\Gamma'$. Άρα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ (Π-Π-Π).



8. Από συμμετρία έχουμε ότι: ΑΜ = Α′Μ και ΒΝ = Β′Ν, οπότε ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ = Α′Μ + ΜΝ + ΝΒ′, δηλαδή το ζητούμενο. Φέρνουμε το Α′Β′.

Σύμφωνα με το σχόλιο της § 3.11 έχουμε Α′Β′ ≤ Α′Μ + ΜΝ + ΝΒ′, δηλαδή η μικρότερη τιμή του αθροίσματος Α′Μ + ΜΝ + ΝΒ′ είναι το Α′Β′. Αυτό θα συμβεί όταν τα Μ, Ν βρεθούν πάνω στο Α′Β′ και επειδή ανήκουν και στις Οx, Οy αντίστοιχα, πρέπει τα Μ, Ν να ταυτιστούν με τα Κ, Λ αντίστοιχα.



4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

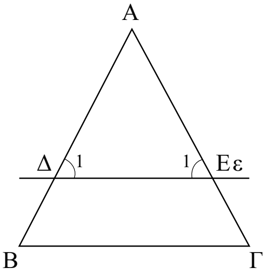
- Αν φέρουμε παράλληλη από σημείο της διχοτόμου γωνίας προς μια πλευρά της σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο.
  (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 2, Αποδεικτικές 4, 5 και Σύνθετα 3)
  Αντίστοιχα αν φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο γωνίας.
  (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 3, Αποδεικτικές 2, 3 και Σύνθετα 4)
- Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:
  α) Είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.
  (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 6, Αποδεικτικές 1)
  β) Είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία. (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Σύνθετα 1)
  γ) Τεμνόμενες από τρίτη ευθεία σχηματίζουν:
  i) Δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ή
  ii) Δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή
  iii) Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές
  (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 4, 5 και § 4.6-4.8 Σύνθετα 7)
- Τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν
  i) Η γωνία $Α\hat{Β}Γ$ είναι 0° ή 180°
  ii) Οι ευθείες π.χ. ΑΒ, ΑΓ είναι παράλληλες ή κάθετες σε ευθεία ε. Την (i) περίπτωση συναντήσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο. (**Ασκήσεις:** § 4.6-4.8 Σύνθετα 3). Άλλες ασκήσεις θα δούμε στο 5ο Κεφάλαιο.

  Σχόλιο: *Ισοδύναμες εκφράσεις είναι: "η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το Γ", "το Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ".*
- Μια γωνία τριγώνου είναι ορθή αν οι άλλες δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές.
  (**Ασκήσεις:** § 4.6-4.8 Σύνθετα 1)

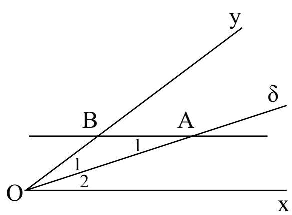
§ 4.1-4.5

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

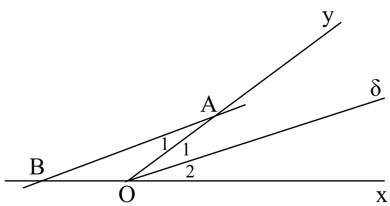
1. Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ($AB = A\Gamma$) $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$, $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$, οπότε $A\Delta = AE$.



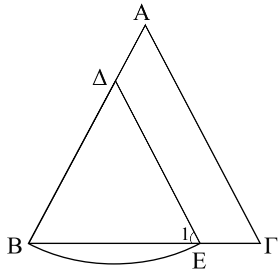
2. Έχουμε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (διχοτόμος) $\hat{A}_1 = \hat{O}_2$ (εντός εναλλάξ). Άρα $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$, οπότε $OB = AB$.



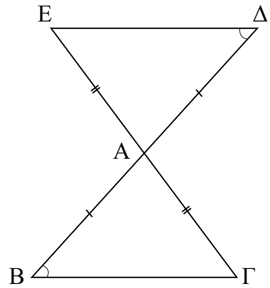
3. Έχουμε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (διχοτόμος) $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ) $\hat{O}_2 = \hat{B}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, οπότε $OA = OB$.



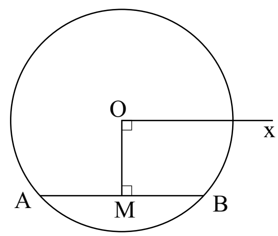
4. Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ($AB = A\Gamma$) $\Delta B = \Delta E$, οπότε $\hat{B} = \hat{E}_1$. Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$, οπότε $\Delta E // A\Gamma$ (αφού σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες).



5. Έχουμε $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta E}}$ (Π-Γ-Π), άρα $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta}$, οπότε ΔΕ//ΒΓ (αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες).



6. Έχουμε $\mathrm{OM} \perp \mathrm{AB}$ (ΟΜ απόστημα)
$\mathrm{OM} \perp \mathrm{Ox}$. Άρα Οx//ΒΑ.

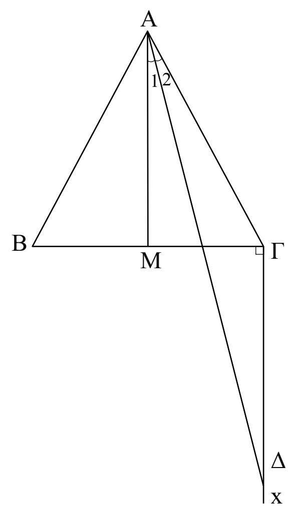


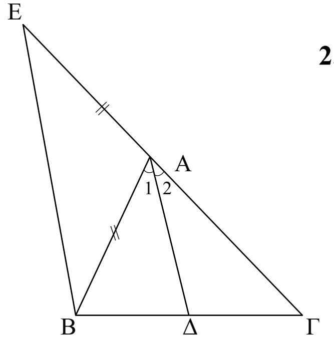
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έχουμε ΑΒ = ΑΓ = ΓΔ, άρα $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\Delta}$ (1)

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Gamma} \text{ (διάμεσος και ύψος)}\\ &\Gamma\Delta \perp \mathrm{B\Gamma}\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\mathrm{AM}//\Gamma\Delta, \text{ οπότε}\\ &\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\Delta} \ \ (2)\end{aligned}$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.





2. Έχουμε ΕΓ = ΑΕ + ΑΓ (1)
$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$ (διχοτόμος)
$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$ (εντός εναλλάξ)
$\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{E}}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη).
Άρα $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{E}}$, οπότε ΑΕ = ΑΒ (2)
Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ.

3. Έχουμε $\Delta\Gamma = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{A}\Delta$ (1)

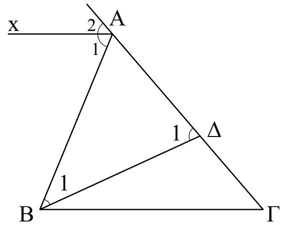
$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$ (διχοτόμος)

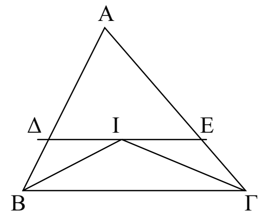
$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)

Άρα $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Delta}_1$, οπότε $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AB}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta\Gamma = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{AB}$.





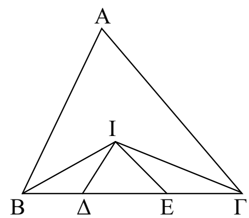
4. Έχουμε $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{I} + \mathrm{IE}$ (1)

Τα τρίγωνα $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{I}$, $\Gamma\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\mathrm{I}$ είναι ισοσκελή (Άσκ. 2).

Οπότε $\Delta\mathrm{I} = \mathrm{B}\Delta$ και $\mathrm{IE} = \Gamma\mathrm{E}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει

ότι $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta + \Gamma\mathrm{E}$.



5. Έχουμε $\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{B}\Delta + \Delta\mathrm{E} + \mathrm{E}\Gamma$ (1)

Τα τρίγωνα $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{I}$, $\Gamma\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\mathrm{I}$ είναι ισοσκελή,

οπότε $\Delta\mathrm{I} = \mathrm{B}\Delta$ και $\mathrm{IE} = \Gamma\mathrm{E}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει

ότι $\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{I}\Delta + \Delta\mathrm{E} + \mathrm{IE}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε $\mathrm{EB} = \mathrm{EZ}$, οπότε $\hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{Z}}_1$.

Αλλά $\hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}}_1$. Άρα $\hat{\mathrm{Z}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$,

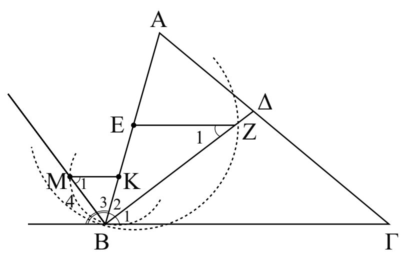
οπότε ΕΖ//ΒΓ (1) (αφού σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες).

Όμοια $\mathrm{KB} = \mathrm{KM}$, οπότε

$\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_3 = \hat{\mathrm{B}}_4$.

Άρα ΜΚ//ΒΓ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΖ//ΜΚ.



2. Φέρουμε ΓΖ//Αx//Βy. Τότε:

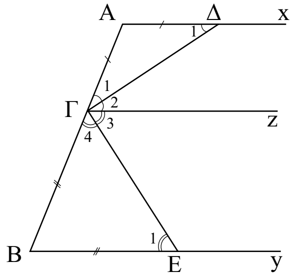
$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 \text{ (εντός εναλλάξ)}\\ (\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1)\end{array}\right\}$ Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (1)

Όμοια

$\left.\begin{array}{l}\hat{\Gamma}_3 = \hat{E}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)}\\ \hat{\Gamma}_4 = \hat{E}_1 \text{ (BE =BΓ)}\end{array}\right\}$ Άρα $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).

Επομένως $\Delta\hat{\Gamma}E = 1\llcorner$.

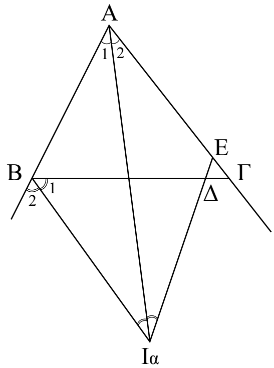


3. Έχουμε $\Delta E = I_\alpha E - I_\alpha \Delta$ (1)

Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = A\hat{I}_\alpha E$, οπότε $AE = I_\alpha E$ (2)

και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = B\hat{I}_\alpha\Delta$, οπότε $B\Delta = I_\alpha\Delta$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Delta E = AE - B\Delta$.



4. α) Επειδή ΑΔ//ΕΜ έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$, $\hat{A}_2 = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$. Άρα $AE = AZ$.

β) Έχουμε $BE + \Gamma Z = BA + AE + \Gamma Z \overset{(\alpha)}{=} BA + AZ + \Gamma Z = BA + A\Gamma = \text{σταθ.}$

γ) Προεκτείνουμε την ΕΜ κατά τμήμα $MH = EM$.

Τότε $B\overset{\triangle}{E}M = M\overset{\triangle}{H}\Gamma$ ($BM = M\Gamma$, $MH = EM$, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$), οπότε $\Gamma H = BE$ (1) και $\hat{E}_1 = \hat{H}$.

Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, άρα $\hat{H} = \hat{Z}_2$, δηλαδή $\Gamma Z = \Gamma H$ (2)

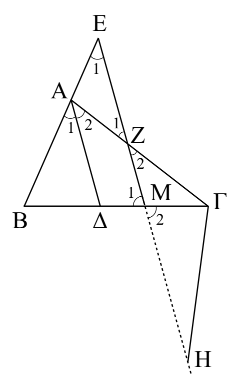
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $BE = \Gamma Z$.

Από το (β) είναι φανερό ότι

$$BE = \Gamma Z = \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

Επίσης

$$AE = AZ = BE - AB = \frac{AB + A\Gamma}{2} - AB = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$



§ 4.6-4.8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. α) $\hat{A}=90^\circ,\ \hat{B}=\dfrac{2}{3}\hat{A}=60^\circ,\ \hat{\Gamma}=30^\circ.$

β) $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=90^\circ,\ \hat{B}=\dfrac{2}{3}\hat{\Gamma}\\ \text{Αλλά } \hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ\end{array}\right\}\begin{array}{l}\hat{B}=36^\circ\\ \hat{\Gamma}=54^\circ\end{array}$

2. Έχουμε $\hat{A}=\dfrac{\hat{B}}{2}$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}=2\hat{A}$.

Αλλά $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 5\hat{A}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=36^\circ$,

οπότε $B\hat{I}\Gamma=90^\circ+\dfrac{\hat{A}}{2}=108^\circ$.

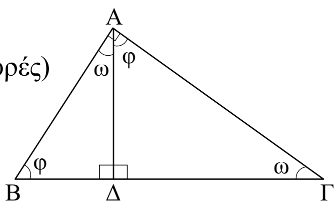
3. Έχουμε $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=144^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=36^\circ,\ \hat{A}=3\hat{B}$

και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=\hat{A}+\hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=4\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B}=36^\circ$.

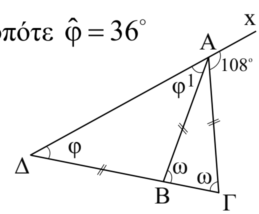
Άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}=36^\circ$, οπότε $AB=A\Gamma$.

4. $\hat{B}=\Delta\hat{A}\Gamma=\hat{\varphi}$

$\hat{\Gamma}=\Delta\hat{A}B=\hat{\omega}$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές)



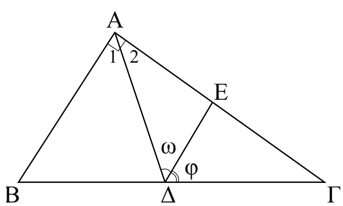
5. $\left.\begin{array}{l}\text{Έχουμε } AB=\Delta B, \text{ οπότε } \hat{\Delta}=\hat{A}_1=\hat{\varphi}\\ AB=A\Gamma, \text{ οπότε } \hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{\omega}\\ \text{Στο τρίγωνο } A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma:\ \hat{A}_{\varepsilon\xi}=\hat{\varphi}+\hat{\omega}=108^\circ\\ \text{Στο τρίγωνο } A\overset{\triangle}{\Delta}B:\ \hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{\Delta}+\hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\omega}=2\hat{\varphi}\end{array}\right\}\text{οπότε } \hat{\varphi}=36^\circ$



6. Έχουμε $\hat{\omega}=\hat{A}_1=45^\circ$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{\varphi}=\hat{B}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{\Gamma}+20^\circ\\ \hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ\end{array}\right\}\hat{B}=\hat{\varphi}=55^\circ$



7. Έχουμε $\Sigma_\nu = 2\nu - 4$ ορθές, οπότε

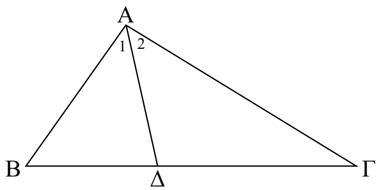
$900^\circ = (2\nu - 4)90^\circ \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 10 \Leftrightarrow 2\nu = 14 \Leftrightarrow \nu = 7.$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow 2\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ + \hat{A} \Leftrightarrow 2(\hat{A} + \hat{B}) = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}) + \hat{A} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma},$

άρα $AB = A\Gamma$.

2. i) $\left.\begin{array}{l} A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \hat{A}_1 \\ A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array}\right\} A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$



ii) Έχουμε $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (από (i))

Αλλά $A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}B = 180^\circ$.

Άρα $2A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ + \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$,

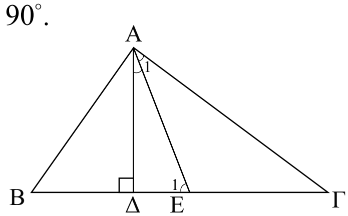
οπότε $A\hat{\Delta}B = 90^\circ - \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

3. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$): $\Delta\hat{A}E + \hat{E}_1 = 90^\circ$.

Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{E}_1 = \dfrac{\hat{A}_1}{2} + \hat{\Gamma}$

(εξωτερική) και

$90^\circ = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε



$\Delta\hat{A}E + \dfrac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = \dfrac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}.$

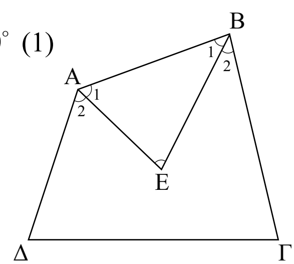
4. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AEB}$:

$A\hat{E}B = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{E}B + \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} = 180^\circ$ (1)

Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} + \dfrac{\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $A\hat{E}B = \dfrac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

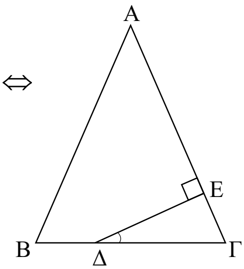


5. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ\\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{array}\right\}\hat{A}+2\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=180^\circ-2\hat{\Gamma}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \hat{A}=2(90^\circ-\hat{\Gamma})\Leftrightarrow \hat{A}=2E\hat{\Delta}\Gamma$

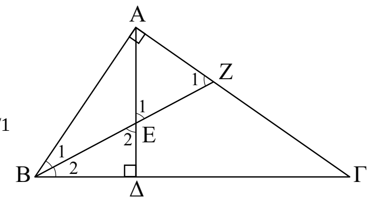
αφού $E\hat{\Delta}\Gamma+\hat{\Gamma}=90^\circ$, οπότε $E\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ-\hat{\Gamma}$.



6. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABZ}$: $\hat{Z}_1+\hat{B}_1=90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Στο τρίγωνο } \overset{\triangle}{BE\Delta}: \hat{E}_2+\hat{B}_2=90^\circ\\ \text{Αλλά } \hat{B}_1=\hat{B}_2 \text{ και } \hat{E}_1=\hat{E}_2,\end{array}\right\}\hat{Z}_1=\hat{E}_1$$

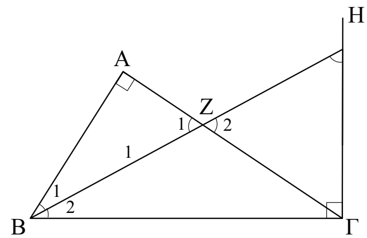
οπότε $AE=AZ$.



7. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{BH\Gamma}$: $\hat{H}+\hat{B}_2=90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Στο τρίγωνο } \overset{\triangle}{ABZ}: \hat{Z}_2+\hat{B}_1=90^\circ\\ \text{Αλλά } \hat{B}_1=\hat{B}_2 \text{ και } \hat{Z}_1=\hat{Z}_2,\end{array}\right\}\hat{Z}_1=\hat{H}$$

οπότε $Z\Gamma=\Gamma H$.



Σύνθετα Θέματα

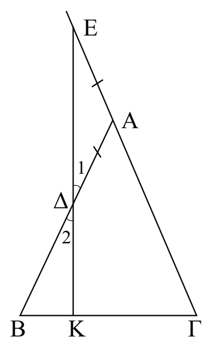
1. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AE\Delta}$: $AE=A\Delta\Leftrightarrow\hat{\Delta}_1=\hat{E}$,

$\hat{A}=\hat{\Delta}_1+\hat{E}$ (ως εξωτερική), οπότε $\hat{\Delta}_1=\hat{E}=\dfrac{\hat{A}}{2}$ (1)

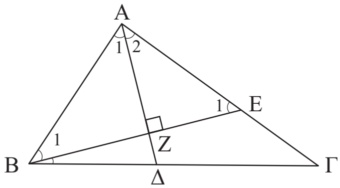
$$\text{Αλλά }\left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ\\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{array}\right\}\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^\circ\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\hat{\Delta}_1+\hat{B}=90^\circ\Leftrightarrow\hat{\Delta}_2+\hat{B}=90^\circ,$$

άρα $\hat{K}=90^\circ$, οπότε $\Delta E\perp B\Gamma$.



2. Στο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}E$ το ΑΖ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}E$ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (1).



Επίσης $\hat{B}_1 = E\hat{B}\Gamma = \hat{B}$ (2).

$\hat{E}_1 = E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ (εξωτερική)

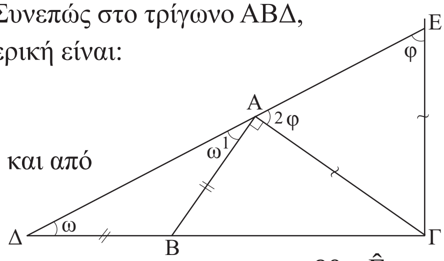
$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{B}_1 = E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$ (3).

Από (2), (3) προκύπτει

ότι $2E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma} = \hat{B} \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = \dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\hat{A}_1+\hat{A}+\hat{A}_2=180^o \Leftrightarrow \hat{A}_1+90^o+\hat{A}_2=180^o \Leftrightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2=90^o$.

Έχουμε: ΑΒ = ΒΔ, οπότε $\hat{A}_1=\hat{\Delta}$: Συνεπώς στο τρίγωνο ΑΒΔ, η $\hat{B}$ (του τριγώνου ΑΒΓ) ως εξωτερική είναι:



$\hat{B}=\hat{A}_1+\hat{\Delta} \Rightarrow \hat{B}=2\hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_1=\dfrac{\hat{B}}{2}$ (1)

Επίσης από ΑΓ = ΓΕ είναι: $\hat{A}_2=\hat{E}$ και από τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε:

$\widehat{A\Gamma E}+\hat{A}_2+\hat{E}=180^o \Rightarrow$

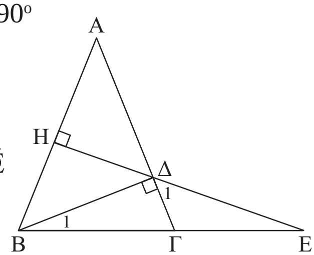
$\widehat{A\Gamma E}+\hat{A}_2+\hat{A}_2=180^o \Rightarrow 90^o-\hat{\Gamma}+2\hat{A}_2=180^o \Rightarrow 2\hat{A}_2=90^o+\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_2=\dfrac{90^o+\hat{\Gamma}}{2}$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

$\hat{A}_1+\hat{A}_2=\dfrac{\hat{B}}{2}+\dfrac{90^o+\hat{\Gamma}}{2}=\dfrac{(\hat{B}+\hat{\Gamma})+90^o}{2}=\dfrac{90^o+90^o}{2}=90^o$

4. i) Έχουμε

$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_1+\hat{\Gamma}=90^\circ \text{ (από τρίγωνο } B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma) \\ \hat{E}+\hat{B}=90^\circ \text{ (από τρίγωνο } B\overset{\triangle}{H}E) \\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\ (AB=A\Gamma) \end{array}\right\} \hat{B}_1=\hat{E}$



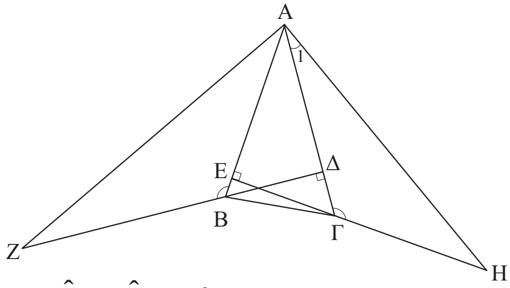
οπότε $B\Delta = \Delta E$.

ii) Τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ και $\Delta\overset{\triangle}{\Gamma}E$ έχουν: ΔΓ κοινή, $B\Delta = \Delta E$ και $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ > \hat{\Delta}_1$.

Άρα $B\Gamma > \Gamma E$.

5. i) Έχουμε $A\overset{\triangle}{Z}B = A\overset{\triangle}{\Gamma}H$ ($BH = A\Gamma$, $\Gamma H = AB$, $A\hat{B}Z = A\hat{\Gamma}H = 90^\circ + \hat{A}$).

Άρα $AZ = AH$.

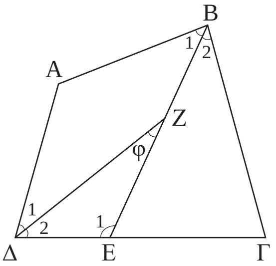


ii) $\left.\begin{array}{l} Z\hat{A}H = Z\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}H \\ \Gamma\hat{A}H = \hat{Z} \text{ (από (i))} \end{array}\right\} Z\hat{A}H = Z\hat{A}\Delta + \hat{Z} = 90^\circ$

οπότε $AZ \perp AH$.

6. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta Z E}$ είναι:

$$\hat{\varphi}+\hat{\Delta}_2+\hat{E}_1=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\varphi}+\frac{\hat{\Delta}}{2}+\hat{E}_1=180^\circ \quad (1)$$



Αλλά $\hat{E}_1=\hat{\Gamma}=\hat{B}_2=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{B}}{2}$ (2)

(εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{B E \Gamma}$)

και $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ$, οπότε

$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=180^\circ$ (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{\varphi}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{\varphi}=\frac{\hat{A}-\hat{\Gamma}}{2}.$$

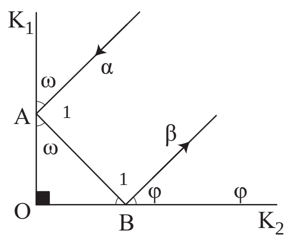
7. Επειδή $A\hat{O}B=90^\circ$, θα είναι $\hat{\omega}+\hat{\varphi}=90^\circ$ (1).

Επομένως

$$\hat{A}_1+\hat{B}_1=180^\circ-2\hat{\omega}+180^\circ-2\hat{\varphi}=$$

$$=360^\circ-2(\hat{\omega}+\hat{\varphi})\overset{(1)}{=}360^\circ-2\cdot 90^\circ=180^\circ.$$

Άρα α//β.



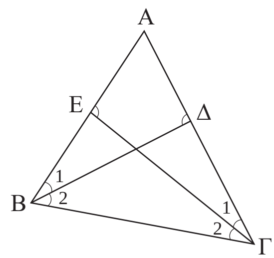
Γενικές Ασκήσεις

1. Έχουμε $B\hat{\Delta}\Gamma=\hat{A}+\hat{B}_1=\hat{A}+\frac{\hat{B}}{2}$

(εξωτερική του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Delta}$) και

$$\Gamma\hat{E}A=\hat{B}+\hat{\Gamma}_2=\hat{B}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

(εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{B E \Gamma}$).



Αρκεί $\hat{A}+\frac{\hat{B}}{2}=\hat{A}+\frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 2\hat{A}+\hat{B}=2\hat{B}+\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{A}=\hat{B}+\hat{\Gamma}$

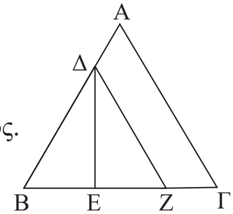
που ισχύει (αφού $\hat{A}=60^\circ$, $\hat{B}+\hat{\Gamma}-120^\circ$).

2. Έστω Ζ μέσο του ΕΓ.

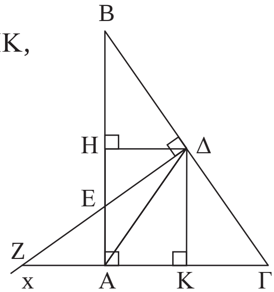
Τότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{B\Delta Z}$ είναι ισόπλευρο

($B\Delta=BZ=\frac{2}{3}\alpha$, $\hat{B}=60^\circ$) και η ΔΕ είναι διάμεσος.

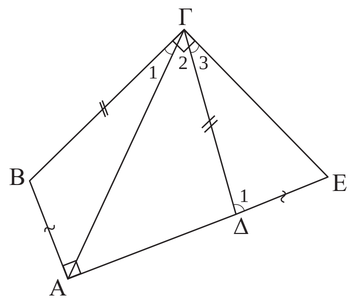
Άρα ΔΕ ύψος, οπότε $\Delta E\perp B\Gamma$.



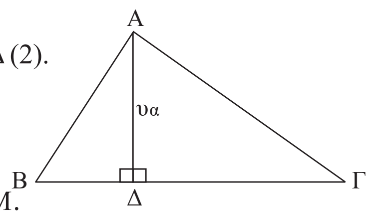
3. Φέρουμε $\Delta H \perp AB$, $\Delta K \perp A\Gamma$.
Είναι $\Delta H = \Delta H$ (ΑΣ διχοτόμος).
Επίσης είναι $\overset{\triangle}{BH\Delta} = \overset{\triangle}{Z\Delta K}$ ($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, $\Delta H = HK$, $\hat{B} = \hat{Z}$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).
Άρα $B\Delta = Z\Delta$.
Επομένως $\overset{\triangle}{BE\Delta} = \overset{\triangle}{Z\Delta\Gamma}$
(ορθογώνια, $B\Delta = Z\Delta$, $\hat{B} = \hat{Z}$),
άρα $BE = \Gamma Z$.



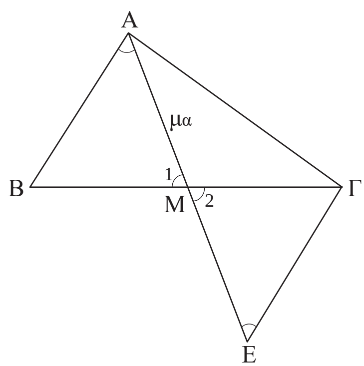
4. Επειδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360$,
και $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ είναι $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$.
Άρα $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$.
Επομένως $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$
($B\Gamma = \Gamma\Delta$, $AB = \Delta E$, $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$).
Οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_3$ (1).
Αλλά $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$\hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}E = 90^\circ$,
δηλαδή $A\Gamma \perp \Gamma E$.



5. i) Επειδή $AB < A\Gamma$ θα είναι $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ (1).
Αλλά $\hat{B} = 90^\circ - B\hat{A}\Delta$, $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \Gamma\hat{A}\Delta$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει
ότι: $90^\circ - B\hat{A}\Delta > 90^\circ - \Gamma\hat{A}\Delta$
ή $-B\hat{A}\Delta > -\Gamma\hat{A}\Delta$ ή $B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta$.



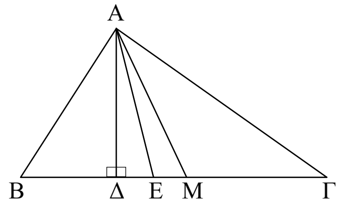
ii) Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά $ME = AM$.
Τότε $\overset{\triangle}{ABM} = \overset{\triangle}{ME\Gamma}$
($AM = ME$, $BM = M\Gamma$, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$).
Άρα $AB = \Gamma E$ και $B\hat{A}M = \hat{E}$.
Επομένως στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$
έχουμε $\Gamma E = AB < A\Gamma$,
οπότε $M\hat{A}\Gamma < \hat{E}$ ή $M\hat{A}\Gamma < B\hat{A}M$.



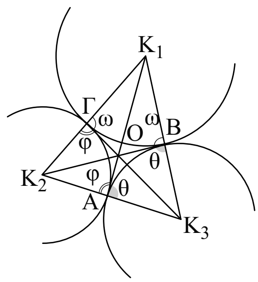
iii) Επειδή ΑΕ διχοτόμος θα είναι
$B\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma = \dfrac{\hat{A}}{2}$.
Από το i) έχουμε
$B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta$, άρα $B\hat{A}\Delta < \dfrac{\hat{A}}{2}$,
ενώ από το ii) έχουμε

$B\hat{A}M > M\hat{A}\Gamma$, άρα $B\hat{A}M > \dfrac{\hat{A}}{2}$.

Επομένως το ύψος και η διάμεσος βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου.



6. Αφού τα τρίγωνα $K_1\overset{\triangle}{B}\Gamma$, $K_2\overset{\triangle}{A}\Gamma$, $K_3\overset{\triangle}{A}B$ είναι ισοσκελή, οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $K_1\overset{\triangle}{K_2}K_3$ είναι μεσοκάθετες των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Άρα το έγκεντρο του τριγώνου $K_1\overset{\triangle}{K_2}K_3$ ταυτίζεται με το περίκεντρο Ο του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$, οπότε $OA = OB = O\Gamma$.



Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$OA \perp K_2K_3$, $OB \perp K_1K_3$, $O\Gamma \perp K_1K_2$.

Πράγματι έχουμε

$O\hat{B}K_1 = O\hat{\Gamma}K_1 = \hat{\omega}$, $O\hat{\Gamma}K_2 = O\hat{A}K_2 = \hat{\varphi}$ και $O\hat{A}K_3 = O\hat{B}K_3 = \hat{\theta}$

(από την ισότητα των αντίστοιχων τριγώνων).

Επειδή $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = \hat{\omega} + \hat{\theta} = \hat{\varphi} + \hat{\theta} = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = \hat{\theta} = 90^\circ$.

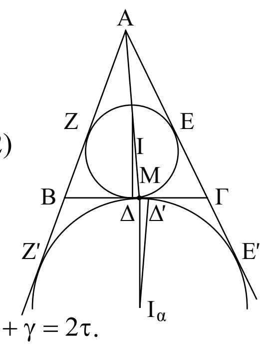
7. i) Έχουμε $AZ = AE = x$, $B\Delta = BZ = y$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E = \omega$.

Τότε $y + \omega = \alpha$, $x + \omega = \beta$, $x + y = \gamma$ (1).

Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$2x + 2y + 2\omega = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau \Leftrightarrow x + y + \omega = \tau$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $x = \tau - \alpha$, $y = \tau - \beta$ και $\omega = \tau - \gamma$.



ii) $AZ' + AE' = AB + BZ' + A\Gamma + \Gamma E' =$

$= AB + B\Delta' + A\Gamma + \Gamma\Delta' = AB + A\Gamma + B\Gamma = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.

Επειδή όμως $AZ' = AE'$, προκύπτει ότι $AZ' = AE' = \tau$.

iii) Έστω Μ το μέσο του ΒΓ. Τότε $MB = M\Gamma$ (3).

Αλλά $B\Delta = \tau - \beta$ και

$\Gamma\Delta' = \Gamma E' = AE' - A\Gamma = \tau - \beta$.

Άρα $B\Delta = \Gamma\Delta'$ (4)
Από (3), (4) προκύπτει ότι $M\Delta = M\Delta'$,
άρα τα τμήματα ΒΓ και $\Delta\Delta'$ έχουν κοινό μέσο.

iv) $ZZ' = AZ' - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$, $EE' = AE' - AE = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$ και
$\Delta\Delta' = B\Gamma - B\Delta - \Gamma\Delta' = \alpha - (\tau - \beta) - \Gamma E' = \alpha - \tau + \beta - (AE' - A\Gamma) =$
$= \alpha - \tau + \beta - (\tau - \beta) = \alpha + 2\beta - 2\tau = \alpha + 2\beta - (\alpha + \beta + \gamma) = \beta - \gamma$.

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

• Το κοινό κέντρο δυο ή περισσότερων παραλληλογράμμων διχοτομεί τις διαγωνίους των παραλληλογράμμων. Άρα οι φορείς τους είναι συντρέχουσες ευθείες.
(**Ασκήσεις:** § 5.1-5.2 Εμπέδωσης 3 και Σύνθετα 1)

• Για τις συντρέχουσες ευθείες λαμβάνουμε υπόψιν μας την παρατήρηση της § 5.7.
Αν τρεις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ είναι φορείς υψών, διαμέσων ή διχοτόμων τριγώνου συντρέχουν.
(**Ασκήσεις:** § 5.9 Σύνθετα 8 και § 5.11 Σύνθετα 1)
Σχόλιο: *Ισοδύναμη έκφραση είναι "οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται σε σημείο της $ε_3$".*

• Ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο αν μια διάμεσός του ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς.
(**Ασκήσεις:** § 5.11 Αποδεικτικές 1, 4)

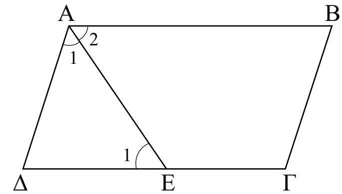
• Για να αποδείξουμε ότι μια παράσταση Α που εξαρτάται από μεταβλητό σημείο Μ παραμένει **σταθερή** θεωρούμε μια ή δυο χαρακτηριστικές (ή οριακές) θέσεις του σημείου Μ και βρίσκουμε την τιμή c της παράστασης Α. Αρκεί τότε, για την τυχαία θέση του Μ, να αποδείξουμε ότι $Α = c$.
(**Ασκήσεις:** § 5.3-5.5 Σύνθετα 3)

§ 5.1-5.2

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

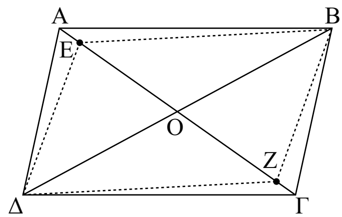
1. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 = \hat{E}_1\end{array}\right\} \hat{A}_1 = \hat{E}_1, \text{ άρα } \Delta E = A\Delta = B\Gamma.$$



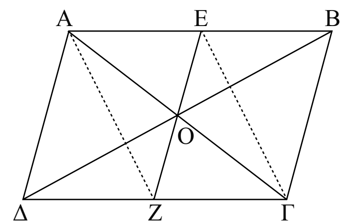
2. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}OE = OZ \\ OB = O\Delta\end{array}\right\} \text{ άρα } BE\Delta Z \text{ παραλληλόγραμμο.}$$



3. i) Έχουμε ΑΕ//=ΓΖ, άρα ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο.

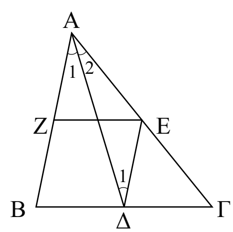
ii) Οι ΑΓ, ΒΔ ως διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται από το Ο. Οι ΕΖ, ΑΓ είναι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ, οπότε η ΕΖ διέρχεται από το μέσο Ο της ΑΓ. Άρα ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ συντρέχουν.



4. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1\end{array}\right\} \hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1, \text{ οπότε } AE = \Delta E = BZ$$

αφού το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

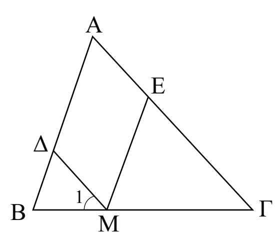
1. Έχουμε: ΜΕ = ΑΔ (1), αφού ΑΔΜΕ παραλληλόγραμμο.

Επίσης: $\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{\Gamma} \\ \hat{M}_1 = \hat{\Gamma}\end{array}\right\} \text{άρα } \hat{B} = \hat{M}_1,$

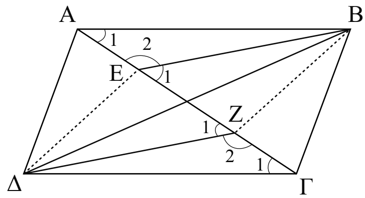
οπότε $M\Delta = \Delta B$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι:

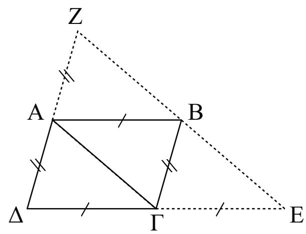
$M\Delta + ME = A\Delta + \Delta B = AB$.



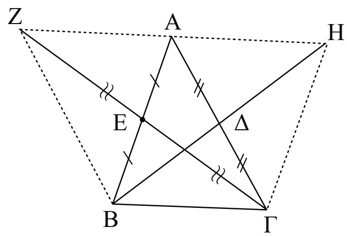
2. Έχουμε: $A\overset{\triangle}{B}E = \Delta\overset{\triangle}{Z}\Gamma$
($AB = \Delta\Gamma$, $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, $\hat{E}_2 = \hat{Z}_2$,
αφού $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$), άρα $BE = \Delta Z$.
Αλλά $BE // \Delta Z$, οπότε ΔEBZ
παραλληλόγραμμο. Άρα $\Delta E // BZ$.



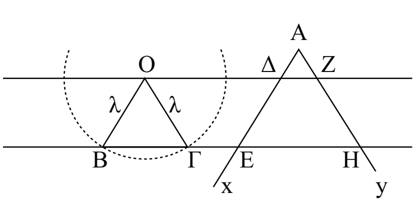
3. Φέρουμε ΑΓ. Τότε το ΑΖΒΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΖ//=ΒΓ), οπότε ΒΖ//ΑΓ (1).
Επίσης το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΒ//=ΓΕ), οπότε ΒΕ//ΑΓ (2).
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι Ζ, Β και Ε συνευθειακά (Ευκλείδειο αίτημα).



4. Έχουμε ΑΖΒΓ παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται), οπότε ΑΖ//=ΒΓ (1). Επίσης το ΑΗΓΒ παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται), οπότε ΑΗ//=ΒΓ (2).
Άρα:
i) $AH = AZ = B\Gamma$
ii) Ζ, Α, Η συνευθειακά (Ευκλείδειο αίτημα).



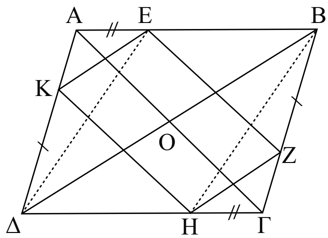
5. Με κέντρο τυχαίο σημείο Ο πάνω στη μία από τις παράλληλες, γράφουμε κύκλο με ακτίνα λ, που τέμνει την άλλη παράλληλο στα Β και Γ. Στη συνέχεια από το Α φέρουμε τις παράλληλες προς τις ΟΒ και ΟΓ ευθείες.
Επειδή τα τετράπλευρα ΟΔΕΒ και ΟΖΗΓ είναι παραλληλόγραμμα, είναι $\Delta E = OB = \lambda$ και $ZH = O\Gamma = \lambda$.



Σύνθετα Θέματα

1. i) Έχουμε:

$\overset{\triangle}{AEK} = \overset{\triangle}{\Gamma H Z}$ $(AE = \Gamma H,$
$AK = \Gamma Z,\ \hat{A} = \hat{\Gamma})$ και $\overset{\triangle}{BEZ} = \overset{\triangle}{\Delta K H}$
$(\Delta K = BZ,\ EB = \Delta H,\ \hat{B} = \hat{\Delta})$,
οπότε $KE = ZH$ και $EZ = KH$.
Άρα ΕΖΗΚ παραλληλόγραμμο.



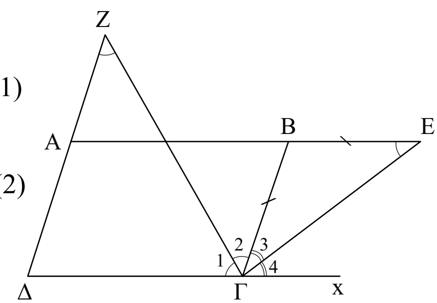
ii) Επειδή ΒΕ//=ΔΗ το ΔΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα

$$\left.\begin{aligned}&\text{ΑΓ, ΒΔ διαγώνιοι του ΑΒΓΔ}\\&\text{ΒΔ, ΕΗ διαγώνιοι του ΔΕΒΗ}\\&\text{ΕΗ, ΚΖ διαγώνιοι του ΕΖΗΚ}\end{aligned}\right\}\ \text{άρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν στο Ο.}$$

2. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{Z} = \hat{\Gamma}_1 \quad (\Delta Z = \Delta\Gamma)\\&\hat{Z} = \hat{\Gamma}_2\end{aligned}\right\}\ \text{άρα } \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \ \ (1)$$

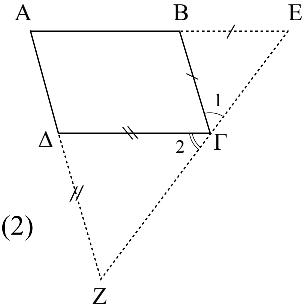
$$\left.\begin{aligned}&\hat{E} = \hat{\Gamma}_3 \quad (BE = B\Gamma)\\&\hat{E} = \hat{\Gamma}_4\end{aligned}\right\}\ \text{άρα } \hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4 \ \ (2)$$



Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $Z\Gamma \perp \Gamma E$ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών) άρα: $Z\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

3. Έχουμε $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{E} = \hat{\Gamma}_1 \quad (BE = B\Gamma)\\&\text{και } \hat{B} = \hat{E} + \hat{\Gamma}_1 \ (\text{εξωτ.})\end{aligned}\right\}\ \text{άρα } \hat{\Gamma}_1 = \hat{E} = \frac{\hat{B}}{2} \ \ (1)$$

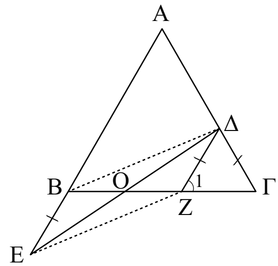


Επίσης στο $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma Z}$:

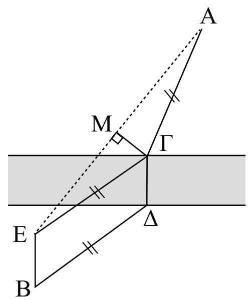
$$\left.\begin{aligned}&\hat{Z} = \hat{\Gamma}_2 \quad (\Delta\Gamma = \Delta Z)\\&\text{και } \hat{\Delta} = \hat{Z} + \hat{\Gamma}_2 \ (\text{εξωτ.})\end{aligned}\right\}\ \text{άρα } \hat{\Gamma}_2 = \hat{Z} = \frac{\hat{\Delta}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \ \ (2)$$

Άρα: $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$,
οπότε τα Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

4. Φέρουμε ΔΖ//ΑΒ.
Τότε $\hat{Z}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα $ΔΖ = ΔΓ = ΒΕ$.
Επομένως ΔΖ//=ΒΕ, οπότε το ΒΔΖΕ παραλληλόγραμμο. Άρα Ο μέσο ΔΕ.



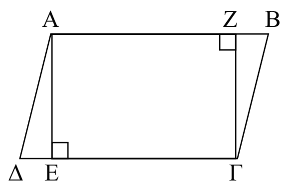
5. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα είναι λυμένο και έστω ΓΔ η θέση της γέφυρας και ΑΓ = ΒΔ, όπου Α και Β τα δύο χωριά. Εάν φέρουμε μια βοηθητική ευθεία ΒΕ, παράλληλη και ίση προς την ΓΔ, παρατηρούμε ότι το σημείο Γ προσδιορίζεται από την κάθετη ΓΜ στο μέσο Μ της ΑΕ (μεσοκάθετος).
Πράγματι το ΓΔΒΕ είναι παραλληλόγραμμο (ΓΔ//= ΒΕ) και επομένως ΒΔ = ΕΓ = ΑΓ.



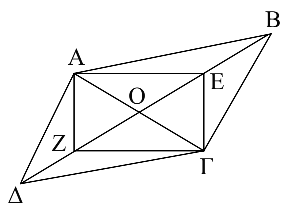
§ 5.3-5.5

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

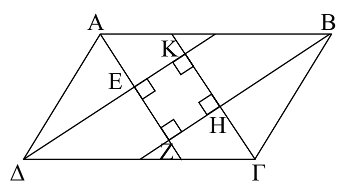
1. Έχουμε ΑΕ//=ΓΖ, οπότε το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\hat{E} = 90^\circ$ το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.



2. Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Επειδή
$$EZ = OE + OZ = \frac{OB}{2} + \frac{O\Delta}{2} = \frac{\Delta B}{2} = A\Gamma$$
το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.



3. Έχουμε $AE \perp \Delta E$, $BH \perp \Gamma H$ και $AZ \perp BZ$ γιατί οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται κάθετα (εφαρ. § 4.4). Άρα $\hat{E} = \hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, οπότε το ΕΖΗΚ είναι ορθογώνιο.



4. Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Τότε

$A\overset{\triangle}{\Delta}E = \Delta\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ $(\hat{A} = \hat{\Gamma},\ \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ,$

$A\Delta = \Delta\Gamma)$.

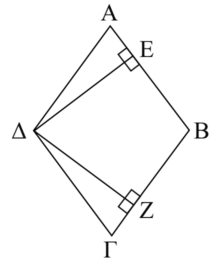
Άρα $\Delta E = \Delta Z$.

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και $\Delta E = \Delta Z$.

Τότε $A\overset{\triangle}{\Delta}E = \Delta\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ $(\hat{A} = \hat{\Gamma}, \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ,$

$\Delta E = \Delta Z)$.

Άρα $A\Delta = \Delta\Gamma$, οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



5. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} EZ \perp B\Delta \\ EZ = B\Delta \\ \text{Ο μέσο } EZ,\ \Delta B \end{array}\right\} \text{Άρα το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.}$$

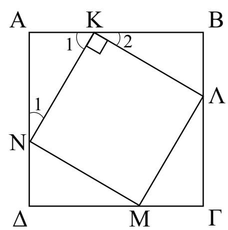
6. Έχουμε $A\overset{\triangle}{K}N = B\overset{\triangle}{K}\Lambda = M\overset{\triangle}{\Gamma}\Lambda = M\overset{\triangle}{\Delta}N$,

οπότε $K\Lambda = \Lambda M = MN = NK$ (1)

Επίσης $\hat{K}_2 = \hat{N}_1$, οπότε

$\hat{K}_1 + \hat{K}_2 = \hat{K}_1 + \hat{N}_1 = 90^\circ$. Άρα $\hat{K} = 90^\circ$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

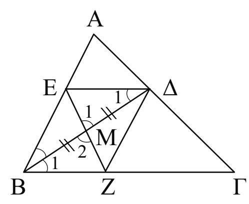


Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έχουμε $\Delta\overset{\triangle}{E}M = M\overset{\triangle}{B}Z$ $(BM = M\Delta,$

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2,\ \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1)$.

Άρα $\Delta E = BZ$. Αλλά $\Delta E // BZ$, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$ το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.



2. i) $A\overset{\triangle}{B}Z = A\overset{\triangle}{\Delta}E$ $(AE = BZ,\ AB = A\Delta,$

$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ)$.

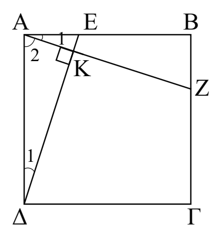
Άρα $AZ = \Delta E$.

ii) Έχουμε

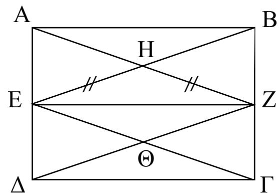
$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$, οπότε

$\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$, οπότε

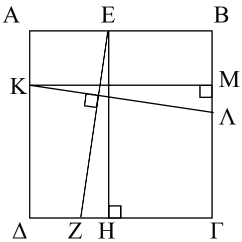
$\hat{K} = 90^\circ$ (στο τριγ. $A\overset{\triangle}{\Delta}K$). Άρα $AZ \perp \Delta E$.



3. Έχουμε ΕΒΖΔ παραλληλόγραμμο (ΒΖ//=ΔΕ), οπότε ΒΕ//=ΔΖ. Άρα ΕΗ//=ΖΘ και ΕΗ = ΗΖ (αφού ΑΒΖΕ, ΔΓΖΕ ορθογώνια). Επομένως το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.

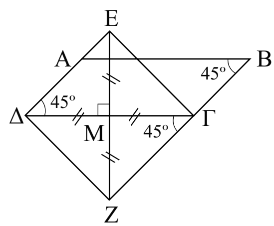


4. Έστω $ΚΛ \perp ΕΖ$.
Φέρουμε $ΕΗ \perp ΔΓ$ και $ΚΜ \perp ΒΓ$.
Τότε $ΚΜ =\perp ΕΗ$.
Άρα $Ε\overset{\triangle}{Ζ}Η = Κ\overset{\triangle}{Λ}Μ$ ($\hat{Η} = \hat{Μ} = 90^\circ$,
$ΚΜ = ΕΗ$, $\hat{Κ} = \hat{Ε}$ ως οξείες με κάθετες πλευρές).
Επομένως $ΕΖ = ΚΛ$.

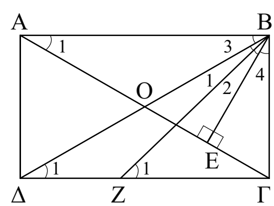


Σύνθετα Θέματα

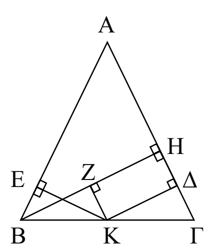
1. Έχουμε $Μ\overset{\triangle}{Ε}Δ = Μ\overset{\triangle}{Ζ}Γ$ ($\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2 = 90^\circ$,
$ΔΜ = ΜΓ$, $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 45^\circ$),
οπότε $ΔΕ = ΓΖ$.
Αλλά ΔΕ//ΓΖ, οπότε το ΔΕΓΖ
είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή $ΕΖ \perp ΔΓ$ και $ΔΜ = ΜΕ$ ($\hat{Δ} = 45^\circ$),
οπότε $ΕΖ = ΔΓ$ το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.



2. Έχουμε $\hat{Α}_1 = \hat{Β}_3 = \hat{Δ}_1$ (1) (αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο) και $\hat{Α}_1 = \hat{Β}_4$ (2) (οξείες με κάθετες πλευρές). Επομένως $\hat{Ζ}_1 = \hat{Δ}_1 + \hat{Β}_1$ (ως εξωτερική) $\overset{(1),\,(2)}{=} \hat{Β}_4 + \hat{Β}_1 = \hat{Β}_4 + \hat{Β}_2$, οπότε
$\hat{Ζ}_1 = Γ\hat{Β}Ζ$. Άρα $ΒΓ = ΓΖ$.



3. i) Έστω Κ τυχαίο σημείο της βάσης, ΒΓ,
$ΚΔ \perp ΑΓ$, $ΚΕ \perp ΑΒ$.
Φέρουμε $ΚΖ \perp ΒΗ$. Τότε $ΚΔ = ΖΗ$
και $ΚΕ = ΒΖ$ (αφού $Β\overset{\triangle}{Ε}Κ = Β\overset{\triangle}{Ζ}Κ$
γιατί $\hat{Ζ} = \hat{Ε} = 90^\circ$, ΚΒ κοινή, $\hat{Β} = \hat{Γ} = Β\hat{Κ}Ζ$).
Άρα $ΚΔ + ΚΕ = ΖΗ + ΒΖ = ΒΗ =$ σταθερό.

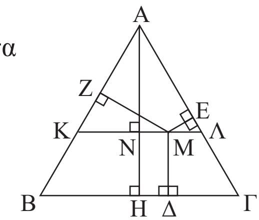


ii) Έστω Μ τυχαίο σημείο. Φέρουμε από το Μ παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα. Τότε από το i) έχουμε:

$\mathrm{MZ} + \mathrm{ME} = \mathrm{AN}$ (1) (αφού το τριγ. $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{K}}\Lambda$ είναι ισόπλευρο). Επίσης $\mathrm{M}\Delta = \mathrm{NH}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$\mathrm{M}\Delta + \mathrm{ME} + \mathrm{MZ} = \mathrm{AH} =$ σταθερό.

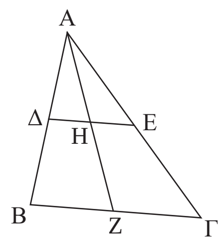


§ 5.6-5.9

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

1. Έχουμε $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma$: $\left.\begin{matrix}\Delta \text{ μέσο } \mathrm{AB}\\ \mathrm{E} \text{ μέσο } \mathrm{A}\Gamma\end{matrix}\right\}$ άρα $\Delta\mathrm{E} \,//\, \mathrm{B}\Gamma$

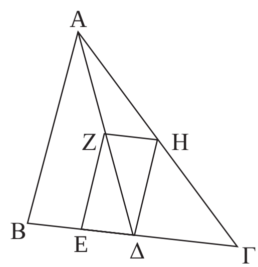
και $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$: $\left.\begin{matrix}\Delta \text{ μέσο } \mathrm{AB}\\ \Delta\mathrm{E}//\mathrm{B}\Gamma\end{matrix}\right\}$ άρα Η μέσο ΑΖ.



2. Έχουμε $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma$: $\left.\begin{matrix}\mathrm{H} \text{ μέσο } \mathrm{A}\Gamma\\ \Delta \text{ μέσο } \mathrm{B}\Gamma\end{matrix}\right\}$ άρα $\Delta\mathrm{H} \,//\!= \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ (1)

και $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Delta$: $\left.\begin{matrix}\mathrm{Z} \text{ μέσο } \mathrm{A}\Delta\\ \mathrm{E} \text{ μέσο } \mathrm{B}\Delta\end{matrix}\right\}$ άρα $\mathrm{ZE} \,//\!= \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ (2)

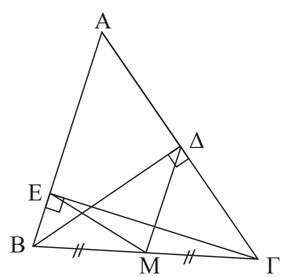
Από (1), (2) προκύπτει ότι ΔΗ//=ΖΕ, οπότε το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



3. Έχουμε $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔΜ διάμεσος): $\Delta\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$

και $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\Gamma$ ($\hat{\mathrm{E}} = 90^\circ$, ΕΜ διάμεσος): $\mathrm{EM} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$.

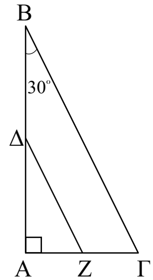
Άρα $\mathrm{M}\Delta = \mathrm{ME}$.

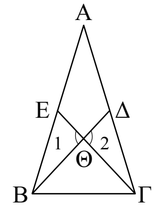


4. $A\overset{\triangle}{B}\Gamma\ (\hat{A}=90^\circ,\ \hat{B}=30^\circ)$: $A\Gamma=\dfrac{B\Gamma}{2}$ και

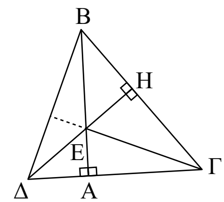
$A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ (Ε, Ζ μέσα ΑΒ, ΑΓ): $EZ=\dfrac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $EZ=A\Gamma$.

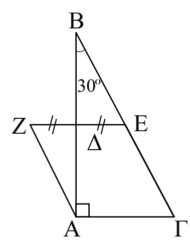




5. Έχουμε $B\overset{\triangle}{\Theta}E=\Gamma\overset{\triangle}{\Theta}\Delta$ $(\hat{\Theta}_1=\hat{\Theta}_2,\ B\Theta=\Theta\Gamma,$
$\Theta\Delta=\Theta E)$. Άρα $BE=\Gamma\Delta$, οπότε $\beta=\gamma$.

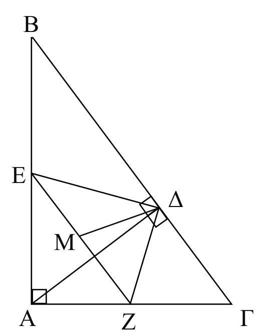


6. Στο τρίγωνο $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ τα ΒΑ και ΔΗ είναι ύψη, οπότε το Ε είναι το ορθόκεντρο. Άρα $\Gamma E\perp\Delta B$.



7. Έχουμε: $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΒΓ), άρα $\Delta E /\!/= \dfrac{A\Gamma}{2}$,
οπότε $ZE=2\Delta E$ //=ΑΓ. Επομένως το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά $\hat{B}=30^\circ$,
οπότε $A\Gamma=\dfrac{B\Gamma}{2}=E\Gamma$. Άρα το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. i) Έχουμε: $\Delta\overset{\triangle}{E}Z=A\overset{\triangle}{E}Z$

(ΕΖ κοινή, $\Delta E=\dfrac{AB}{2}=AE,\ \Delta Z=\dfrac{A\Gamma}{2}=AZ$).

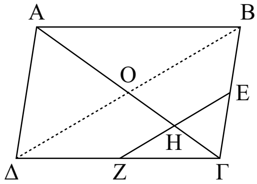
Άρα $E\hat{\Delta}Z=\hat{A}=90^\circ$.

ii) Έχουμε: $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ (Ε, Ζ μέσα ΑΒ, ΑΓ): $EZ=\dfrac{B\Gamma}{2}$ (1)

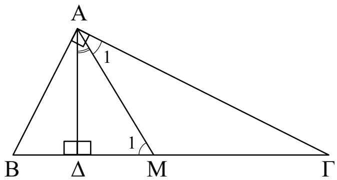
και $E\overset{\triangle}{\Delta}Z$ $(\hat{\Delta}=90^\circ$, ΔΜ διάμεσος): $\Delta M=\dfrac{EZ}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\Delta M=\dfrac{B\Gamma}{4}$.

2. Φέρουμε ΔΒ. Τότε έχουμε:
$B\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ (Ε, Ζ μέσα ΒΓ, ΓΔ): ΕΖ//ΒΔ,
οπότε Η μέσο του ΓΟ.
Άρα: $\Gamma H = \dfrac{\Gamma O}{2} = \dfrac{A\Gamma}{4}$.



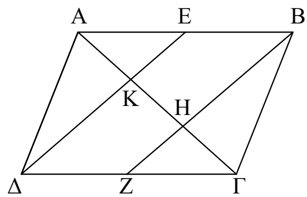
3. Στο τριγ. $M\overset{\triangle}{A}\Delta$ είναι: $M\hat{A}\Delta + \hat{M}_1 = 90^\circ$ (1)
Αλλά $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = 2\hat{\Gamma}$ (2)
(αφού $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$) και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (3)
Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι:
$M\hat{A}\Delta + 2\hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ ή $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



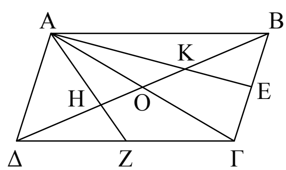
4. Έχουμε ΒΕ//=ΔΖ, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΔΕ//ΒΖ.
Επομένως στο τριγ.
$A\overset{\triangle}{B}H$: $\left.\begin{array}{r}\text{Ε μέσο ΑΒ}\\ \text{ΕΚ//ΒΗ}\end{array}\right\}$ άρα ΑΚ = ΚΗ (1)

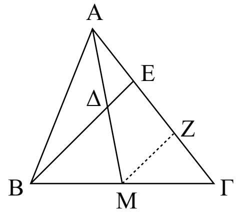
και στο τριγ. $\Gamma\overset{\triangle}{\Delta}K$: $\left.\begin{array}{r}\text{Ζ μέσο ΔΓ}\\ \text{ΖΗ//ΔΚ}\end{array}\right\}$ άρα ΓΗ = ΚΗ (2)

Από (1), (2) είναι ΑΚ = ΚΗ = ΓΗ.



5. Φέρουμε ΑΓ τότε: $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$: ΑΕ, ΒΟ διάμεσοι, οπότε Κ βαρύκεντρο. Άρα:
$BK = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{B\Delta}{2} = \dfrac{B\Delta}{3}$ (1) και
$A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$: ΑΖ, ΔΟ διάμεσοι, οπότε Η βαρύκεντρο.
Άρα: $\Delta H = \dfrac{2}{3}\Delta O = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{B\Delta}{2} = \dfrac{B\Delta}{3}$ (2)
Από τις (1), (2) θα είναι και $KH = \dfrac{B\Delta}{3}$,
οπότε $\Delta H = KH = BK = \dfrac{\Delta B}{3}$.



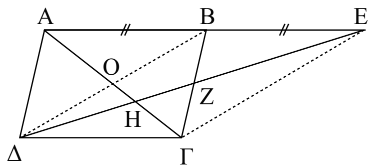


6. Έστω Ζ το μέσο ΕΓ. Τότε:

$B\overset{\triangle}{E}\Gamma$ (Μ, Ζ μέσα ΒΓ, ΕΓ): ΜΖ//ΒΕ (1)

και $A\overset{\triangle}{M}Z$ (Δ μέσο ΑΜ, ΔΕ//ΜΖ από (1)):

Ε μέσο ΑΖ, οπότε: $AE = EZ = \dfrac{E\Gamma}{2}$.

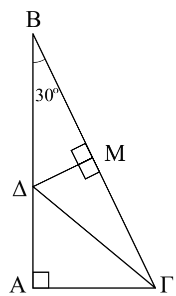


7. i) Έχουμε: $BE = AB = \Gamma\Delta$,
οπότε ΒΕ//=ΓΔ, άρα το ΒΕΓΔ
είναι παραλληλόγραμμο.
Επομένως $BZ = Z\Gamma$.

ii) Στο τριγ. $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$: ΓΟ, ΔΖ
διάμεσοι, οπότε Η βαρύκεντρο.

Άρα: $\Gamma H = \dfrac{2}{3}\Gamma O = \dfrac{2}{3}\dfrac{A\Gamma}{2}$ ή $\Gamma H = \dfrac{1}{3}A\Gamma$.

Επομένως $AH = \dfrac{2}{3}A\Gamma$. Άρα $\Gamma H = \dfrac{AH}{2}$.



8. i) Έχουμε $M\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma = \Gamma\overset{\triangle}{A}\Delta$ ($\hat{M} = \hat{A} = 90^\circ$,

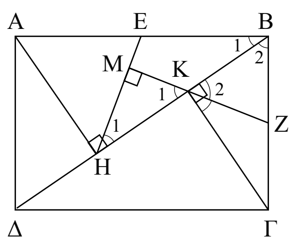
ΔΓ κοινή, $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$.

Άρα $M\Delta = A\Delta$.

ii) $M\overset{\triangle}{\Delta}B$ ($\hat{M} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$):

$M\Delta = \dfrac{\Delta B}{2} \Leftrightarrow \Delta B = 2M\Delta$. Αλλά $A\Delta = M\Delta$,

οπότε: $\Delta B + A\Delta = 3M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \dfrac{AB}{3}$.



9. Αρκεί $\hat{H}_1 + \hat{K}_1 = 90^\circ$ (στο τριγ. $M\overset{\triangle}{H}K$).

Έχουμε: $A\overset{\triangle}{H}B$: ($\hat{H} = 90^\circ$, ΗΕ διάμεσος)

Άρα $\hat{H}_1 = \hat{B}_1$ (1)

και $K\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ($\hat{K} = 90^\circ$, ΚΖ διάμεσος).

Άρα $\hat{K}_2 = \hat{K}_1 = \hat{B}_2$. (2)

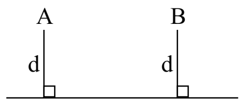
Επομένως $\hat{H}_1 + \hat{K}_1 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B} = 90^\circ$.

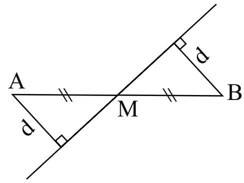
10. Παρατήρηση:

Δύο σημεία Α και Β ισαπέχουν:

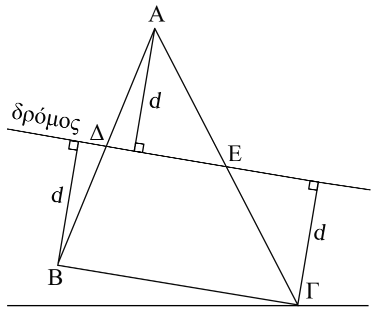
i) Από κάθε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ

ii) Από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του ΑΒ.





Έστω Α, Β και Γ τα τρία χωριά. Σύμφωνα με την παρατήρηση ο δρόμος πρέπει να συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$. Προφανώς υπάρχουν τρεις τέτοιοι δρόμοι.



Σύνθετα Θέματα

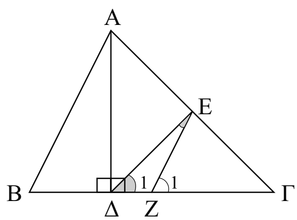
1. Έχουμε $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$: (Ε, Ζ μέσα ΑΓ, ΒΓ).

Άρα ΕΖ//ΑΒ, οπότε $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{Z}}_1$ (1)

και $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$: ($\hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔΕ διάμεσος).

Άρα ΔΕ = ΕΓ, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{Z}}_1$ (2)

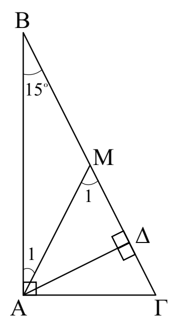
Αλλά $\hat{\mathrm{Z}}_1 = \hat{\Delta}_1 + \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} \overset{(1),\ (2)}{\Leftrightarrow} \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}$.



2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Τότε ΑΒ = ΒΜ, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}} = 15^\circ$. Άρα $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{B}} = 30^\circ$.

Επομένως στο τριγ. $\overset{\triangle}{\mathrm{MA\Delta}}$ είναι $\hat{\Delta} = 90^\circ$, $\hat{\mathrm{M}}_1 = 30^\circ$, άρα $\mathrm{A\Delta} = \frac{\mathrm{AM}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$, αφού $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

Αντίστροφα: Αν $\mathrm{A\Delta} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$, τότε επειδή $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ έχουμε $\mathrm{A\Delta} = \frac{\mathrm{AM}}{2}$, οπότε στο ορθογώνιο τριγ. $\overset{\triangle}{\mathrm{MA\Delta}}$ είναι $\hat{\mathrm{A}}_1 = 30^\circ$. Άρα $\hat{\mathrm{B}} = \frac{\hat{\mathrm{M}}_1}{2} = 15^\circ$.



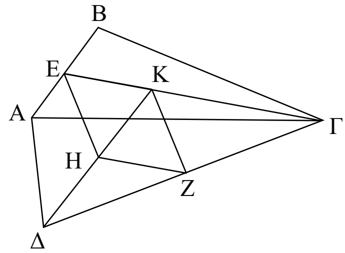
3. Έχουμε $\text{Κ}\overset{\triangle}{\text{Δ}}\text{Γ}$: (Ζ, Η μέσα ΔΓ, ΔΚ).

Άρα ΖΗ\\= $\dfrac{\text{ΚΓ}}{2}$ (1)

και Κ βαρύκεντρο του τριγ. $\text{Α}\overset{\triangle}{\text{Β}}\text{Γ}$,

άρα $\text{ΕΚ} = \dfrac{\text{ΚΓ}}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΖΗ\\=ΕΚ,
οπότε το ΕΚΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα ΕΗ//ΚΖ.



4. Επειδή $\text{ΒΔ} = \text{ΒΕ}$ έχουμε $\hat{\text{Ε}} = \hat{\text{Δ}}_1 = \hat{\text{Δ}}_2$.

Αλλά $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Ε}} + \hat{\text{Δ}}_1$,

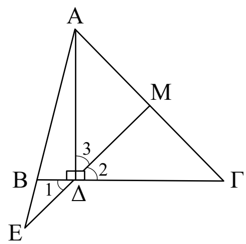
οπότε $\hat{\text{Β}} = 2\hat{\text{Δ}}_2 \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 2\hat{\text{Δ}}_2 \Leftrightarrow \hat{\text{Δ}}_2 = \hat{\Gamma}$.

Άρα $\text{ΔΜ} = \text{ΜΓ}$ (1).

Επίσης $\hat{\text{Δ}}_3 = \hat{\text{Α}}_1$ (συμπληρωματικές ίσων γωνιών),

οπότε $\text{ΔΜ} = \text{ΑΜ}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\text{ΑΜ} = \text{ΜΓ}$.



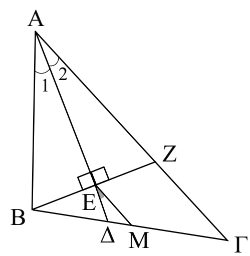
5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ.
Τότε το τριγ. $\text{Α}\overset{\triangle}{\text{Β}}\text{Ζ}$ είναι ισοσκελές
(ΑΕ διχοτόμος και ύψος), οπότε $\text{ΑΒ} = \text{ΑΖ}$ (1)
και Ε μέσο του ΒΖ (2). Άρα:

i) $\text{Β}\overset{\triangle}{\text{Ζ}}\text{Γ}$ (Ε μέσο ΒΖ, Μ μέσο ΒΓ):

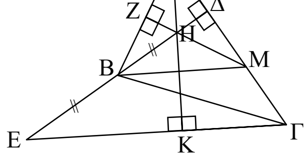
ΕΜ//= $\dfrac{\text{ΖΓ}}{2}$ (3). Επομένως ΕΜ//ΑΓ.

ii) $\text{ΕΜ} = \dfrac{\text{ΖΓ}}{2} = \dfrac{\text{ΑΓ} - \text{ΑΖ}}{2} = \dfrac{\text{ΑΓ} - \text{ΑΒ}}{2}$.

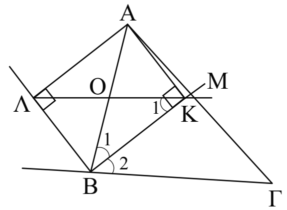
iii) $\text{Δ}\hat{\text{Ε}}\text{Μ} = \hat{\text{Α}}_2 = \dfrac{\hat{\text{Α}}}{2}$, αφού ΕΜ//ΑΓ.



6. Έστω $\text{ΜΖ} \perp \text{ΑΒ}$ που τέμνει την ΒΔ στο Μ.
Αρκεί $\text{ΑΗ} \perp \text{ΓΕ}$. Στο τριγ. $\text{Α}\overset{\triangle}{\text{Β}}\text{Μ}$ το Η είναι
το ορθόκεντρο, οπότε $\text{ΑΗ} \perp \text{ΒΜ}$ (1). Επίσης
στο τριγ. $\text{Δ}\overset{\triangle}{\text{Ε}}\text{Γ}$ τα Β και Μ είναι μέσα των ΔΕ
και ΔΓ, οπότε ΒΜ//ΓΕ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\text{ΑΗ} \perp \text{ΓΕ}$.

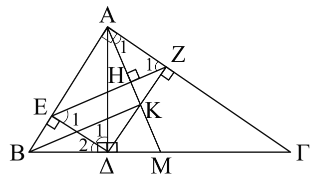


7. i) Έχουμε $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$ και $K\hat{B}\Lambda = 90^\circ$ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).
Άρα το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.



ii) Επειδή ΑΚΒΛ ορθογώνιο είναι: Ο μέσο ΑΒ και $\hat{K}_1 = \hat{B}_1 - \hat{B}_2$, οπότε ΟΚ//ΒΓ. Επομένως στο τριγ. $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ έχουμε Ο μέσο ΑΒ, ΟΚ//ΒΓ.
Άρα Μ μέσο ΑΓ.

8. i) $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$.
Άρα το ΑΕΔΖ είναι ορθογώνιο, οπότε
$A\Delta = EZ$.

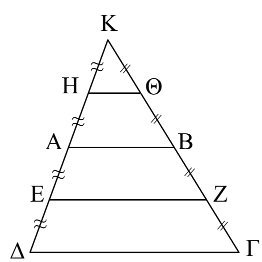


ii) Επειδή ΑΕΔΖ ορθογώνιο έχουμε
$\hat{Z}_1 = \hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$.
Αλλά $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (οξείες με κάθετες πλευρές),
οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{B}$ (1).
Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (2) $(AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma)$.
Από (1), (2) προκύπτει ότι
$\hat{A}_1 + \hat{Z}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$.
Άρα $\hat{H} = 90^\circ$, οπότε $AM \perp EZ$.

iii) Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ. Αρκεί ΒΚ//ΕΖ.
Έχουμε ΒΕ//ΚΖ (ως κάθετες στην ΑΓ) και $A\overset{\triangle}{K}Z = B\overset{\triangle}{E}\Delta$
$(\hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ,\ \Delta E = AZ,\ \hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2)$, οπότε $BE = KZ$. Άρα ΚΖ//=ΒΕ, οπότε το ΒΕΖΚ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς ΒΚ//ΕΖ.

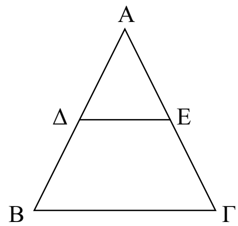
§ 5.10-5.11

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

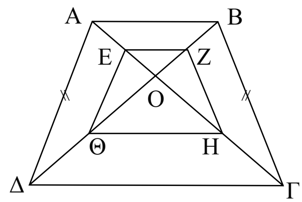


1. Έχουμε ΕΖ//ΑΒ (διάμεσος τραπεζίου) (1) και $K\overset{\triangle}{A}B$: (Η, Θ μέσα ΚΑ, ΚΒ).
Άρα ΗΘ//ΑΒ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι ΗΘ//ΑΒ//ΕΖ, οπότε το ΕΖΘΗ είναι τραπέζιο.

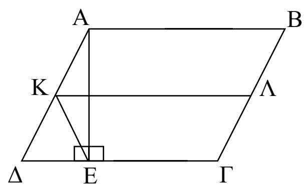
2. Έχουμε $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ).
Άρα ΔΕ//ΒΓ (1) και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (2) (ΑΒ = ΑΓ).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



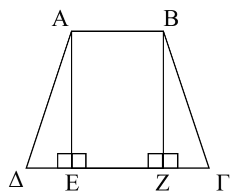
3. Έχουμε $O\overset{\triangle}{A}B$: (Ε, Ζ μέσα ΟΑ, ΟΒ).
Άρα ΕΖ//ΑΒ (1) $O\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$: (Θ, Η μέσα ΟΔ, ΟΓ).
Άρα ΘΗ//ΔΓ (2). Επειδή ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο είναι ΑΓ = ΒΔ,
οπότε $\dfrac{A\Gamma}{2}=\dfrac{B\Delta}{2}\Leftrightarrow EH=\Theta Z$ (3)
Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



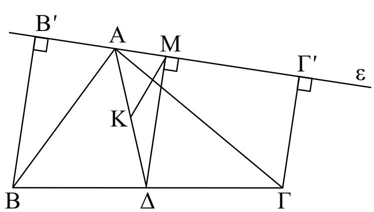
4. Έχουμε ΚΛ//ΑΒ//ΓΔ. Άρα ΚΛ//ΕΓ.
Επίσης $A\overset{\triangle}{E}\Delta$ ($\hat{E}=90^\circ$ ΕΚ διάμεσος).
Άρα $EK=\dfrac{A\Delta}{2}=\dfrac{B\Gamma}{2}=\Lambda\Gamma$.
Επομένως το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



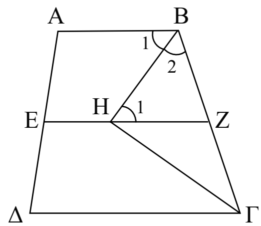
5. Έχουμε $A\overset{\triangle}{\Delta}E=B\overset{\triangle}{Z}\Gamma$ ($\hat{E}=\hat{Z}=90^\circ$,
ΑΕ = ΒΖ, ΑΔ = ΒΓ).
Άρα ΔΕ = ΓΖ (1)
Επίσης ΓΔ = ΔΕ + ΕΖ + ΖΓ = 2ΔΕ + ΕΖ = 2ΔΕ + ΑΒ.
Άρα $\Delta E=\Gamma Z=\dfrac{\Gamma\Delta-AB}{2}$.



6. Το τετράπλευρο ΒΒ′Γ′Γ είναι τραπέζιο, αφού ΒΒ′//ΓΓ′, ως κάθετες στην ε. Η ΜΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε ΜΔ// ΒΒ′//ΓΓ′.
Άρα $\Delta M\perp\varepsilon$. Επομένως η ΜΚ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $A\overset{\triangle}{M}\Delta$, οπότε $MK=\dfrac{A\Delta}{2}$.



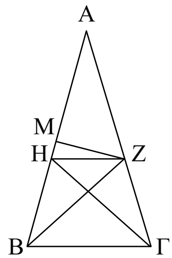
Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} AB//EZ, \text{ οπότε } \hat{B}_1 = \hat{H}_1 \\ \text{Αλλά } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array}\right\} \text{Άρα } \hat{H}_1 = \hat{B}_2, \text{ οπότε:}$$

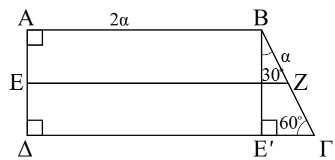
$HZ = BZ = Z\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα $B\hat{H}\Gamma = 90^\circ$.



2. Επειδή ΖΗ//ΒΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ το ΖΗΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $\Gamma H = BZ$.

Αλλά $BZ = AZ$ (ΖΜ μεσοκάθετος ΑΒ).

Άρα $\Gamma H = AZ$.

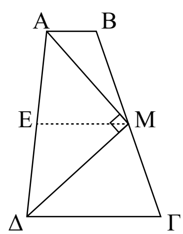


3. Φέρουμε $BE' \perp \Delta\Gamma$. Τότε στο τριγ. $B\overset{\triangle}{E'}\Gamma$ ($\hat{E}' = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$).

Άρα $E'\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

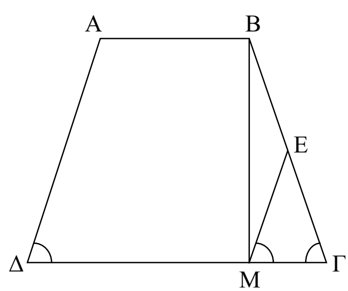
Επομένως $\Delta\Gamma = \Delta E' + E'\Gamma = AB + E'\Gamma = 2\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$.

Άρα $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{2\alpha + \dfrac{5\alpha}{2}}{2} = \dfrac{9\alpha}{4}$.



4. Έστω Ε μέσο ΑΔ. Τότε $ME = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{A\Delta}{2}$, οπότε

$A\hat{M}\Delta = 90^\circ$ (αφού ΜΕ διάμεσος στο τριγ. $A\overset{\triangle}{M}\Delta$).



5. Έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές)

και $\hat{\Delta} = \hat{M}_1$ (ΑΔ//ΜΕ)

Άρα $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma}$,

οπότε $ME = E\Gamma = BE = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $B\hat{M}\Gamma = 90^\circ$ ή $BM \perp \Delta\Gamma$.

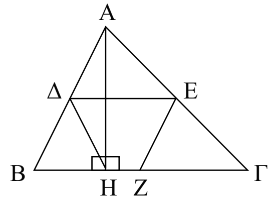
6. Έχουμε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ)

Άρα ΔΕ//ΒΓ, οπότε ΔΕ//ΗΖ (1)

Επίσης $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (Ε, Ζ μέσα ΑΓ, ΒΓ).

Άρα $EZ = \frac{AB}{2}$ (2) και $\overset{\triangle}{AHB}$

$(\hat{H} = 90^\circ$, ΗΔ διάμεσος). Άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (3)



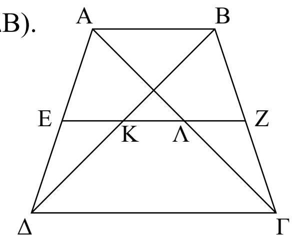
Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

7. Έστω $\Gamma\Delta = 2AB$. Έχουμε $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ (Ε, Κ μέσα ΑΔ, ΔΒ).

Άρα $EK = \frac{AB}{2}$ (1) και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (Ζ, Λ μέσα ΒΓ, ΑΓ).

Άρα $\Lambda Z = \frac{AB}{2}$ (2)

Επίσης $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{2AB - AB}{2} = \frac{AB}{2}$ (3)



Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $EK = K\Lambda = \Lambda Z$.

8. Έχουμε ΚΛ//ΔΓ//ΑΒ και

$$K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB,$$

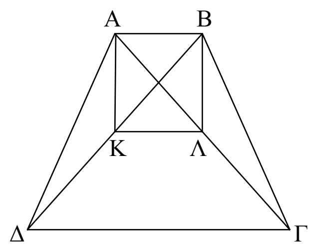
οπότε ΚΛ//=ΑΒ.

Άρα το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Αν το ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο,

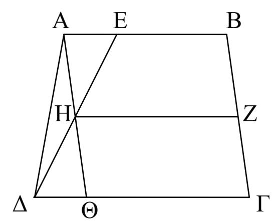
τότε $BK = A\Lambda$, οπότε $B\Delta = A\Gamma$.

Άρα το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι *ισοσκελές* τραπέζιο.



9. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ η ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε

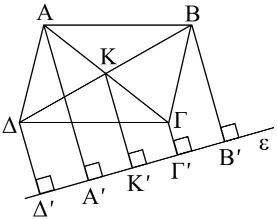
$$ZH = \frac{EB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{\frac{AB}{2} + \frac{3}{2}AB}{2} = AB.$$



Άρα ΗΖ//=ΑΒ, οπότε το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης $\Theta\Delta = \Delta\Gamma - \Theta\Gamma = \Delta\Gamma - AB$, αφού το ΑΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο.

10. Το $ΑΓΓ'Α'$ είναι τραπέζιο με διάμεσο $ΚΚ'$. Άρα



$$ΚΚ' = \frac{ΑΑ' + ΓΓ'}{2} \Leftrightarrow ΑΑ' + ΓΓ' = 2ΚΚ' \quad (1)$$

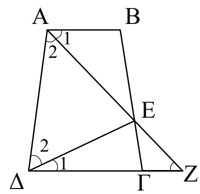
Επίσης το $ΒΒ'Δ'Δ$ είναι τραπέζιο με διάμεσο $ΚΚ'$. Άρα

$$ΚΚ' = \frac{ΒΒ' + ΔΔ'}{2} \Leftrightarrow ΒΒ' + ΔΔ' = 2ΚΚ' \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' + ΔΔ' = 4ΚΚ'$.

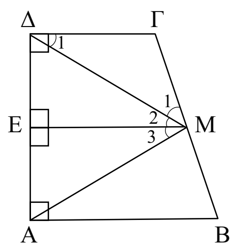
Σύνθετα Θέματα

1. Έστω ότι η διχοτόμος της $\hat{Α}$ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Αρκεί ΔΕ διχοτόμος της $\hat{Δ}$. Αν Ζ το σημείο τομής των ΑΕ, ΔΓ τότε $\hat{Α}_1 = \hat{Ζ}$, οπότε $\hat{Α}_2 = \hat{Ζ}$.
Άρα $ΑΔ = ΔΖ \Leftrightarrow ΑΔ = ΔΓ + ΓΖ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ΑΒ + ΓΔ = ΔΓ + ΓΖ \Leftrightarrow ΑΒ = ΓΖ$.



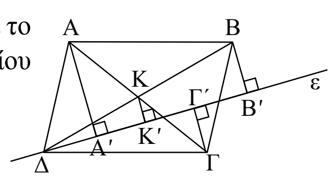
Επομένως το ΑΒΖΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΒ//=ΓΖ).
Άρα Ε μέσο ΑΖ, οπότε η διάμεσος ΔΕ του ισοσκελούς τριγ. $Α\overset{\triangle}{Δ}Ζ$ είναι και διχοτόμος της $\hat{Δ}$.

2. Φέρουμε $ΜΕ \perp ΑΔ$, οπότε ΜΕ διάμεσος.



Τότε $\hat{Μ}_1 = \hat{Δ}_1 \left(ΓΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΓΔ \right)$
$\hat{Μ}_2 = \hat{Δ}_1$ (εντός εναλλάξ)
$\hat{Μ}_3 = \hat{Μ}_2$ (ΜΕ ύψος και διάμεσος).
Άρα: $Α\hat{Μ}Γ = 3\hat{Μ}_3 = 3Μ\hat{Α}Β$,
αφού $\hat{Μ}_3 = Μ\hat{Α}Β$.

3. Έστω Κ το κέντρο του ΑΒΓΔ και $ΚΚ' \perp ε$. Τότε το ΚΚ΄ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου $ΑΑ'ΓΓ'$, οπότε $ΚΚ' = \frac{ΑΑ' - ΓΓ'}{2}$ (1)

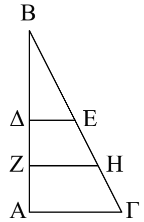


Επίσης στο τριγ. $Δ\overset{\triangle}{Β}Β'$ είναι $ΚΚ' = \frac{ΒΒ'}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $ΑΑ' - ΓΓ' = ΒΒ'$.

4. Έχουμε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΒΓ). Άρα $\Delta E // = \frac{A\Gamma}{2}$ (1)

Επομένως το ΔΕΓΑ είναι τραπέζιο με διάμεσο τη ΖΗ.



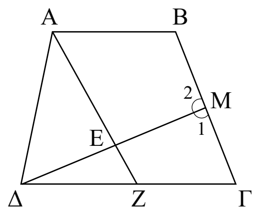
Άρα: $ZH = \frac{\Delta E + A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2ZH = \frac{3}{2}A\Gamma$.

Αλλά $ZH = \frac{3}{8}B\Gamma$, οπότε $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $\hat{B} = 30^\circ$.

5. i) Επειδή $\Delta M = \Delta\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = \hat{M}_1$, οπότε $\hat{B} = \hat{M}_2$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών). Άρα το ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $AM = BE$.

ii) Αν η ΑΕ τέμνει την ΔΓ στο Ζ τότε $AZ = B\Gamma$ (1) (αφού ΑΒΓΖ παραλληλόγραμμο) και

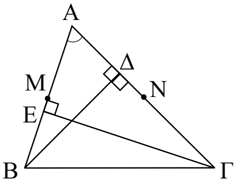


$$EZ = \frac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow EZ = \frac{B\Gamma}{4} \quad (2)$$

Άρα $AE = AZ - EZ = B\Gamma - \frac{B\Gamma}{4} = \frac{3}{4}B\Gamma$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω $AB < A\Gamma$. Τότε:



$A\overset{\triangle}{B}\Delta$: $(\hat{\Delta} = 90^\circ,\ \hat{A} = 60^\circ,\ \hat{B} = 30^\circ)$.

Άρα $A\Delta = \dfrac{AB}{2} < \dfrac{A\Gamma}{2}$ (1) και

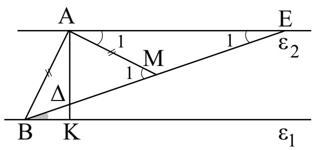
$A\overset{\triangle}{\Gamma}E$: $(\hat{E} = 90^\circ, \hat{A} = 60^\circ,\ \hat{\Gamma} = 30^\circ)$.

Άρα $AE = \dfrac{A\Gamma}{2} > \dfrac{AB}{2}$ (2).

Επομένως $ME = AE - AM = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2}$

και $N\Delta = AN - A\Delta = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2}$. Άρα $ME = N\Delta$.

2. Έχουμε $E\hat{B}K = \hat{E}_1$ (1)



Έστω Μ το μέσο του ΔΕ.

Τότε: $AM = \dfrac{\Delta E}{2} = AB$.

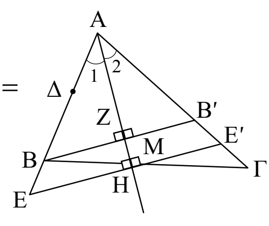
Άρα $A\hat{B}M = \hat{M}_1$ (2)

Αλλά $\hat{M}_1 = \hat{E}_1 + \hat{A}_1 = 2\hat{E}_1$ ($AM = ME$) (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $A\hat{B}M = 2E\hat{B}K$.

Άρα $A\hat{B}K = A\hat{B}M + E\hat{B}K = 3E\hat{B}K$.

3. α) Έχουμε $AB = AB'$ και $AE = AE'$ (1) (γιατί τα τριγ. $A\overset{\triangle}{B}B'$ και $A\overset{\triangle}{E}E'$ είναι ισοσκελή). Άρα:



$B'E' = AE' - AB' = AE - AB = A\Delta + \Delta E - AB =$

$= \dfrac{AB}{2} + \dfrac{A\Gamma}{2} - AB = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.

β) Έχουμε:

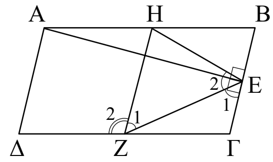
$\Gamma E' = A\Gamma - AE' = A\Gamma - AE = A\Gamma - A\Delta - \Delta E =$

$= A\Gamma - \dfrac{AB}{2} - \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.

Άρα $B'E' = \Gamma E'$. Επομένως στο τριγ. $\Gamma\overset{\triangle}{B}B'$ (E' μέσο $\Gamma B'$, $EE'//BB'$). Άρα Μ μέσο ΒΓ.

4. α) Επειδή ΗΒ//=ΖΓ και $HB = \frac{AB}{2} = B\Gamma$ το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος.

β) Έχουμε $\hat{Z}_1 = \hat{E}_1$ (1).



Επίσης στο τριγ. $A\overset{\triangle}{E}B$ ($\hat{E} = 90^\circ$, ΕΗ διάμεσος).

Άρα $EH = \frac{AB}{2} = HZ$, οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{E}_2$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι ΖΕ διχοτόμος της $H\hat{E}\Gamma$.

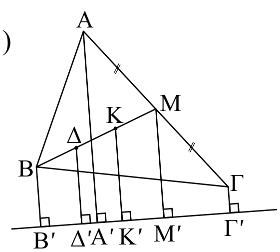
γ) Επειδή ΕΓ//ΗΖ και $HE = \frac{AB}{2} = Z\Gamma$ το ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Επειδή ΗΕΓΖ ισοσκελές τραπέζιο είναι $\hat{\Gamma} = H\hat{E}\Gamma = 2Z\hat{E}\Gamma$ (3)

Επίσης $\hat{Z}_1 = Z\hat{E}\Gamma$ (4) και $\hat{Z}_2 = \hat{\Gamma}$ (5)

Από (3), (4), (5) προκύπτει ότι $\Delta\hat{Z}E = \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 = 3Z\hat{E}\Gamma$.

5. Στο τραπέζιο ΑΓΓ′Α′ η ΜΜ′ είναι διάμεσος.



Άρα $MM' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \Leftrightarrow AA' + \Gamma\Gamma' = 2MM'$ (1)

Έστω Δ το μέσο του ΒΚ.

Τότε $B\Delta = \Delta K = KM$.

Επομένως στο τραπέζιο ΒΚΚ′Β′

η ΔΔ′ είναι διάμεσος.

Άρα $\Delta\Delta' = \frac{BB' + KK'}{2} \Leftrightarrow BB' + KK' = 2\Delta\Delta'$ (2)

Επίσης στο τραπέζιο ΔΜΜ′Δ′ η ΚΚ′ είναι διάμεσος.

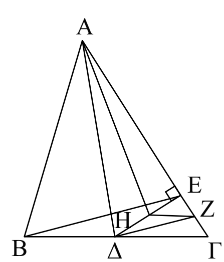
Άρα $KK' = \frac{MM' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow MM' + \Delta\Delta' = 2KK' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2MM' + 2\Delta\Delta' = 4KK'$ (3)

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3KK'$.

6. α) Έχουμε $B\overset{\triangle}{E}\Gamma$ (Δ, Ζ μέσα ΒΓ, ΕΓ). Άρα ΔΖ//ΒΕ

β) $\Delta\overset{\triangle}{E}\Gamma$ (Ζ, Η μέσα ΕΓ, ΔΕ).



Άρα ΖΗ//ΔΓ,

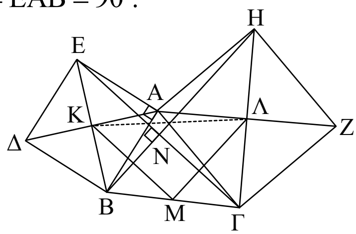
οπότε $ZH \perp A\Delta$ (αφού $A\Delta \perp \Delta\Gamma$).

Επομένως το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγ. $A\overset{\triangle}{\Delta}Z$. Άρα $AH \perp \Delta Z$, οπότε $AH \perp BE$ (αφού ΒΕ//ΔΖ).

7. Έχουμε $A\overset{\triangle}{B}H = A\overset{\triangle}{\Gamma}E$ $(AB = AE,\ A\Gamma = AH,\ E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}H = 90^\circ + \hat{A})$.

Άρα $E\Gamma = BH$ (1) και $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$, οπότε $\hat{N} = E\hat{A}B = 90^\circ$.

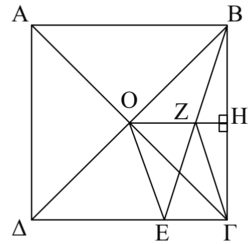
Άρα $E\Gamma \perp BH$ (2)



Αλλά $KM // = \dfrac{E\Gamma}{2}$ (3) (τριγ. $E\overset{\triangle}{B}\Gamma$)

και $M\Lambda // = \dfrac{BH}{2}$ (4) (τριγ. $H\overset{\triangle}{\Gamma}B$).

Από τις (1), (2), (3), (4) προκύπτει ότι $KM \perp = M\Lambda$.



8. α) Έχουμε M μέσο OΓ, H μέσο BΓ και $OH = \dfrac{\alpha}{2}$.

Στο τριγ. $B\overset{\triangle}{O}\Gamma$ το Z είναι το βαρύκεντρο, οπότε

$$OZ = \frac{2}{3}OH = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{3}.$$

β) Είναι $ZH // = \dfrac{E\Gamma}{2}$ (τριγ. $B\overset{\triangle}{E}\Gamma$) και

$ZH = \dfrac{OZ}{2}$ (Z βαρυκ.).

Άρα OZ//=EΓ, οπότε το OZΓE είναι παραλληλόγραμμο.

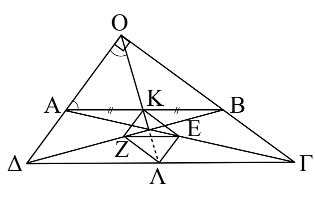
9. i) Έστω K μέσο AB και Λ το σημείο τομής των OK και ΔΓ.

Αρκεί Λ μέσο ΔΓ.

Έχουμε $O\hat{A}B$ $(\hat{O} = 90^\circ$, OK διάμεσος).

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$. Αλλά $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$, οπότε $\hat{O}_1 = \hat{\Delta}$ ή $O\Lambda = \Delta\Lambda$. Όμοια $O\Lambda = \Lambda\Gamma$.

Άρα το Λ είναι το μέσο του ΔΓ.



ii) $K\Lambda = O\Lambda - OK = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2}$

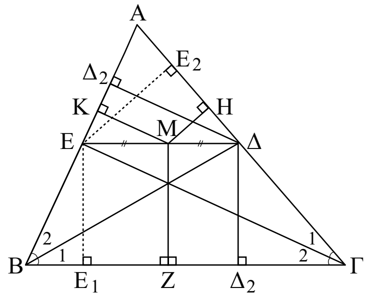
$\left(\text{αφού } OK = \dfrac{AB}{2},\ O\Lambda = \dfrac{\Delta\Gamma}{2}\right)$.

iii) Το KEΛZ είναι παραλληλόγραμμο γιατί

$KZ // = \Lambda E // = \dfrac{A\Delta}{2}$ (από το τριγ. $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$).

Επειδή $ZE = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2} = K\Lambda$, το KEΛZ είναι ορθογώνιο.

10. Φέρουμε:



$\left.\begin{array}{l} \Delta\Delta_1 \perp B\Gamma \\ \Delta\Delta_2 \perp AB \end{array}\right\}$ οπότε $\Delta\Delta_1 = \Delta\Delta_2$ (1) και

$\left.\begin{array}{l} EE_1 \perp B\Gamma \\ EE_2 \perp A\Gamma \end{array}\right\}$ οπότε $EE_1 = EE_2$ (2)

Στο τραπέζιο $\Delta EE_1\Delta_1$ η MZ είναι διάμεσος, οπότε

$$MZ = \frac{\Delta\Delta_1 + EE_1}{2} \overset{(1),\,(2)}{=} \frac{\Delta\Delta_2 + EE_2}{2} =$$

$$= \frac{\Delta\Delta_2}{2} + \frac{EE_2}{2} = MK + MH$$

(στα τρίγωνα $\Delta\hat{E}\Delta_2$ και $\Delta\hat{E}E_2$ αφού M μέσο ΔE).

6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Αν μας ενδιαφέρει γωνία που σχετίζεται με δυο εφαπτόμενους κύκλους, συνήθως φέρουμε την κοινή εφαπτομένη (εσωτερική ή εξωτερική).
  (**Ασκήσεις:** § 6.4 Σύνθετα 1, 2)

- Όμοια, στους τεμνόμενους κύκλους, συνήθως φέρουμε την κοινή χορδή.
  (**Ασκήσεις:** § 6.6 Αποδεικτικές 1)

- Για να διέρχεται ένας κύκλος (Α, Β, Γ) από ένα σημείο Δ αρκεί τα Α, Β, Γ και Δ να είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.
  (**Ασκήσεις:** Γενικές 6, 8)

§ 6.1-6.4

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

1. Για το 1ο σχήμα έχουμε:

$2x+3x+4x=360^\circ \Leftrightarrow 9x=360^\circ \Leftrightarrow x=40^\circ$.

Η y είναι εγγεγραμμένη γωνία και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{Β\Gamma}=4x$, οπότε $y=2x=2\cdot 40^\circ=80^\circ$.

Για το 2ο σχήμα έχουμε $x=Α\hat{Β}\Delta=50^\circ$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Για τον ίδιο λόγο $\Delta\hat{Α}\Gamma=\Delta\hat{Β}\Gamma=35^\circ$, οπότε από το τρίγωνο $Α\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ βρίσκουμε: $y=180^\circ-x-35^\circ=105^\circ$.

2. Η γωνία $\hat{Α}$ είναι γωνία τεμνουσών, οπότε (§ 6.3) έχουμε:

$$\hat{Α}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}-\overset{\frown}{ΒΕ})\Leftrightarrow 40^\circ=\frac{1}{2}(200^\circ-\overset{\frown}{ΒΕ})\Leftrightarrow \overset{\frown}{ΒΕ}=120^\circ.$$

3. Για το 1ο σχήμα έχουμε: $x=\hat{Α}=40^\circ$, γιατί η x είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης. Τότε $\overset{\frown}{Β\Gamma}=80^\circ$.

Επειδή ΑΒ = ΑΓ θα είναι $\overset{\frown}{ΑΒ}=\overset{\frown}{Α\Gamma}=y$, οπότε από την:

$2y+\overset{\frown}{Β\Gamma}=360^\circ \Leftrightarrow 2y+80^\circ=360^\circ \Leftrightarrow y=140^\circ$.

Για το 2ο σχήμα έχουμε: Η $\hat{Α}$ είναι γωνία τέμνουσας και εφαπτομένης, επομένως σύμφωνα με την § 6.3 θα είναι:

$$\hat{Α}=\frac{1}{2}(y-x)\Leftrightarrow y-x=120^\circ \ (1).$$

Για τη γωνία $\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{\Gamma}=\Gamma\hat{Β}\Delta=\frac{\overset{\frown}{(\Gamma\Delta)}}{2}=\frac{1}{2}(360^\circ-x-y)\Leftrightarrow 50^\circ=\frac{1}{2}(360^\circ-x-y)\Leftrightarrow x+y=260^\circ \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $x=70^\circ$, $y=190^\circ$.

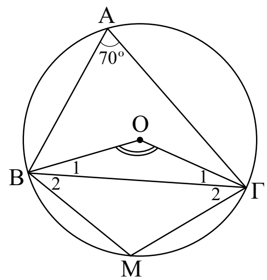
4. Από το σχήμα έχουμε:

$$\hat{Κ}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Delta\Gamma}+\overset{\frown}{ΒΕ})\Leftrightarrow 70^\circ=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Delta\Gamma}+\overset{\frown}{ΒΕ})\Leftrightarrow \overset{\frown}{\Delta\Gamma}+\overset{\frown}{ΒΕ}=140^\circ \ (1).$$

Επίσης: $\hat{Α}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}-\overset{\frown}{ΒΕ})\Leftrightarrow \overset{\frown}{\Delta\Gamma}-\overset{\frown}{ΒΕ}=50^\circ$ (2).

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}=95^\circ$, $\overset{\frown}{ΒΕ}=45^\circ$.

5. Έχουμε: $\hat{Α}=\frac{1}{2}\hat{Ο}$ ή $70^\circ=\frac{1}{2}\hat{Ο}$ ή $\hat{Ο}=140^\circ$.

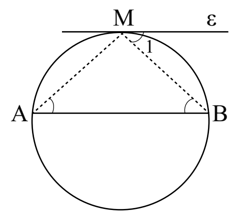


Επειδή ΟΒ = ΟΓ είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = x$,
οπότε $2x + \hat{O} = 180^\circ$ ή $x = 20^\circ$, δηλ.
$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 20^\circ$.
Επειδή $\hat{A} = 70^\circ$ θα είναι $\overset{\frown}{B M \Gamma} = 140^\circ$
και αφού Μ μέσο $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{M\Gamma} = 70^\circ$,
οπότε $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}70^\circ = 35^\circ$
και από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{BM\Gamma}$ βρίσκουμε ότι
$\hat{M} = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$.

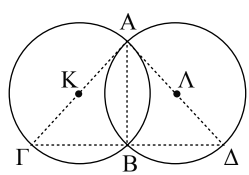
6. Από το σχήμα έχουμε $y = 2z$ (y εξωτερική γωνία τριγώνου) και $x = z$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Με τη βοήθεια αυτών η i) είναι σωστή.

7. Τα ζητούμενα καθίσματα είναι αυτά που βρίσκονται πάνω στο τόξο που γράφεται με χορδή το τμήμα που εκφράζει το πλάτος της σκηνής και δέχεται γωνία ίση με τη γωνία υπό την οποία φαίνεται η σκηνή από το κάθισμα Α.

Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. ***Ευθύ*****:** Έστω Μ το μέσο ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και ε η εφαπτομένη του στο Μ. Θα δείξουμε ότι ε//ΑΒ. Έχουμε: η $\hat{M}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, άρα:
$\hat{A} = \hat{M}_1$ (1). Εξάλλου αφού Μ μέσο ΑΒ θα είναι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$, οπότε $\hat{A} = \hat{B}$ (2) ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{MB}$ και $\overset{\frown}{MA}$ αντίστοιχα. Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{M}_1$ απ' όπου έχουμε ε//ΑΒ.
Αντίστροφο**:** Υποθέτουμε τώρα ότι ε//ΑΒ και θα δείξουμε ότι Μ μέσο $\overset{\frown}{AB}$. Έχουμε $\hat{A} = \hat{M}_1$ (3) (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και $\hat{B} = \hat{M}_1$ (4) (γιατί ε//ΑΒ). Από (3), (4) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{B}$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών $\overset{\frown}{MB}$, $\overset{\frown}{MA}$ είναι ίσα, δηλ. Μ μέσο του $\overset{\frown}{AB}$.



2. Επειδή Γ αντιδιαμετρικό του Α στον κύκλο κέντρου Κ, η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθή γιατί βαίνει σε ημικύκλιο, δηλ. $A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ (1) όμοια $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 180^\circ$ η οποία σημαίνει ότι Γ, Β, Δ συνευθειακά, δηλαδή η ΓΔ διέρχεται από το Β.

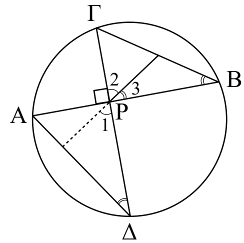
3. Αρκεί $\hat{P}_1 + \hat{\Delta} = 90^\circ$. Έχουμε:

$\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (ως κατακορυφήν)

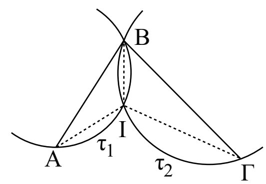
$\hat{\Delta} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο) και $\hat{B} = \hat{P}_3$ (γιατί το τρίγωνο $\overset{\triangle}{B P \Gamma}$ είναι ορθογώνιο στο Ρ και ΡΜ διάμεσος).

Άρα $\hat{P}_1 + \hat{\Delta} = \hat{P}_2 + \hat{P}_3 = B\hat{P}\Gamma = 90^\circ$,

αφού οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται κάθετα.



4. Επειδή $A\hat{I}B = 100^\circ$ το Ι βρίσκεται σε τόξο τ_1 που γράφεται με χορδή ΑΒ και δέχεται γωνία 100°. Όμοια το Ι βρίσκεται και στο τόξο τ_2 που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία 125°. Τα τόξα αυτά έχουν κοινό το σημείο Β που δε βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο των αντίστοιχων κύκλων, επομένως θα έχουν και δεύτερο κοινό σημείο Ι το οποίο είναι το ζητούμενο. Πράγματι $A\hat{I}B = 100^\circ$ από κατασκευή του τ_1 και $B\hat{I}\Gamma = 125^\circ$ από κατασκευή του τ_2 και $A\hat{I}\Gamma = 360^\circ - 100^\circ - 125^\circ = 135^\circ$.



Σχόλιο:

Προφανώς ο καπετάνιος έκαμε και μια περιττή μέτρηση.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α.

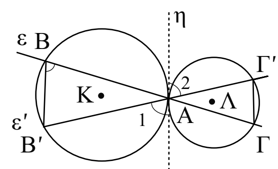
Φέρνουμε την **κοινή εσωτερική εφαπτομένη** η αυτών στο Α. Τότε:

$\hat{B} = \hat{A}_1$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης στον κύκλο κέντρου Κ)

$\hat{\Gamma} = \hat{A}_2$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης στον κύκλο κέντρου Λ)

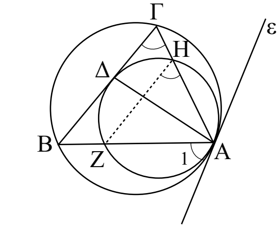
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ως κατακορυφήν)

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ που σημαίνει ότι $BB'//\Gamma\Gamma'$.

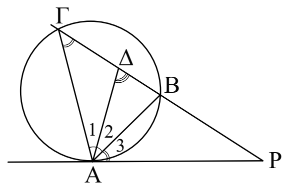


Έστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Τότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, φέρνουμε την **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** και έχουμε: $\hat{B} = \hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ (χορδή και εφαπτομένη), οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα $BB'//\Gamma\Gamma'$.

2. Έστω Ζ, Η τα δεύτερα κοινά σημεία των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με το μικρότερο κύκλο. Για να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{A}H$ και επειδή αυτή είναι εγγεγραμμένη στο μικρό κύκλο αρκεί να δείξουμε ότι τόξο ΖΔ είναι ίσο με το ΔΗ, το οποίο σύμφωνα με την άσκηση 1 είναι ισοδύναμο με την ΒΓ//ΖΗ το οποίο είναι με τη σειρά του ισοδύναμο με την $\hat{\Gamma} = \hat{H}$ που ισχύει γιατί $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ και $\hat{H} = \hat{A}_1$, ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης, όπου ε η **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** των δύο κύκλων στο Α.



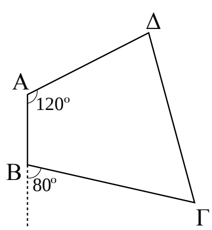
3. Για να δείξουμε ότι ΡΑ = ΓΔ αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}P$ ισούται με τη γωνία $\Delta\hat{A}P$.
Έχουμε: η γωνία $A\hat{\Delta}P$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, οπότε: $A\hat{\Delta}P = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1$ (1).
Όμως $\hat{\Gamma} = \hat{A}_3$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.
Με αντικατάσταση των $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}_1$ με τα ίσα τους στην (1) παίρνουμε: $A\hat{\Delta}P = \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = \Delta\hat{A}P$,
δηλ. $A\hat{\Delta}P = \Delta\hat{A}P$ που είναι το ζητούμενο.



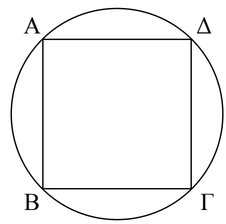
§ 6.5-6.6

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

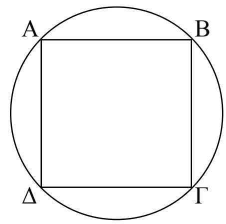
1. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο έχουμε:
$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $120^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
ή $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
Επίσης έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{B}_{\varepsilon\xi}$ ή $\hat{\Delta} = 80^\circ$.
Προφανώς δε $\hat{B} = 180^\circ - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 100^\circ$.



2. Επειδή ΑΒΓΔ ρόμβος θα είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (1). Αλλά ο ρόμβος ΑΒΓΔ είναι και εγγεγραμμένος σε κύκλο, οπότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει $2\hat{A} = 180^\circ$ ή $\hat{A} = 90^\circ$.
Δηλαδή ο ρόμβος ΑΒΓΔ έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.

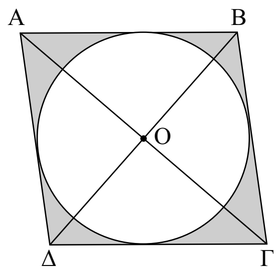


3. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A}=\hat{\Gamma}$, $\hat{B}=\hat{\Delta}$. Αφού είναι και εγγεγραμμένο, οι απέναντι γωνίες είναι και παραπληρωματικές, συνεπώς $\hat{A}=\hat{\Gamma}=1\llcorner$ και $\hat{B}=\hat{\Delta}=1\llcorner$.



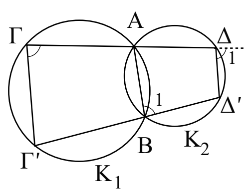
4. i) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι ΑΒ = ΓΔ και ΒΓ = ΔΑ. Επειδή είναι περιγράψιμο θα έχουμε ότι: ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ ή 2ΑΒ = 2ΒΓ ή ΑΒ = ΒΓ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

ii) Αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, επομένως τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}_1$. Γι' αυτό φέρνουμε την **κοινή χορδή** ΑΒ, οπότε από τα σχηματιζόμενα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΒΓ′Γ και ΑΒΔ′Δ έχουμε:

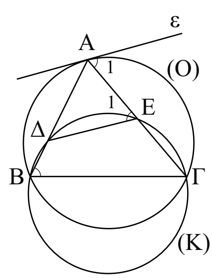


$\hat{\Gamma}=\hat{B}_1$ ($\hat{B}_1$ εξωτερική γωνία του ΑΒΓ′Γ)

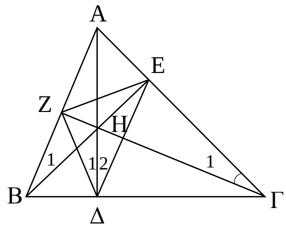
$\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$ ($\hat{\Delta}_1$ εξωτερική γωνία του ΑΒΔ′Δ).

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}_1$, δηλ. το ζητούμενο.

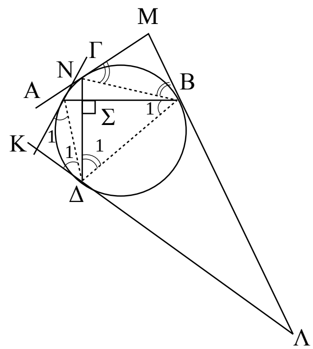
2. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1=\hat{E}_1$. Έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{B}$ (1) (γωνία χορδής και εφαπτομένης) στον κύκλο (Ο) και $\hat{E}_1=\hat{B}$ (2) γιατί το ΒΔΕΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ). Από τις (1) και (2) προκύπτει $\hat{A}_1=\hat{E}_1$ το οποίο σημαίνει ότι ε//ΔΕ.



3. Είναι $B\hat{\Delta}H + B\hat{Z}H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε το $B\Delta HZ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ (1). Αλλά και το $BZE\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, γιατί $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (2). Όμως και το $\Delta HE\Gamma$ είναι κι αυτό εγγράψιμο, αφού $H\hat{\Delta}\Gamma + H\hat{E}\Gamma = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_2$ (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, δηλ. $A\Delta$ διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Delta}E$ του τριγώνου $\overset{\triangle}{\Delta E Z}$. Όμοια αποδεικνύεται και για τα άλλα ύψη.

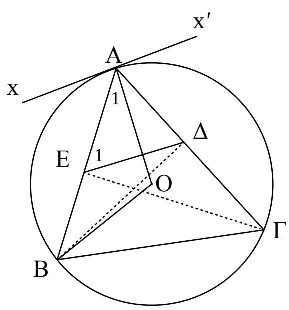


4. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180^\circ$. Είναι $KA = K\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Κ προς τον κύκλο και επομένως $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$, οπότε από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{KA\Delta}$ έχουμε $\hat{K} = 180^\circ - 2\hat{\omega}$.
Όμως $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{\omega}$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης, οπότε $\hat{K} = 180^\circ - 2\hat{B}_1$ (1).
Όμοια βρίσκουμε ότι $\hat{M} = 180^\circ - 2\hat{\Delta}_1$ (2)
Επειδή όμως $AB \perp \Gamma\Delta$ είναι $\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$ (3)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι $\hat{K} + \hat{M} = 360^\circ - 2(\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1)$, οπότε παίρνοντας υπόψη και την (3) προκύπτει ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180^\circ$ που σημαίνει ότι το $K\Lambda MN$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



Σύνθετα Θέματα

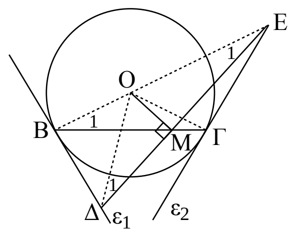
1. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ$. Γι' αυτό φέρνουμε την ΟΒ, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AOB}$ βρίσκουμε: $2\hat{A}_1 + \hat{O} = 180^\circ$ και επειδή $\hat{O} = 2\hat{\Gamma}$, αφού $\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη και $\hat{O}$ επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο, παίρνουμε $2\hat{A}_1 + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (1). Επειδή όμως $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ το $BE\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο στον οποίο η $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ$.



2ος τρόπος: Φέρνουμε την εφαπτομένη xx' στο Α, οπότε $OA \perp xx'$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΔΕ // xx'$. Πράγματι $x\hat{A}B = \hat{Γ}$ (χορδή και εφαπτομένη) και $\hat{Γ} = \hat{E}_1$, οπότε $x\hat{A}B = \hat{E}_1$.

Άρα $ΔΕ // xx'$.

2. Φέρνουμε τα τμήματα ΟΔ και ΟΕ. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{OΔE}$ το ΟΜ είναι ύψος, από κατασκευή, οπότε για να είναι $ΔΜ = ΜΕ$ πρέπει το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OΔE}$ να είναι ισοσκελές, δηλ. πρέπει $\hat{Δ}_1 = \hat{E}_1$. Επειδή $ε_1$ εφαπτομένη και ΟΒ ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής έχουμε: $O\hat{B}Δ = 90^\circ$. Επίσης και $O\hat{M}Δ = 90^\circ$, οπότε το ΟΒΔΜ είναι εγγράψιμο και επομένως $\hat{Δ}_1 = \hat{B}_1$ (1).

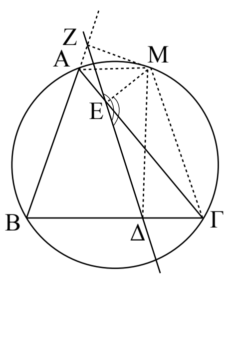


Επίσης από $O\hat{M}E = O\hat{Γ}E = 90^\circ$ προκύπτει ότι ΟΜΓΕ εγγράψιμο, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{Γ}_1$ (2).

Αλλά $OB = OΓ$ συνεπάγεται ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OBΓ}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1$ (3).

Από (1), (2) με τη βοήθεια της (3) βρίσκουμε ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{E}_1$ που είναι το ζητούμενο.

3. Έστω Δ, Ε, Ζ οι προβολές ενός σημείου Μ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\triangle}{ABΓ}$ πάνω στις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Για να δείξουμε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι $Z\hat{E}M + M\hat{E}Δ = 180^\circ$.



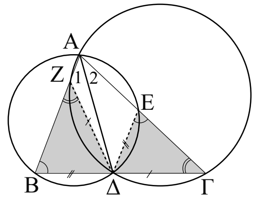
Επειδή $M\hat{Z}A + M\hat{E}A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ το ΜΖΑΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $M\hat{E}Z = M\hat{A}Z$ (1).

Επίσης από $M\hat{E}Γ = M\hat{Δ}Γ = 90^\circ$ προκύπτει ότι ΜΕΔΓ εγγράψιμο και επομένως $M\hat{E}Δ + M\hat{Γ}Δ = 180^\circ$ (2)

Αλλά, αφού ΑΒΓΜ εγγεγραμμένο, θα είναι $M\hat{A}Z = M\hat{Γ}Δ$ (3)

Από (1) και (3) προκύπτει ότι $M\hat{E}Z = M\hat{Γ}Δ$ οπότε αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε ότι $M\hat{E}Δ + M\hat{E}Z = 180^\circ$ η οποία σημαίνει ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

4. Η γωνία $Z\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον (Α, Δ, Γ) κύκλο και η ΑΔ είναι διχοτόμος της, άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, ή $\overset{\frown}{Z\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, οπότε και $Z\Delta = \Delta\Gamma$ (1).
Όμοια η ΑΔ είναι διχοτόμος και της $B\hat{A}E$ που είναι εγγεγραμμένη στον (Α, Δ, Β) κύκλο, οπότε $\Delta E = B\Delta$ (2).



Επειδή το ΑΒΔΕ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο θα είναι $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ (3).
Επίσης και το ΑΖΔΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οπότε $B\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$ (4).
Από (3) και (4) προκύπτει ότι $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}Z$ από την οποία με τη βοήθεια και των (1), (2) προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{B\Delta Z}$ και $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$ είναι ίσα.

§ 6.7

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

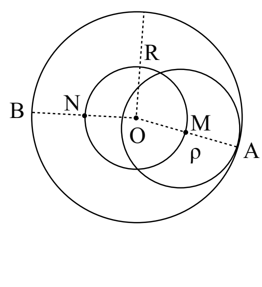
1. i) Επειδή ο δρομέας κινείται ισαπέχοντας από τις πλευρές του διαδρόμου, ο γεωμ. τόπος των θέσεών του είναι η μεσοπαράλληλη των πλευρών του διαδρόμου.

ii) Είναι ένας κύκλος ομόκεντρος της γης και ακτίνας $R + 10$, όπου R η ακτίνα της γης σε Km.

2. i) ***Ευθύ***: Έστω (Μ, ρ) ο κύκλος γνωστής ακτίνας ρ που κυλιέται στο εσωτερικό του γνωστού κύκλου (Ο, R) και Α το μετακινούμενο μοναδικό κοινό σημείο των δύο κύκλων. Τότε $OM = OA - MA = R - \rho$, δηλ. το τυχαίο σημείο Μ του τόπου απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Ο, άρα βρίσκεται στον κύκλο $(O, R - \rho)$.

Αντίστροφο: Έστω Ν ένα σημείο του κύκλου $(O, R - \rho)$ και Β το κοινό σημείο της προέκτασης της ΟΝ με τον (Ο, R).

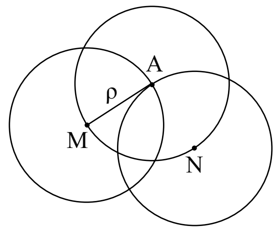
Τότε $NB = OB - ON = R - (R - \rho) = \rho$,



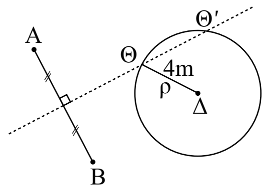
οπότε το Β είναι σημείο του κύκλου (N, ρ). Επειδή δε το Β είναι σημείο της διακέντρου των (Ο, R) και (Ν, ρ) το Β είναι το μοναδικό κοινό σημείο των δυο κύκλων. Άρα το Ν είναι κέντρο κύκλου ακτίνας ρ που εφάπτεται στον (Ο, R) εσωτερικά. Επομένως γεωμ. τόπος του Μ είναι ο κύκλος $(O, R - \rho)$.

ii) ***Ευθύ***: Έστω $(\text{M},\ \rho)$ ένας κύκλος γνωστής ακτίνας ρ που διέρχεται από το σταθερό σημείο Α, τότε $\text{AM} = \rho$ που σημαίνει ότι το Μ βρίσκεται στον κύκλο $(\text{A},\ \rho)$.

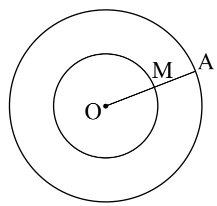
Αντίστροφο: Έστω Ν τυχαίο σημείο του κύκλου $(\text{A},\ \rho)$. Τότε $\text{NA} = \rho$, οπότε το Ν είναι το κέντρο κύκλου που διέρχεται από το Α και έχει ακτίνα ρ. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος $(\text{A},\ \rho)$.



3. Έστω Θ η θέση του θησαυρού. Επειδή $\Theta\text{A} = \Theta\text{B}$ το Θ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του τμήματος ΑΒ με άκρα τις θέσεις των δένδρων. Εξάλλου αφού το Θ απέχει από το δέντρο Δ απόσταση 4m θα βρίσκεται και στον κύκλο (Δ, 4m). Άρα η ζητούμενη θέση του θησαυρού θα είναι στα κοινά σημεία της ε με τον κύκλο (Δ, 4m).

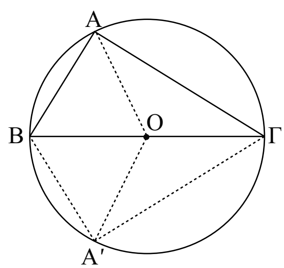


4. Αν R είναι η ακτίνα του δοθέντος κύκλου, είναι φανερό ότι ο γεωμ. τόπος των μέσων Μ της ακτίνας ΟΑ, καθώς το Α κινείται πάνω στον (Ο, R), είναι ο κύκλος $\left(\text{O},\ \dfrac{\text{R}}{2}\right)$.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

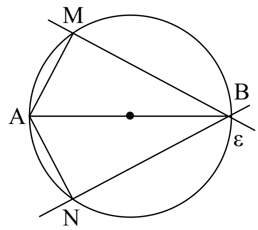
1. ***Ευθύ***: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\text{A}\overset{\triangle}{\text{B}}\Gamma$ με σταθερή υποτείνουσα $\text{B}\Gamma = \alpha$. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΟ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε $\text{AO} = \dfrac{\text{B}\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ η οποία σημαίνει ότι το μεταβλητό σημείο Α απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση $\dfrac{\alpha}{2}$, άρα το Α βρίσκεται στον κύκλο $\left(\text{O},\ \dfrac{\alpha}{2}\right)$.



Αντίστροφο: Γράφουμε τον κύκλο $\left(\text{O},\ \dfrac{\alpha}{2}\right)$ και έστω Α′ ένα σημείο του, διαφορετικό των Β, Γ. Τότε τα Α′, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, ορίζουν επομένως τρίγωνο. Το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο στο Α′, αφού για τη διάμεσο Α′Ο ισχύει: $\text{A}'\text{O} = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\text{B}\Gamma}{2}$. Άρα κάθε σημείο του κύκλου $\left(\text{O},\ \dfrac{\alpha}{2}\right)$, διαφορετικό των άκρων Β, Γ της σταθερής διαμέτρου ΒΓ αυτού είναι κορυφή της ορθής γωνίας Α του μεταβλητού τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$.

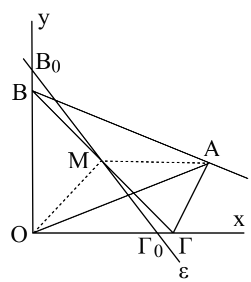
Επομένως γεωμ. τόπος του Α είναι ο κύκλος $\left(\mathrm{O}, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ χωρίς τα σημεία του Β, Γ.

2. ***Ευθύ*:** Έστω ε μια ευθεία που διέρχεται από το Β και Μ η προβολή του Α πάνω στην ε. Τότε $\mathrm{A\hat{M}B} = 1\llcorner$, οπότε το Μ βρίσκεται σε κύκλο με διάμετρο το ΑΒ.



***Αντίστροφο*:** Γράφουμε τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ και θεωρούμε ένα σημείο Ν αυτού, διαφορετικό των Α, Β. Τότε $\mathrm{A\hat{N}B} = 1\llcorner$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) και επομένως το Ν είναι προβολή του Α πάνω στην ευθεία ΝΒ, που διέρχεται από το Β. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε σημείο του κύκλου διαμέτρου ΑΒ, διαφορετικό των Α, Β είναι σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου. Όμως στο γεωμ. τόπο ανήκουν και τα Α, Β γιατί το μεν Α είναι προβολή του εαυτού του πάνω στην ΑΒ, ενώ το Β είναι προβολή του Α πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ΑΒ. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ.

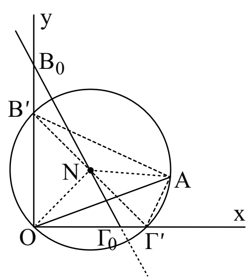
3. ***Ευθύ*:** Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ του προβλήματος. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{OB\Gamma}}$ η ΟΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, επομένως



$\mathrm{OM} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (1). Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ΟΜ = ΜΑ το οποίο σημαίνει ότι το Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετη ε του τμήματος ΟΑ.

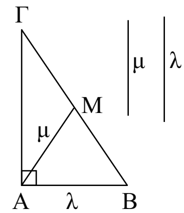
***Αντίστροφο*:** Φέρνουμε τη μεσοκάθετη ε του τμήματος ΟΑ και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ν της ε. Γράφουμε τον κύκλο (Ν, ΝΟ), ο οποίος τέμνει τις Οy, Οx στα σημεία Β′, Γ′ αντίστοιχα. Επειδή $\mathrm{B'\hat{O}\Gamma'} = 90^\circ$ το Β′Γ′ είναι διάμετρος του κύκλου (Ν, ΝΟ) και επομένως διέρχεται από το κέντρο Ν, οπότε θα είναι Β′Ν = ΝΓ′, δηλαδή το Ν είναι μέσο του Β′Γ′.



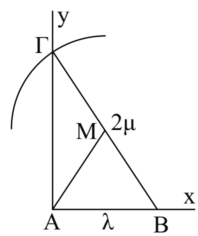
Άρα θα έχουμε $\mathrm{NA} = \mathrm{NO} = \dfrac{\mathrm{B'\Gamma'}}{2}$ (γιατί το ΟΝ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{OB'\Gamma'}}$). Έτσι για τη διάμεσο ΝΑ του τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{AB'\Gamma'}}$ έχουμε

$NA = \dfrac{B'\Gamma'}{2}$ το οποίο σημαίνει ότι $B'\hat{A}\Gamma' = 90^\circ$. Όμως το Ν είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας, άρα γεωμ. τόπος του Μ είναι το τμήμα $B_0\Gamma_0$ της μεσοκαθέτου ε που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας, συμπεριλαμβανομένων και των άκρων B_0, Γ_0.

4. i) ***Ανάλυση*:** Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: $\hat{A} = 1\llcorner$, $AB = \lambda$ και διάμεσο $AM = \mu$. Τότε $B\Gamma = 2AM = 2\mu$, οπότε έχουμε να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο από την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά.



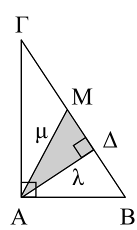
***Σύνθεση*:** Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$, στην Ax παίρνουμε σημείο Β ώστε $AB = \lambda$ και γράφουμε τον κύκλο (Β, 2μ), ο οποίος τέμνει την ημιευθεία Ay στο Γ. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο.



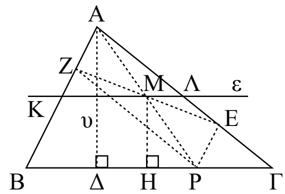
***Απόδειξη*:** Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχει:
$\hat{A} = x\hat{A}y = 1\llcorner$, από κατασκευή της $x\hat{A}y$, $AB = \lambda$ από κατασκευή και διάμεσο $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{2\mu}{2} = \mu$ δηλαδή τα δοθέντα στοιχεία.

***Διερεύνηση*:** Για να υπάρχει λύση θα πρέπει ο κύκλος (Β, 2μ) να τέμνει την Ay, το οποίο συμβαίνει όταν $\lambda < 2\mu$.

ii) Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: $\hat{A} = 1\llcorner$, διάμεσο $AM = \mu$ και ύψος $A\Delta = \lambda$. Παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\overset{\triangle}{A}M$ ($\hat{\Delta} = 1\llcorner$) κατασκευάζεται γιατί έχει γνωστή υποτείνουσα $AM = \mu$ και μια κάθετη πλευρά $A\Delta = \lambda$. Έτσι για τη σύνθεση, κατασκευάζουμε πρώτα το ΔΑΜ και παίρνουμε την προέκταση της ΜΔ και εκατέρωθεν του Μ τα σημεία Β, Γ ώστε $MB = M\Gamma = \mu$. Τότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο. Για να υπάρχει λύση πρέπει να κατασκευάζεται το τρίγωνο $\Delta\overset{\triangle}{A}M$ το οποίο συμβαίνει όταν $\lambda < \mu$.

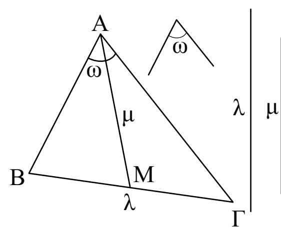


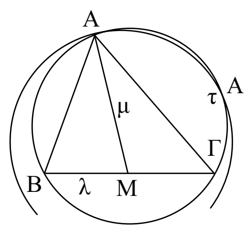
Σύνθετα Θέματα



1. Από τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ φέρνουμε ΡΕ//ΑΒ και ΡΖ//ΑΓ. Ζητάμε το γεωμ. τόπο του μέσου Μ του ΖΕ. Το ΑΖΡΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιες ΑΡ και ΖΕ διχοτομούνται, άρα το Μ είναι και μέσο του ΑΡ. Φέρνουμε το ύψος $ΑΔ = υ$ και $ΜΗ \perp ΒΓ$. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΔΡ}$ είναι ΜΗ//ΑΔ και Μ μέσο της πλευράς ΑΡ, οπότε $ΜΗ = \frac{ΑΔ}{2}$ ή $ΜΗ = \frac{υ}{2}$, η οποία σημαίνει ότι το Μ απέχει σταθερή απόσταση $\frac{υ}{2}$ από τη σταθερή ευθεία ΒΓ και επομένως βρίσκεται σε ευθεία ε//ΒΓ που απέχει $\frac{υ}{2}$ από τη ΒΓ. Επειδή το Ρ είναι σημείο του τμήματος ΒΓ το Μ είναι σημείο του τμήματος ΚΛ.

***Αντίστροφο*:** Έστω Μ σημείο του ΚΛ και Ρ η τομή της ΑΜ με τη ΒΓ. Από το Ρ φέρνουμε ΡΕ//ΑΒ και ΡΖ//ΑΓ, οπότε στο παραλληλόγραμμο ΑΖΡΕ το Μ είναι μέσο της μιας διαγωνίου ΑΡ και επομένως θα είναι και μέσο της άλλης διαγωνίου ΖΕ. Άρα κάθε σημείο Μ του τμήματος ΚΛ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου και επομένως γεωμ. τόπος του Μ είναι το τμήμα ΚΛ.





2. i) ***Ανάλυση*:** Έστω $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: $ΒΓ = λ$, $\hat{Α} = ω$ και διάμεσο $ΑΜ = μ$. Επειδή $\hat{Α} = ω$ το Α βλέπει το σταθερό τμήμα $ΒΓ = λ$ υπό σταθερή γωνία, άρα θα είναι σημείο του τόξου τ που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία ω. Επίσης, αφού $ΑΜ = μ$ το Α απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Μ, άρα θα είναι σημείο του κύκλου (Μ, μ). Άρα το Α είναι σημείο της τομής του τόξου τ και του κύκλου (Μ, μ).

***Σύνθεση*:** Παίρνουμε τμήμα $ΒΓ = λ$ και με χορδή αυτό γράφουμε το τόξο τ που δέχεται γωνία ω. Επίσης παίρνουμε το μέσο Μ του τμήματος ΒΓ και γράφουμε τον κύκλο (Μ, μ) ο οποίος τέμνει το τόξο τ.

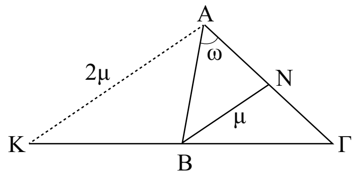
Αν Α είναι ένα σημείο τομής, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

***Απόδειξη*:** Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ έχει $ΒΓ = λ$, από κατασκευή, $\hat{Α} = ω$ γιατί είναι εγγεγραμμένη στο τόξο τ που δέχεται γωνία ω και διάμεσο $ΑΜ = μ$, ως ακτίνα του κύκλου (Μ, μ).

***Διερεύνηση*:** Για να υπάρχει λύση πρέπει ο κύκλος (Μ, μ) να έχει κοινά σημεία με το τόξο τ. Αν υπάρχει και δεύτερο κοινό σημείο Α′ τότε το τρίγωνο

$AB'\Gamma$ είναι ίσο με το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, οπότε δεν έχουμε δεύτερη λύση. Αν θεωρήσουμε και το τόξο τ' του αντικειμένου ημιεπιπέδου ως προς την ΒΓ τότε τα τρίγωνα που προκύπτουν είναι πάλι ίσα με το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

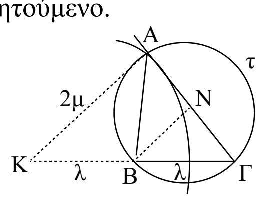
ii) ***Ανάλυση*:** Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: $B\Gamma = \lambda$, $\hat{A} = \omega$ και διάμεσο $BN = \mu$. Από το Α φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΝ, που τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Κ. Τότε στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AK\Gamma}$ Ν μέσο της ΑΓ και ΝΒ//ΑΚ, οπότε Β μέσο ΚΓ και $AK = 2BN = 2\mu$.



Επειδή $KB = B\Gamma$ το σημείο Κ είναι ένα σταθερό σημείο και αφού $KA = 2\mu =$ σταθερό το Α είναι σημείο του κύκλου $(K,\ 2\mu)$.
Επίσης αφού $\hat{A} = \omega$ το Α βρίσκεται σε τόξο τ που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία ω. Άρα το Α είναι σημείο της τομής του τόξου τ και του κύκλου $(K,\ 2\mu)$.

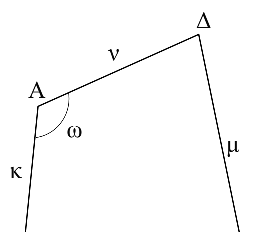
***Σύνθεση*:** Παίρνουμε τμήμα $B\Gamma = \lambda$ και στην προέκταση της ΓΒ σημείο Κ έτσι ώστε $KB = B\Gamma$. Γράφουμε τον κύκλο $(K,\ 2\mu)$. Στη συνέχεια με χορδή το ΒΓ γράφουμε τόξο τ που δέχεται γωνία ω. Αν Α είναι το σημείο τομής του τ με τον $(K,\ 2\mu)$ το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο.

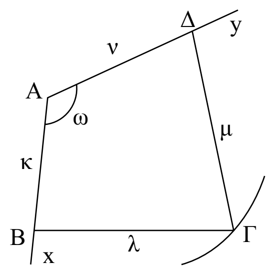
***Απόδειξη*:** Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχει: $B\Gamma = \lambda$, από κατασκευή, $\hat{A} = \omega$, γιατί είναι εγγεγραμμένη στο τόξο τ που δέχεται γωνία ω και διάμεσο $BN = \dfrac{KA}{2} = \dfrac{2\mu}{2} = \mu$.



***Διερεύνηση*:** Για να υπάρχει λύση θα πρέπει ο κύκλος $(K,\ 2\mu)$ να τέμνει το τόξο τ και προφανώς $0^\circ < \omega < 180^\circ$.

3. ***Ανάλυση*:** Έστω ΑΒΓΔ το ζητούμενο τετράπλευρο που έχει $AB = \kappa$, $B\Gamma = \lambda$, $\Gamma\Delta = \mu$, $\Delta A = \nu$ και $\hat{A} = \omega$.
Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ γνωρίζουμε δυο πλευρές του και την περιεχόμενη γωνία, επομένως αυτό κατασκευάζεται. Έτσι προσδιορίζονται οι τρεις κορυφές Α, Β και Δ του τετραπλεύρου. Η κορυφή Γ πλέον είναι η τομή των κύκλων (B, λ) και (Δ, μ).



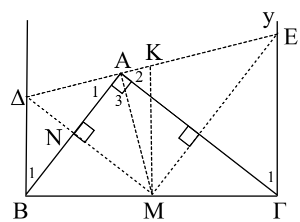


Σύνθεση: Με κορυφή τυχαίο σημείο Α κατασκευάζουμε γωνία $x\hat{A}y = \omega$ και στις πλευρές της παίρνουμε τα τμήματα ΑΒ = κ και ΑΔ = ν. Στη συνέχεια γράφουμε τους κύκλους (Β, λ) και (Δ, μ) που τέμνονται στο Γ. Το ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Από κατασκευή έχει ΑΒ = κ, ΑΔ = ν και $\hat{A} = \omega$. Επίσης ΒΓ = λ, ως ακτίνα του (Β, λ) και ΔΓ = μ ως ακτίνα του (Δ, μ).

Διερεύνηση: Πρέπει $0^\circ < \omega < 180^\circ$ και οι κύκλοι (Β, λ) και (Δ, μ) να τέμνονται.

Γενικές Ασκήσεις



1. α) Επειδή ΜΔ//ΑΓ, ως κάθετες στην ΑΒ και Μ μέσο ΒΓ θα είναι και Ν μέσο ΑΒ, οπότε ΜΔ μεσοκάθετος ΑΒ και επομένως ΑΔ = ΔΒ απ' όπου προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (1).

Όμοια βρίσκουμε ότι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_1$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε

$$\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + 90^\circ + \hat{\Gamma}_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

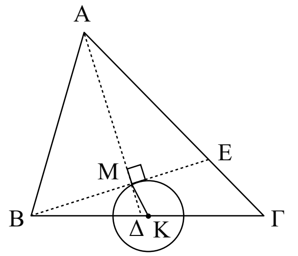
Άρα Δ, Α, Ε συνευθειακά.

β) Επειδή ΑΜ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι $AM = BM$, οπότε $\hat{A}_3 = \hat{B}$ και επομένως

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B} = \Delta\hat{B}M = 90^\circ.$$

Έτσι έχουμε $\Delta\hat{B}M + \Delta\hat{A}M = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΜ είναι εγγράψιμο. Όμοια προκύπτει ότι $M\hat{A}E + M\hat{\Gamma}E = 180^\circ$ που σημαίνει ότι και το ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμο.

γ) Επειδή ΜΔ ⊥ ΑΒ, ΜΕ ⊥ ΑΓ και $\hat{A} = 90^\circ$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $M\overset{\triangle}{\Delta}E$ είναι ορθογώνιο στο Μ και επομένως κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι το μέσο Κ της πλευράς ΔΕ. Για να εφάπτεται ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $M\overset{\triangle}{\Delta}E$ στη ΒΓ αρκεί ΚΜ ⊥ ΒΓ που ισχύει γιατί ΒΓΕΔ τραπέζιο με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και ΜΚ//ΒΔ, ως διάμεσος του τραπεζίου.



2. Έστω $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ μια θέση του τριγώνου $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ με σταθερή τη ΒΓ και τη διαφορά $ΑΓ - ΑΒ = δ$. ($ΑΓ > ΑΒ$). Έστω Μ η προβολή του Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ και Ε η τομή της προέκτασης της ΒΜ με την ΑΓ. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ η ΑΜ είναι ύψος και διχοτόμος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλ. $ΑΕ = ΑΒ$, οπότε $ΕΓ = ΑΓ - ΑΕ = ΑΓ - ΑΒ = δ$ (1).

Παίρνουμε το μέσο Κ της ΒΓ και έχουμε: $ΚΜ = \frac{ΕΓ}{2} = \frac{δ}{2}$, λόγω της (1),

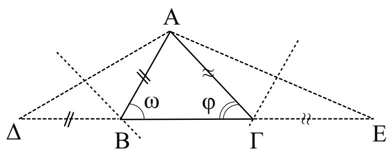
οπότε το Μ βρίσκεται στον κύκλο $\left(Κ, \frac{δ}{2}\right)$.

***Αντίστροφα*:** Έστω Μ σημείο του $\left(Κ, \frac{δ}{2}\right)$. Φέρνουμε τη ΒΜ και στην προέκτασή της παίρνουμε $ΜΕ = ΜΒ$. Από το Μ φέρνουμε κάθετο στη ΒΕ που τέμνει την προέκταση της ΓΕ στο Α. Επειδή ΑΜ μεσοκάθετος της ΒΕ θα είναι $ΑΒ = ΑΕ$ και ΑΔ διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$.

Επίσης θα είναι $ΑΓ - ΑΒ = ΑΓ - ΑΕ = ΕΓ = 2 \cdot ΜΚ = 2\frac{δ}{2} = δ$.

Το Μ επομένως είναι σημείο του τόπου.

Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος $\left(Κ, \frac{δ}{2}\right)$.



3. ***Ανάλυση*:** Έστω $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{Β} = ω$, $\hat{Γ} = φ$ και $ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = δ$. Προεκτείνουμε τη ΒΓ εκατέρωθεν κατά τμήματα $ΒΔ = ΑΒ$ και $ΓΕ = ΑΓ$.

Τότε από τα ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΓΕ}$ προκύπτει ότι $\hat{Δ} = \frac{ω}{2}$ και $\hat{Ε} = \frac{φ}{2}$ και $ΔΕ = δ$.

Το τρίγωνο λοιπόν $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ κατασκευάζεται από $ΔΕ = δ$, $\hat{Δ} = \frac{ω}{2}$ και $\hat{Ε} = \frac{φ}{2}$.

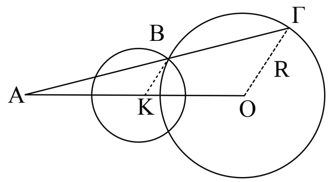
***Σύνθεση*:** Κατασκευάζουμε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ και φέρνουμε τις μεσοκάθετες των ΑΔ και ΑΕ που τέμνουν αντίστοιχα τη ΔΕ στα Β, Γ. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι το ζητούμενο.

***Απόδειξη*:** Επειδή Β σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΔ θα είναι $ΑΒ = ΒΔ$.

Όμοια $ΑΓ = ΓΕ$, οπότε: $ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = δ$ και $\hat{Β} = 2\hat{Δ} = 2\frac{ω}{2} = ω$.

Όμοια $\hat{Γ} = φ$.

***Διερεύνηση*:** Πρέπει $\hat{ω} + \hat{φ} < 180^\circ$.



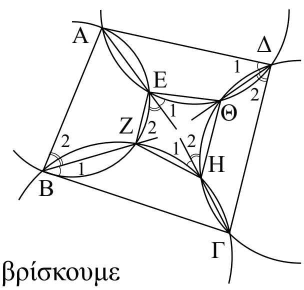
4. ***Ανάλυση*:** Έστω ΑΒΓ μια τέμνουσα του κύκλου ώστε Β μέσο ΑΓ. Παίρνουμε το μέσο Κ του ΑΟ.

Τότε $KB = \frac{R}{2}$ και επομένως το Β ανήκει στον κύκλο $\left(K, \frac{R}{2}\right)$.

***Σύνθεση*:** Γράφουμε τον κύκλο $\left(K, \frac{R}{2}\right)$ που τέμνει τον (O, R) στο Β, φέρνουμε την ΑΒ και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΒΓ = ΑΒ.

***Απόδειξη*:** Τότε ΟΓ = 2ΚΒ = R, οπότε το Γ ανήκει στον κύκλο (Ο, R) και επομένως η ΑΒΓ είναι η ζητούμενη.

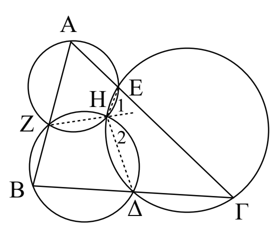
***Διερεύνηση*:** Πρέπει οι κύκλοι να τέμνονται, δηλαδή $R < AO < 3R$.



5. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{E} + \hat{H} = 2\llcorner$. Επειδή το τετράπλευρο ΑΕΘΔ είναι εγγεγραμμένο θα έχουμε: $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1)
Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΕΖΒ έχουμε: $\hat{E}_2 = \hat{B}_2$ (2).
Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΓΗΖ έχουμε $\hat{H}_1 = \hat{B}_1$ (3) και από το ΓΗΘΔ ότι $\hat{H}_2 = \hat{\Delta}_2$ (4).
Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη βρίσκουμε

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Leftrightarrow \hat{E} + \hat{H} = \hat{\Delta} + \hat{B} \quad (5).$$

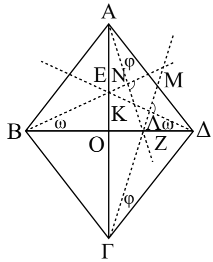
Αλλά το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και $\hat{B} + \hat{\Delta} = 2\llcorner$, οπότε από την (5) προκύπτει ότι $\hat{E} + \hat{H} = 2\llcorner$ η οποία σημαίνει ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



6. Έστω Η το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Α, Ζ, Ε) και (Β, Ζ, Δ). Για να διέρχεται και ο τρίτος κύκλος (Γ, Δ, Ε) από το Η, αρκεί το τετράπλευρο ΔΓΕΗ να είναι εγγράψιμο και για να συμβαίνει αυτό αρκεί $\hat{H} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$. Επειδή τα τετράπλευρα ΑΖΗΕ και ΒΖΗΔ είναι εγγεγραμμένα έχουμε ότι:

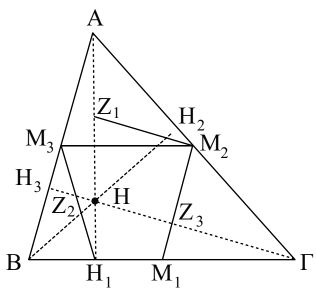
$\hat{H}_1 = \hat{A}$ και $\hat{H}_2 = \hat{B}$, οπότε:
$\hat{H} + \hat{\Gamma} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{\Gamma} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, αφού $\hat{A},\ \hat{B},\ \hat{\Gamma}$ γωνίες του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

7. Έστω ΚΛΜΝ το τετράπλευρο που ορίζουν οι ευθείες του προβλήματος. Για να δείξουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{N} = \hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$.



Θέτουμε $E\hat{B}\Delta = \hat{\omega}$. Επειδή ΕΟ μεσοκάθετη της ΒΔ θα είναι και $E\hat{B}\Delta = \hat{\omega}$.
Όμοια αν θέσουμε $Z\hat{A}\Delta = \hat{\varphi}$
θα είναι και $Z\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\varphi}$.
Η γωνία $\hat{N}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{NBZ}$,
οπότε έχουμε $\hat{N} = \hat{\omega} + B\hat{Z}N$ (1).
Αλλά και η $B\hat{Z}N$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AZ\Delta}$,
οπότε $B\hat{Z}N = \hat{\varphi} + Z\hat{\Delta}A$ (2).
Από (1), (2) έχουμε $\hat{N} = \hat{\omega} + \hat{\varphi} + Z\hat{\Delta}A$ (3).
Η $\hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Lambda\Gamma\Delta}$, οπότε $\hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} + Z\hat{\Delta}\Gamma$ (4).
Από (3) και (4) λαμβάνοντας υπόψη ότι $Z\hat{\Delta}A = Z\hat{\Delta}\Gamma$ (οι διαγώνιες ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του) προκύπτει ότι $\hat{N} = \hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$, δηλαδή το ζητούμενο.

8. i) Επειδή $M_2,\ M_3$ μέσα των ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, θα είναι M_2M_3 //ΒΓ, δηλ. το $H_1M_1M_2M_3$ είναι τραπέζιο. Αλλά, επειδή πάλι $M_1,\ M_2$ μέσα των ΒΓ, ΓΑ, θα είναι $M_1M_2 = \dfrac{AB}{2}$ (1).



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AH_1B}$ το H_1M_3 είναι διάμεσος, άρα $H_1M_3 = \dfrac{AB}{2}$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $M_1M_2 = H_1M_3$ το οποίο σημαίνει ότι το $H_1M_1M_2M_3$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και επομένως (εφαρμογή 2) είναι εγγράψιμο.

ii) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AH\Gamma}}$ είναι Z_1 μέσο ΑΗ και M_2 μέσο ΑΓ, οπότε Z_1M_2//ΓΗ. Αλλά και M_2M_1//ΑΒ. Απ' αυτές και επειδή $\Gamma H \perp AB$ προκύπτει $Z_1M_2 \perp M_2M_1$, οπότε στο τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ έχουμε $\hat{H}_1 + \hat{M}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ το οποίο σημαίνει ότι το $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο.

iii) Από το i) προκύπτει ότι το H_1 είναι σημείο του κύκλου (M_1, M_2, M_3). Όμοια και τα H_2, H_3 είναι σημεία του ίδιου κύκλου. Από το ii) συμπεραίνουμε ότι το Z_1 είναι σημείο του κύκλου (H_1, M_1, M_2) ο οποίος σύμφωνα με το i) ταυτίζεται με τον (M_1, M_2, M_3), άρα το Z_1 είναι σημείο του κύκλου (M_1, M_2, M_3). Όμοια και τα Z_2, Z_3 είναι σημεία του ίδιου κύκλου. Άρα τα σημεία M_i, H_i, Z_i, $i = 1, 2, 3$ είναι σημεία ομοκυκλικά.

ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ
22-0280
ΕΚΔΟΣΗ

Κωδικός βιβλίου: 0-22-0280
ISBN 978-960-06-5178-2

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0280 8