ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Λύσεις των ασκήσεων

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Φυσική

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Φυσική

Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών

Λύσεις των ασκήσεων

Β′ τάξη
Γενικού Λυκείου

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΕΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΤΑΝΟΣ
ΑΓΓΕΛΟΣ ΠΗΤΤΑΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΡΑΠΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΒΛΑΧΟΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΚΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΚΟΚΚΟΤΑΣ
ΠΕΡΙΚΛΗΣ ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΙΜΟΘΕΟΥ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Φυσική

Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών
Λύσεις των ασκήσεων

Β΄ τάξη
Γενικού Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

1 ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ: ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ, ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1.1 **Α.** Από την εξίσωση της ελεύθερης πτώσης έχουμε:

$h = \frac{1}{2} g_\Sigma t^2$ ή $g_\Sigma = \frac{2h}{t^2} \Rightarrow$ και με αντικατάσταση

$g_\Sigma = \frac{2 \cdot 7,2}{3^2} \text{m/s}^2$ ή $g_\Sigma = 1,6 \text{ m/s}^2$.

Β. i) Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φθάσει στο έδαφος σύμφωνα με την αρχή επαλληλίας των κινήσεων, είναι πάλι 3s.

ii) Για την οριζόντια κίνηση έχουμε: $x = \upsilon t$ ή $x = 12 \cdot 3\text{m}$ ή $x = 36\text{m}$.

1.2 **Α.** Οι ζητούμενες εξισώσεις για τις δύο κινήσεις της βόμβας στους άξονες x και y είναι αντίστοιχα:

$x = \upsilon t$ (α) και $y = \frac{1}{2} g t^2$ (γ)

$\upsilon_x = \upsilon_o$ (β) και $\upsilon_y = gt$ (δ)

Β. Από τη (γ) έχουμε:

$y = \frac{1}{2} g t^2$ ή $g = \frac{2y}{t^2}$ ή $g = \frac{2 \cdot 500}{10^2} \text{m/s}^2$ ή $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Γ. Επειδή η ταχύτητα υ_x της βόμβας είναι ίση με την ταχύτητα (υ_o) του αεροπλάνου, βόμβα και αεροπλάνο διανύουν κάθε στιγμή την ίδια απόσταση x. Έτσι τη στιγμή που η βόμβα φτάνει στο έδαφος, το αεροπλάνο βρίσκεται ακριβώς πάνω από το σημείο πρόσκρουσης, έχοντας μετατοπιστεί από το σημείο που άφησε τη βόμβα κατά $x = \upsilon_o t = 150 \cdot 10\text{m}$ ή $x = 1.500\text{m}$.

1.3 Η γραμμική ταχύτητα για κάθε σημείο του πλέγματος του τροχού είναι ίση με τη μεταφορική ταχύτητα του αυτοκινήτου. Δηλαδή υ=35m/s. Για την κεντρομόλο επιτάχυνση έχουμε:

$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$, όπου $R = \frac{\delta}{2} = \frac{0,8}{2}\text{m}$ ή $R = 0,4\text{m}$.

Έτσι $\alpha_\kappa = \frac{35^2}{0,4} \text{m/s}^2$ ή $\alpha_\kappa = 3.062,5 \text{ m/s}^2$.

1.4 Από τη σχέση $\upsilon = \omega R$, αν θέσουμε $\omega = \frac{2\pi}{T}$ βρίσκουμε για τη ζητούμενη ταχύτητα:

$$\upsilon = \frac{2\pi}{T} \cdot R = \frac{2 \cdot 3,14}{24 \cdot 3.600} \cdot 6.380 \cdot 10^3 \, m/s \text{ ή } \upsilon = 463 m/s.$$

Για την κεντρομόλο επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{463^2}{6.380 \cdot 10^3} \text{ ή } \alpha_\kappa = 0,034 m/s^2.$$

1.5 Για την ταχύτητα έχουμε:

$$\upsilon = \omega R = 2\pi f \frac{\delta}{2} = 2 \cdot 3,14 \cdot 8,5 \frac{13,8 \cdot 10^3}{2} m/s \text{ ή } \upsilon = 368 \cdot 10^3 m/s.$$

Η ζητούμενη κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\left(368 \cdot 10^3\right)^2}{\frac{13,8 \cdot 10^3}{2}} m/s^2 \text{ ή } \alpha_\kappa = 19,6 \cdot 10^6 m/s^2.$$

1.6 Η συχνότητα περιστροφής του κάδου είναι:

$$f = \frac{780}{60} Hz \text{ ή } f = 13Hz$$

Έτσι βρίσκουμε:

$$\upsilon = \omega R = 2\pi f R \text{ ή } \upsilon = 2\pi f \frac{\delta}{2} = 2 \cdot 3,14 \cdot 13 \cdot \frac{0,66}{2} m/s \text{ ή}$$

$$\upsilon = 26,9 m/s \text{ και } \alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{26,9^2}{0,33} m/s^2 \text{ ή } \alpha_\kappa = 2.193 m/s^2.$$

1.7 Η τιμή της τριβής, δηλαδή η κεντρομόλος δύναμη, δεν μπορεί να υπερβαίνει το 25% του βάρους του αυτοκινήτου.

Δηλαδή: $F_{\kappa(max)} = 0,25B$ ή $F_{\kappa(max)} = 0,25mg$.

Όμως $F_{\kappa(max)} = \frac{m\upsilon_{max}{}^2}{R}$ ή $0,25mg = \frac{m\upsilon_{max}{}^2}{R}$ ή $\upsilon_{max} = \sqrt{0,25gR}$

και με αντικατάσταση $\upsilon_{max} = 13 m/s$.

1.8 Για την περίοδο του ωροδείκτη και του λεπτοδείκτη βρίσκουμε:
$T_\Omega = 12h = 12 \cdot 3.600s$ ή $T_\Omega = 43.200s$ και $T_\Lambda = 1h = 1 \cdot 3.600s$ ή $T_\Lambda = 3.600s$.

Έστω ότι οι δείκτες σχηματίζουν για πρώτη φορά γωνία $\frac{\pi}{3}$ μετά από χρόνο t. Ο λεπτοδείκτης έχει διαγράψει γωνία

$$\varphi_\Lambda = \omega_\Lambda t = \frac{2\pi}{T_\Lambda} t \quad (1)$$

Αντίστοιχα ο ωροδείκτης θα έχει διαγράψει γωνία

$$\varphi_\Omega = \omega_\Omega t = \frac{2\pi}{T_\Omega} t \quad (2)$$

Όμως $\varphi_\Lambda - \varphi_\Omega = \frac{\pi}{3}$ οπότε αντικαθιστούμε τις (1) και (2)

και έχουμε $\frac{2\pi}{T_\Lambda} t - \frac{2\pi}{T_\Omega} t = \frac{\pi}{3}$ ή $2t\left(\frac{1}{T_\Lambda} - \frac{1}{T_\Omega}\right) = \frac{1}{3}$

$2t\left(\frac{1}{3.600} - \frac{1}{43.200}\right) = \frac{1}{3}$ ή $t = 10{,}9\,\text{min}$.

1.9 Το βλήμα κινούμενο ομαλά χρειάζεται χρόνο t για να φθάσει στο δίσκο, ο οποίος είναι: $t = \frac{d}{\upsilon} = \frac{2}{400}\,\text{s}$ ή $t = 0{,}005\text{s}$. Στον ίδιο χρόνο t ο δίσκος περιστρέφεται κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Επομένως βρίσκουμε ότι:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\frac{\pi}{4}\text{rad}}{0{,}005\text{s}} = \frac{\pi}{0{,}02}\text{rad/s} \;\text{ ή }\; \omega = 50\pi\ \text{rad/s}.$$

1.10 **Α.** Για την ταχύτητα του δορυφόρου βρίσκουμε:

$$\upsilon = \omega(R+h) = \frac{2\pi}{T}(R+h) \text{ ή}$$

$$\upsilon = \frac{2\cdot 3{,}14}{4\cdot 3.600}\left(6.400\cdot 10^3 + 6.400\cdot 10^3\right)\text{m/s} \;\text{ ή }\; \upsilon = 5.581\ \text{m/s}.$$

Β. Για τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{4\cdot 3.600}\text{rad/s} \;\text{ ή }\; \omega = 4{,}36\cdot 10^{-4}\text{rad/s}.$$

2 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

2.1 Η ορμή του λεωφορείου είναι:

$p = m\upsilon$, όπου $\upsilon = 72\text{km/h} = \dfrac{72.000}{3.600}\text{m/s} = 20\text{m/s}$.

Έτσι $p = 2.500 \cdot 20\text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ ή $p = 5 \cdot 10^4\text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.2 Η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι $\upsilon_0 = \dfrac{216.000}{3.600}\text{m/s} = 60\text{m/s}$.

Από την εξίσωση της ταχύτητας στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση έχουμε:

$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$ ή $0 = \upsilon_0 - \alpha t$ ή $\alpha = \dfrac{\upsilon_0}{t} = \dfrac{60}{120}\text{m/s}^2$ ή $\alpha = 0{,}5\,\text{m/s}^2$.

Αλλά $F = m\alpha$ ή $F = 10^5 \cdot 0{,}5\text{N}$ ή $F = 5 \cdot 10^4\text{N}$.

2.3 Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} - m\upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{\Delta t} \text{ ή } F = \frac{0{,}5 \cdot 24}{0{,}03}\text{N ή } F = 400\text{N}.$$

2.4 Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F \text{ ή } \frac{\Delta p}{\Delta t} = B = mg = 90 \cdot 10\text{N ή } \frac{\Delta p}{\Delta t} = 900\text{N}.$$

Επειδή ο αλεξιπτωτιστής θεωρούμε ότι κάνει ελεύθερη πτώση έχουμε

$$\upsilon = gt = 10 \cdot 1\text{m/s ή } \upsilon = 10\text{m/s}.$$

2.5 **Α.** Θεωρώντας ως θετική φορά στον κατακόρυφο άξονα τη φορά από κάτω προς τα πάνω έχουμε:

$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}$ ή $\Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - (-p_{\alpha\rho\chi})$ ή

$\Delta p = m\upsilon_2 + m\upsilon_1 = \left(0{,}5 \cdot 30 + 0{,}5 \cdot 10\right)\text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ ή

$\Delta p = 20\text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

Β. Για τη ζητούμενη μέση δύναμη έχουμε:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{20}{0{,}25}\text{N ή } F = 80\text{N}.$$

2.6 **A.** Για τη μεταβολή της ορμής βρίσκουμε:

$$\Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi} = m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} - 0 \text{ ή } \Delta p = 1.600\frac{90\cdot 10^3}{3.600}\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή}$$

$$\Delta p = 4\cdot 10^4\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

B. Η ζητούμενη δύναμη υπολογίζεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4\cdot 10^4}{5}\text{N} \text{ ή } F = 8\cdot 10^3\text{N}.$$

2.7 **A.** Για κάθε σταγόνα η μεταβολή της ορμής, αφού η τελική ταχύτητά τους είναι μηδέν, έχει τιμή:

$$\Delta p = m\upsilon - 0 = m\upsilon \text{ ή}$$

$$\Delta p = 3\cdot 10^{-5}\cdot 17\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } \Delta p = 51\cdot 10^{-5}\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

B. Για τη μέση δύναμη βρίσκουμε:

$$F = \frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t} = \frac{500\cdot 51\cdot 10^{-5}}{1}\text{N} \text{ ή } F = 255\cdot 10^{-3}\text{N}.$$

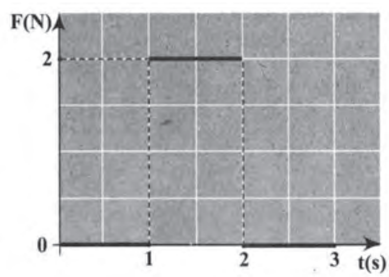
2.8 **A.** Για την ελάχιστη ορμή του σώματος έχουμε:

$$p_{min} = m\upsilon_{min} \text{ ή } \upsilon_{min} = \frac{p_{min}}{m} = \frac{2}{1}\text{m/s} \text{ ή } \upsilon_{min} = 2\text{m/s}.$$

Αντίστοιχα για τη μέγιστη έχουμε:

$$p_{max} = m\upsilon_{max} \text{ ή } \upsilon_{max} = \frac{p_{max}}{m} = \frac{4}{1}\text{m/s} \text{ ή } \upsilon_{max} = 4\text{m/s}.$$

B. Η συνισταμένη δύναμη όπως προκύπτει από τη σχέση $\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ είναι μηδέν για τα χρονικά διαστήματα 0s έως 1s και 2s έως 3s. Αντίθετα κατά το χρονικό διάστημα 1s έως 2s η κλίση της ευθείας είναι σταθερή και κατά συνέπεια η δύναμη έχει σταθερή τιμή



$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4-2}{1}\text{N} \text{ ή } F = 2\text{N}.$$

Έτσι έχουμε:

2.9 Το σώμα επιταχύνεται με την επίδραση της δύναμης F και της τριβής T για την οποία βρίσκουμε:

$T = \mu F_\kappa = \mu mg = 0,1 \cdot 200 \cdot 10N$ ή $T = 200N$.

Έτσι από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \text{ ή } F - T = \frac{m\upsilon - 0}{\Delta t} \text{ ή } \upsilon = \frac{(F-T)\Delta t}{m} =$$

$$= \frac{(500-200)4}{200} m/s \text{ ή } \upsilon = 6 m/s.$$

2.10 **Α.** $p_{\pi\rho\iota\nu} = m\upsilon_1 = 0,1 \cdot 10 kg\frac{m}{s}$ ή $p_{\pi\rho\iota\nu} = 1kg\frac{m}{s}$

$p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = m\upsilon_2 = 0,1 \cdot 8kg\frac{m}{s}$ ή $p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 0,8kg\frac{m}{s}$

Β. Για τη ζητούμενη μεταβολή της ορμής, θεωρώντας τη φορά της υ_1 ως θετική έχουμε:

$$\Delta p = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - p_{\pi\rho\iota\nu} = (-0,8-1)kg\frac{m}{s} \text{ ή } \Delta p = -1,8kg\frac{m}{s}.$$

Γ. Η δύναμη που δέχτηκε από τον τοίχο το μπαλάκι είναι:

$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-1,8}{0,1}N$ ή $F = -18N$. Προφανώς η κατεύθυνση της F είναι αντίθετη από αυτή της ταχύτητας υ_1.

2.11 **Α.** Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$0 = m\upsilon_0 + MV \text{ ή } V = -\frac{m\upsilon_0}{M} \text{ ή } V = -\frac{1 \cdot 1.000}{1.000}\frac{m}{s} \text{ ή } V = -1m/s.$$

(Το μείον δηλώνει ότι η φορά της ταχύτητας V είναι αντίθετη της ταχύτητας υ_0).

Β. Από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, όπου ΣF είναι μόνο η τριβή T.

Έτσι βρίσκουμε: $T = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ή $\mu Mg = \frac{0 - MV}{\Delta t}$ ή $\mu g = \frac{-V}{\Delta t}$ ή

$$\Delta t = \frac{-V}{\mu g} = \frac{-(-1)}{0,05 \cdot 10}s \text{ ή } \Delta t = 2s.$$

2.12 **Α.** Από τη σχέση $\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ για κάθε μια περίπτωση έχουμε:

$p_{ολ} = p_1 + p_2 = m_1υ_1 + m_2υ_2$ ή

$p_{ολ} = (2 \cdot 10 + 4 \cdot 6)kg\dfrac{m}{s}$ ή $p_{ολ} = 44kg\dfrac{m}{s}$ και

$p_{ολ} = p_1 - p_2 = m_1υ_1 - m_2υ_2 = (2 \cdot 10 - 4 \cdot 6)kg\dfrac{m}{s}$ ή

$p_{ολ} = -4kg\dfrac{m}{s}$, με κατεύθυνση αυτή της ταχύτητας $υ_2$ την οποία θεωρήσαμε ως αρνητική.

Β. Για την πλαστική κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Έτσι:

$m_1υ_1 - m_2υ_2 = (m_1 + m_2)V$ ή $V = \dfrac{m_1υ_1 - m_2υ_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-4}{6}m/s$ ή $V = -\dfrac{2}{3}m/s$.

Δηλαδή το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχει ταχύτητα

$\dfrac{2}{3}m/s$, ίδιας κατεύθυνσης με αυτή της ταχύτητας $υ_2$.

2.13 Προφανώς θεωρούμε το κιβώτιο ακίνητο για το μικρό χρονικό διάστημα που διέρχεται το βλήμα. Έτσι:

Α. $m_1υ_1 + 0 = m_1υ_1' + m_2υ_2'$ ή $υ_2' = \dfrac{m_1(υ_1 - υ_1')}{m_2}$ ή

$υ_2' = \dfrac{0,1(400 - 100)}{2}m/s$ ή $υ_2' = 15m/s$.

Β. Η ζητούμενη μέση δύναμη F είναι:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_2υ_2 - 0}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 15}{0,1}N \text{ ή } F = 300N.$$

2.14 Από την αρχή διατήρησης της ορμής αμέσως πριν και μετά τη διάσπαση έχουμε:

$Mυ = m_1υ_1 + m_2υ_2$ ή $Mυ = m_1υ_1 + (M - m_1)υ_2$ ή $υ_2 = \dfrac{Mυ - m_1υ_1}{M - m_1} =$

$= \dfrac{1.000 \cdot 500 - 800 \cdot 1.000}{200}m/s$ ή $υ_2 = -1.500m/s$.

Δηλαδή το κομμάτι m_2 αποκτά ταχύτητα 1.500m/s αντίθετης κατεύθυνσης από αυτή της ταχύτητας υ του πυραύλου την οποία θεωρήσαμε ως θετική.

2.15 **A.** Αν θεωρήσουμε ότι στη μάζα M=1.200kg του πρώτου αυτοκινήτου συμπεριλαμβάνεται και η σχετικά μικρή μάζα του μαθητή, μπορούμε να βρούμε την ορμή p_2 του δεύτερου αυτοκινήτου με την αρχή διατήρησης της ορμής. Πράγματι αφού η ορμή διατηρείται και η τελική ορμή του συσσωματώματος των δύο αυτοκινήτων είναι μηδέν, έχουμε:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{ολ} \text{ ή } p_1 - p_2 = 0 \text{ ή } p_2 = p_1 \text{ ή}$$

$$p_2 = M\upsilon = 1.200\frac{72.000}{3.600}\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή}$$
$$p_2 = 24.000\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot$$

B. Ο μαθητής έχει αρχικά την ταχύτητα του πρώτου αυτοκινήτου, δηλαδή υ=20m/s. Έτσι από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη F που του ασκεί η ζώνη για να τον ακινητοποιήσει τελικά είναι:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{τελ} - p_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{0 - m\upsilon}{\Delta t} \text{ ή } F = \frac{0 - 60\cdot 20}{0,12}\text{N} \text{ ή } F = -10.000\text{N}.$$

Μπορείτε να διαπιστώσετε ότι η δύναμη αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάρος $B = mg = 60\cdot 10\text{N} = 600\text{N}$.

2.16 **A.** Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{ολ} \text{ ή } m_1\upsilon_1 + 0 = (m_1 + m_2)V \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \frac{(m_1 + m_2)V}{m_1} = \frac{(2.000 + 1.000)4}{2.000}\text{m/s} \text{ ή } \upsilon_1 = 6\text{m/s}.$$

B. Για τη μεταβολή Δp του δεύτερου οχήματος έχουμε:

$$\overrightarrow{\Delta p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \text{ ή } \Delta p = m_2V - 0 \text{ ή}$$
$$\Delta p = 1.000\cdot 4\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } \Delta p = 4.000\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ. Για το πρώτο όχημα βρίσκουμε:

$$\overrightarrow{\Delta p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \text{ ή } \Delta p = m_1V - m_1\upsilon_1 = m_1(V - \upsilon_1) \text{ ή}$$
$$\Delta p = 2.000(4 - 6)\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } \Delta p = -4.000\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δηλαδή όπως αναμέναμε, η ελάτωση της ορμής του πρώτου οχήματος είναι ίση ακριβώς με την αύξηση της ορμής του δεύτερου.

2.17 **Α.** Η ταχύτητα V του συσσωματώματος είναι:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V \text{ ή } V = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \text{ ή}$$

$V = \dfrac{0,4 \cdot 20 - 0,6 \cdot 5}{0,4 + 0,4}\text{m/s}$ ή $V = 5\text{m/s}$, δηλαδή ίδιας κατεύθυνσης με την κατεύθυνση του πρώτου σώματος την οποία θεωρήσαμε ως θετική.

Β. Στην πλαστική κρούση η κινητική ενέργεια δε διατηρείται και συγκεκριμένα μειώνεται. Έτσι έχουμε:

$$\Delta K = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } \Delta K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \text{ ή}$$

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}0,4 \cdot 20^2 + \frac{1}{2}0,6 \cdot 5^2 - \frac{1}{2}(0,4 + 0,6)5^2\right)\text{J} \text{ ή } \Delta K = 75\text{J}.$$

Γ. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας βρίσκουμε για το ζητούμενο διάστημα:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - TS = 0 \text{ ή } \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - \mu(m_1 + m_2)gS = 0 \text{ ή}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2}{\mu(m_1 + m_2)g} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5^2}{0,2 \cdot 10}\text{m} \text{ ή } S = 6,25\text{m}$$

3 ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Νόμοι αερίων

3.1 1-γ 2-α

3.2 α

3.3 1-δ 2-β 3-γ

3.4 γ

3.5 γ

3.6 β, γ

3.7 γ

3.8 β

Κινητική θεωρία

3.9 Μακροσκοπικά, ιδανικό είναι το αέριο που υπακούει στους νόμους των αερίων σε οποιεσδήποτε συνθήκες και αν βρίσκεται, ή το αέριο που υπακούει στην καταστατική εξίσωση σε όλες τις πιέσεις και θερμοκρασίες.
Μικροσκοπικά, ιδανικό είναι το αέριο του οποίου τα μόρια συμπεριφέρονται σαν μικροσκοπικές ελαστικές σφαίρες, δέχονται δυνάμεις μόνο τη στιγμή της κρούσης του με άλλα μόρια ή με τα τοιχώματα του δοχείου και οι κρούσεις τους είναι απολύτως ελαστικές.

3.10 α, δ

3.11 α

3.12 γ

3.13 β

3.14 γ

3.15 Οι ταχύτητες των μορίων στα υγρά ακολουθούν κατανομή που μοιάζει αρκετά με αυτή των Maxwell-Boltzmann για τα αέρια. Αυτό σημαίνει ότι μέσα στο υγρό πάντα υπάρχει ένας αριθμός μορίων που έχουν αρκετά μεγάλες ταχύτητες, που τους επιτρέπουν να "δραπετεύσουν" από τις διαμοριακές έλξεις και να εγκαταλείψουν το υγρό από την ελεύθερη επιφάνειά του.
Καθώς τα πιο γρήγορα μόριά του εγκαταλείπουν το υγρό, η μέση κινητική ενέργεια των μορίων που απομένουν μικραίνει. Σύμφωνα με τη σχέση $\frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2} = \frac{3}{2}kT$ που συνδέει τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων των ιδανικών αερίων με τη θερμοκρασία και, απ' ό,τι φαίνεται, ισχύει ποιοτικά και για τα υγρά, είναι και θεωρητικά αναμενόμενο να ψύχεται το υγρό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νόμοι αερίων - καταστατική εξίσωση

3.16 Η μεταβολή είναι ισόχωρη. Επομένως $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ άρα p_2 = 1,2atm

3.17 Η μεταβολή είναι ισοβαρής. Επομένως: $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ άρα V_2 = 0,18m^3

3.18 Όγκος δωματίου V = 48m^3

Από την καταστατική εξίσωση: $n = \frac{pV}{RT}$ = 1950mol

3.19 Η μεταβολή του αέρα είναι ισόθερμη: $p_1V = p_2\dfrac{V}{3}$ άρα $p_2 = 3\text{atm}$

3.20 $p = \dfrac{nRT}{V} = 0{,}2\text{N/m}^2$

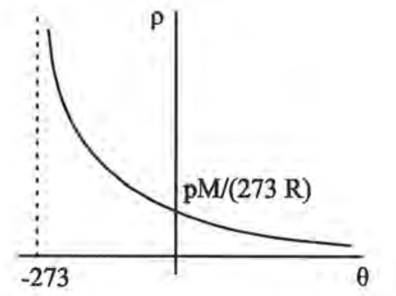
3.21 $\dfrac{p_1V_1}{T_1} = \dfrac{p_2V_2}{T_2}$ άρα $p_2 = 8\text{atm}$

3.22 $n = \dfrac{pV}{RT}$, $N = nN_A = 3{,}182\times10^8$ μόρια

3.23 $p = \dfrac{\rho}{M}RT$ άρα $\rho = 1{,}1\text{Kg/m}^3$

3.24 Η συνάρτηση είναι $\rho = \dfrac{pM}{R(273+\theta)}$

Το διάγραμμα της πυκνότητας σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία φαίνεται στο σχήμα 3.1



Σχ. 3.1

3.25 $p = \dfrac{\rho}{M}RT$

επομένως $M = 2\times10^{-3}\text{Kg/mol}$

3.26 $V_A = 22{,}4L,\ p_A = 1atm,\ T_A = 273K$

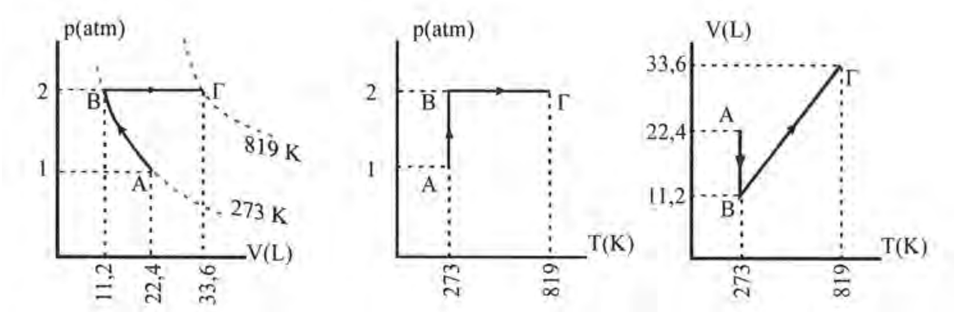
A→B: ισόθερμη μεταβολή $T_B = T_A$, $p_B = 2p_A$, $p_AV_A = (2p_A)V_B$ άρα

$V_B = 11{,}2L$

B→Γ: ισοβαρής μεταβολή $p_Γ = p_A$, $V_B = 3V_A$

$\dfrac{V_B}{T_A} = \dfrac{3V_B}{T_Γ}$ άρα $T_Γ = 819K$

Επομένως $V_Γ = 33{,}6L$ $p_Γ = 2\text{atm}$ $T_Γ = 819\text{K}$



Σχ. 3.2

Κινητική θεωρία

3.27 $\upsilon_{\mathrm{EN}} = \sqrt{\dfrac{3KT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{N_A m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$ επομένως

$\upsilon_{\mathrm{EN(He)}} = 1368\mathrm{m/s}$, $\upsilon_{\mathrm{EN(H_2O)}} = 644{,}8\mathrm{m/s}$

3.28 α) $\bar{\upsilon} = \dfrac{3+5+3\times 8+2\times 12+16+20}{9} = 10{,}2m/s$

β) $\upsilon_{\mathrm{EN}} = \sqrt{\dfrac{3^2+5^2+3\times 8^2+2\times 12^2+16^2+20^2}{9}} = 11{,}4m/s$

3.29 $\upsilon_{\mathrm{EN}} = \sqrt{\dfrac{3KT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{N_A m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}} = 12028m/s$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3.30 Ο δείκτης Μ αναφέρεται στο μπαλόνι, ο δείκτης Φ στη φιάλη

$N\, n_M = n_\Phi$ επομένως $N\dfrac{P_M V_M}{RT} = \dfrac{P_\Phi V_\Phi}{RT}$ άρα $N = 400$

3.31 Η μεταβολή του αέρα είναι ισοβαρής. Επομένως $\dfrac{V}{T} = \dfrac{V'}{T'}$

Αν Α το εμβαδόν της διατομής του σωλήνα θα είναι

$\dfrac{Ah}{T} = \dfrac{Ah'}{T'}$ άρα $h' = 36\mathrm{cm}$ και $h'\text{-}h = 9\mathrm{cm}$

3.32 α) $p_{\alpha\varepsilon\rho\acute{\iota}o\upsilon} = p_{atm} + p_{\varepsilon\mu\beta} = p_{atm} + \dfrac{w}{A} = 1{,}2\times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$

β) Η μεταβολή του αερίου είναι ισοβαρής: $\frac{V'}{T'} = \frac{V}{T}$ επομένως

$V' = 0{,}016\text{m}^3$

Η αύξηση του όγκου είναι V΄-V = $0{,}006\text{m}^3$

3.33 Ο αριθμός των mol του αέρα παραμένει σταθερός κατά την ψύξη του αερίου στους $T_2 = 273\text{K}$. Επομένως θα είναι:

$n = \frac{p_{\alpha\tau}V}{RT_1} = \frac{p'V}{RT_2}$ και $p' = 0{,}66\text{atm}$

3.34 $p_1 = p_2$ επομένως $\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}\frac{RT}{V_1} = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}\frac{RT}{V_2}$

ή $\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}\frac{M_{O_2}}{m_{O_2}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{Al_1}{Al_2}$, όπου Α το εμβαδόν της διατομής του εμβόλου.

Είναι επομένως $\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}\frac{M_{O_2}}{m_{O_2}} = \frac{l_1}{l_2} = 4$

3.35 Ο συνολικός αριθμός των mol στα δύο δοχεία παραμένει σταθερός, δηλαδή $n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$

επομένως $\frac{p_{\alpha\rho\chi}V_1}{RT} + \frac{p_{\alpha\rho\chi}V_2}{RT} = \frac{p_{\tau\varepsilon\lambda}V_1}{RT_1'} + \frac{p_{\tau\varepsilon\lambda}V_2}{RT_2'}$

από όπου βρίσκουμε $p_{\tau\varepsilon\lambda} = 1{,}26atm$

3.36 Η πίεση του αέρα στην περίπτωση (α) είναι $p_\alpha = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{w}{A}$ (1)

και στην περίπτωση (β) $p_\beta = p_{\alpha\tau\mu} - \frac{w}{A}$ (2)

Αν θεωρήσουμε τη μεταβολή του αερίου ισόθερμη, μπορούμε να γράψουμε $p_\alpha V_a = p_\beta V_\beta$ ή $p_\alpha A\, h_a = p_\beta A\, h_\beta$ ή $p_\alpha h_a = p_\beta h_\beta$ (3)

Η (3) λόγω των (1) και (2) δίνει $\left(p_{\alpha\tau\mu} + \frac{w}{A}\right)h_a = \left(p_{\alpha\tau\mu} - \frac{w}{A}\right)h_\beta$ από όπου βρίσκουμε $w = 20{,}26\text{N}$.

4 ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ισορροπία - αντιστρεπτές μεταβολές - έργο αερίου

4.1 Η πτώση ενός σώματος. Η εκπυρσοκρότηση ενός πυροβόλου.

4.2 Το έργο ενός αερίου είναι θετικό όταν εκτονώνεται και αρνητικό όταν συμπιέζεται.

4.3 β

4.4 Ένα αέριο, που βρίσκεται σε κάποιο δοχείο ασκεί δυνάμεις στα τοιχώματα του δοχείου. Έργο έχουμε μόνο αν μετατοπιστεί το σημείο εφαρμογής μιας δύναμης, δηλαδή όταν μετακινηθεί κάποιο τοίχωμα του δοχείου. Στην περίπτωση που περιγράφεται δεν συμβαίνει αυτό, επομένως το έργο του αερίου είναι μηδέν.

Θερμότητα - εσωτερική ενέργεια

4.5 β, γ, ε

4.6 δ

4.7 α

4.8 β

Ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

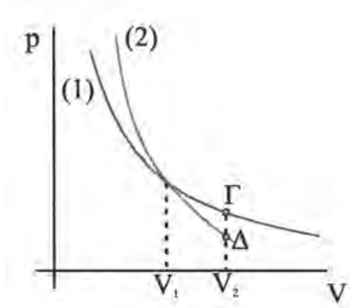
4.9 Σύμφωνα με τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, το ποσό θερμότητας που απορροφά ή αποβάλλει ένα θερμοδυναμικό σύστημα είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα 1) της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος και 2) του έργου που παράγει ή δαπανά το σύστημα.

4.10 α

4.11 1-γ, 2-δ, 3-α, 4-στ, 5-ε

4.12 Το έργο ενός αερίου είναι θετικό όταν το αέριο <u>εκτονώνεται</u>. Στην <u>αδιαβατική</u> αντιστρεπτή εκτόνωση το έργο του αερίου είναι ίσο με την ελάττωση της εσωτερικής του ενέργειας. Στην <u>ισόθερμη</u> αντιστρεπτή εκτόνωση το έργο του αερίου είναι ίσο με τη θερμότητα που απορροφά το αέριο.

4.13 Η αδιαβατική εκτόνωση του αερίου από όγκο V_1 σε όγκο V_2 συνεπάγεται μείωση θερμοκρασίας του, δηλαδή οδηγεί στην κατάσταση χαμηλότερης θερμοκρασίας (κατάσταση Δ). Επομένως στην αδιαβατική μεταβολή αντιστοιχεί η καμπύλη (2).

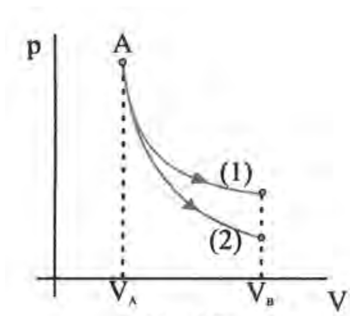


Σχ. 4.1

4.14 1. Επειδή $T_2 > T_1$ $\Delta U_{AB} > 0$
2. $\Delta U_{B\Gamma} < 0$ 3. Επειδή $T_A = T_\Gamma = T_1$
$\Delta U_{A\Gamma} = 0$

4.15 γ

4.16 Στο σχήμα 4.2 η καμπύλη (1) αντιστοιχεί στην ισόθερμη μεταβολή και η (2) στην αδιαβατική. Το έργο του αερίου είναι ίσο με το εμβαδόν από τη γραμμή του διαγράμματος μέχρι τον άξονα *V*. Επειδή το εμβαδόν κάτω από την ισόθερμη είναι μεγαλύτερο $W_{\text{ισόθερμης}} > W_{\text{αδιαβατικής}}$



Σχ. 4.2

4.17 Επειδή $T_A = T_B$ η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι μηδέν, με όποιον από τους δύο τρόπους πραγματοποιηθεί η μεταβολή. Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε $Q_1 = W_1$ και $Q_2 = W_2$

Το έργο και στις δύο μεταβολές είναι ίσο με εμβαδόν από τη γραμμή του διαγράμματος μέχρι τον άξονα V διάγραμμα p-V. Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά συμπεραίνουμε ότι $W_2 > W_1$ και επομένως $Q_2 > Q_1$.

4.18 α) Σε κάθε περίπτωση το έργο είναι ίσο με το εμβαδόν από τη γραμμή του διαγράμματος μέχρι τον άξονα V. Επομένως μεγαλύτερο έργο έχουμε κατά τη μεταβολή 1.
β) Επειδή η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση είναι ίδια σε όλες τις περιπτώσεις.
γ) Εφόσον το έργο του αερίου είναι μεγαλύτερο κατά τη μεταβολή 1 και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ίδια σε κάθε περίπτωση, από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο έπεται ότι στην 1η περίπτωση το αέριο απορροφά μεγαλύτερο ποσό θερμότητας.

4.19 α, β, γ, ε

Γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες των αερίων

4.20 Η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα εκφράζει το ποσό θερμότητας που πρέπει να προσφερθεί σε ένα mol αερίου ώστε να ανέβει η θερμοκρασία του κατά ένα βαθμό. Στα αέρια, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο και η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση. Η σχέση που συνδέει τις δυο ειδικές γραμμομοριακές θερμότητες είναι: $C_p = C_V + R$

4.21 α, γ, δ

4.22 α

4.23 Η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα εκφράζει το ποσό της θερμότητας που πρέπει να προσφερθεί σε ένα mol αερίου για να ανυψωθεί η θερμοκρασία του κατά ένα βαθμό.
Στην ισόχωρη θέρμανση ολόκληρο το ποσό θερμότητας που προσφέρεται σε ποσότητα αερίου ίση με ένα mol χρησιμοποιείται για την αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας. Στην ισοβαρή θέρμανση από το ποσό της προσφερόμενης θερμότητας ένα μέρος χρησιμοποιείται για την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας και ένα μέρος για την παραγωγή έργου. Η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας είναι και στις δύο περιπτώσεις ίδια. Επομένως $Q_p > Q_V$.

4.24 Τα μόρια των ιδανικών αερίων στερούνται δομής. Ένα τέτοιο μόριο έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.
Στην πραγματικότητα τα μόρια των αερίων έχουν δομή και εκτός από τη μεταφορική κίνηση μπορούν να περιστρέφονται και -σε υψηλή θερμοκρασία- να ταλαντώνονται. Όλες αυτές οι κινήσεις συνεισφέρουν στην εσωτερική ενέργεια του αερίου και πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τον υπολογισμό της.

Δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος - θερμικές μηχανές

4.25 δ

4.26 Κυρίως μέσω καυσαερίων τα οποία αποβάλλονται στο περιβάλλον. Κατά δεύτερο λόγο εξαιτίας της θέρμανσης της μηχανής.

4.27 α

4.28 β, ε, στ, ζ

4.29 Όχι. Πρέπει να λάβουμε υπόψη και το ποσό θερμότητας που αποβάλλει η μηχανή. Το ποσό θερμότητας που δαπανάται για τη λειτουργία της είναι ίσο με το ωφέλιμο έργο συν το ποσό θερμότητας που αποβάλλει η μηχανή στη δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας.

4.30 Όχι. Για τη λειτουργία μιας θερμικής μηχανής απαιτούνται δύο δεξαμενές θερμότητας (υψηλής και χαμηλής θερμοκρασίας). Μια θερμική μηχανή που θα χρησιμοποιούσε τη θάλασσα ως δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας θα έπρεπε να αποβάλλει θερμότητα σε κάποιο τμήμα του φυσικού περιβάλλοντος που θα βρισκόταν σε χαμηλότερη θερμοκρασία (δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας). Τέτοια δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας δεν υπάρχει στο φυσικό περιβάλλον.

4.31 δ, ε

4.32 Η απόδοση μιας θερμικής μηχανής δεν μπορεί να είναι <u>μεγαλύτερη</u> από την απόδοση της μηχανής Carnot που λειτουργεί ανάμεσα στις ίδιες θερμοκρασίες. Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής Carnot είναι

$$\underline{1-\frac{T_c}{T_h}}$$

Εντροπία

4.33 α, β, δ

4.34 Α-α, Β-β, Γ-γ

4.35 β, δ

4.36 Δεν αποτελεί εξαίρεση. Η εντροπία τείνει να αυξηθεί στα απομονωμένα θερμοδυναμικά συστήματα. Το ποτήρι με το νερό δεν αποτελεί απομονωμένο σύστημα. Το ψυγείο αφαιρεί θερμότητα από το σύστημα (ποτήρι - νερό) και τη μεταφέρει στο περιβάλλον.

4.37 Στην ισόθερμη ΑΒ ισχύει: $\Delta S_{AB} = nR\ln\frac{V_B}{V_A} \succ 0$.

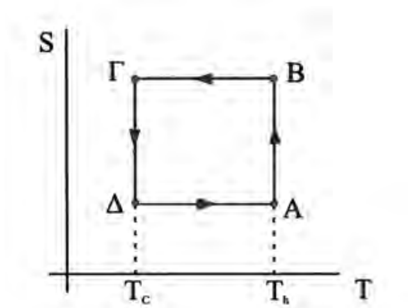
Στην αδιαβατική ΓΑ: $\Delta S_{\Gamma A} = 0$

Στην κυκλική: $\Delta S_{O\Lambda} = 0$ επομένως $\Delta S_{AB} + \Delta S_{B\Gamma} + \Delta S_{\Gamma A} = 0$ άρα

$\Delta S_{B\Gamma} = -\Delta S_{AB} \prec 0$

4.38 1-α, 2-ε, 3-α, 4-δ, 5-β

4.39 ΑΒ: Ισόθερμη εκτόνωση
ΒΓ: Αδιαβατική εκτόνωση
ΓΔ: Ισόθερμη συμπίεση
ΔΑ: Αδιαβατική συμπίεση.



Σχ. 4.3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Έργο αερίου - πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

4.40 Η μεταβολή του αερίου είναι ισοβαρής. Επομένως

$W = p(V_2 - V_1)$ = 243,1J

4.41 Η μεταβολή του αερίου είναι ισοβαρής και επομένως

$W = p\Delta V = nR\Delta T$ = 1663J

4.42 Στην ισόθερμη μεταβολή ισχύει $W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = nRT\ln\frac{p_1}{p_2}$

Επομένως $W = -nRTln2$ = -3458J

4.43 Το έργο είναι θετικό και ίσο με το εμβαδόν από τη γραμμή του διαγράμματος έως τον άξονα V, δηλαδή W = 4600J

4.44 $Q = W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1\ln 2$ = 702,1J

4.45 Η μεταβολή είναι ισοβαρής. Επομένως

α) $W = p_1\ \Delta V = nR\Delta T = \frac{p_1V_1}{T_1}(T_2 - T_1)$ = 202,6J

β) $\Delta U = Q - W$ = 506,5J

4.46 Πρόκειται για ισόθερμη συμπίεση. Ισχύει επομένως

$Q = W = nRT\ln\frac{V/2}{V} = -nRT\ln 2$ = -345,8J

4.47 Στην κυκλική μεταβολή $Q = W$ Το έργο υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται από γραμμή στο διάγραμμα p-V. Είναι W = 1500J.

Γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες ιδανικού αερίου

4.48 Στην ισόχωρη μεταβολή $Q = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}\Delta pV$ = 1320J

4.49 Στην ισοβαρή μεταβολή ισχύει: $Q = nC_p\Delta T$ (1)

$C_p = C_V + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$ (2)

η (1) γίνεται από τη (2) $Q = \frac{5}{2} nR\Delta T = \frac{5}{2} p\Delta V = 506,5J$

4.50 $\Delta U = nC_V \Delta T$ (1) $Q = nC_p \Delta T$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2)

$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{C_V}{C_p}$ επομένως $\frac{\Delta U}{Q} = \frac{1}{\gamma}$ άρα $\Delta U = 29,64J$

Θερμικές μηχανές - Κύκλος Carnot

4.51 $e = \frac{300MW}{900MW} = 0,333$ ή 33,3%

4.52 $e = \frac{W}{Q_h}$ άρα $Q_h = 800J$ και

$\left|Q_c\right| = Q_h - W = 600J$

4.53 Η μέγιστη, θεωρητικά, απόδοση του κινητήρα αντιστοιχεί στην απόδοση μιας μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών.

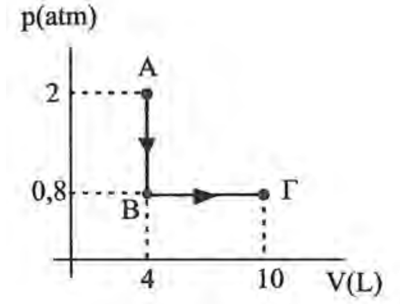
$e = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 0,87$

4.54 α) $e = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 0,4$

β) $Q_h = W_{AB} = nRT_h \ln\frac{V_B}{V_A} = 14406J$ $\quad W = eQ_h = 5762J$

Εντροπία

4.55 Έστω Α η αρχική κατάσταση, Β η κατάσταση στο τέλος της ισόχωρης μεταβολής και Γ η τελική κατάσταση.



Σχ. 4.4

Η μεταβολή ΑΒ είναι ισόχωρη:

$\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_A}{T_A}$ άρα $T_B = 160K$

Η μεταβολή ΒΓ είναι ισοβαρής.

Ισχύει επομένως $\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_\Gamma}{T_\Gamma}$

άρα $T_\Gamma = 400K$

	V	***p***	***T***
A	4L	2atm	400K
B	4L	0,8atm	160K
Γ	10L	0,8atm	400K

Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται πάνω στην ίδια ισόθερμη. Επομένως ισχύει $\Delta S_{A\Gamma} = \Delta S_{A\Gamma}^{\text{Ισόθερμης}}$ ή

$$\Delta S_{A\Gamma} = nR\ln\frac{V_\Gamma}{V_A} = \frac{p_A V_A}{T_A}\ln 2,5 = 1,86 J/K$$

4.56 $\Delta S_{AB} = nR\ln\frac{V_B}{V_A} = 1,83 J/K \quad \Delta S_{\Gamma A} = 0$

Στην κυκλική μεταβολή ισχύει $\Delta S = 0$, δηλαδή

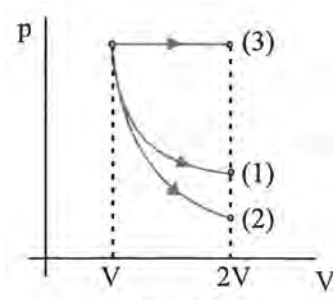
$\Delta S_{AB} + \Delta S_{B\Gamma} + \Delta S_{\Gamma A} = 0$ άρα $\Delta S_{B\Gamma} = -\Delta S_{AB} = -1,83 J/K$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4.57 α) Η καμπύλη (1) αντιστοιχεί στην ισόθερμη μεταβολή, η (2) στην αδιαβατική και η (3) στην ισοβαρή.

β) i. Σε κάθε περίπτωση το έργο είναι ίσο με το εμβαδόν από τη γραμμή του διαγράμματος ως τον άξονα του όγκου. Επομένως το έργο είναι το μεγαλύτερο στην περίπτωση της ισοβαρούς μεταβολής.

ii. Το ελάχιστο ποσό θερμότητας αντιστοιχεί στην αδιαβατική μεταβολή ($Q_2 = 0$)



Σχ. 4.5

4.58 α) Η κατάσταση Α αντιστοιχεί σε θερμοκρασία $T_A = 273K$ (το αέριο βρίσκεται σε stp).

Για την (ισόχωρη) μεταβολή ΑΒ ισχύει $\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B}$ επομένως

$T_B = 546K$

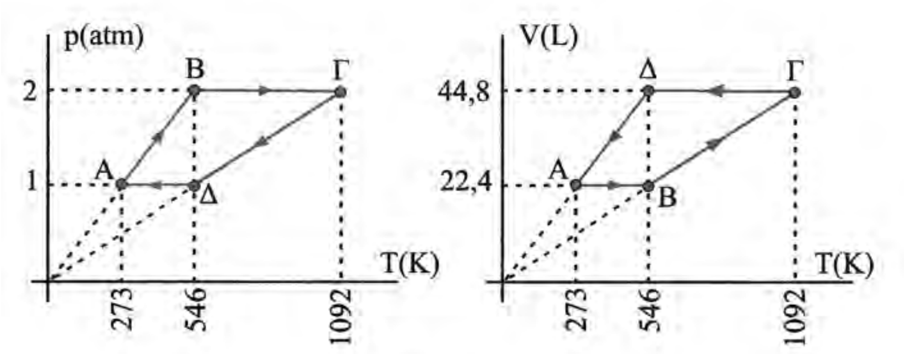
Για την (ισοβαρή) μεταβολή ΒΓ ισχύει $\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_\Gamma}{T_\Gamma}$ επομένως

$T_\Gamma = 1092K$

Τέλος, για την (ισόχωρη) μεταβολή ΓΔ ισχύει $\frac{p_\Gamma}{T_\Gamma} = \frac{p_\Delta}{T_\Delta}$ επομένως

$T_\Delta = 546K$

Στο σχήμα 4.6 αποδίδεται η κυκλική μεταβολή σε άξονες p-T και V-T



Σχ. 4.6

β) Το έργο του αερίου είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από την κλειστή γραμμή στο διάγραμμα p-V

$W = 22,4 atm\ L = 2269 J$

4.59 Το αέριο θερμαίνεται με σταθερή πίεση $p_{\alpha\varepsilon\rho} = \frac{W}{A} + p_{\alpha\tau}$ (1)

Αν ο τελικός όγκος του αέριου είναι V΄, θα ισχύει $\frac{V'}{T'} = \frac{V}{T}$ ή

$V' = \frac{T'}{T} V$ (2)

Το έργο κατά την ισοβαρή μεταβολή είναι $W = p_{\alpha\varepsilon\rho}\left(V' - V\right)$

από (1) και (2) $W = \left(\frac{W}{A} + p_{\alpha\tau}\right)\left(\frac{T'}{T}V - V\right)$ ή

$$W = \left(\frac{W}{A} + p_{\alpha\tau}\right)\frac{\theta' - \theta}{273 + \theta} V$$

4.60 α) Η μεταβολή είναι αδιαβατική επομένως ισχύει $p_2 V_2^{\frac{3}{2}} = p_1 V_1^{\frac{3}{2}}$

άρα $V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{3}} V_1 = 125^{\frac{2}{3}} m^3 = 25 m^3$

Από τις σχέσεις $p_2 V_2 = nRT_2 \quad p_1 V_1 = nRT_1$

Διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε $\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, από όπου $T_2 = 60K$

β) $W = \dfrac{p_2V_2 - p_1V_1}{1-\gamma} = 2\cdot 10^7\, J$

4.61 Στο αέριο περιέχονται $n = \dfrac{N}{N_A}$ mol i) Θέρμανση υπό σταθερό όγκο:

$\Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T = 3105{,}8J \quad W = 0 \quad Q = \Delta U$

ii) Θέρμανση υπό σταθερή πίεση:

ΔU η ίδια $W = p\Delta V = nR\Delta T = 2070{,}6J \quad Q = W + \Delta U = 5176{,}4J$

4.62 $e = 1 - \dfrac{T_c}{T_h} = 0{,}25$

$e = \dfrac{W}{Q_h}$ ή $e = \dfrac{Pt}{Q_h}$ άρα $Q_h = 29{,}828KWh$

4.63 α) $V_A = \dfrac{nRT_A}{p_A} = 8L$

Η μεταβολή ΑΒ είναι ισόθερμη, επομένως $T_B = T_A$ και

$p_AV_A = p_BV_B$ από όπου $V_B = 3{,}2L$

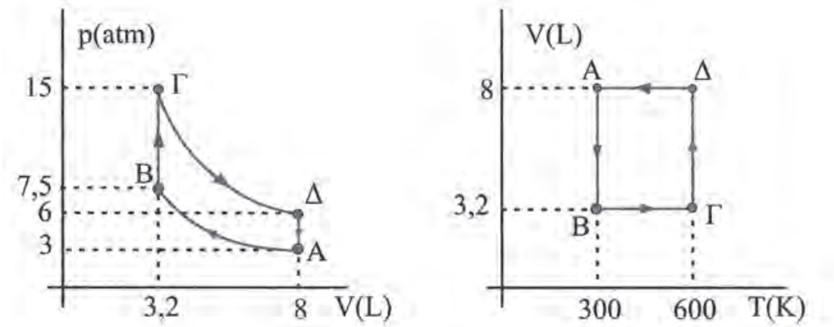
Η μεταβολή ΒΓ είναι ισόχωρη $V_\Gamma = V_B$ και

$\dfrac{p_B}{T_B} = \dfrac{p_\Gamma}{T_\Gamma}$ από όπου $T_\Gamma = 600K$

Η μεταβολή ΓΔ είναι ισόθερμη, επομένως $T_\Delta = T_\Gamma$

Τέλος, η ΔΑ είναι ισόχωρη $V_\Delta = V_A$

	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
p	3atm	7,5atm	1,5atm	6atm
V	8L	3,2L	3,2L	8L
T	300K	300K	600K	600K



Σχ. 4.7

β) $W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = -2228,27J$, $W_{\text{ΒΓ}} = 0$

$W_{\Gamma\Delta} = nRT_\Gamma \ln\frac{V_\Delta}{V_\Gamma} = +4456,55J$, $W_{\Delta\text{A}} = 0$, $W_{o\lambda} = 2228,3J$

γ) $Q_{AB} < 0$, $Q_{\Delta\text{A}} < 0$

$Q_h = Q_{\text{ΒΓ}} + Q_{\Gamma\Delta} = nC_V\left(T_\Gamma - T_\text{B}\right) + W_{\Gamma\Delta} = 8104,31J$

$e = \frac{W_{o\lambda}}{Q_h} = 0,275$

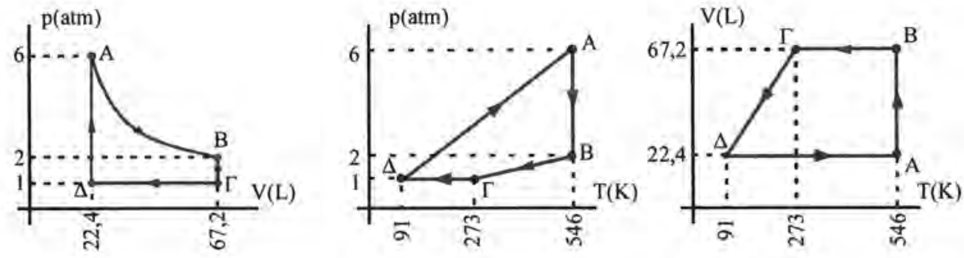
4.64 α) Η μεταβολή ΑΒ είναι ισόθερμη επομένως $p_BV_B = p_AV_A$ από όπου $p_B = 2atm$

Η μεταβολή ΒΓ είναι ισόχωρη και ισχύει $\frac{p_\Gamma}{T_\Gamma} = \frac{p_\text{B}}{T_\text{B}}$ άρα $p_\Gamma = 1atm$

Τέλος, η ΓΔ είναι ισοβαρής. Από τη σχέση $\frac{V_\Delta}{T_\Delta} = \frac{V_\Gamma}{T_\Gamma}$ βρίσκουμε

$T_\Delta = 91K$

	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
p	6atm	2atm	1atm	1atm
V	22,4L	67,2L	67,2L	22,4L
T	546K	546K	273K	91K



Σχ. 4.8

β) $W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 14931{,}84J$

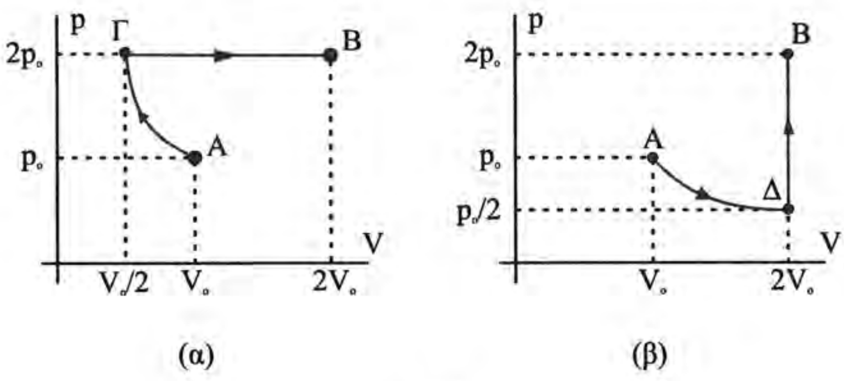
$W_{\text{ΒΓ}} = 0$

$W_{\Delta\text{Α}} = 0$

$W_{\Gamma\Delta} = p_\Gamma\left(V_\Delta - V_\Gamma\right) = -4524{,}8J$

$W_{o\lambda} = W_{\text{ΑΒ}} + W_{\text{ΒΓ}} + W_{\Gamma\Delta} + W_{\Delta\text{Α}} = 10407J$

4.65 α) Έστω Γ η κατάσταση στο τέλος της ισόθερμης μεταβολής. Το αέριο στην κατάσταση αυτή θα έχει πίεση $p_\Gamma = p_\text{Β} = 2p_o$ και όγκο $V_\Gamma = \frac{p_A V_A}{p_\Gamma} = \frac{p_o V_o}{2p_o} = \frac{V_o}{2}$ η μεταβολή παριστάνεται στο σχήμα 4.9α



Σχ. 4.9

$$W_{\text{ΑΓ}} = nRT_{\text{Α}} \ln\frac{V_{\Gamma}}{V_{\text{Α}}} = p_o V_o \ln\frac{V_o/2}{V_o} = -p_o V_o \ln 2 = -0,6931 p_o V_o$$

$$W_{\Gamma\text{Β}} = p_{\Gamma}\left(V_{\text{Β}} - V_{\Gamma}\right) = 2p_o\left(2V_o - \frac{V_o}{2}\right) = 3p_o V_o$$

$$W_{\text{ΟΛ}} = W_{\text{ΑΓ}} + W_{\Gamma\text{Β}} = 2,3 p_o V_o$$

$$Q_{\text{ΑΓ}} = W_{\text{ΑΓ}}$$

$$Q_{\text{ΒΓ}} = nC_p \Delta T = n\left(C_V + R\right)\Delta T = n\left(\frac{3}{2} + 1\right)R\,\Delta T$$

ή $Q_{\text{ΒΓ}} = \dfrac{5}{2} nR\Delta T = \dfrac{5}{2}\left(p_B V_B - p_{\Gamma} V_{\Gamma}\right) = 7,5 p_o V_o$

$$Q = Q_{\text{ΑΓ}} + Q_{\Gamma\text{Β}} = 6,8 p_o V_o$$

β) Έστω Δ η κατάσταση στο τέλος της ισόθερμης μεταβολής. Στην κατάσταση αυτή το αέριο έχει όγκο $V_{\Delta} = 2V_o$

$p_A V_A = p_{\Delta} V_{\Delta}$ ή $p_{\Delta} = \dfrac{p_A V_A}{V_{\Delta}} = \dfrac{p_o}{2}$

Η μεταβολή παριστάνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.9β

$W_{\text{Α}\Delta} = nRT_A \ln\dfrac{V_{\Delta}}{V_{\text{Α}}} = p_o V_o \ln\dfrac{2V_o}{V_o} \approx 0,7 p_o V_o \qquad W_{\Delta\text{Α}} = 0$

$$W_{\text{ΟΛ}} = 0,7 p_o V_o$$

$$Q_{\text{Α}\Delta} = W_{\text{Α}\Delta}$$

$$Q_{\Delta\text{Β}} = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2}\left(p_B V_B - p_{\Delta} V_{\Delta}\right) = 4,5 p_o V_o$$

$$Q_{\text{ΟΛ}} = 5,2 p_o V_o$$

4.66 Η μεταβολή παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα του σχήματος 4.10. Το έργο του αερίου είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραμμή του διαγράμματος στο σχήμα 4.10, δηλαδή

$W = 2p2V = 4pV$ (1)

$Q_h = Q_{\text{ΑΒ}} + Q_{\text{ΒΓ}} = nC_V\left(T_B - T_A\right) + nC_p\left(T_{\Gamma} - T_{\text{Β}}\right)$ (2)

Αλλά $C_p = C_V + R$ (3)

και $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ ή $\dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{5}{3}$ (4)

Από (3) και (4) προκύπτει $C_V = \dfrac{3}{2}R$

και $C_p = \dfrac{5}{2}R$ (5)

Η (2) γίνεται από τις σχέσεις (5)

$$Q_h = \frac{3}{2}nR\left(T_B - T_A\right) + \frac{5}{2}nR\left(T_\Gamma - T_B\right)$$

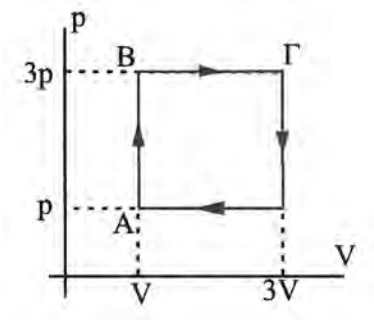
ή

$$Q_h = \frac{3}{2}\left(p_B V_B - p_A V_A\right) + \frac{5}{2}\left(p_\Gamma V_\Gamma - p_B V_B\right) \text{ ή}$$

$$Q_h = \frac{3}{2}V_A\left(p_B - p_A\right) + \frac{5}{2}p_B\left(V_\Gamma - V_B\right)$$

ή $Q_h = \dfrac{3}{2}2pV + \dfrac{5}{2}3p\ 2V = 18pV$ (6)

$e = \dfrac{W}{Q_h}$ και από (1) και (6) $e = \dfrac{4pV}{18pV} = \dfrac{2}{9}$



Σχ. 4.10

4.67 Στην αρχική κατάσταση Α του αερίου θα ισχύουν $p_A = 1\text{atm}$, $V_A = 22,4L,\ T_A = 273K$

Έστω Β η κατάσταση στο τέλος της ισοβαρούς μεταβολής.

$\dfrac{V_B}{T_B} = \dfrac{V_A}{T_A}$ άρα $T_B = 546K$

Έστω Γ η κατάσταση στο τέλος της ισόχωρης.

$\dfrac{p_\Gamma}{T_\Gamma} = \dfrac{V_B}{T_B}$ άρα $T_\Gamma = 273K$

	Α	**Β**	**Γ**
V	22,4L	44,8L	44,8L
p	1atm	1atm	0,5atm
T	273K	546 K	273K

Η μεταβολή παριστάνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.11

α) $W = W_{AB} + W_{B\Gamma}$ επειδή

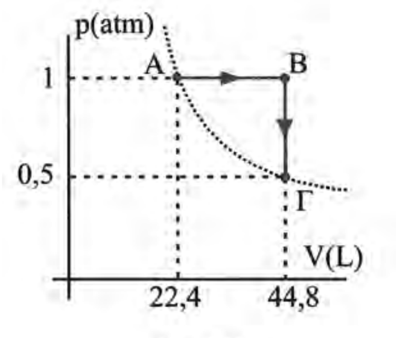
$W_{B\Gamma} = 0$,

$W = W_{AB} = p_A(V_B - V_A) = 2271J$

β) Επειδή $T_A = T_\Gamma$ $\quad \Delta U_{A\Gamma} = 0$

Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο

$Q = W = 2271J$



Σχ. 4.11

γ) Εφόσον $T_A = T_\Gamma$ οι καταστάσεις Α και Γ βρίσκονται πάνω στην ίδια ισόθερμη, επομένως

$$\Delta S_{A\Gamma} = \Delta S_{A\Gamma}^{\text{Ισόθερμης}} = nR\ln\frac{V_\Gamma}{V_A} = 5,76J/K$$

4.68 Στην αρχική κατάσταση (Α) του αερίου ισχύουν

$p_A = 1\text{atm}, \; V_A = 22,4L, \; T_A = 273K$

Έστω Β η κατάσταση στο τέλος της αδιαβατικής μεταβολής και Γ η τελική κατάσταση του αερίου.

Για την αδιαβατική μεταβολή ΑΒ ισχύει:

$$p_B V_B^{\frac{3}{2}} = p_A V_A^{\frac{3}{2}} \text{ επομένως } V_B = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{2}{3}} V_A = 5,6L$$

Ισχύουν επίσης $p_B V_B = nRT_B$ (1) και $p_A V_A = nRT_A$ (2)

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

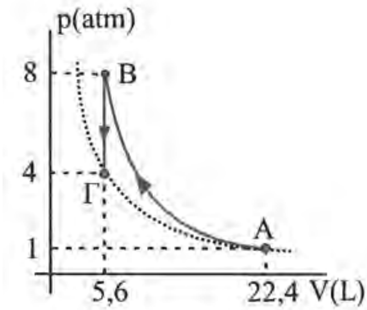
$$T_B = T_A \frac{p_B V_B}{p_A V_A} = 546K$$

Τέλος, για την (ισόχωρη) μεταβολή ΒΓ ισχύει

$\dfrac{p_\Gamma}{T_\Gamma} = \dfrac{p_B}{T_B}$ από την οποία προκύπτει $T_\Gamma = 273K$

	A	**B**	**Γ**
V	22,4L	5,6L	5,6L
p	1atm	8atm	4atm
T	273K	546K	273K

Η μεταβολή παριστάνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.12



Σχ. 4.12

α) $\Delta U_{AB} = nC_V\left(T_B - T_A\right) = 4539,5J$

$\Delta U_{B\Gamma} = nC_V\left(T_\Gamma - T_B\right) = -4539,5J$

$\Delta U_{O\Lambda} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{B\Gamma} = 0$

β) Η μεταβολή ΑΒ είναι αδιαβατική επομένως $\Delta S_{AB} = 0$

Οι καταστάσεις Α και Γ βρίσκονται πάνω στην ίδια ισόθερμη, αφού $T_A = T_\Gamma$. Επομένως

$$\Delta S_{A\Gamma} = \Delta S_{A\Gamma}^{\text{Ισόθερμης}} = nR\ln\frac{V_\Gamma}{V_A} = -11,52J/K$$

Αλλά $\Delta S_{A\Gamma} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{B\Gamma}$ επομένως $\Delta S_{B\Gamma} = \Delta S_{A\Gamma} = -11,52J/K$

4.69 Στην ισόθερμη εκτόνωση ΑΒ ισχύει

$p_A V_A = p_B V_B$ επομένως $p_B = 0,75\times10^5\,N/m^2$

Για την ισόχωρη ψύξη ΒΓ, που ακολουθεί, ισχύει $\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_\Gamma}{T_\Gamma}$ (1)

Για την αδιαβατική εκτόνωση ΓΑ μπορούμε να γράψουμε

$$p_\Gamma V_\Gamma^\gamma = p_A V_A^\gamma \text{ ή } p_\Gamma = p_A\left(\frac{V_A}{V_\Gamma}\right)^\gamma$$

Επειδή $V_\Gamma = V_B$ $p_\Gamma \approx 0,3\times10^5\,N/m^2$

Από την (1) προκύπτει ότι $T_\Gamma = 240K$

	A	**B**	**Γ**
V	0,04m^3	0,16m^3	0,16m^3
p	3×10^5 N/m^2	0,75×10^5 N/m^2	0,3×10^5 N/m^2
T	600K	600K	240K

Στο διάγραμμα του σχήματος 4.13 παριστάνεται γραφικά η μεταβολή.

α) $U_A = \frac{3}{2}nRT_A$ ή

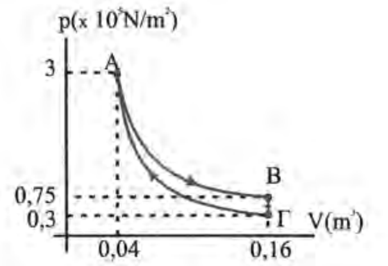
$$U_A = \frac{3}{2} p_A V_A = 18000J$$

$$U_B = U_A$$

$$U_\Gamma = \frac{3}{2} nRT_\Gamma = \frac{3}{2} p_\Gamma V_\Gamma = 7200J$$

β) $W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A}$ ή

$$W_{AB} = p_A V_A \ln 4 = 16632J$$



Σχ. 4.13

$$W_{B\Gamma} = 0$$

$$W_{\Gamma A} = \frac{p_A V_A - p_\Gamma V_\Gamma}{1-\gamma} = -10800J$$

$$W_{O\Lambda} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} = 5832J$$

γ) $\Delta S_{AB} = nR\ln\frac{V_B}{V_A} = \frac{p_A V_A}{T_A}\ln 4 = 27,72J/K$

$$\Delta S_{\Gamma A} = 0$$

$\Delta S_{O\Lambda} = 0$ επομένως $\Delta S_{AB} + \Delta S_{B\Gamma} + \Delta S_{\Gamma A} = 0$

και $\Delta S_{B\Gamma} = -27,72J/K$

4.70 Η πίεση του αερίου είναι $p = p_{at} + \frac{mg}{A} = 2,013\times10^5 \frac{N}{m^2}$

Η μεταβολή είναι ισοβαρής

α) $W = p\ \Delta V$ (1)

$\Delta U = \frac{3}{2}nR\ \Delta T = \frac{3}{2}p\ \Delta V$ (2) $Q = \Delta U + W$ (3)

Από (1) και (2) η (3) γίνεται: $Q = p\ \Delta V + \frac{3}{2}p\ \Delta V = \frac{5}{2}p\ \Delta V$ (4)

Αν x η μετατόπιση του εμβόλου $\Delta V = Ax$ και από την (4)

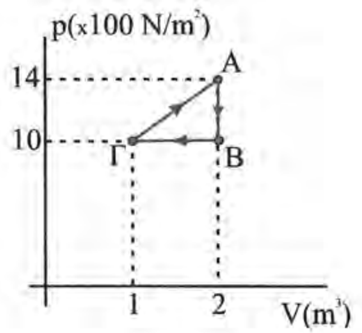
$$x = \frac{2Q}{5pA} \approx 0,1m$$

β) Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει

$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{3}{5}$ οπότε $\Delta U = \frac{3}{5}Q = 30J$

4.71 Από τη σχέση $p = 600 + 400V$ για $V_A = 2m^3$ έχουμε $p_A = 1400 N/m^2$ και για $V_\Gamma = 1m^3$, $p_\Gamma = 1000 N/m^2$

Η μεταβολή παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα του σχήματος 4.14



Σχ. 4.14

α) Το έργο του αερίου δίνεται από το εμβαδόν που περικλείει η γραμμή του διαγράμματος: $W = 200J$ (1)

β) $Q_h = Q_{\Gamma A} = W_{\Gamma A} + \Delta U_{\Gamma A}$ (2)

Το $W_{\Gamma A}$ είναι ίσο με το εμβαδόν από τη γραμμή ΓΑ στο διάγραμμα του σχήματος 4.14 μέχρι τον άξονα *V:* $W_{\Gamma A} = 1200J$

$$\Delta U_{\Gamma A} = \frac{3}{2} nR\left(T_A - T_\Gamma\right) = \frac{3}{2}\left(p_A V_A - p_\Gamma V_\Gamma\right) = 2700J$$

Επομένως από (2) $Q_h = 3900J$ (3)

$$e = \frac{W}{Q_h} = 0,051$$

γ) $Q_{AB} = nC_V\left(T_B - T_A\right) = C_V\left(\frac{p_B V_B}{R} - \frac{p_A V_A}{R}\right) < 0$

Χωρίζουμε τη μεταβολή ΑΒ σε απειροστά μικρές μεταβολές, τόσο μικρές, ώστε σε κάθε μια από αυτές η θερμοκρασία να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή.

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} + \dots$$

Επειδή οι αριθμητές είναι αρνητικές ποσότητες $\Delta S_{AB} < 0$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι $\Delta S_{B\Gamma} < 0$ και $\Delta S_{\Gamma A} > 0$

4.72 Από τη σχέση $p = -\frac{2}{3}\times 10^8 V + 6\times 10^5$

για $V_A = 6\times 10^{-3} m^3$ έχουμε

$p_A = 2\times 10^5 N/m^2$ και για

$V_B = 3\times 10^{-3} m^3$, $p_B = 4\times 10^5 N/m^3$

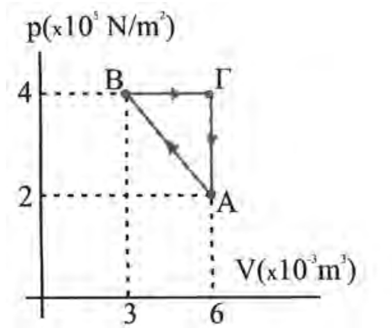
Η μεταβολή παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα του σχήματος 4.15

α) Το έργο του αερίου, το οποίο είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΓ), είναι $W = 300J$

β) $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $p_A V_A = p_B V_B$.

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στην ίδια ισόθερμη $T_A = T_B$. Επομένως $\Delta U_{AB} = 0$. Το W_{AB} είναι αρνητικό διότι το αέριο συμπιέζεται, και ίσο κατ' απόλυτη τιμή με το εμβαδόν που οριοθετείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τον άξονα των V.



Σχ. 4.15

Επομένως $Q_{AB} = W_{AB} = -\frac{\left(2\times10^5 + 4\times10^5\right)}{2} 3\times10^{-3} = -900J$

$Q_{B\Gamma} = nC_p\left(T_\Gamma - T_B\right) = n\left(C_V + R\right)\left(T_\Gamma - T_B\right)$ ή

$Q_{B\Gamma} = n\left(\frac{3}{2}+1\right)R\left(T_\Gamma - T_B\right) = \frac{5}{2}p_B\left(V_\Gamma - V_B\right) = 3000J$

$Q_{\Gamma A} = nC_V\left(T_A - T_\Gamma\right) = n\frac{3}{2}R\left(T_A - T_\Gamma\right) = \frac{3}{2}\left(p_A V_A - p_\Gamma V_\Gamma\right) = -1800J$

γ) Επειδή $T_A = T_B$ $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AB}^{\text{Ισόθερμης}} = nR\ln\frac{V_B}{V_A} = -1,4J/K$

$\Delta S_{ΟΛ} = 0$ ή $\Delta S_{AB} + \Delta S_{B\Gamma} + \Delta S_{\Gamma A} = 0$ άρα

$\Delta S_{\Gamma A} = -\Delta S_{AB} - \Delta S_{B\Gamma} = -2,1J/K$

5 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ηλεκτρική ροή - νόμος του Gauss

5.1 α

5.2 Το συνολικό φορτίο που περικλείει η επιφάνεια είναι αρνητικό

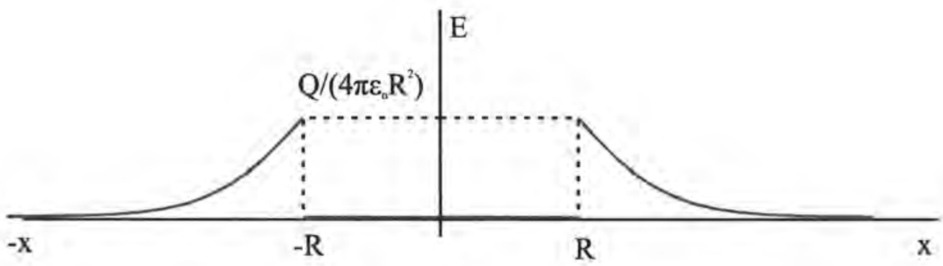
5.3 $\Phi_1 = \frac{4Q}{\varepsilon_o}$ $\Phi_2 = \frac{4Q}{\varepsilon_o}$ $\Phi_3 = -\frac{Q}{\varepsilon_o}$ $\Phi_4 = 0$

5.4 α, δ

5.5 β

5.6 β, γ

5.7



Σχ. 5.1

Δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου - ενέργεια συστήματος σημειακών φορτίων

5.8 β

5.9 Εάν μετακινηθεί ένα σημειακό φορτίο q από το σημείο Α στο σημείο Β, μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, το έργο της δύναμης του πεδίου είναι ίσο με το γινόμενο της διαφοράς δυναμικού των δύο σημείων επί το φορτίο που μετακινείται. Το έργο αυτό είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθεί το φορτίο κατά τη μετακίνησή του από το Α στο Β. Τέτοια πεδία, όπως το ηλεκτρικό, που το έργο τους εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση του σώματος που μετακινείται ονομάζονται διατηρητικά.

5.10 δ

5.11 Το δυναμικό του πεδίου σε κάποιο σημείο που δημιουργεί σημειακό φορτίο είναι αντίστροφα ανάλογο με την απόσταση του σημείου από το φορτίο. Επομένως σωστή απάντηση είναι η α.

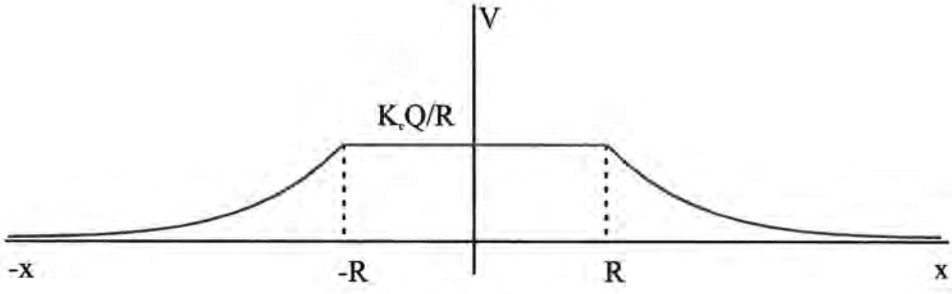
5.12 β

5.13 β

5.14 Κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής τα δυναμικά ελαττώνονται. Το πεδίο ασκεί στο φορτίο δύναμη με φορά αντίθετη από τη φορά των δυναμικών γραμμών. Επομένως το φορτίο θα κινηθεί προς τα μεγαλύτερα δυναμικά, δηλαδή σωστή απάντηση είναι η α.

5.15 Βλέπε στο βιβλίο του μαθητή στο τέλος της σελίδας 153.

5.16



Σχ. 5.2

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

5.17 β

5.18 γ

5.19 γ

5.20 α, ε

5.21 α, β, γ

5.22 1-γ 2-α

5.23 Βλέπε στο βιβλίο του μαθητή σελίδες 163-164.

Πυκνωτής και διηλεκτρικά

5.24 δ

5.25 1-β 2-γ 3-α

5.26 γ

5.27 1-β 2-γ 3-α

5.28 1-β 2-β 3-α

5.29 γ, δ

5.30 Βλέπε στο βιβλίο του μαθητή στη σελίδα 172.

5.31 Αν ένας μονωτής τοποθετηθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο πολύ μεγάλης έντασης είναι πιθανό να καταστραφούν οι μονωτικές του ιδιότητες και να γίνει αγωγός. Η χαρακτηριστική τιμή της έντασης στην οποία αντέχει ένας μονωτής ονομάζεται διηλεκτρική αντοχή και μετριέται σε V/m

5.32 Βλέπε στο βιβλίο του μαθητή στη σελίδα 171.

5.33 Βλέπε στο βιβλίο του μαθητή στη σελίδα 172.

5.34 1-Β 2-Δ 3-Γ 4-Β 5-Α

Πεδίο βαρύτητας της Γης

5.35 Ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του, ονομάζεται το σταθερό πηλίκο της δύναμης που θα ασκηθεί σε μια μάζα m αν βρεθεί στο σημείο αυτό, προς τη μάζα. Η ένταση είναι διανυσματικό μέγεθος και έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη. Μονάδα έντασης είναι το 1N/Kg ή $1m/s^2$.

5.36 α, β, δ

5.37 Όταν μια μάζα κινείται στο πεδίο βαρύτητας το έργο της δύναμης του πεδίου είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα, εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος. Το πεδίο βαρύτητας, όπως και το ηλεκτρικό πεδίο, είναι πεδίο διατηρητικό. Την ιδιότητα αυτή του πεδίου βαρύτητας την εκμεταλλευόμαστε για να ορίσουμε το μέγεθος δυναμικό. Ονομάζουμε δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ένα σημείο του το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση μιας μάζας m από το σημείο αυτό στο άπειρο προς τη μάζα m.

5.38 Η ελκτική δύναμη που δέχεται από τη Γη ($F = G\dfrac{M_\Gamma m}{r^2}$) αυξάνεται, επομένως θα αυξάνεται και η επιτάχυνσή του $a = F/m$. Σωστή απάντηση είναι η γ.

5.39 α, γ, δ

5.40 α, ε

5.41 $g = \dfrac{g_o R_\Gamma^2}{\left(R_\Gamma + h\right)^2}$ $\quad V = -\dfrac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}$ $\quad \upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{2g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}}$

5.42 Το πεδίο βαρύτητας είναι διατηρητικό. Η Γη στρέφεται γύρω από τον Ήλιο εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης που δέχεται, επομένως η μηχανική της ενέργεια διατηρείται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ηλεκτρική ροή - νόμος του Gauss

5.43 α) $\Phi = EA\ \sigma\upsilon\nu 0^o = E\pi r^2 = 62{,}8 Nm^2/C$

β) $\Phi = EA\ \sigma\upsilon\nu 90^o = 0$

γ) $\Phi = EA\ \sigma\upsilon\nu 60^o = \dfrac{E\pi r^2}{2} = 31{,}4 Nm^2/C$

5.44 $\Phi = \dfrac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o} = 1{,}13\times 10^6\ Nm^2/C$

5.45 $\Phi = \dfrac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o}$ άρα $Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = 17{,}7\times 10^{-12} C$

5.46 Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την κλειστή επιφάνεια που ορίζεται από τη στεφάνη και το δίχτυ της απόχης είναι μηδέν, γιατί στο εσωτερικό της απόχης δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο.

$\Phi = 0$ ή $\Phi_{\delta\acute{\iota}\chi.} + \Phi_{\sigma\tau\varepsilon\varphi.} = 0$ άρα

$$\Phi_{\delta\acute{\iota}\chi.} = -\Phi_{\sigma\tau\varepsilon\varphi.} = -E\pi R^2$$

5.47 Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια σφαίρας που έχει κέντρο το κέντρο της Γης και ακτίνα R ελάχιστα μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης ($R \approx R_\Gamma$)

$$\Phi = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o} \text{ ή } -E4\pi R_\Gamma^2 = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o} \text{ άρα } Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = -455295C$$

5.48 Ο λεπτός σφαιρικός φλοιός, που είναι φορτισμένος, ομοιόμορφα συμπεριφέρεται εξωτερικά σαν όλο του το φορτίο να είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο του (σημειακό φορτίο), ενώ στο εσωτερικό του δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο (βλέπε παράδειγμα 5-1 σελίδα 148 στο βιβλίο του μαθητή). Επομένως:

α) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r_1^2} = 1{,}35\times10^6 N/C$ β) μηδέν

5.49 Αφού το φορτίο είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο της σφαίρας το φορτίο ανά μονάδα όγκου είναι $\rho = \frac{Q}{V_R}$ όπου V_R ο όγκος της σφαίρας.

Το φορτίο που περικλείεται από σφαίρα ακτίνας r ($r \prec R$) που έχει το ίδιο κέντρο με τη φορτισμένη σφαίρα είναι $q = \rho V_r$ επομένως:

$$q = \frac{Q}{V_R}V_r = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}Q = \left(\frac{r}{R}\right)^3 Q$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για τη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας *r*:

α) $\Phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \approx 10^4 Nm^2/C$

β) $\Phi_2 = \dfrac{q}{\varepsilon_o} = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 \approx 29,2\times10^4\, Nm^2 / C$

γ) $\Phi_3 = \dfrac{q}{\varepsilon_o} = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 \approx 69,4\times10^4\, Nm^2 / C$

δ, ε) Αν η ακτίνα της σφαίρας r είναι μεγαλύτερη της R , το φορτίο που περικλείει η R είναι Q. Από το νόμο του Gauss προκύπτει ότι για κάθε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r > R$ θα είναι

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_o} = 135\times10^4\, Nm^2 / C$$

5.50 α) $E_1 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_o}\dfrac{\lambda}{r_1} = 720\times10^3\, N / C$ (βλέπε παράδειγμα 5.2 στη σελίδα 149 του βιβλίου του μαθητή)

β) $E_2 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_o}\dfrac{\lambda}{r_2} = 360\times10^3\, N / C$

Δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου - ενέργεια συστήματος φορτίων

5.51 $V = K_c\dfrac{Q}{r}$ επομένως $r = K_c\dfrac{Q}{V} = 6m$

5.52 Έστω O το σημείο στο οποίο βρίσκεται το φορτίο.

$V_A = K_c\dfrac{Q}{(OA)} = 90V \qquad V_B = K_c\dfrac{Q}{(OB)} = 180V$

$V_A - V_B = -90V$

5.53 $E = K_c\dfrac{Q}{r^2}\,(1) \qquad V = K_c\dfrac{Q}{r}\,(2)$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε $\dfrac{V}{E} = r = 3m$

και από τη (2) έχουμε: $Q = \dfrac{Vr}{K_c} = 6\times10^{-8} C$

5.54 $W_{\mathrm{B\Gamma}} = (V_B - V_\Gamma)q = \left(K_c \dfrac{Q}{r_1} - K_c \dfrac{Q}{r_2}\right)q = K_c Q q\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = 13,5\times10^{-3} J$

5.55 α) Τα φορτία Q_1 και Q_2 δημιουργούν στο σημείο Α πεδία με δυναμικά

$V_1^{\mathrm{A}} = K_c \dfrac{Q_1}{(\mathrm{AB})} = 12000V$ και $V_2^{\mathrm{A}} = K_c \dfrac{Q_1}{(\mathrm{B\Gamma})} = 11250V$ αντίστοιχα

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας $V_A = V_1^A + V_2^A = 23250V$

β) $(\mathrm{B\Gamma}) = \sqrt{(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2} = 5cm$ άρα $(\mathrm{MB}) = (\mathrm{M\Gamma}) = 2,5cm$

$V_1^M = K_c \dfrac{Q_1}{(\mathrm{MB})} = 14400V \qquad V_2^M = K_c \dfrac{Q_2}{(\mathrm{M\Gamma})} = 18000V$

$V_M = V_1^M + V_2^M = 32400V$

β) $W_{AM} = (V_A - V_M)q = -183\times10^{-8} J$

5.56 Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$U = K_c \dfrac{q^2}{a} + K_c \dfrac{q^2}{a} + K_c \dfrac{q^2}{a} = 3K_c \dfrac{q^2}{a} = 36\times10^{-2} J$

5.57 α) Έστω ότι το σημείο Γ από το οποίο διέρχεται η φορτισμένη σφαίρα απέχει r_2 από το σημείο Α.
Από το θεώρημα έργου ενέργειας για τη σφαίρα m κατά την κίνησή της από το σημείο Β στο Γ προκύπτει

$W = \Delta K$ ή $W = K_B$ ή $(V_B - V_\Gamma)q = \dfrac{1}{2} m\upsilon^2$

ή $\left(K_c \dfrac{Q}{r_1} - K_c \dfrac{Q}{r_2}\right)q = \dfrac{1}{2} m\upsilon^2$ άρα $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2K_c Q q}{m}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}$ (1)

από την οποία βρίσκουμε $\upsilon = \sqrt{6} m/s$
β) Αν το σημείο Γ βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από το σημείο Α η (1) παίρνει τη μορφή

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2K_cQq}{mr_1}} = 2\sqrt{3}m/s$$

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

5.58 Είναι $E = \frac{V_A - V_B}{x}$ (1), αλλά και

$E = \frac{V_B - V_\Gamma}{x}$ (2) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$\frac{V_A - V_B}{x} = \frac{V_B - V_\Gamma}{x}$ ή $V_A - V_B = V_B - V_\Gamma = 5V$

$V_A - V_\Gamma = (V_A - V_B) + (V_B - V_\Gamma) = 10V$

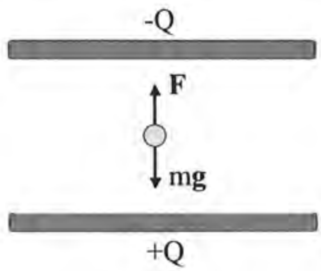
5.59 $V = Ex = 1500V$

5.60 Εφόσον το σωματίδιο ισορροπεί $\Sigma\mathbf{F} = 0$

ή $F = mg$

όμως $F = Eq = \frac{V}{l}q$ επομένως

άρα $V = \frac{mgl}{q} = 400V$



Σχ. 5.3

5.61 Αν θεωρήσουμε ότι η σφαίρα είναι θετικά φορτισμένη θα ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4

$T_x = T\eta\mu\varphi$, $T_y = T\sigma\upsilon\nu\varphi$

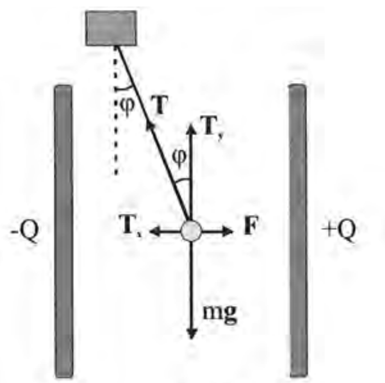
Είναι $\Sigma F_x = 0$ ή $F = T\eta\mu\varphi$ (1)

και $\Sigma F_y = 0$ ή $T\sigma\upsilon\nu\varphi = mg$ (2)

Από την (2) $T = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (3)

Η (1) γίνεται από την (3)

$F = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu\varphi$ ή $F = mg\varepsilon\varphi\varphi$ (4)



Σχ. 5.4

Επειδή $F = Eq = \frac{V}{d}q$ η (4) γίνεται $\frac{V}{d}q = mg\varepsilon\varphi\varphi$ άρα

$$q = \frac{dmg\varepsilon\varphi\varphi}{V} = 10^{-9}C$$

5.62 α) $F = Ee = 1,456 \times 10^{-17}\,N$ $\quad a = \frac{F}{m_e} = 16 \times 10^{12}\,m/s^2$

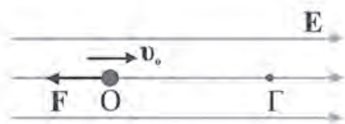
β) Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή των δυναμικών γραμμών. Την ίδια κατεύθυνση, με τη δύναμη, έχει και η επιτάχυνση. Οι σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση του ηλεκτρονίου είναι:

Ι) Αν η αρχική του ταχύτητα είναι ομόρροπη με τις δυναμικές γραμμές

$\upsilon = \upsilon_o - at \qquad x = \upsilon_o t - \frac{1}{2}at^2$

ΙΙ) Αν είναι αντίρροπη $\upsilon = \upsilon_o + at \qquad x = \upsilon_o t + \frac{1}{2}at^2$

5.63 Έστω Ο το σημείο από το οποίο βάλλεται το ηλεκτρόνιο τη χρονική στιγμή μηδέν. Στο ηλεκτρόνιο το πεδίο ασκεί δύναμη $F = Ee$ αντίθετης κατεύθυνσης από αυτή των δυναμικών γραμμών. Το σωματίδιο αποκτά επιτάχυνση $a = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m}$ (1) με φορά ίδια με τη φορά της δύναμης. Οι σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση είναι



Σχ. 5.5

$\upsilon = \upsilon_o - at$ (1) $x = \upsilon_o t - \frac{1}{2}at^2$ (2)

Η χρονική στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του (στο σημείο Γ) βρίσκεται από τη σχέση (2) για υ = 0 $\quad t_\Gamma = \frac{\upsilon_o}{a} = \frac{m\upsilon_o}{Ee}$

Η χρονική στιγμή κατά την οποία το ηλεκτρόνιο ξαναπερνά από το σημείο Ο βρίσκεται από τη σχέση (2) για x = 0

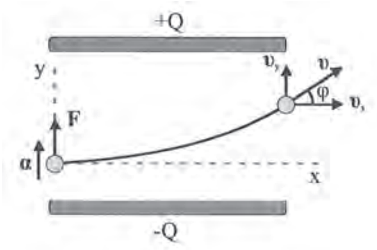
$$t_o = \frac{2\upsilon_o}{a} = \frac{2m\upsilon_o}{Ee}$$

Η ταχύτητα που θα έχει όταν ξαναπεράσει από *το* σημείο Ο βρίσκεται από τη σχέση (1) για $t = t_o$

$\upsilon = -\upsilon_o$

Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι ο χρόνος κίνησης από το Ο στο Γ είναι ίσος με το χρόνο κίνησης από το Γ στο Ο. Επίσης ότι στο Ο το ηλεκτρόνιο επιστρέφει με ταχύτητα ίσου μέτρου.

5.64 Επιλέγουμε ως σύστημα ορθογωνίων αξόνων στους οποίους αναλύουμε την κίνηση τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας (άξονας x) και τη διεύθυνση της έντασης (άξονας y).



Σχ. 5.6

Στον άξονα x: $x = \upsilon_o t$ (1)

Στον άξονα y: $a = \dfrac{F}{m_e} = \dfrac{Ee}{m_e}$ (2)

$\upsilon_y = at$ (3) $y = \dfrac{1}{2}at^2$ (4)

Από την (1) για $x = l$ βρίσκουμε το χρόνο κίνησης του ηλεκτρονίου μέσα στο πεδίο. $t = \dfrac{l}{\upsilon_o}$ (5)

Θέτοντας στην (4) την (5) και τη (2) βρίσκουμε την απόκλιση της δέσμης τη στιγμή της εξόδου από το πεδίο $y = \dfrac{Eel^2}{2m_e\upsilon_o^2}$

Θέτοντας στην (3) την (5) και την (2) βρίσκουμε την ταχύτητα υ_y των ηλεκτρονίων τη στιγμή που εξέρχονται από το πεδίο.

$$\upsilon_y = \frac{Eel}{m_e\upsilon_o}$$

Τα ηλεκτρόνια βγαίνουν από το πεδίο με ταχύτητα μέτρου

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_o^2 + \dfrac{E^2e^2l^2}{m_e^2\upsilon_o^2}}$ που σχηματίζει με τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας γωνία για την οποία $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_o} = \dfrac{Eel}{m_e\upsilon_o^2}$

Χωρητικότητα - ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή

5.65 $Q = CV = 72\,pC$

5.66 $C = \varepsilon_o \dfrac{A}{d} = \varepsilon_o \dfrac{\pi r^2}{d}$

$Q = CV = \varepsilon_o \dfrac{\pi r^2}{d} V = 444,6\,pC$

5.67 $E = \dfrac{V}{d} = 10^4 V/m$

$C = \varepsilon_o \dfrac{A}{d} = 53,1\,pF$

$Q = CV = 637,2\,pC$

5.68 Ο πυκνωτής έχει αρχικά χωρητικότητα $C = \varepsilon_o \dfrac{A}{d} = 10\mu F$ και φορτίο $Q = CV = 1000\mu C$

Μετά την απομάκρυνση των οπλισμών του, ο πυκνωτής θα έχει χωρητικότητα

$C' = \varepsilon_o \dfrac{A}{2d} = \dfrac{C}{2} = 5\mu F$ και φορτίο $Q' = C'V = 500\mu C$ (Η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή δε μεταβάλλεται)

5.69 $U = \dfrac{1}{2} C V^2 = 2,5J$

5.70 Έστω Q_1 το φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής C_1 όταν φορτιστεί σε τάση V_1 $\quad Q_1 = C_1 V_1$

Αν Q_1' και Q_2' τα φορτία των πυκνωτών μετά τη σύνδεσή τους και V η κοινή τους τάση $Q_1' = C_1 V$ (1) $Q_2' = C_2 V$ (2)

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης του φορτίου

$Q_1 = Q_1' + Q_2'$ ή $C_1 V_1 = C_1 V + C_2 V$ άρα $V = \dfrac{C_1 V_1}{C_1 + C_2} = 64V$

Από (1) και (2) $Q_1' = 1280\mu C$ και $Q_2' = 320\mu C$

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που χάνεται με τη σύνδεση των πυκνωτών είναι

$\frac{1}{2}C_1V_1^2 - \left[\frac{1}{2}C_1V^2 + \frac{1}{2}C_2V^2\right] = 12\times10^{-3}\,J$ Η ενέργεια αυτή έγινε θερμότητα στους αγωγούς σύνδεσης.

Διηλεκτρικά

5.71 $C' = KC = 60\mu F$

5.72 Έστω ότι η αρχική χωρητικότητα, το φορτίο και η τάση του πυκνωτή είναι, αντίστοιχα, C_o, Q_o, V_o. Μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού, το φορτίο του πυκνωτή παραμένει ίδιο ενώ η χωρητικότητα και η τάση του γίνονται C και V αντίστοιχα. Ισχύουν

$C_o = \frac{Q_o}{V_o}$ (1) και $C = \frac{Q_o}{V}$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε

$$K = \frac{C}{C_o} = \frac{V_o}{V} = 6$$

5.73 Το αρχικό φορτίο του πυκνωτή ήταν $Q = CV = 50\mu C$
Το φορτίο του μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού γίνεται

$Q' = Q + \Delta Q = 200\mu C$

Αλλά $Q' = C'V$ ή $Q' = KCV$ άρα $K = \frac{Q'}{CV} = 4$

5.74 Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = K\varepsilon_o \frac{A}{d}$,

επομένως $A = \frac{dC}{K\varepsilon_o}$ (1)

Το πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή έχει ένταση $E = \frac{V}{d}$, επομένως $d = \dfrac{V}{E}$ (2)

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) βρίσκουμε $A = \dfrac{VC}{K\varepsilon_o E} = 0,083m^2$

5.75 Το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή αντιστοιχεί στη μέγιστη τάση μεταξύ των οπλισμών του $V = Ed$

Επομένως $Q = CV = K\varepsilon_o \dfrac{A}{d} Ed$ ή $Q = EK\varepsilon_o A = 169,9nC$

Πεδίο βαρύτητας

5.76 $$g = G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h\right)^2} = \frac{g_o R_\Gamma^2}{\left(2R_\Gamma\right)^2} = \frac{g_o}{4} = 2,5m/s^2$$

$$V = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} = -\frac{g_o R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} = -\frac{g_o R_\Gamma}{2} = -32 \times 10^6 J/Kg$$

5.77 Έστω ότι το σώμα βάλλεται από το σημείο Α στην επιφάνεια της Γης και φτάνει στο σημείο Γ, σε ύψος h.
Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο Α στο Γ.

$W = \Delta K$ ή $\left(V_A - V_\Gamma\right)m = -K_A$ ή

$$\left(-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right)m = -\frac{1}{2}m\upsilon_o^2$$

ή $-\dfrac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma} + \dfrac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h} = -\dfrac{1}{2}\upsilon_o^2$ άρα $h = \dfrac{2g_o R_\Gamma^2}{2g_o R_\Gamma - \upsilon_o^2} - R_\Gamma = 50Km$

5.78 α) Έστω g_Σ η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης

$$g_\Sigma = \frac{GM_\Sigma}{R_\Sigma^2} \qquad g_o = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε $\frac{g_\Sigma}{g_o} = \frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Sigma}\right)^2$ επομένως $g_\Sigma = 1,66 m/s^2$

β) η μάζα του σώματος είναι $m = \frac{w_\Gamma}{g_o}$

Το βάρος του στη Σελήνη $w_\Sigma = mg_\Sigma = \frac{w_\Gamma}{g_o} g_\Sigma = 116,2N$

5.79 Έστω Α το σημείο εκτόξευσης.
Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Γη-σώμα διατηρείται επομένως
$K_A + U_A = K_\infty + U_\infty$

Η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί το σώμα είναι εκείνη για την οποία φτάνει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα.

Επομένως $K_A + U_A = 0 + 0$ ή $\frac{1}{2} m\upsilon_\delta^2 - G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma + h} = 0$ ή

$\frac{1}{2}\upsilon_\delta^2 - \frac{g_o R_\Gamma}{R_\Gamma + h} = 0$ άρα $\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2g_o R_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$

5.80 Η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια του πλανήτη είναι $\upsilon_\Pi = \sqrt{\frac{2GM_\Pi}{R_\Pi}}$
και από την επιφάνεια της Γης $\upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$

Διαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη $\frac{\upsilon_\Pi}{\upsilon_\Gamma} = \sqrt{\frac{M_\Pi}{M_\Gamma}\frac{R_\Gamma}{R_\Pi}} = \sqrt{\frac{1}{8}\frac{R_\Gamma}{R_\Pi}}$ (1)

$\frac{M_\Gamma}{M_\Pi} = \frac{\rho V_\Gamma}{\rho V_\Pi} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3}{\frac{4}{3}\pi R_\Pi^3}$ άρα $\frac{R_\Gamma}{R_\Pi} = 2$

οπότε η (1) γίνεται $\frac{\upsilon_\Pi}{\upsilon_\Gamma} = \frac{1}{2}$ και επομένως $\upsilon_\Pi = 5,6 Km/s$

5.81 Έστω υ_o η ταχύτητα του μετεωρίτη όταν βρίσκεται πολύ μακριά από τη Γη (εκτός πεδίου βαρύτητας).

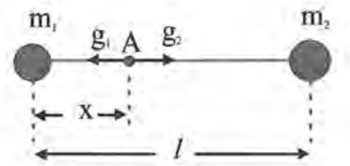
Από το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνησή του από σημείο εκτός του πεδίου βαρύτητας της Γης μέχρι την επιφάνειά της.

$$W = \Delta K \text{ ή } \left(V_\infty - V_\Gamma\right)m = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 \text{ ή}$$

$$G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_o^2}{2} \text{ ή } \frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_o^2}{2} \text{ και επομένως}$$

$$\upsilon_o = \sqrt{\upsilon^2 - 2g_o R_\Gamma} = 14\times10^3 m/s$$

5.82 Για να είναι μηδέν η ένταση σε κάποιο σημείο πρέπει η ένταση $\mathbf{g}_1$ που δημιουργεί η m_1 να είναι αντίθετη με την ένταση $\mathbf{g}_2$ που δημιουργεί η m_2. Τέτοιο σημείο υπάρχει μόνο μεταξύ των δύο μαζών.
Έστω Α αυτό το σημείο.



Σχ. 5.7

Η ένταση που δημιουργεί στο σημείο Α η μάζα m_1 είναι $g_1 = G\frac{m}{x^2}$

Η ένταση που δημιουργεί στο σημείο Α η μάζα m_2 είναι $g_2 = G\frac{2m}{\left(l-x\right)^2}$

Εφόσον $g_1 = g_2$ $G\frac{m}{x^2} = G\frac{2m}{\left(l-x\right)^2}$ ή $\frac{l-x}{x} = \pm\sqrt{2}$

Από όπου $x_1 = l\left(\sqrt{2}-1\right)$ και $x_2 = -l\left(1+\sqrt{2}\right)$

Η αρνητική τιμή του x_2 σημαίνει ότι το σημείο Α βρίσκεται αριστερά του m_1. Η λύση αυτή απορρίπτεται.
Το δυναμικό του πεδίου στο σημείο Α είναι το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών που δημιουργούν μόνες τους οι μάζες m_1 και m_2.

$$V_A = V_1^A + V_2^A = -G\frac{m}{x} - G\frac{2m}{l-x} = -G\frac{m}{l}\left(2\sqrt{2}+3\right)$$

5.83 Η ενέργεια του συστήματος των τριών μαζών είναι

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{\gamma} - G\frac{m_1 m_3}{\beta} - G\frac{m_2 m_3}{\alpha}$$

Σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια που απαιτείται για να απομακρυνθούν οι μάζες αυτές σε άπειρη απόσταση είναι

$$E = E^{\tau\varepsilon\lambda}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} - E^{\alpha\rho\chi}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = -U = G\frac{m_1 m_2}{\gamma} + G\frac{m_1 m_3}{\beta} + G\frac{m_2 m_3}{\alpha}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.84 Επειδή το φορτίο της σφαίρας είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο το πεδίο έχει ακτινική διεύθυνση και η ένταση έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία που απέχουν το ίδιο από το κέντρο της σφαίρας.

α) Στο εσωτερικό της σφαίρας. Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss, σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r ($r \prec R$) ομόκεντρη με το σφαιρικό αγωγό και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss $\Phi = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o}$ (1)

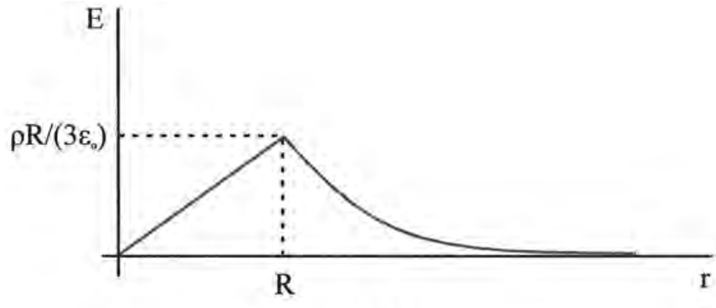
$\Phi = E\ 4\pi r^2$. Εξάλλου $Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$. Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε $E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}$ για $r \to R$ $E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_o}$

β) Στο εξωτερικό της σφαίρας. Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r ($r \succ R$) ομόκεντρη με το σφαιρικό αγωγό.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss $\Phi = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o}$ (2)

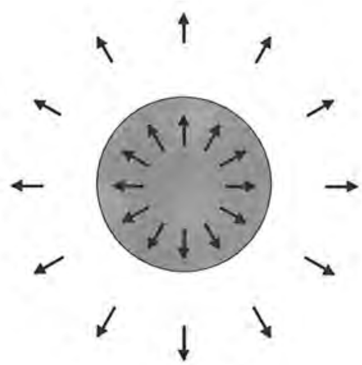
$\Phi = E\ 4\pi r^2$ $\quad Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$ αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε $E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}$ η οποία για $r = R$ δίνει $E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_o}$

Το μέτρο της έντασης σε συνάρτηση με την απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 5.8



Σχ. 5.8

5.85 Επειδή το φορτίο του κυλίνδρου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο, το πεδίο που δημιουργείται είναι ακτινικό και το μέτρο της έντασης ίδιο σε όλα τα σημεία που απέχουν το ίδιο από τον άξονα του κυλίνδρου. Στο σχήμα 5.9 παριστάνεται το πεδίο σε μια τομή του κυλίνδρου κάθετη στον άξονά του.



Σχ. 5.9

α) Στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss, κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r ($r \prec R$), ύψους L, ομοαξονική με το φορτισμένο κύλινδρο και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss $\Phi = \dfrac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o}$ (1)

Αλλά $\Phi = \Phi_{\text{ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦ.}} + \Phi_{\text{ΒΑΣΕΩΝ}} = E\ 2\pi r L + 0$

και $Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \rho V = \rho\ \pi r^2 L$

Αντικαθιστώντας στην (1)

$E = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_o}$ για $r \to R$ $\quad E = \dfrac{\rho R}{2\varepsilon_o}$

β) Στο εξωτερικό του κυλίνδρου. Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss, κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r ($r \geq R$), ύψους L, ομοαξονική με το φορτισμένο κύλινδρο.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss $\Phi = \dfrac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o}$ (1)

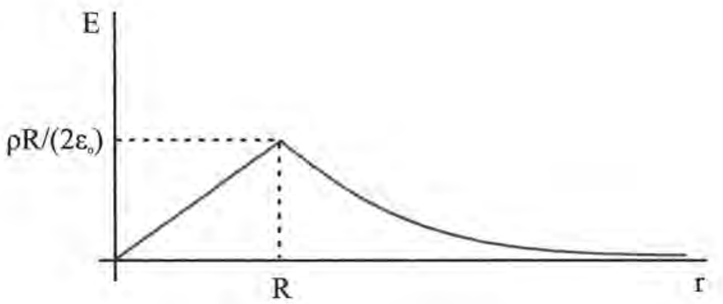
Αλλά $\Phi = \Phi_{\text{ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦ.}} + \Phi_{\text{ΒΑΣΕΩΝ}} = E\ 2\pi rL + 0$

$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \rho V = \rho\ \pi R^2 L$

Αντικαθιστώντας στην (1)

$E = \dfrac{\rho R^2}{2r\varepsilon_o}$ για r = R $E = \dfrac{\rho R}{2\varepsilon_o}$

Το μέτρο της έντασης σε συνάρτηση με την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα του σχήματος 5.9



Σχ. 5.10

5.86 Στο εσωτερικό φορτισμένου αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν (παρατήρηση στη σελίδα 149 στο βιβλίο του μαθητή), επομένως για $r_1 = 2cm$ και $r_2 = 8cm$ έχουμε E = 0.
Για τον υπολογισμό της έντασης στο εξωτερικό του αγωγού επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss, σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r ($r \succ R$) ομόκεντρη με το σφαιρικό αγωγό.

$$\Phi = \frac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o} \text{ ή } E\ 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \text{ ή } E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

Για $r = r_3$ $\quad E \approx 45\times10^2 N/C$

5.87 Για λόγους συμμετρίας, το πεδίο που δημιουργεί η διάταξη πρέπει να είναι ακτινικό και το μέτρο της έντασης να έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας που απέχουν το ίδιο από τον ευθύγραμμο αγωγό.

α) Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια κυλινδρική επιφάνεια ύψους L, ομοαξονική με το σύρμα και τον κυλινδρικό αγωγό, ακτίνας $r < R$ (όπου R η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού).

Εφαρμόζομε το νόμο του Gauss $\Phi = \dfrac{Q_{\varepsilon\gamma\kappa}}{\varepsilon_o}$

Αλλά $\Phi = \Phi_{\text{ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦ.}} + \Phi_{\text{ΒΑΣΕΩΝ}} = E\ 2\pi rL + 0$ και

$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \lambda L$

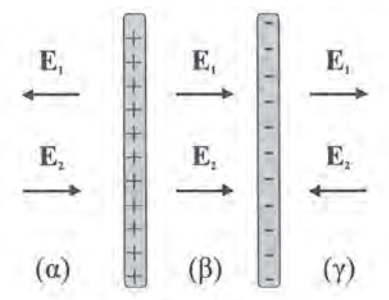
Επομένως $E = \dfrac{\lambda L}{2\pi rL\varepsilon_o} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_o}\dfrac{\lambda}{r}$

β) Αν η επιφάνεια Gauss έχει ακτίνα $r \geq R$, το φορτίο που θα περικλείει θα είναι $Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = +\lambda L + (-\lambda L) = 0$ επομένως Φ = 0 και Ε = 0

5.88 Το ηλεκτρικό πεδίο θα υπολογιστεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας του πεδίου που δημιουργείται από το θετικά φορτισμένο φύλλο και του πεδίου που δημιουργεί το αρνητικά φορτισμένο φύλλο.

Μόνο του το θετικά φορτισμένο φύλλο θα δημιουργούσε γύρω του ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$ (παράδειγμα 5.3 στη σελίδα 150 στο βιβλίο του μαθητή)

Μόνο του το αρνητικά φορτισμένο φύλλο θα δημιουργούσε γύρω του ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$



Σχ. 5.11

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας το πεδίο που δημιουργείται από τα δύο φορτισμένα φύλλα είναι σε κάθε σημείο $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$

Έτσι στην περιοχή (α) και στην περιοχή (γ) (σχήμα 5.11) **E** = 0, ενώ στην περιοχή (β) το πεδίο έχει μέτρο $E = E_1 + E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$

5.89 Από το θεώρημα έργου - ενέργειας βρίσκουμε

$W = \Delta K$, επομένως $Eel = \dfrac{1}{2}m_e\upsilon^2$ και $E = \dfrac{m_e\upsilon^2}{2el} = 3\times10^5\,N/C$

5.90 α) Η ελκτική δύναμη Coulomb που δέχεται το ηλεκτρόνιο από τον πυρήνα δρα ως κεντρομόλος: $k\dfrac{e^2}{r^2} = m\dfrac{\upsilon^2}{r}$ ή $k\dfrac{e^2}{r} = m\upsilon^2$ (1)

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $K = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2$ η οποία γίνεται

από την (1) $K = \dfrac{1}{2}k\dfrac{e^2}{r}$

β) $U = -k\dfrac{e^2}{r}$

γ) $E = K + U = -\dfrac{1}{2}k\dfrac{e^2}{r}$

δ) Το ελάχιστο ποσό ενέργειας που πρέπει να προσφερθεί είναι εκείνο για το οποίο η απόσταση μεταξύ του ηλεκτρονίου και του πυρήνα θα γίνει άπειρη και η κινητική ενέργεια του συστήματος μηδενική. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$E = \Delta E_{\text{ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ}} = 0 - \left(-\frac{1}{2}k\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r}$$

5.91 Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του πρωτονίου από την αρνητική ως την θετική πλάκα

$W = \Delta K$ επομένως $\left(V_{(-)} - V_{(+)}\right)e = 0 - \dfrac{1}{2}m\upsilon_o^2$

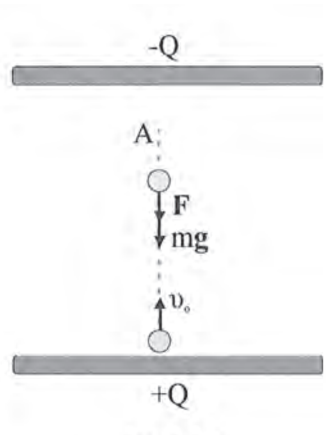
Όπου $V_{(-)}$ και $V_{(+)}$ τα δυναμικά της αρνητικής και της θετικής πλάκας αντίστοιχα και $V = V_{(+)} - V_{(-)}$ η τάση μεταξύ των πλακών. Επομένως

$Ve = \dfrac{1}{2}m\upsilon_o^2$ άρα $V = \dfrac{m\upsilon_o^2}{2e} = 1250V$

5.92 $E = \frac{V}{d} = 10^5 N/C$ Η δύναμη που δέχεται το σφαιρίδιο από το ηλεκτρικό πεδίο είναι $F = E|q| = 10^{-3} N$ και έχει φορά αντίθετη από τη φορά των δυναμικών γραμμών.

Το βάρος του είναι $w = mg = 5 \times 10^{-3} N$ (δεν μπορεί να αγνοηθεί)

Επομένως το σφαιρίδιο κινείται με επιβράδυνση $a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F + w}{m} = 12 m/s^2$



Σχ. 5.12

$\upsilon = \upsilon_o - at$ για $\upsilon = 0$ βρίσκουμε το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στο σημείο Α στο οποίο στιγμιαία μηδενίζεται η ταχύτητά του. $t_A = \frac{\upsilon_o}{a}$

Η απόσταση y του σημείου Α από το σημείο βολής:

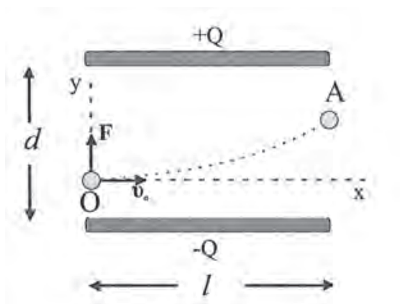
$y = \upsilon_o t_A - \frac{1}{2} a t_A^2 = 3cm$

Η ελάχιστη απόσταση του σφαιριδίου από τον αρνητικό οπλισμό είναι:

$d - y = 1cm$

5.93 Αναλύουμε την κίνηση του ηλεκτρονίου στους άξονες x (διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας) και y (διεύθυνση των δυναμικών γραμμών).

Στον άξονα x η κίνηση του ηλεκτρονίου είναι ευθύγραμμη ομαλή, επομένως ο χρόνος κίνησής τους μέσα στο πεδίο είναι $t_{ΟΛ} = \frac{l}{\upsilon_o}$ (1)



Σχ. 5.13

Στον άξονα y τα ηλεκτρόνια έχουν επιτάχυνση

$a = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m} = \frac{Ve}{dm}$ (2)

Η απόκλιση της δέσμης κατά την έξοδό της από το πεδίο δίνεται από τη σχέση

$y = \frac{1}{2} a t_{ΟΛ}^2$ η οποία γίνεται από τις (1) και (2) $y = \frac{1}{2} \frac{Ve}{m} \frac{l^2}{\upsilon_o^2} = 12,6mm$

Αν Ο το σημείο εισόδου της δέσμης στο πεδίο και Α το σημείο εξόδου

$$E = \frac{V_A - V_O}{y} \text{ ή } \frac{V}{d} = \frac{V_A - V_O}{y} \text{ άρα } V_A - V_O = y\frac{V}{d} = 50,4V$$

5.94 α) Έστω Α το σημείο της επιφάνειας της σφαίρας από το οποίο ξέφυγε το ηλεκτρόνιο και Γ το σημείο της τροχιάς του που απέχει απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας κατά την κίνηση του ηλεκτρονίου από σημείο Α στο Γ.

$$W = \Delta K \text{ επομένως } \left(V_A - V_\Gamma\right)\left(-e\right) = \frac{1}{2}m_e\upsilon^2 \text{ ή}$$

$$\left(K_c\frac{Q}{R} - K_c\frac{Q}{r}\right)\left(-e\right) = \frac{1}{2}m_e\upsilon^2 \text{ άρα}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{-2K_cQe}{m_e}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)} = 2,66\times10^6 m/s$$

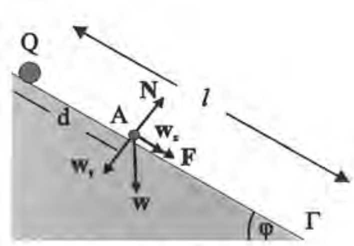
β) Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται εξαιτίας της απωστικής δύναμης που δέχεται από τη φορτισμένη σφαίρα. Θα πάψει να επιταχύνεται όταν θα βρίσκεται πολύ μακριά από τη σφαίρα (σε άπειρη απόσταση). Τότε θα έχει αποκτήσει τη μέγιστη ταχύτητα.

Το θεώρημα - έργου ενέργειας δίνει για την κίνηση του ηλεκτρονίου από το σημείο Α στο έως το άπειρο.

$$W = \Delta K \text{ επομένως } V_A\left(-e\right) = \frac{1}{2}m_e\upsilon^2 \text{ ή } -K_c\frac{Q}{R}e = \frac{1}{2}m_e\upsilon^2$$

$$\text{ή } \upsilon = \sqrt{\frac{-2K_cQe}{m_eR}} = 3,26\times10^6 m/s$$

5.95 Έστω Α το σημείο από το οποίο αφέθηκε το σωματίδιο Σ και Γ το σημείο της βάσης του πλαγίου επιπέδου από το οποίο θα περάσει. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας κατά την κίνηση του σωματιδίου από το Α στο Γ



Σχ. 5.14

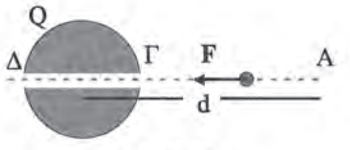
$W = \Delta K$ επομένως

$$mg\eta\mu\varphi(l-d)+(V_A - V_\Gamma)q = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

ή $mg\eta\mu\varphi(l-d)+K_c Qq\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{l}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ άρα

$$\upsilon = \sqrt{2g\eta\mu\varphi(l-d)+\frac{2K_c Qq}{m}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{l}\right)} = 9{,}6m/s$$

5.96 Έστω Α το σημείο από το οποίο αφήνεται το σημειακό φορτίο και Γ το ένα άκρο της οπής του σφαιρικού αγωγού. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας κατά τη μετακίνηση του σημειακού φορτίου από το σημείο Α στο Γ.



Σχ. 5.15

$W = \Delta K$ επομένως $(V_A - V_\Gamma)q = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ ή

$K_c Qq\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ άρα $\upsilon = \sqrt{\frac{2K_c Qq}{m}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right)} = 13{,}8m/s$

Στο εσωτερικό του σφαιρικού αγωγού δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Έτσι η κίνηση του σημειακού φορτίου, μέσα στην οπή, είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Το σωματίδιο βγαίνει από την οπή μετά από χρόνο $t = \frac{2R}{\upsilon} = 14{,}4ms$

5.97 Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται:

$\mathbf{p}_{APX.} = \mathbf{p}_{META}$ επομένως $0 = m\upsilon_1 - 2m\upsilon_2$ άρα $\upsilon_1 = 2\upsilon_2$ (1)

Η μηχανική ενέργεια των δύο σφαιρών διατηρείται:

$K_{\text{ΑΡΧ.}} + U_{\text{ΑΡΧ.}} = K_{\text{ΜΕΤΑ}} + U_{\text{ΜΕΤΑ}}$ ή

$$0 + K_C\frac{q^2}{l} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 + K_C\frac{q^2}{2l} \quad (2)$$

η (2) γίνεται από την (1)

$$K_C\frac{q^2}{l}=\frac{1}{2}m4\upsilon_2^2+\frac{1}{2}2m\upsilon_2^2+K_C\frac{q^2}{2l}\quad \text{άρα}\ \upsilon_2=q\sqrt{\frac{K_C}{6lm}}$$

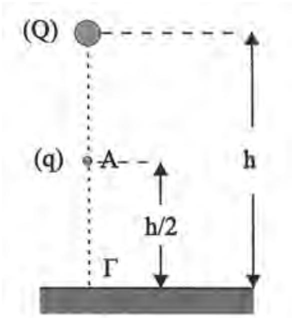
και από την (1) έχουμε $\upsilon_2=2q\sqrt{\frac{K_C}{6lm}}$

5.98 α) Έστω ότι η σφαίρα είναι αφόρτιστη και κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους της.

Εφαρμόζομε το θεώρημα έργου ενέργειας κατά την κίνησή της από το σημείο Α στο Γ.

$W=\Delta K$ επομένως $mg\frac{h}{2}=\frac{1}{2}m\upsilon^2$

άρα $\upsilon=\sqrt{gh}=6m/s$



Σχ. 5.16

Η ταχύτητα αυτή είναι μικρότερη από την ταχύτητα της σφαίρας. Επομένως η σφαίρα είναι φορτισμένη ομόσημα με το φορτίο Q.

β) Έστω q το φορτίο που φέρει η σφαίρα. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνησή της από το σημείο Α στο Γ.

$$W_w+W_F=\Delta K\ \text{ επομένως }\ mg\frac{h}{2}+\left(V_A-V_\Gamma\right)q=\frac{1}{2}m\upsilon^2\ \text{ ή}$$

$$mg\frac{h}{2}+\left(K_C\frac{Q}{h/2}-K_C\frac{Q}{h}\right)q=\frac{1}{2}m\upsilon^2\ \text{ή}$$

$$q=\frac{mh\left(\upsilon^2-gh\right)}{2K_CQ}=0,8\times10^{-6}C$$

5.99 $AB=\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+h^2}=50cm$

Τα δυναμικά του πεδίου που δημιουργούν τα φορτία Q_1 και Q_2 στα σημεία Α και Μ είναι:

$$V_A=V_1^A+V_2^A=K_C\frac{Q_1}{AB}+K_C\frac{Q_2}{A\Gamma}\qquad V_A=18\times10^4V$$

$$V_M=V_1^M+V_2^M=K_C\frac{Q_1}{BM}+K_C\frac{Q_2}{\Gamma M}\qquad V_M=30\times10^4V$$

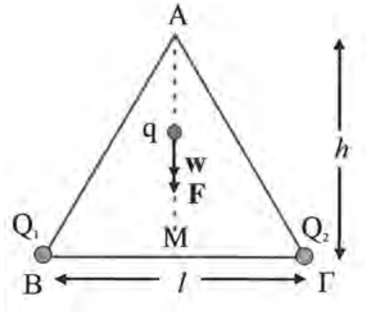
Από το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του q από το σημείο A στο M

$W_w + W_F = \Delta K$

επομένως

$mgh + (V_A - V_M)q = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ άρα

$\upsilon = \sqrt{\frac{2mgh + 2(V_A - V_M)q}{m}} = 4,2m/s$



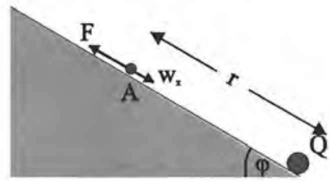
Σχ. 5.17

5.100 Η δύναμη

$F = K_C \frac{Qq}{r^2} = 2,25 \times 10^{-3} N$

που ασκείται στο φορτισμένο σώμα, στην αρχική του θέση A, είναι μεγαλύτερη της συνιστώσας του βάρους $w_x = mg\ \eta\mu\varphi = 0,25 \times 10^{-3} N$

Επομένως το σώμα, όταν αφεθεί στο σημείο A θα κινηθεί στο πλάγιο επίπεδο με κατεύθυνση προς τα πάνω.



Σχ. 5.18

α) Έστω Γ το σημείο στο οποίο θα μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του και x η απόστασή του από το Q.

Από το θεώρημα - έργου ενέργειας κατά την κίνηση του m από το A στο Γ παίρνουμε

$W_F + W_{wx} = \Delta K$ και επομένως $(V_A - V_\Gamma)q - mg\eta\mu\varphi(x - r) = 0$ ή $K_C Qq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) - mg\eta\mu\varphi(x - r) = 0$. Μετά τις αντικαταστάσεις παίρνουμε $x^2 - 1,3x + 0,36 = 0$ από όπου προκύπτει $x = 0,9m$ (η άλλη λύση της εξίσωσης είναι $x = 0,4m$, που αντιστοιχεί στην αρχική θέση του σώματος)

β) Το φορτισμένο σώμα κινείται με επιτάχυνση μέχρι τη στιγμή κατά την οποία η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται γίνει ίση με μηδέν. Έστω ότι αυτό συμβαίνει στο σημείο Δ που απέχει από το Q απόσταση d.

$F = w_x$ ή $K_C \frac{Qq}{d^2} = mg\eta\mu\varphi$ άρα $d = 0,6m$

Στη θέση αυτή αντιστοιχεί η μέγιστη τιμή της ταχύτητας.
Από το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του m από το A στο Δ παίρνουμε

$W_F + W_w = \Delta K$ επομένως $(V_A - V_\Delta)q - mg\eta\mu\varphi(d-r) = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ ή

$K_c Qq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) - mg\eta\mu\varphi(d-r) = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ άρα

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2K_c Qq}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) - 2mg\eta\mu\varphi(d-r)} = 1m/s$$

5.101 α) $V = V_A - V_B = 100V$
β) Επειδή ο οπλισμός A διατηρεί το φορτίο του, εξ επαγωγής, το διατηρεί και ο B.
γ) Εφόσον το φορτίο του πυκνωτή δε μεταβάλλεται η τάση του θα παραμείνει 100V. Ο γειωμένος οπλισμός αποκτάει το δυναμικό της Γης δηλαδή $V_B = 0$ άρα $V_A = 100V$.

5.102 Το φορτίο του πυκνωτή είναι $Q = CV$
Επομένως το μέγιστο φορτίο αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της τάσης μεταξύ των οπλισμών του $V = \frac{E}{d}$

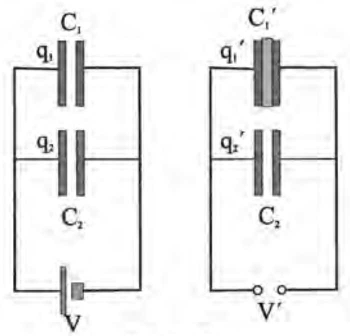
Οι τιμές του μέγιστου φορτίου για το γυαλί και τον αέρα είναι αντίστοιχα

$Q_\gamma = K\varepsilon_o \frac{A}{d}\frac{E_\gamma}{d}$ και $Q_\alpha = \varepsilon_o \frac{A}{d}\frac{E_\alpha}{d}$

από τις οποίες βρίσκουμε $\frac{Q_\gamma}{Q_\alpha} = \frac{KE_\gamma}{E_a}$ ή $Q_\gamma = KQ_a \frac{E_\gamma}{E_a} = 46,7\mu C$

5.103 α) $q_1 = C_1 V = 120\mu C$ και

$q_2 = C_2 V = 120\mu C$



Σχ. 5.19

β) Με την εισαγωγή του διηλεκτρικού η χωρητικότητα του πυκνωτή C_1 γίνεται

$C_1' = KC_1 = 20\mu F$

Αν q_1', q_2' τα νέα φορτία που αποκτούν οι πυκνωτές και V' η κοινή τάση τους

$q_1' = C_1'V'$ (1) και

$q_2' = C_2'V'$ (2)

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης του φορτίου $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$
Η σχέση αυτή, αν λάβουμε υπόψη τις (1) και (2), γίνεται
$q_1 + q_2 = \left(C_1' + C_2\right)V'$ από όπου βρίσκουμε $V' = 10V$

Επομένως οι πυκνωτές έχουν φορτία $q_1' = 200\mu F$ και $q_2' = 40\mu F$

5.104 α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του διαστημικού οχήματος από το σημείο Α (που βρίσκεται σε ύψος h) μέχρι το σημείο Γ (που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης)

$W_w = \Delta K$ επομένως $\left(V_A - V_\Gamma\right)m = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2$ ή

$$-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} = \frac{1}{2}\upsilon^2 - \frac{1}{2}\upsilon_o^2 \quad ή$$

$$-\frac{g_o R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} + \frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = \frac{1}{2}\upsilon^2 - \frac{1}{2}\upsilon_o^2$$

άρα $\upsilon = \sqrt{g_o R_\Gamma + \upsilon_o^2} = 8\sqrt{2} \times 10^3 m/s$

β) Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του διαστημικού οχήματος από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ βρίσκουμε

$W_F + W_w = \Delta K$, επομένως $-Fh + \left(V_A - V_\Gamma\right)m = -\frac{1}{2}m\upsilon_o^2$ ή

$$-Fh + \left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\right)m = -\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 \quad ή \quad -Fh + \frac{g_o R_\Gamma m}{2} = -\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 \quad και$$

$$F = \frac{m\left(\upsilon_o^2 + g_o R_\Gamma\right)}{2R_\Gamma} = 8 \times 10^4 N$$

5.105 α) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Γη-σταθμός διατηρείται, δηλαδή

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

επομένως $-G\frac{M_\Gamma m}{r_1} + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = -G\frac{M_\Gamma m}{r_2} + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$

ή $-\frac{g_o R_\Gamma^2}{r_1} + \frac{\upsilon_1^2}{2} = -\frac{g_o R_\Gamma^2}{r_2} + \frac{\upsilon_2^2}{2}$ άρα

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g_o R_\Gamma^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + \upsilon_1^2} = 6{,}16 \times 10^3 m/s$$

β) Η ενέργεια E που πρέπει να προσφερθεί στη συσκευή ώστε να φτάσει στο άπειρο χωρίς κινητική ενέργεια, θα βρεθεί από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$E_{ΑΡΧ} + E = E_{ΤΕΛ}$ (1) όπου $E_{ΑΡΧ}$, $E_{ΤΕΛ}$ η αρχική και τελική ενέργεια του συστήματος συσκευής - Γη. Επειδή κατά την περιφορά της συσκευής γύρω από τη Γη η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται, η $E_{ΑΡΧ}$ είναι ίδια για όλα τα σημεία της τροχιάς.

Σύμφωνα με την (1)

$$-G\frac{M_\Gamma m}{r_1}+\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+E=0 \text{ ή } E=\frac{g_o R_\Gamma^2 m}{r_1}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}=3,7\times10^9\,J$$

5.106 Η κίνηση του οχήματος μέχρι το ύψος h στο οποίο αποκτάει την ταχύτητα διαφυγής είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

$$\upsilon_\delta=at \text{ και } h=\frac{1}{2}at^2 \text{ άρα } h=\frac{\upsilon_\delta^2}{2a} \quad (1)$$

$$\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}=\sqrt{\frac{2g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) έχουμε $h=\dfrac{g_o R_\Gamma^2}{a\left(R_\Gamma+h\right)}$ ή

$h^2+64\times10^5 h-128\times10^{11}=0$ από όπου βρίσκουμε $h=1,6\times10^6\,m$

5.107 Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του σώματος από την επιφάνεια της Γης (σημείο Γ) μέχρι το σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος x και στο οποίο το σώμα αποκτάει την ταχύτητα διαφυγής.

$$W_F+W_w=\Delta K \text{ επομένως } Fx+\left(V_\Gamma-V_A\right)m=\frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 \text{ ή}$$

$$Fx+\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}+G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma+x}\right)m=\frac{1}{2}m\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+x} \text{ ή}$$

$$Fx+\left(-\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma}+\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma+x}\right)m=m\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma+x} \text{ ή } Fx-g_o R_\Gamma m=0$$

άρα $x=\dfrac{g_o R_\Gamma m}{F}=3,2\times10^6\,m$

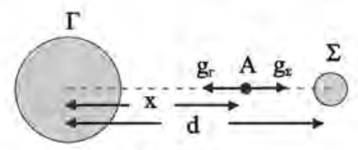
β) Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του σώματος από την επιφάνεια της Γης μέχρι το άπειρο, βρίσκουμε

$$W_F+W_w=\Delta K \text{ επομένως } Fh+V_\Gamma m=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$\text{ή } Fh-\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma}m=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

άρα $\upsilon=\sqrt{\dfrac{2\left(Fh-g_o R_\Gamma m\right)}{m}}=5,06\times10^3\,m/s$

5.108 Έστω ότι η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι μηδέν στο σημείο Α που απέχει από το κέντρο της Γης απόσταση x. Στο σημείο αυτό:



Σχ. 5.20

$g_Γ = g_Σ$ επομένως

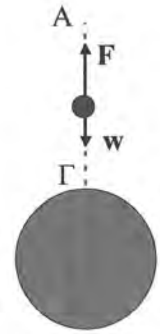
$$G\frac{M_Γ}{x^2} = G\frac{M_Σ}{(d-x)^2} \quad ή$$

$$\frac{x}{d-x} = \pm\sqrt{\frac{M_Γ}{M_Σ}} = \pm 9$$

Από $\dfrac{x}{d-x} = 9$ ή $\dfrac{x}{60R_Γ - x} = 9$ έχουμε $x = 54R_Γ$

Από $\dfrac{x}{d-x} = -9$ ή $\dfrac{x}{60R_Γ - x} = -9$ έχουμε $x = 67,5R_Γ$. Η λύση αυτή απορρίπτεται γιατί το σημείο αυτό βρίσκεται πέρα από τη Σελήνη και στα σημεία αυτά οι εντάσεις που οφείλονται στη Γη και τη Σελήνη είναι ομόρροπες.

5.109 Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του οχήματος από την επιφάνεια της Γης (σημείο Γ) μέχρι το ύψος h (σημείο Α).



Σχ. 5.21

$W_F + W_w = \Delta K$ (1)

Όμως $W_F = -2W_w$, επομένως η (1) γίνεται $-W_w = \Delta K$ ή

$$-(V_Γ - V_Α)m = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad ή$$

$$G\frac{M_Γ}{R_Γ} - G\frac{M_Γ}{R_Γ + h} = \frac{1}{2}\upsilon^2 \quad ή$$

$$\frac{g_o R_Γ^2}{R_Γ} - \frac{g_o R_Γ^2}{2R_Γ} = \frac{1}{2}\upsilon^2 \text{ από όπου } \upsilon = \sqrt{g_o R_Γ} = 8\times 10^3 m/s$$

5.110 α) Κατά την κυκλική κίνηση του δορυφόρου η δύναμη της βαρύτητας λειτουργεί ως κεντρομόλος $G\dfrac{M_Γ m}{(R_Γ + h)^2} = m\dfrac{\upsilon^2}{R_Γ + h}$

επομένως η ταχύτητα του δορυφόρου είναι $\upsilon = \sqrt{\dfrac{GM_Γ}{R_Γ + h}}$

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του δορυφόρου κατά την αλλαγή της τροχιάς του είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_\Gamma}{16R_\Gamma/9} - \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma}\right) \text{ ή}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{9g_oR_\Gamma^2}{16R_\Gamma} - \frac{g_oR_\Gamma^2}{2R_\Gamma}\right) = \frac{1}{32}mg_oR_\Gamma = 2\times10^8\,J$$

β) Κατά την αλλαγή της τροχιάς, η βαρυτική δύναμη παράγει έργο

$$W_w = \left(V_2 - V_1\right)m = \left(-\frac{GM_\Gamma}{16R_\Gamma/9} + \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma}\right)m = 4\times10^8\,J$$

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του δορυφόρου από την αρχική στην τελική τροχιά
$W_w - W_A = \Delta K$ ή $W_w - As = \Delta K$ άρα $s = 10^9\,m$

5.111 α) Κατά την περιφορά του διαστημικού οχήματος γύρω από τη Σελήνη η δύναμη της βαρύτητας λειτουργεί ως κεντρομόλος

$$G\frac{M_\Sigma\left(M+m\right)}{\left(R+h\right)^2} = \left(M+m\right)\frac{\upsilon^2}{R+h}$$

επομένως η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος και της σεληνακάτου είναι

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Sigma}{R+h}} = \sqrt{\frac{20g_oR^2}{21R}} = \sqrt{\frac{20g_oR}{21}} \quad (1)$$

Κατά την απελευθέρωση της σεληνακάτου η ορμή του συστήματος όχημα - σεληνάκατος διατηρείται:
$\mathbf{p}_{\Pi PIN} = \mathbf{p}_{META}$ επομένως $\left(M+m\right)\upsilon = Mv$ όπου v η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος αμέσως μετά την απελευθέρωση της σεληνακάτου.

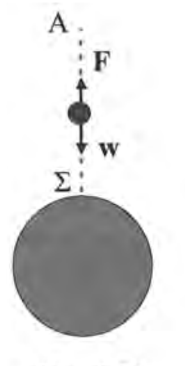
Λαμβάνοντας υπόψη και την (1) έχουμε

$$v = \frac{M+m}{M}\sqrt{\frac{20g_oR}{21}} = 1900\,m/s$$

β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας από το σημείο στο οποίο ελευθερώθηκε η σεληνάκατος (σημείο Α) μέχρι την επιφάνεια της Σελήνης (σημείο Σ):

$$W_F + W_w = \Delta K$$

επομένως $W_F + \left(V_A - V_\Sigma\right)m = 0$ ή



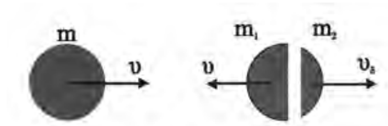
Σχ. 5.22

$$W_F + \left(-G\frac{M_\Sigma}{R+h} + G\frac{M_\Sigma}{R_\Sigma} \right) m = 0 \text{ ή}$$

$$W_F + \left(-\frac{20 g_o R^2}{21R} + \frac{g_o R^2}{R} \right) m = 0$$

άρα $W_F = -\frac{g_o R}{21} m = -192 \times 10^6\, J$

5.112 Κατά την κυκλική κίνηση ενός δορυφόρου η δύναμη της βαρύτητας λειτουργεί ως κεντρομόλος



Σχ. 5.23

$$G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h)^2} = m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma + h}$$

επομένως η ταχύτητα ενός δορυφόρου είναι $\upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$

Η ταχύτητα διαφυγής στο ύψος h είναι: $\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \upsilon\sqrt{2}$

Κατά την έκρηξη, η ορμή διατηρείται: $\mathbf{p}_{\text{ΑΜΕΣΩΣ ΠΡΙΝ}} = \mathbf{p}_{\text{ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΤΑ}}$
Επομένως $m\upsilon = -m_1\upsilon + m_2\upsilon_\delta$ ή $m\upsilon = -m_1\upsilon + m_2\sqrt{2}\upsilon$ ή

$m = -m_1 + m_2\sqrt{2}$ (1)

Όμως $m = m_1 + m_2$ (2)

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε

$m_1 = m\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ και $m_2 = 2m\left(\sqrt{2} - 1\right)$

5.113 α) Οι πλανήτες περιστρέφονται περί το κέντρο μάζας τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.
Μεταξύ των πλανητών ασκείται δύναμη $F = G\frac{m_1 m_2}{l^2}$. Η δύναμη αυτή λειτουργεί ως κεντρομόλος σε κάθε πλανήτη. Επομένως για τον πλανήτη μάζας m_1 ισχύει:

$G\frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{r_1}$ ή $G\frac{m_2}{l^2} = \frac{\omega^2 r_1^2}{r_1}$ ή $G\frac{m_2}{l^2} = \omega^2 r_1$ (1)

και για τον πλανήτη μάζας m_2: $G\frac{m_1}{l^2} = \omega^2 r_2$ (2)

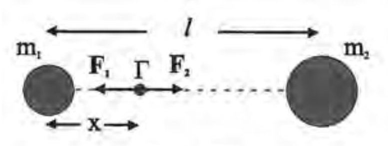
Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε $\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2}$ ή $\frac{r_1}{r_2} = 4$ (3)

$r_1 + r_2 = l$ (4)

Από το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) βρίσκουμε:

$r_1 = 42,69 \times 10^6 m$ και $r_2 = 10,67 \times 10^6 m$

β) Το βλήμα αρκεί να φτάσει μέχρι το σημείο Γ στο οποίο οι ελκτικές δυνάμεις που δέχεται από τους δύο πλανήτες είναι αντίθετες.



Σχ. 5.24

$$G\frac{m_1 m}{x^2} = G\frac{m_2 m}{(l-x)^2}$$ ή

$$\left(\frac{l-x}{x}\right)^2 = 4 \qquad \text{άρα } x = \frac{l}{3} = \frac{40R_1}{3}$$

Αν Α το σημείο εκτόξευσης στην επιφάνεια του πρώτου πλανήτη

$$V_A = -G\frac{m_1}{R_1} - G\frac{m_2}{39R_1} = -\frac{43}{39}\frac{Gm_1}{R_1} \quad (5)$$

$$V_\Gamma = -G\frac{m_1}{40R_1/3} - G\frac{m_2}{40R_1 - 40R_1/3} = -\frac{18}{80}\frac{Gm_1}{R_1} \quad (6)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του βλήματος από το σημείο Α ως το σημείο Γ έχουμε:

$W_w = \Delta K$ επομένως $(V_A - V_\Gamma)m = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Αντικαθιστώντας τα δυναμικά από τις σχέσεις (5) και (6) βρίσκουμε $\upsilon = 1025,8 m/s$

ISBN 978-960-06-4828-7
Κωδικός βιβλίου: 0-22-0224

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0224 2