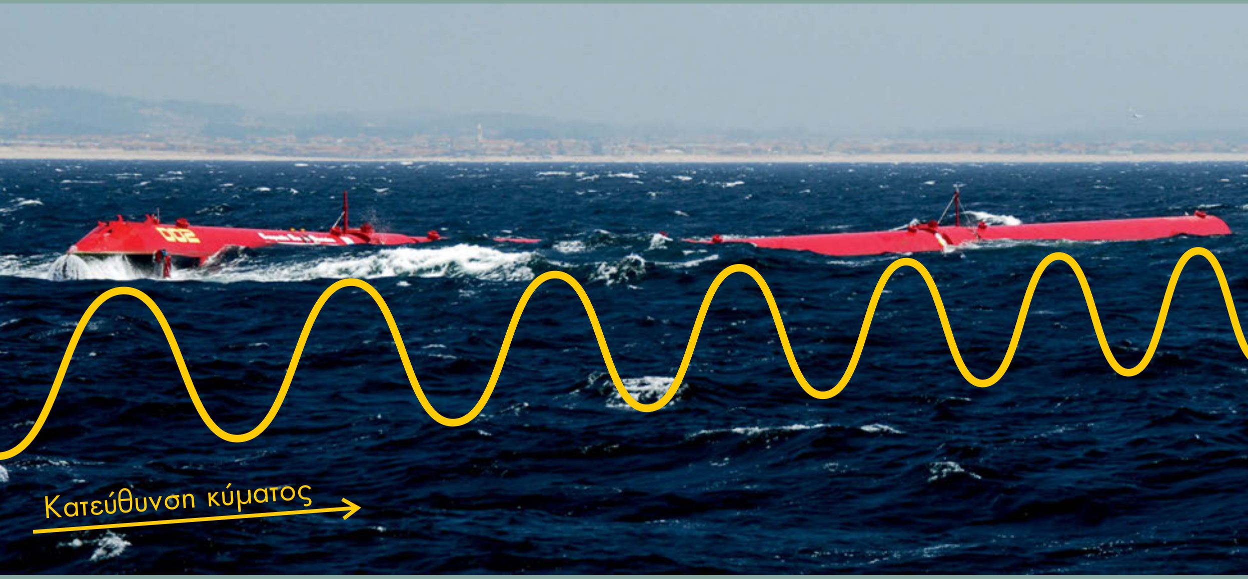
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Φυσική

Τεύχος Γ΄



Λύσεις των ασκήσεων

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας

$E = mc^2$

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Φυσική

Τεύχος Γ΄

Λύσεις των ασκήσεων

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας

Γ΄ τάξη
Γενικού Λυκείου

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ: ΑΛΕΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ - ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΤΑΝΟΣ
ΑΓΓΕΛΟΣ ΠΗΤΤΑΣ - ΣΤΑΥΡΟΣ ΡΑΠΤΗΣ

Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ.

Υποπρόγραμμα 1: ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Μέτρο 1.1: ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ενέργεια 1.1α: Προγράμματα - βιβλία

ΕΡΓΟ: ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΕΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ - ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΤΑΝΟΣ
ΑΓΓΕΛΟΣ ΠΗΤΤΑΣ - ΣΤΑΥΡΟΣ ΡΑΠΤΗΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Φυσική

Τεύχος Γ΄

Λύσεις των ασκήσεων

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας

Γ΄ τάξη
Γενικού Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ - ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Απλή αρμονική ταλάντωση

1.1 (β), (γ), (ε).

1.2 Η αρχική φάση είναι 0 ή π rad. Για να επιλέξουμε ανάμεσα στις δύο χρειάζεται να γνωρίζουμε την κατεύθυνση (πρόσημο) της ταχύτητας τη χρονική στιγμή μηδέν.

1.3 (γ).

1.4 Η ταχύτητα είναι: μηδέν στις θέσεις x = A ή x = -A, μέγιστη στη θέση ισορροπίας (x = 0).
Η επιτάχυνση είναι: μηδέν στη θέση ισορροπίας (x = 0), μέγιστη στις θέσεις x = A ή x = -A.
Η δύναμη είναι: μηδέν στη θέση ισορροπίας (x = 0), μέγιστη στις θέσεις x = A ή x = -A.

Σύμφωνα με τη διατήρηση της ενέργειας στις ταλαντώσεις

$E = K + U$ όταν $U = K$ τότε $E = 2U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = 2\frac{1}{2}Dx^2$

Επομένως $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$

1.5

x	U	K
0	0	5 J
x_1	3 J	2 J
x_2	4 J	1 J
A	5 J	0

1.6 α) T/4, β) T/2, γ) 3T/4.

1.7 α) 1, β) αρνητική, γ) 0.

1.8 (β)

Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων

1.9 α) $1{,}5\times10^{-6}$s, β) 3×10^{-6}s, γ) $0{,}75\times10^{-6}$s, δ) $0{,}75\times10^{-6}$s.

1.10 Λόγω της τάσης από αυτεπαγωγή που εμφανίζει στα άκρα του το πηνίο.

1.11

U_E	$80\text{x}10^{-3}$ J	$120\text{x}10^{-3}$ J	$70\text{x}10^{-3}$ J	0
U_B	$40\text{x}10^{-3}$ J	0	$50\text{x}10^{-3}$ J	$120\text{x}10^{-3}$ J
E	$120\text{x}10^{-3}$ J	$120\text{x}10^{-3}$ J	$120\text{x}10^{-3}$ J	$120\text{x}10^{-3}$ J

1.12 α) $L_A < L_B$, β) $I_A > I_B$.

1.13 α) $Q_B = 2Q_A$ β) $E_B = 2E_A$ γ) $T_B = T_A$ δ) $I_B = 2I_A$

1.14 (γ).

1.15 1 (γ), 2 (β).

1.16 …………δυναμική……….ενέργεια μαγνητικού πεδίου…………. ενέργεια ηλεκτρικού…………παραμένει σταθερό.

Φθίνουσα, ελεύθερη και εξαναγκασμένη ταλάντωση. Συντονισμός.

1.17 (γ)

1.18 (γ)

1.19 (γ)

1.20 Το Β.

1.21 (γ), (δ).

1.22 (β), (γ).

1.23 (β)

1.24 Αν A_K, A_{K+1} είναι οι τιμές του πλάτους και E_K, E_{K+1} οι αντίστοιχες τιμές της ενέργειας της ταλάντωσης κατά τις χρονικές στιγμές KT και $(K + 1)T$ όπου $K = 1,2,3....$ τότε

α) $\dfrac{A_K}{A_{K+1}} = \dfrac{A_o e^{-\Lambda K \mathrm{T}}}{A_o e^{-\Lambda(K+1)\mathrm{T}}} = e^{\Lambda \mathrm{T}}$

β) $\dfrac{E_K}{E_{K+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}DA_K^2}{\frac{1}{2}DA_{K+1}^2} = \left(\dfrac{A_K}{A_{K+1}}\right)^2 = e^{2\Lambda \mathrm{T}}$

Σύνθεση ταλαντώσεων

1.25 .... 8 cm .... 2 cm.

1.26 (β), (γ), (δ), (ε).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

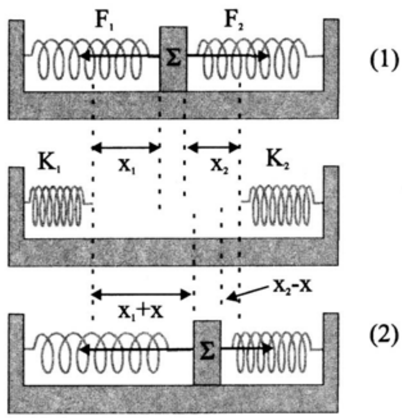
Απλή αρμονική ταλάντωση

1.27 Θεωρούμε ότι στη θέση ισορροπίας (θέση 1) το ελατήριο K_1 έχει επιμηκυνθεί κατά x_1 και το ελατήριο K_2 έχει επιμηκυνθεί κατά x_2 οπότε επειδή

$\Sigma F = 0$

θα είναι

$K_2 x_2 - K_1 x_1 = 0$ (1)



Σε μια τυχαία θέση που απέχει x από τη θέση ισορροπίας (θέση 2) ισχύει

$\Sigma F = K_2(x_2 - x) - K_1(x_1 + x)$ (2)

(θεωρούμε θετική τη φορά της απομάκρυνσης x)

η οποία αν λάβουμε υπόψη την (1) γίνεται

$$\Sigma F = -\left(K_2 + K_1\right)x \quad (3)$$

Η (3) είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$ όπου $D = K_2 + K_1$ οπότε το Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_2 + K_1}} = 0{,}2\pi \text{ s}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε ότι στη θέση ισορροπίας και τα δύο ελατήρια είναι συσπειρωμένα ή ότι έχουν το φυσικό τους μήκος.

1.28 Θεωρούμε ότι η ταλάντωση είναι αμείωτη.
α) Από τη διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση έχουμε

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\upsilon_1^{\,2}$$

οπότε $\quad D = \dfrac{m\upsilon_1^{\,2}}{A^2 - x_1^{\,2}} = 200\ N/m$

β) $\quad \dfrac{1}{2}DA^2 = \dfrac{1}{2}Dx_2^{\,2} + \dfrac{1}{2}m\upsilon_2^{\,2}$

οπότε $\quad \upsilon = \sqrt{\dfrac{D(A^2 - x_2^{\,2})}{m}} = 3\ m/s$

1.29 Το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = K$ (δες παράδειγμα 1.1).
Στη θέση ισορροπίας ισχύει

$$\Sigma F = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad mg - Kl = 0$$

οπότε $\quad K = \dfrac{mg}{l} \qquad (1).$

Η περίοδος της κίνησης δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

η οποία, αν λάβουμε υπόψη την (1), γίνεται $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 0{,}314\ s$

Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

1.30 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1126\ Hz$

1.31 Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση $q = Q\sigma\upsilon\nu\ \omega t$
Για $t = 0$ $q = Q = CV = 10^{-3}\,C$
Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000\ rad/s$$

Επομένως $q = 10^{-3}\sigma\upsilon\nu 1000t$ (SI)
Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση

$$i = I\ \eta\mu\omega t.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας στο κύκλωμα έχουμε

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{οπότε} \quad I = \frac{Q}{\sqrt{LC}} = 1\ A$$

Τελικά $i = \eta\mu 1000t$ (SI)

Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Συντονισμός.

1.32 $A_1 = A_o e^{-\Lambda t_1}$ ή $e^{-\Lambda t_1} = \frac{A_1}{A_o}$ ή $-\Lambda t_1 = \ln\frac{A_1}{A_o}$ και $\Lambda = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{A_1}{A_o}$ (1)

$A = A_o e^{-\Lambda t}$ ή $e^{-\Lambda t} = \frac{A}{A_o}$ ή $t = -\frac{1}{\Lambda}\ln\frac{A}{A_o}$ (2)

Η (2) γίνεται από την (1)

$t = \frac{t_1}{\ln\frac{A_1}{A_o}}\ln\frac{A}{A_o}$ από όπου βρίσκουμε

$$t = \frac{10}{\ln\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{32} = \frac{10}{\ln 1 - \ln 2}(\ln 1 - \ln 32) = \frac{10}{\ln 2}\ln 32 = \frac{10}{\ln 2}\ln 2^5 = 50s$$

Σύνθεση ταλαντώσεων

1.33 Η σχέση που δίνει το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Αν θέσουμε $A_1=4m,\ A_2=4m$ και $\varphi=-\pi\ rad$

προκύπτει $A=0$ (το σώμα δεν ταλαντώνεται).

1.34 Το σώμα εκτελεί ταλάντωση με πλάτος

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Αν θέσουμε $A_1=0{,}1m$, $A_2=0{,}04m$ και $\varphi=0$

προκύπτει $A=0{,}14m$

Η γωνιακή συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι ίση με αυτή των ταλαντώσεων που τη συνθέτουν. $\omega=50\ rad/s$.

Η αρχική φάση της ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ η οποία για $\varphi=0$ δίνει $\varepsilon\varphi\theta=0$ και τελικά $\theta=0$.

Επομένως, η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$x=0{,}14\eta\mu 50t$$

1.35 Το σώμα εκτελεί ταλάντωση με πλάτος

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Αν θέσουμε $A_1=0{,}08\ m$, $A_2=0{,}06\ m$ και $\varphi=-\pi\ rad$

προκύπτει $A=0{,}02\ m$

Η γωνιακή συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι ίση με αυτή των ταλαντώσεων που τη συνθέτουν. $\omega=50\pi\ rad/s$.

Η αρχική φάση της ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση

$\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ η οποία για $\varphi=-\pi$ δίνει $\varepsilon\varphi\theta=0$ και τελικά $\theta=0$.

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$x=0{,}02\eta\mu 50\pi t \qquad \text{(SI)}$$

Η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon = A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t+\theta)$$

οπότε $$\upsilon = 3{,}14\sigma\upsilon\nu 50\pi t \qquad \text{(SI)}$$

Η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση

$$\alpha = -A\omega^2\eta\mu(\omega t+\theta)$$

οπότε $$\alpha = -493\eta\mu 50\pi t \qquad \text{(SI)}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=0{,}04\ s$

1.36 Οι ήχοι που παράγονται από τα δυο διαπασών έχουν μικρή διαφορά συχνότητας, οπότε από συμβολή τους προκύπτουν διακροτήματα με συχνότητα $f_\delta = |f_1 - f_2| = 0{,}5\ Hz$

Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της έντασης του ήχου ισούται με την περίοδο των διακροτημάτων, που δίνεται από τη σχέση $T_\delta = \dfrac{1}{f_\delta} = 2\ s$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.37 Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής

$$x = A\ \eta\mu(\omega t+\varphi)$$

Θα βρούμε διαδοχικά τα A, ω και φ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \text{ οπότε } D=\frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση έχουμε

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ άρα } A=\sqrt{x^2+\frac{m}{D}\upsilon^2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (1) τελικά έχουμε

$$A=\sqrt{x^2+\frac{T^2}{4\pi^2}\upsilon^2} = 4\times 10^{-2}\ m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\ rad/s$$

Η $x = A\ \eta\mu(\omega t + \varphi)$ για $t = 0$ δίνει $x = A\ \eta\mu\varphi$ οπότε

$\eta\mu\varphi = \dfrac{x}{A} = \dfrac{1}{2}$ δηλαδή $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ ή $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$

(Η λύση $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ απορρίπτεται, γιατί για t = 0 δίνει υ > 0)

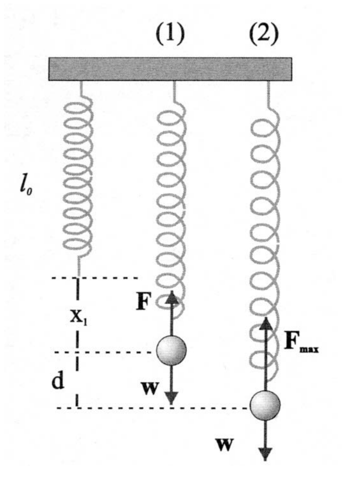
Οι ζητούμενες εξισώσεις είναι

$$x = 4\times10^{-2}\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{(SI)}$$

$$\upsilon = A\omega\ \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = 0,4\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{(SI)}$$

$$\alpha = -A\omega^2\eta\mu(\omega t + \varphi) = -4\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{(SI)}$$

1.38 Το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = K$ (βλέπε και παράδειγμα 1-1).



α) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{5}{\pi}Hz$$

Η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος είναι $A = d$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$x = d\eta\mu(\omega t + \varphi)$.

Για $t = 0 \quad d = d\eta\mu\varphi$

οπότε $\eta\mu\varphi = 1$

δηλαδή $\varphi = \dfrac{\pi}{2}rad$

Στην περίπτωση που η κατεύθυνση προς τα κάτω θεωρηθεί αρνητική

για $t = 0 \quad -d = d\eta\mu\varphi$ οπότε $\eta\mu\varphi = -1$ δηλαδή $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}rad$

γ) $\upsilon_{\max} = A\omega = d2\pi f = 0{,}5\ m/s$

δ) $\alpha_{\max} = A\omega^2 = d4\pi^2 f^2 = 5\ m/s^2$

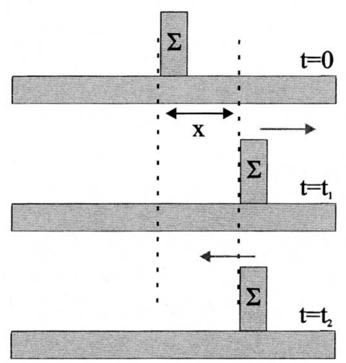
ε) Στη θέση ισορροπίας (θέση 1) $\Sigma F = 0$ οπότε $Kx_1 = mg$ και

$$x_1 = \frac{mg}{K}$$

Το σώμα δέχεται τη μέγιστη δύναμη στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης (θέση 2)

$$F_{\max}^{\varepsilon\lambda} = K(x_1 + d) = K\left(\frac{mg}{K} + d\right) = mg + Kd = 15\ N$$

1.39 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{5} rad/s$



$$x = 0{,}2\eta\mu\frac{\pi}{5}t$$

Θέτουμε $x = 0{,}1m$ και λύνουμε ως προς το χρόνο

$$\eta\mu\frac{\pi}{5}t = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

Δύο διαδοχικές λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι οι

$$t_1 = \frac{5}{6}s \text{ και } t_2 = \frac{25}{6}s$$

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο διαδοχικές στιγμές που το σώμα θα βρεθεί στη θέση $x = 0{,}1m$ είναι

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{10}{3}s$$

1.40 Θεωρούμε ότι το σύστημα κάνει τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης με σταθερά επαναφοράς K.

α) Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση έχουμε

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}M\upsilon^2 \qquad \text{οπότε} \qquad A = \sqrt{\frac{M\upsilon^2}{K}} = 0{,}1\ m$$

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στη στιγμή της πρόσκρουσης ($\upsilon = \upsilon_{\max}$) και τη στιγμή που η ταχύτητα μηδενίζεται είναι

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{\pi}{100} s .$$

β) Ο επιβάτης κάνει ταλάντωση ίδιας περιόδου με το σύστημα με σταθερά επαναφοράς D.

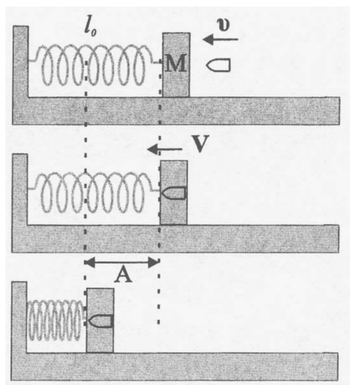
$$T_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = T_{\varepsilon\pi\iota\beta\acute{\alpha}\tau\eta} \qquad \text{δηλαδή} \qquad 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

οπότε $D = \dfrac{m}{M}K$.

Η δύναμη που δέχεται από τη ζώνη παίζει το ρόλο της δύναμης επαναφοράς. Το μέτρο της δύναμης θα πάρει τη μέγιστη τιμή του τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{T}{4}$ όταν $x = A$.

$$F_{\max} = DA = \frac{m}{M}KA = 15 \times 10^3 N$$

1.41 α) Μετά την (πλαστική) κρούση του συστήματος βλήμα-σώμα, η κοινή τους ταχύτητα θα είναι V για την οποία ισχύει $m\upsilon = (m+M)V$



επομένως $V = \dfrac{m}{m+M}\upsilon = 5\ m/s$.

β) Το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = K$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση έχουμε

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

οπότε $$A = V\sqrt{\frac{m+M}{K}} = 0{,}1\ m$$

γ) Το σύστημα θα σταματήσει στιγμιαία, για πρώτη φορά, μετά από χρόνο $\Delta t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{2\pi}{4}\sqrt{\dfrac{m+M}{K}} = 3{,}14 \times 10^{-2}\, s$.

1.42 α) $I = \omega Q = 2\pi f Q = 5 \times 10^{-3}\, A$

Από τη διατήρηση της ενέργειας στο κύκλωμα έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \quad \text{και} \quad q = \sqrt{Q^2 - LCi^2} \quad (1)$$

Όμως $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ και $LC = \dfrac{1}{4\pi^2 f^2}$ (2)

Οπότε η (1) γίνεται από τη (2)

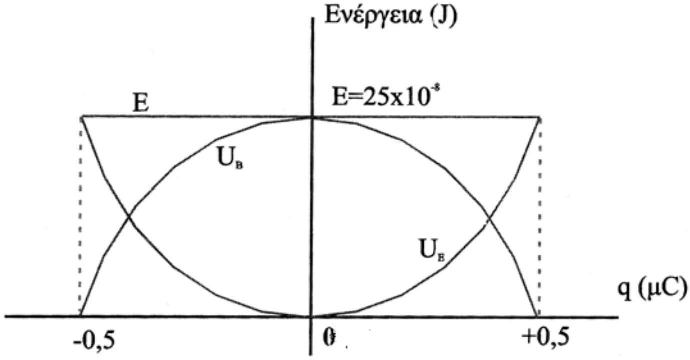
$$q = \sqrt{Q^2 - \frac{i^2}{4\pi^2 f^2}} = 4 \times 10^{-7}\, C$$

β) $U_E = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ (3)

$U_E + U_B = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ επομένως $U_B = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} - \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ (4)

Η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή $E = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = 25 \times 10^{-8} J$ (5)

Οι συναρτήσεις (3) (4) και (5) παριστάνονται γραφικά στο διάγραμμα που ακολουθεί



1.43 α) $Q = CV = 4\times10^{-3} C$

β) $U_E = U_B = \frac{E}{2}$ οπότε $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

και $q = Q\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\times10^{-3} C$

γ) Η σχέση που δίνει το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ (1)

όπου $Q = 4\times10^{-3} C$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{10^3}{6} rad/s$

Η πρώτη φορά που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή γίνεται ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο ταυτίζεται με την πρώτη φορά που το φορτίο στον πυκνωτή γίνεται $q = 2\sqrt{2}\times10^{-3} C$, δηλαδή τη στιγμή για την οποία

$$2\sqrt{2}\times10^{-3} = 4\times10^{-3}\sigma\upsilon\nu\frac{10^3}{6}t$$

Λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση ως προς τον χρόνο και βρίσκουμε ότι η μικρότερη τιμή του για την οποία ισχύει η εξίσωση είναι $t = 1,5\times10^{-3} s$.

1.44 Από τη διατήρηση της ενέργειας στο κύκλωμα έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

οπότε $Q = \sqrt{q^2 + LCi^2} = 4\times10^{-5} C = 40\ \mu C$

1.45 α) Το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ίση με αυτή των δύο ταλαντώσεων στις οποίες μετέχει.
Άρα $\omega = 50\pi\ rad$
και $D = m\omega^2 = 5\times10^4 N/m$
β) Το πλάτος της ταλάντωσης που κάνει το σώμα είναι

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu(-\pi)} = A_1 - A_2 = 5\times10^{-2} m$$

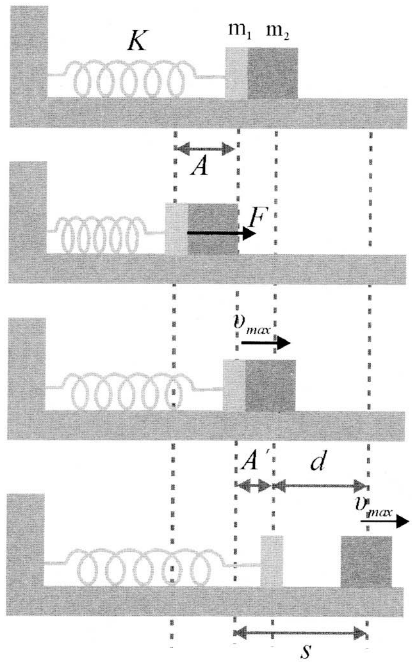
οπότε η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = \frac{1}{2}DA^2 = 62,5\ J$

γ) Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

οπότε
$$\upsilon = \sqrt{\frac{2E - Dx^2}{m}} = 3\sqrt{2,5}\ m/s$$

1.46 α) Το Σ_2, όσο βρίσκεται σε επαφή με το Σ_1, εκτελεί τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης. Το ρόλο της δύναμης επαναφοράς για το Σ_2 παίζει η δύναμη F που δέχεται από το Σ_1. Η επαφή ανάμεσα στα δύο σώματα χάνεται όταν $F = 0$ δηλαδή στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.



β) Το Σ_2 αφού χάσει την επαφή του με το Σ_1 κινείται ευθύγραμμα ομαλά με $\upsilon_{\max}$

$$\upsilon_{\max} = A\omega = A\sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} = 2\ m/s$$

και το Σ_1 κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α΄.

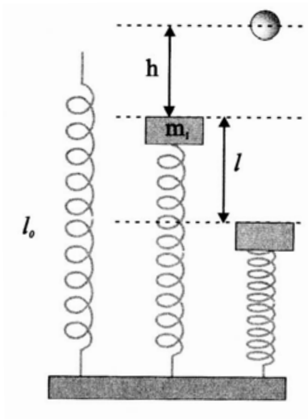
Από τη διατήρηση της ενέργειας κατά την ταλάντωση του Σ_1 έχουμε:
$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{\max}^2 = \frac{1}{2}KA'^2$$

από όπου βρίσκουμε
$$A' = \upsilon_{\max}\sqrt{\frac{m_1}{K}} = 0,2m$$

γ) Το Σ_1 μηδενίζει την ταχύτητά του σε χρόνο $\Delta t = \frac{T'}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1}{K}} = \frac{\pi}{20}s$ από τη στιγμή που χάθηκε η επαφή ανάμεσα στα δύο σώματα. Στο χρόνο αυτό το Σ_2 έχει διανύσει $s = \upsilon_{\max}\Delta t = 0,314m$

Η απόσταση μεταξύ τους εκείνη τη χρονική στιγμή θα είναι $d = s - A' = 0,114m$

1.47 α) Το σώμα μάζας m_1 κάνει τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης με σταθερά επαναφοράς $D = K$. Για να φτάσει από το ανώτερο σημείο στη θέση ισορροπίας του χρειάζεται χρόνο



$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m_1}{K}} = \frac{\pi}{20}s\ .$$

Στον ίδιο χρόνο το σώμα μάζας m_2 πρέπει να διανύσει διάστημα h.

$$h = \frac{1}{2}g\left(\Delta t\right)^2 = 0,125\ m$$

β) Αμέσως πριν τη σύγκρουση τα σώματα έχουν ταχύτητες

$$\upsilon_1 = \upsilon_{\max} = A\omega = l\frac{2\pi}{T} = l\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}}} = l\sqrt{\frac{K}{m_1}} = 2\ m/s$$

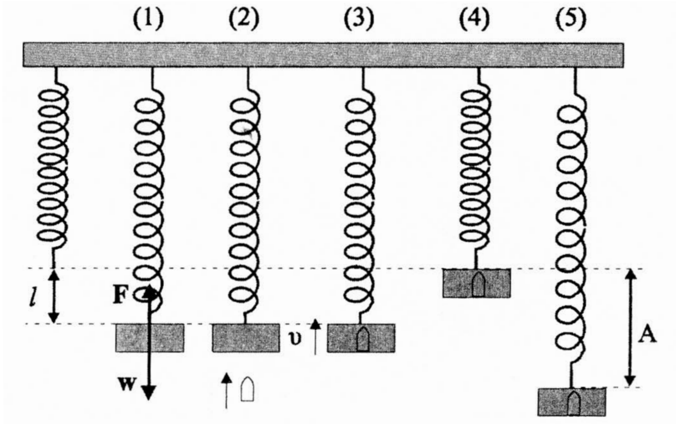
$$\upsilon_2 = g\Delta t = 1,57m/s$$

γ) Εφόσον τα σώματα μετά την κρούση τους αποκτούν ταχύτητες αντίθετες από αυτές που είχαν πριν συγκρουστούν, θα επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις και το φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται συνεχώς.
Η περίοδος του φαινομένου είναι

$T_\varphi = \frac{T}{2}$ όπου T η περίοδος της ταλάντωσης του m_1

$$T_\varphi = \pi\sqrt{\frac{m_1}{K}} = 0,314s$$

1.48 α) Στη θέση (1) $\Sigma F = 0$ οπότε $Kl = m_1 g$ και $K = \frac{m_1 g}{l} = 12\ N/m$



Αν υ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση - θέση (3) - εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}Kl^2 = (m_1 + m_2)gl \text{ και } \upsilon = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)gl - Kl^2}{m_1 + m_2}} = 2m/s$$

β) Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = K$

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (5) θα ισχύει

$$\Sigma F = 0 \text{ οπότε } KA = (m_1 + m_2)g \text{ και } A = \frac{(m_1 + m_2)g}{K} = 0,625m$$

Στη θέση αυτή το συσσωμάτωμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα που

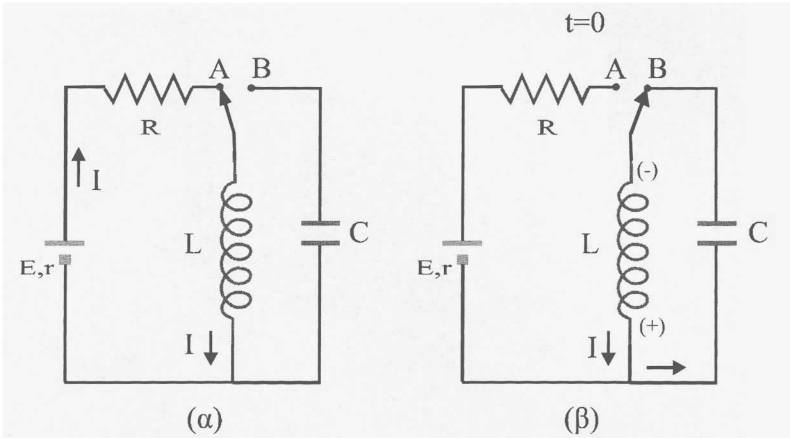
είναι $\upsilon_{\max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}A = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}}}A = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}A = 2,5m/s$

γ) Ο χρόνος κίνησης από την ανώτερη θέση στη θέση ισορροπίας είναι

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}} = 0,4\ s$$

1.49 α) Το κύκλωμα το σχήματος (α) διαρρέεται από σταθερό ρεύμα

$$I = \frac{E}{R + r} = 0,6\ A$$



Αμέσως μετά τη μεταφορά του μεταγωγού στη θέση Β στο πηνίο δημιουργείται ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz το ρεύμα που προκαλεί αυτή η ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι ομόρροπο με το αρχικό. Επομένως ο οπλισμός που θα αποκτήσει πρώτος θετικό φορτίο είναι αυτός που συνδέεται με τον αρνητικό πόλο της πηγής.

β) Από τη στιγμή μηδέν και μετά το κύκλωμα που περιλαμβάνει το πηνίο και τον πυκνωτή θα εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}} = 10^4 \ rad/s$$

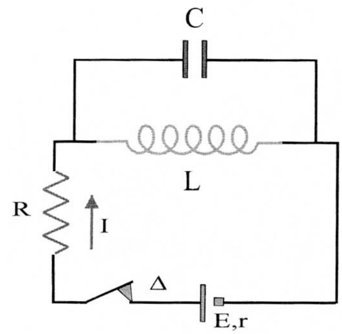
Τη στιγμή μηδέν ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα μέγιστης έντασης. Εκείνη τη στιγμή το μαγνητικό πεδίο του πηνίου έχει ενέργεια ίδια με αυτή που είχε πριν μετακινηθεί ο μεταγωγός, επομένως το ρεύμα έχει ένταση $I = 0,6A$ (μέγιστη).
Το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = \frac{I}{\omega} = 6 \times 10^{-5} C$$

Επομένως οι εξισώσεις του ρεύματος και του φορτίου με το χρόνο είναι

$$i = 0,6 \ \sigma\upsilon\nu 10^4 \,\mathrm{t} \qquad q = 6 \times 10^{-5} \ \eta\mu 10^4 \,\mathrm{t}$$

1.50 α) Όταν ανοίγουμε το διακόπτη Δ μεταβάλλεται το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο. Αυτό έχει ως συνέπεια την εμφάνιση ηλεκτρεγερτικής δύναμης από αυτεπαγωγή. Το πηνίο επομένως λειτουργεί ως πηγή, η οποία φορτίζει τον πυκνωτή.



β) Το μέγιστο ρεύμα στο πηνίο θα είναι

$$I = \frac{E}{R + r} = 3\ A$$

Η μέγιστη ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί το πηνίο είναι ίση με τη μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \text{οπότε} \qquad C = \frac{LI^2}{V^2} = 18 \times 10^{-6}\, F$$

(Η ελάχιστη χωρητικότητα του πυκνωτή αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της τάσης μεταξύ των οπλισμών του).

2 ΚΥΜΑΤΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Μηχανικά κύματα

2.1 (γ)

2.2 α) Β β) Γ

2.3 1α) Γ 1β) Α
2α) Α, Δ 2β) Β, Ε 2γ) Β, Ε

2.4 (α), (β), (δ)

2.5 1) (β) 2) (γ)

Συμβολή - στάσιμα

2.6 1) Δ

2.7 Δύο πηγές λέγονται σύγχρονες ή σε φάση όταν δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα.

2.8 ……….. αντίθετες ………. παραμένουν συνεχώς ακίνητα ……… μέγιστο πλάτος ………… κοιλίες ………. $\lambda/2$.

2.9 1) (β) 2) (α)

2.10 α) όχι β) Γ

2.11 α) Δεσμοί Β, Δ, Ζ Κοιλίες Α, Γ, Ε, Η
β) π rad
γ) Μηδέν
δ) $\lambda/4$

2.12 (α)

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

2.13 $1{,}53 \times 10^8$ km.

2.14 7,46 φορές.

2.15 (δ)

2.16 (γ)

2.17

Ραδιοκύματα	10^{13} Hz
Μικροκύματα	10^{17} Hz
Ακτίνες Χ	10^{8} Hz
Υπέρυθρο	10^{10} Hz
Υπεριώδες	10^{15} Hz
Ακτίνες γ	10^{19} Hz

2.18 α) Ραδιοκύματα.
β) Μικροκύματα.
γ) Ακτίνες Χ.
δ) Ακτίνες γ.

2.19 (α).

2.20 (γ).

Ανάκλαση - διάθλαση

2.21 Όταν υφίσταται ανάκλαση ή διάθλαση.

2.22 60° και στις δύο επιφάνειες.

2.23 (α).

2.24 Η συχνότητα παραμένει σταθερή, η ταχύτητα διάδοσης μειώνεται, το μήκος κύματος μειώνεται.

2.25 (α).

2.26 Το μπλε.

2.27 Στην πλάκα με δείκτη διάθλασης $n = 1,6$.

2.28 α) Α.

β) Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μηχανικά κύματα

2.29 Ο χρόνος που χρειάζεται ένα σημείο της χορδής για να μετατοπισθεί από τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης στη θέση ισορροπίας είναι ίσος με $T/4$

$\frac{T}{4} = 0,15\ s$ οπότε $T = 0,6\ s$ και $f = \frac{1}{T} = \frac{10}{6} Hz$.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$\upsilon = \lambda f = 2\ m/s$.

2.30 Συγκρίνοντας τη σχέση $y = 3 \times 10^{-2} \eta\mu\left(1320t - 4x\right)$

με τη γενική σχέση $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

βρίσκουμε

α) $\frac{2\pi}{\lambda} = 4\ rad/m$ οπότε $\lambda = \frac{2\pi}{4} = 1,57\ m$.

β) $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 1320\ rad/s$ οπότε $f = \frac{1320}{2\pi} Hz$

και $\upsilon = \lambda f = 330\ m/s$

γ) $A = 3\times 10^{-2}\, m$ και $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1320\ rad/s$

οπότε $\upsilon_{\max} = A\omega = 39,6\ m/s$

δ) $\varphi_1 = 1320t - 4x_1$ και $\varphi_2 = 1320t - 4x_2$

$\varphi_1 - \varphi_2 = 4\left(x_2 - x_1\right)$ οπότε

$$\Delta x = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} = 0,523\ m$$

2.31 α) Το κύμα φτάνει στο σημείο Β μετά από χρόνο

$$t = \frac{x}{\upsilon} = 20\ s$$

β) Θέτουμε στην εξίσωση κύματος $t = 21,5\ s$ και $x = 60\ m$ και βρίσκουμε την απομάκρυνση

$$y = 0,1\eta\mu 2\pi\left(0,25\times 21,5 - 5\right) = 0,05\sqrt{2}\ m = 5\sqrt{2}cm$$

Στάσιμο κύμα

2.32 α) Ένα στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \ (1)$$

προκύπτει από τη συμβολή δύο κυμάτων που περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \quad \text{και} \quad y_2 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

Συγκρίνουμε την (1) με την $y = 0,5\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}\eta\mu 40\pi t$

και βρίσκουμε

$2A = 0,5\ cm$ και $A = 0,25\ cm$

$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$ και $\lambda = 6\ cm$

$\frac{2\pi}{T} = 40\pi$ και $f = \frac{1}{T} = 20\ Hz$

Τελικά $y_1 = 0,25\eta\mu 2\pi(20t - \frac{x}{6})$

και $y_2 = 0,25\eta\mu 2\pi(20t + \frac{x}{6})$

β) Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι $d = \frac{\lambda}{2} = 3\ cm$

γ) Η σχέση που δίνει την ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται ένα σημείο του μέσου είναι $\upsilon = 2\mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$

ή $\upsilon = 2\mathrm{A}2\pi f\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$

Για $x = 1cm$ και $t = \frac{9}{8}s$ βρίσκουμε $\upsilon = -31,4cm/s$

δ) $\upsilon = \lambda \cdot f = 120cm/s = 1,2m/s$

2.33 β) Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου δίνεται από τη σχέση

$$|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$$

$2A = 4\ cm$

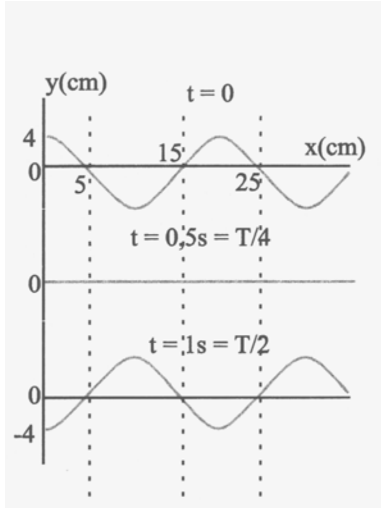
$\frac{\lambda}{2} = 10\ cm$ οπότε $\lambda = 20\ cm$

$T = 2s$

οπότε $|A'| = \left|4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\right|$.

Για $x = 12,5\ cm$

$$|A'| = \left|4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right| = 2\sqrt{2}\ cm$$



2.34 α) Η ένταση του ήχου, άρα και η ένδειξη του δέκτη, μηδενίζεται στις θέσεις που αντιστοιχούν σε δεσμούς του στάσιμου κύματος που δημιουργείται από τη συμβολή του ήχου που εκπέμπει το διαπασών και του ήχου που ανακλάται. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $d = \frac{\lambda}{2}$ οπότε $\lambda = 2d = 1m$ και $\upsilon = \lambda f = 340 m/s$.

β) Τα μέγιστα του ήχου αντιστοιχούν σε δυο διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών είναι

$d' = \frac{\lambda'}{2}$ οπότε $\lambda' = 2d' = 0,4\ m$.

$\upsilon = \lambda' f'$ οπότε $f' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = 850\ Hz$.

2.35 $$y_1 = 5\ \text{ημ}\ \pi(5t - x) = 5\ \text{ημ}\ 2\pi(2,5t - \frac{x}{2}) \qquad (1)$$

και $$y_1 = 5\ \text{ημ}\ \pi(5t + x) = 5\ \text{ημ}\ 2\pi(2,5t + \frac{x}{2}) \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) με την εξίσωση κύματος

$$y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

ή $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$

βρίσκουμε $A = 5\ cm$ $\quad f = \frac{1}{T} = 2{,}5 Hz$ $\quad \lambda = 2\ cm$

α) $\upsilon = \lambda f = 5\ cm/s$

β) Το στάσιμο κύμα που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων έχει εξίσωση

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} = 10\sigma\upsilon\nu\ \pi x\ \eta\mu\ 5\pi t$$

Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου δίνεται από τη σχέση

$$|A'| = |10\sigma\upsilon\nu\ \pi x|$$

Οι δεσμοί του στάσιμου κύματος αντιστοιχούν στις λύσεις της εξίσωσης $A' = 0$

ή $\sigma\upsilon\nu\ \pi x = 0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ οπότε

$\pi x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$ οπότε $x = \frac{1}{2}cm$ ή $x = \frac{5}{2}cm$ ή ……

και $\pi x = 2K\pi - \frac{\pi}{2}$ οπότε $x = \frac{3}{2}cm$ ή $x = \frac{7}{2}cm$ ή …….

Δεσμούς θα έχουμε τελικά στις θέσεις

$0{,}5\ cm,\ 1{,}5\ cm,\ 2{,}5\ cm,\ 3{,}5\ cm, \ldots$

Παρατηρούμε ότι δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν μεταξύ τους $\frac{\lambda}{2} = 1\ cm$.

Για να βρούμε τις θέσεις των κοιλιών θέτουμε $|A'| = 10\ cm$ και λύνουμε ως προς x

$\sigma\upsilon\nu\ \pi x = \sigma\upsilon\nu 0$ ή $\sigma\upsilon\nu\ \pi x = \sigma\upsilon\nu\ \pi$ οπότε

$\pi x = K\pi$ και $x = 0$ ή $x = 1\ cm$ ή $x = 2\ cm$ ή...

Κοιλίες θα έχουμε τελικά στις θέσεις

$0,\ 1cm,\ 2cm,\ 3cm, \ldots\ldots$

Παρατηρούμε ότι δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν μεταξύ τους $\frac{\lambda}{2} = 1cm$.

Επίσης ένας δεσμός απέχει από την πιο κοντινή του κοιλία $\frac{\lambda}{4} = 0{,}5\ cm$.

γ) $|A'| = |10\sigma\upsilon\nu\ \pi x|$ οπότε $|A'_{\max}| = 10\ cm$

2.36 $\upsilon = \lambda f$ οπότε $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = 2\ m$

Εφόσον τα άκρα της χορδής είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία θα είναι δεσμοί και εφόσον το σύνολο των δεσμών είναι τρεις υπάρχει ένας ακόμη δεσμός μεταξύ των άκρων. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$ και το συνολικό μήκος της χορδής θα είναι $d = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda = 2\ m$.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

2.37 α) $c = \lambda f$ οπότε $\lambda = \frac{c}{f} = 3\ m$

β) Για κάθε θέση $c = \frac{E}{B}$ οπότε $B = \frac{E}{c}$ και $B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = 4 \times 10^{-11} T$

γ) Η συχνότητα του κύματος πρέπει να είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του δέκτη, οπότε

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ ή } C = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} = 5 \times 10^{-16} F$$

Ανάκλαση – Διάθλαση

2.38 $n = \frac{c}{\upsilon}$ οπότε $\upsilon = \frac{c}{n} = 2 \times 10^8 m/s$

2.39 Η γωνία ανάκλασης είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης οπότε $\theta_r = \theta_\alpha = 30^o$

Από το νόμο του Snell έχουμε

$n_1 \eta\mu\theta_\alpha = n_2 \eta\mu\theta_b$ οπότε $\eta\mu\theta_b = \eta\mu\theta_\alpha \frac{n_1}{n_2} = 0,4375$

2.40 $\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_\alpha}$ οπότε $n_\alpha = \frac{n_b}{\eta\mu\theta_{crit}} = \sqrt{3}$

2.41 Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο νερό είναι $\upsilon = \lambda f = 22,44 \times 10^7 m/s$. Επομένως,

ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι $n = \frac{c}{\upsilon} = 1,33$.

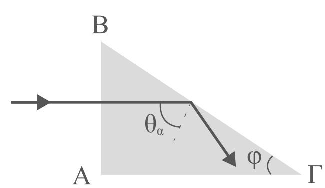
2.42 α) $c = \lambda_0 f$ οπότε $f = \frac{c}{\lambda_0} = 4,6 \times 10^{14} Hz$

β) Από τη σχέση $n = \frac{\lambda_0 f}{\lambda f} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ προκύπτει $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = 464\ nm$.

γ) $\upsilon = \lambda f = 2,14 \times 10^8 m/s$.

2.43 $n = \frac{c}{\upsilon} = 1,56$

2.44 Η φωτεινή δέσμη πέφτει στην έδρα ΒΓ υπό γωνία $\theta_\alpha = \hat{B} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ και υφίσταται ολική ανάκλαση όταν ισχύει $\theta_\alpha \geq \theta_{crit}$



$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

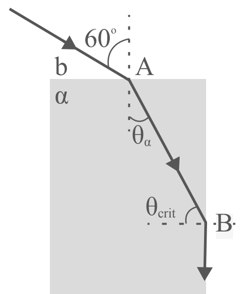
(μέσον b είναι ο αέρας)

Αν $\theta_\alpha = \theta_{crit}$ τότε

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\max}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu\varphi_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

δηλαδή $\varphi_{\max} = 45^o$

2.45 Η ελάχιστη τιμή του δείκτη διάθλασης της γυάλινης πλάκας αντιστοιχεί στην περίπτωση στην οποία η δέσμη προσπίπτει στο Β με την κρίσιμη γωνία.
Αν ως μέσον b θεωρήσουμε τον αέρα και ως μέσον α τη γυάλινη πλάκα, από το νόμο του Snell, για το σημείο Α έχουμε



$$n_b\eta\mu\theta_b = n_\alpha\eta\mu\theta_\alpha \quad (1)$$

Όμως $\qquad n_b = 1$,

$\qquad \theta_b = 60^o$

και $\qquad \theta_\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{crit}\right)$

οπότε η (1) δίνει $\eta\mu 60^o = n_\alpha \sigma\upsilon\nu\theta_{crit} = n_\alpha\sqrt{1-\eta\mu^2\theta_{crit}} \qquad (2)$

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_\alpha} = \frac{1}{n_\alpha}$$

Αντικαθιστούμε στη (2) οπότε

$$\eta\mu 60^o = n_\alpha\sqrt{1-\frac{1}{n_\alpha^2}}$$

και τελικά $\qquad n_\alpha = \sqrt{1+\eta\mu^2 60^o} = 1,32$

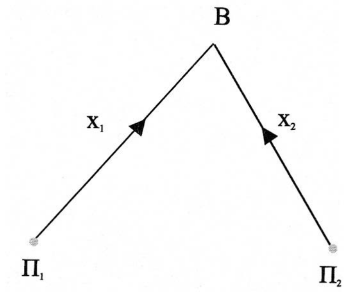
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.46 Η εξίσωση του κύματος που φτάνει στο σημείο Β από την πηγή Π_1 είναι

$$y_1 = A\eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)$$

ενώ η εξίσωση κύματος που φτάνει από την πηγή Π_2 είναι

$$y_2 = A\eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$$



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση του σημείου Β δίνεται από τη σχέση

$$y = y_1 + y_2 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_2-r_1)}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \quad (1)$$

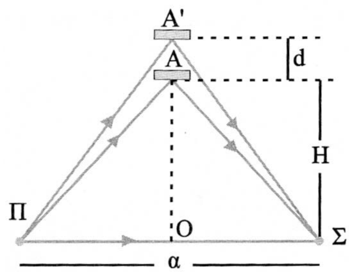
στην οποία το μήκος κύματος έχει την τιμή $\lambda = \upsilon T = 2m$

Η εξίσωση (1) είναι εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης με πλάτος

$$A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_2-r_1}{2\lambda}\right| = \left|6\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 3\sqrt{2}\ mm$$

2.47 Με τη μετακίνηση του ανακλαστήρα η διαδρομή του κύματος που φτάνει στο Σ μετά από την ανάκλαση αυξάνεται κατά λ/2 επομένως:

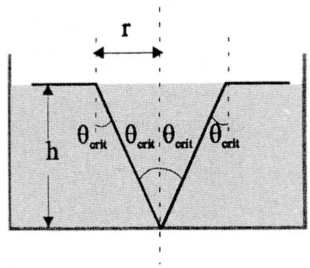
$$\Pi A'\Sigma - \Pi A\Sigma = \frac{\lambda}{2} \text{ ή}$$



$$2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+(H+d)^2} - 2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+H^2} = \frac{\lambda}{2}$$

και τελικά $\lambda = 2\sqrt{\alpha^2+4(H+d)^2} - 2\sqrt{\alpha^2+4H^2}$

2.48 Στον παρατηρητή φτάνουν φωτεινές ακτίνες από την πηγή όταν προσπίπτουν στην ελεύθερη επιφάνεια με γωνία $\theta \le \theta_{crit}$.



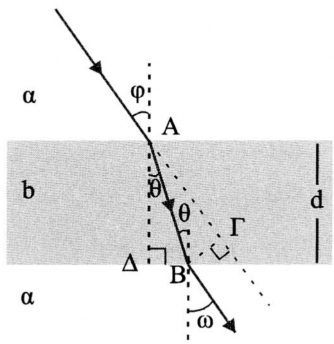
Αν το μέσον b είναι ο αέρας και το μέσον α το νερό ισχύει

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_\alpha} = \frac{1}{n}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$r = h\varepsilon\varphi\theta_{crit} = \frac{h\eta\mu\theta_{crit}}{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta_{crit}}} = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}}$$

2.49 α) Εφαρμόζουμε το νόμο του Snell για την είσοδο της ακτίνας στη γυάλινη πλάκα και για την έξοδό της απ’ αυτήν.



$$n_\alpha \eta\mu\varphi = n_b \eta\mu\theta$$

$$n_b \eta\mu\theta = n_\alpha \eta\mu\omega$$

Από τις δύο σχέσεις προκύπτει

$n_\alpha \eta\mu\varphi = n_\alpha \eta\mu\omega$ οπότε

$\eta\mu\varphi = \eta\mu\omega$ και

$\varphi = \omega$ (φ, ω στο πρώτο τεταρτημόριο)

Άρα η ακτίνα βγαίνει από τη γυάλινη πλάκα παράλληλα με την αρχική της διεύθυνση.

β) Στο τρίγωνο ΑΓΒ είναι $l = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AB}\,\eta\mu(\varphi-\theta)$ (1)

Αλλά από το τρίγωνο ΑΔΒ βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{d}{\sigma\upsilon\nu\theta} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει

$$l = \frac{d\eta\mu(\varphi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta} = d\eta\mu\varphi - \frac{d\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\theta} = d\eta\mu\varphi - \frac{d\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}} \qquad (3)$$

Από το νόμο του Snell

$n_\alpha \eta\mu\varphi = n_b \eta\mu\theta$ και επειδή $n_\alpha = 1$ και $n_b = n$

προκύπτει $$\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\varphi}{n} \tag{4}$$

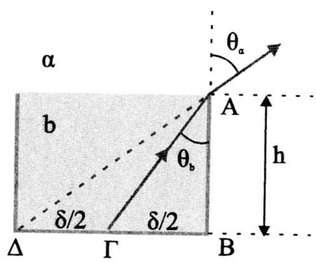
Από (3) και (4) $$l = d\eta\mu\varphi - \frac{d\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{1-\frac{\eta\mu^2\varphi}{n^2}}}$$

και τελικά $$l = d\eta\mu\varphi\left(1 - \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{n^2 - \eta\mu^2\varphi}}\right)$$

2.50 Αν θεωρήσουμε τον αέρα ως μέσον α ($n_\alpha = 1$) και το νερό ως μέσον b ($n_b = n$), από το νόμο του Snell έχουμε

$$n_\alpha \eta\mu\theta_\alpha = n_b \eta\mu\theta_b$$

οπότε $\eta\mu\theta_\alpha = n\eta\mu\theta_b$ (1)



Από το τρίγωνο ΑΒΔ προκύπτει ότι

$$\eta\mu\theta_\alpha = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Delta}^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{h^2+\delta^2}} \tag{2}$$

Επίσης από το τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε

$$\eta\mu\theta_b = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2}} = \frac{\delta}{2\sqrt{h^2+\frac{\delta^2}{4}}} \tag{3}$$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει

$$\frac{\delta}{\sqrt{h^2+\delta^2}} = n\frac{\delta}{2\sqrt{h^2+\frac{\delta^2}{4}}}$$

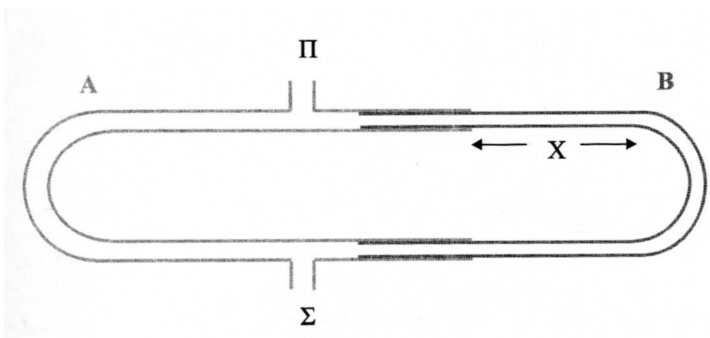
και τελικά $\quad h=\delta\sqrt{\dfrac{n^2-1}{4-n^2}}=8cm$

2.51 Για $x=0,408\ m$ έχουμε απόσβεση, οπότε η διαφορά δρόμων για τα δύο ηχητικά κύματα είναι

$$\Delta l=(2K+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Αν μετακινήσουμε το σωλήνα Β κατά Δx η διαφορά των δρόμων θα γίνει $\Delta l+2\Delta x$
και επειδή είναι η πρώτη φορά που θα έχουμε πάλι απόσβεση θα ισχύει $\Delta l+2\Delta x=(2K+1)\dfrac{\lambda}{2}+\lambda \qquad (2)$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\Delta x=\dfrac{\lambda}{2}$



$\upsilon=\lambda f \qquad$ οπότε $\quad \lambda=\dfrac{\upsilon}{f}$

και $\qquad \Delta x=\dfrac{\upsilon}{2f}=0,136\ m$

Η νέα απόσταση είναι $\quad x'=x+\Delta x=0,544\ m$.

2.52 α) Συγκρίνοντας την εξίσωση ενός από τα κύματα $y_1=A\eta\mu(2\pi t-\pi r_1+\varphi_o)$ με τη γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος προκύπτει ότι:

$2\pi = \frac{2\pi}{T}$ άρα $T = 1\ s$ και $\pi = \frac{2\pi}{\lambda}$ άρα $\lambda = 2m$

$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = 2m/s$

β) Η απομάκρυνση του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του κάποια στιγμή είναι

$$y = y_1 + y_2 = A\eta\mu(2\pi t - \pi r_1 + \varphi_o) + A\eta\mu(2\pi t - \pi r_2) \text{ ή}$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\varphi_o}{2}\right)\ \eta\mu\left(2\pi t - \frac{r_1 + r_2}{2}\pi + \frac{\varphi_o}{2}\right) \ (1)$$

Για $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ η (1) γίνεται

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\ \eta\mu\left(2\pi t - \frac{r_1 + r_2}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

i. Για να μένει το σημείο αυτό διαρκώς ακίνητο θα πρέπει

$$2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ή $\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4} = (2N+1)\frac{\pi}{2}$ όπου $N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$

άρα $r_1 - r_2 = \left(2N + \frac{3}{2}\right)$ m

ii. Για να ταλαντώνεται το σημείο Κ με πλάτος 2Α πρέπει

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$$

ή $\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4} = N\pi$ όπου $N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$

άρα $r_1 - r_2 = \left(2N + \frac{1}{2}\right)$ m

γ) Για να παραμένει το σημείο Μ ακίνητο θα πρέπει

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\varphi_o}{2}\right) = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\varphi_o}{2}\right) = 0$$

άρα $\varphi_o = \pi$ rad

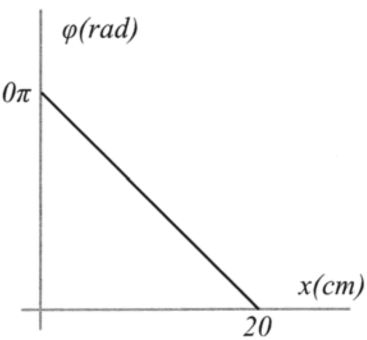
2.53 α) Από τη σχέση $y = 5\eta\mu 10\pi t$ βρίσκουμε $A = 5cm$ και $\omega = 10\pi \ rad/s$

οπότε $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \ Hz$

Από τη σχέση $\upsilon = \lambda f$ προκύπτει $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = 4 \ cm$

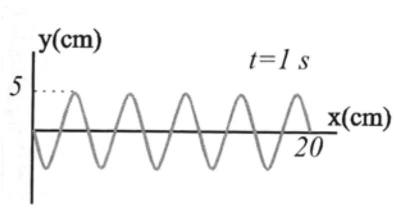
Η εξίσωση του κύματος θα είναι $y = 5\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{x}{4}\right)$ (τα x, y σε cm, το t σε s)

β) Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 1 \ s$ δίνεται από τη σχέση $\varphi = 10\pi - \frac{\pi}{2}x$



γ) Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = 20 \ cm$. Ο αριθμός των μηκών κύματος, τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$N = \frac{x_1}{\lambda} = 5$$



2.54 α) Συγκρίνουμε τη σχέση $y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t$ με την $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ και βρίσκουμε $\lambda = 4 \ cm$ και $f = \frac{1}{T} = 5 \ Hz$

οπότε $\upsilon = \lambda f = 20 \ cm/s$

β) $y_M = 8\sigma\upsilon\nu\frac{0,5\pi}{2}\eta\mu 10\pi\frac{1}{40} = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\eta\mu\frac{\pi}{4} = 4 \ cm$

$$\upsilon = A'\omega \; \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t = 2A\omega \; \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \; \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t}{\mathrm{T}}$$

οπότε $\upsilon_{\mathrm{M}} = 8\ 10\pi \; \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x_{\mathrm{M}}}{2} \; \sigma\upsilon\nu 10\pi t = 40\pi \; cm/s$

γ) Δεσμοί υπάρχουν στις θέσεις για τις οποίες $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} = 0 = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}$

οπότε $\frac{\pi x}{2} = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ και $x = 2K+1$.

Για $x_{\mathrm{A}} < x < x_{\mathrm{B}}$ δηλαδή $-4 < 2K+1 < 10$ βρίσκουμε

$K = 0, \pm 1, \pm 2,\ 3,\ 4$

Επομένως υπάρχουν 7 δεσμοί. Οι δεσμοί βρίσκονται στις θέσεις:

-3*cm*, -1*cm*, 1*cm*, 3*cm*, 5*cm*, 7*cm* και 9*cm*

3 ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Υδροστατική πίεση - αρχή του Pascal

3.1 ....πυκνότητα............πίεση...........υγρά.

3.2 Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής ($p = \rho g h$) η πίεση που ασκεί ένα υγρό αυξάνεται με το βάθος.

3.3 α) (Γ) β) σε όλα η ίδια.

3.4 1) (α) 2) (β) 3) (α).

Η εξίσωση της συνέχειας

3.5 .... εσωτερικές .... τριβές .... ασυμπίεστο.

3.6 Καθώς το νερό πέφτει η ταχύτητά του αυξάνεται. Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας ($A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$) η διατομή της φλέβας πρέπει να μικραίνει για να διατηρείται η παροχή σταθερή.

3.7 $\Pi_A = (6+4+4-2-2-5)\ m^3/s = 5\ m^3/s$ με φορά προς τα αριστερά.

3.8 Αν θεωρήσουμε το ποτάμι σαν μια φλέβα, η παροχή πρέπει να διατηρείται σταθερή. Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας εκεί όπου η διατομή της φλέβας μικραίνει αυξάνεται η ταχύτητα ροής του νερού.

3.9 1) Η παροχή διατηρείται σταθερή. Σωστή απάντηση είναι η (α).

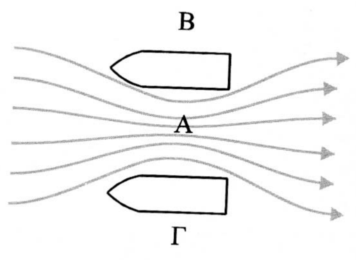
2) $A_{\mathrm{A}}\upsilon_1 = A_{\mathrm{B}}\upsilon_2$ άρα $\upsilon_2 = \dfrac{A_{\mathrm{A}}}{A_{\mathrm{B}}}\upsilon_1 = 4\upsilon_1 = 40\ cm/s$.

Σωστή απάντηση είναι η (ε).

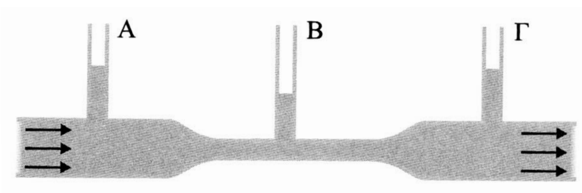
3.10 Μειώνοντας τη διατομή αυξάνουμε την ταχύτητα ροής (εξίσωση συνέχειας).

Η εξίσωση Bernoulli

3.11 Στην περιοχή (Α) που βρίσκεται ανάμεσα στα πλοία οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν, δηλαδή η σχετική ταχύτητα του νερού ως προς τα πλοία αυξάνει. Σύμφωνα με την εξίσωση Bernoulli η πίεση που ασκεί το νερό στα πλοία στην περιοχή του (Α) είναι μικρότερη από αυτήν που ασκεί στις περιοχές των Β και Γ, με αποτέλεσμα τα πλοία να συγκλίνουν.



3.12 Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας η ταχύτητα του νερού είναι μεγαλύτερη στην περιοχή όπου στενεύει ο σωλήνας.
Σύμφωνα με την εξίσωση Bernoulli εκεί όπου το νερό κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα ασκεί μικρότερη πίεση.



Το ύψος κάθε στήλης εξαρτάται από τη διαφορά της πίεσης του υγρού στη βάση του σωλήνα και της ατμοσφαιρικής πίεσης.

$p_{atm} + \rho g h = p_{\upsilon\gamma\rho o\acute{\upsilon}}$ οπότε $h = \dfrac{p_{\upsilon\gamma\rho o\acute{\upsilon}} - p_{atm}}{\rho g}$

Αφού η πίεση του υγρού είναι μικρότερη στη βάση του σωλήνα Β από ό,τι στη βάση των σωλήνων Α και Γ, το ύψος της στήλης στο σωλήνα Β είναι μικρότερο από το ύψος της στήλης στους σωλήνες Α και Γ.

3.13 Για να ανυψωθεί το αεροπλάνο πρέπει η δυναμική άνωση να είναι μεγαλύτερη του βάρους. Αυτό επιτυγχάνεται όταν η σχετική ταχύτητα του αέρα ως προς το αεροπλάνο υπερβεί μια οριακή τιμή. Όταν το αεροπλάνο κινείται αντίθετα στον άνεμο αυτή η οριακή τιμή της σχετικής ταχύτητας επιτυγχάνεται ευκολότερα.

3.14 Εφόσον το αεροπλάνο κινείται με οριζόντια ταχύτητα η δυναμική άνωση και στις δύο περιπτώσεις είναι αντίθετη του βάρους. Αν θεωρήσουμε ότι το βάρος του αεροπλάνου είναι ουσιαστικά το ίδιο και στα δύο ύψη προκύπτει ότι και η δυναμική άνωση θα είναι ίδια, οπότε σωστή απάντηση είναι η (β).

3.15 α) $\upsilon_A > \upsilon_B = \upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta$

β) $p_\Delta > p_\Gamma > p_B > p_A$

3.16 .... κινητικής .... της δυναμικής .... διατήρησης της ενέργειας ....

3.17 Στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού ώστε να διατηρείται η ενέργεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νόμος του Pascal - Υδροστατική πίεση

3.18 $$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad \text{οπότε} \qquad F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2}$$

Για να ανυψωθεί το αυτοκίνητο πρέπει η F_2 να είναι τουλάχιστον ίση κατά μέτρο με το βάρος του αυτοκινήτου οπότε

$$F_1 = 150\ N .$$

3.19 Εφόσον το πλάτος του ποταμού είναι σταθερό η διατομή του θα είναι ανάλογη του βάθους $A = kh$.
Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε

$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή $kh_1\upsilon_1 = kh_2\upsilon_2$

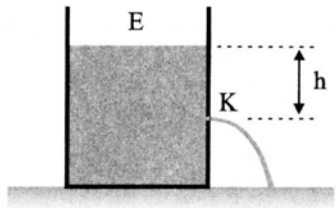
οπότε $h_2 = h_1\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 6,5\ m$.

3.20 $\Pi_1 = \Pi_2$ ή $\Pi_1 = A_2\upsilon_2$

οπότε $\upsilon_2 = \dfrac{\Pi_1}{A_2} = \dfrac{\Pi_1}{\pi\dfrac{\delta^2}{4}} = 31,6\ m/s$

Εξίσωση Bernoulli

3.21 Το νερό βγαίνει από την πλευρική τρύπα με ταχύτητα $\upsilon_K = \sqrt{2gh}$ (δες και εφαρμογή 3-2 θεώρημα Torricelli)



οπότε $h = \dfrac{\upsilon_K^2}{2g}$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli στις θέσεις Ε και Κ. Όταν η πίεση στην επιφάνεια του νερού είναι 2 atm έχουμε

$$p'_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho gh = p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K'^2$$

όπου $p'_E = 2\ atm$ και $p_K = 1\ atm$

Θέτουμε $h = \dfrac{\upsilon_K^2}{2g}$ και $\upsilon_E = 0$ και λύνουμε ως προς υ'_K οπότε

$$\upsilon'_K = \sqrt{\frac{2(p'_E - p_K)}{\rho} + \upsilon_K^2} = 16,76\ m/s$$

3.22 Ο αέρας στο εσωτερικό του σπιτιού είναι ακίνητος. Από την εξίσωση του Bernoulli για δυο σημεία, το ένα ακριβώς πάνω και το άλλο ακριβώς κάτω από τη στέγη έχουμε

$p' + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p$ (θεωρήσαμε ότι η κατακόρυφη απόσταση των δύο σημείων είναι αμελητέα)

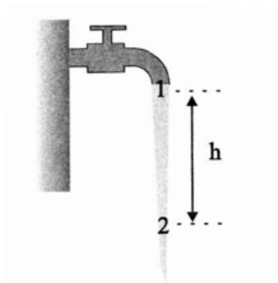
οπότε $\Delta p = p - p' = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$.

Η ανυψωτική δύναμη θα είναι

$$F = \Delta p A = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 A = 54\times 10^3\, N$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3.23 Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία 1, 2 της φλέβας του νερού



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

όμως $p_1 = p_2 = p_{atm}$

οπότε $\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$

και $\upsilon_2 = \sqrt{2gh + \upsilon_1^2}$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \qquad \text{ή} \qquad A_1\upsilon_1 = A_2\sqrt{2gh + \upsilon_1^2}$$

και $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2A_2^2 gh}{A_1^2 - A_2^2}}$

Η παροχή είναι

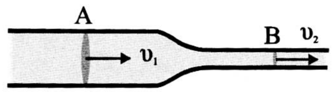
$$\Pi = A_1\upsilon_1 = A_1\sqrt{\frac{2A_2^2 gh}{A_1^2 - A_2^2}} = 1,2\sqrt{10}\times 10^{-5}\, m^3/s$$

3.24 Αν θεωρήσουμε ότι η στάθμη στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού κατεβαίνει με αμελητέα ταχύτητα τότε το νερό ρέει από τη βρύση με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{2gh}$ (εφαρμογή 3-2, θεώρημα Torricelli).
Η παροχή της βρύσης είναι

$$\Pi = A\upsilon = A\sqrt{2gh}$$

Ο χρόνος που απαιτείται για να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου V από τη βρύση είναι $\Delta t = \frac{V}{\Pi} = \frac{V}{A\sqrt{2gh}} = 3{,}33\ s$

3.25 Η παροχή του σωλήνα είναι $\Pi = A_1\upsilon_1$



οπότε $\upsilon_1 = \frac{\Pi}{A_1}$

Επίσης $\Pi = A_2\upsilon_2$

οπότε $\upsilon_2 = \frac{\Pi}{A_2} = \frac{\Pi}{\frac{A_1}{2}} = \frac{2\Pi}{A_1}$

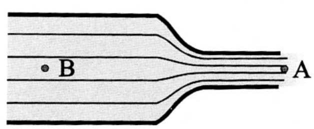
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία A, B.

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

οπότε

$$\Delta p = p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{4\Pi^2}{A_1^2} - \frac{\Pi^2}{A_1^2}\right) = \frac{3}{2}\rho\frac{\Pi^2}{A_1^2} = 6\times10^3\ Pa$$

3.26 α) Αν η διατομή του σωλήνα στο A είναι A_2 τότε η παροχή του σωλήνα είναι $\Pi = A_2\upsilon_2$ και σε χρόνο Δt ο σωλήνας παρέχει νερό όγκου



$$V = \Pi\Delta t = A_2\upsilon_2\Delta t = 57{,}6\ m^3$$

β) Αν η διατομή του σωλήνα στο Β είναι A_1 τότε από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε $A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$ και $\upsilon_1 = \upsilon_2 \dfrac{A_2}{A_1}$ (1).

Από την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Β και Α έχουμε

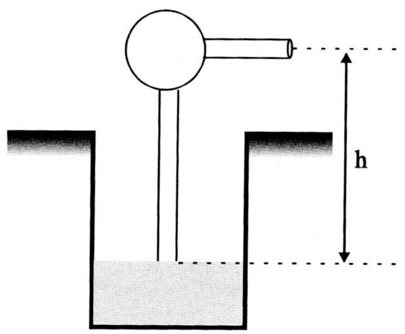
$$p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

οπότε
$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την (1) και ότι $p_A = p_{atm} = 10^5\, Pa$

τελικά
$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right) = 118000\ Pa$$

3.27 Από το θεώρημα έργου ενέργειας για την άντληση μάζας m νερού έχουμε



$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = W_{\alpha\nu\tau\lambda\iota\alpha\varsigma} + W_w$$

ή $\dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = W_{\alpha\nu\tau\lambda\iota\alpha\varsigma} - mgh$

οπότε το έργο της αντλίας είναι

$$W_{\alpha\nu\tau\lambda\iota\alpha\varsigma} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh = m\left(\frac{\upsilon^2}{2} + gh\right)$$

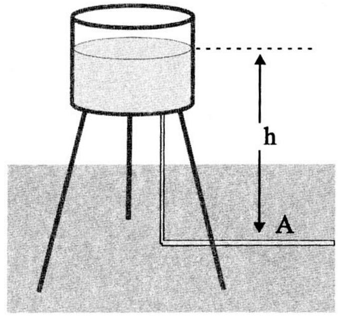
Η ισχύς που προσφέρει η αντλία είναι

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \left(\frac{\upsilon^2}{2} + gh\right)\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Όμως
$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho\Pi = \rho A\upsilon$$

και επομένως $P = \left(\dfrac{\upsilon^2}{2} + gh\right)\rho A\upsilon = 5000\ W$

3.28 Θεωρούμε ότι η στάθμη του νερού στη δεξαμενή κατεβαίνει με αμελητέα ταχύτητα.
Από την εξίσωση του Bernoulli για το σημείο Α και ένα σημείο στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού της δεξαμενής έχουμε.

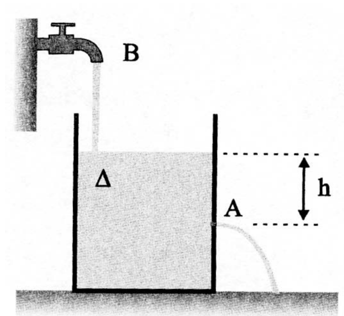


$$p_{atm} + \rho g h = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

οπότε

$$p_A = p_{atm} + \rho g h - \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = 128\times 10^3\, Pa$$

3.29 Σύμφωνα με την εφαρμογή 3-2 (θεώρημα Torricelli) η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από το άνοιγμα Α θα είναι $\upsilon_A = \sqrt{2gh}$.
Η παροχή του ανοίγματος είναι



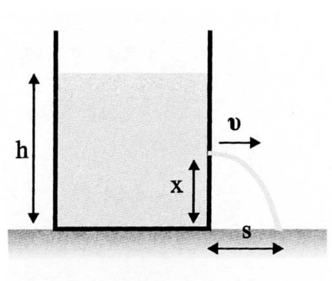
$\Pi_A = A_A\upsilon_A = A_A\sqrt{2gh}$

Για να διατηρείται η στάθμη του νερού στο δοχείο σταθερή πρέπει η παροχή της βρύσης να είναι ίση με την παροχή του ανοίγματος.

$\Pi = \Pi_A = A_A\sqrt{2gh}$

και $h = \dfrac{\Pi^2}{2gA_A^2} = 24,2\ cm$

3.30 Σύμφωνα με την εφαρμογή 3-2 (θεώρημα Torricelli) η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από την τρύπα είναι



$$\upsilon = \sqrt{2g(h-x)}$$

Το νερό βγαίνοντας από την τρύπα κάνει οριζόντια βολή από ύψος x.
Στον οριζόντιο άξονα κινείται ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα υ οπότε

$$s = \upsilon t \qquad (1)$$

Στον κατακόρυφο άξονα το νερό κάνει ελεύθερη πτώση οπότε

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Απαλείφουμε το χρόνο μεταξύ των (1) και (2) και βρίσκουμε

$$s = \upsilon \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2g(h-x)\frac{2x}{g}}$$

οπότε $\quad s^2 = 4hx - 4x^2 \quad$ ή $\quad 4x^2 - 4hx + s^2 = 0 \quad (3)$

Για να είναι πραγματικές οι λύσεις της εξίσωσης, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή

$$16h^2 - 16s^2 \geq 0 \qquad \text{ή} \qquad h \geq s$$

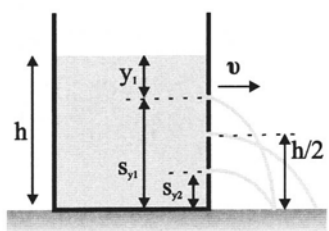
οπότε $\quad s_{\max} = h$

Λύνουμε την (3) θέτοντας όπου $s = h$ και βρίσκουμε

$$x = \frac{4h}{8} = \frac{h}{2}$$

3.31 α) Σύμφωνα με την εφαρμογή 3-2 (θεώρημα Torricelli) η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από την τρύπα είναι

$$\upsilon = \sqrt{2gy_1} = 2\ m/s$$



β) Το νερό βγαίνοντας από την τρύπα κάνει οριζόντια βολή από ύψος $h - y_1$.

Στον οριζόντιο άξονα κινείται ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα υ οπότε

$$s_x = \upsilon t \qquad (1)$$

Στον κατακόρυφο άξονα το νερό κάνει ελεύθερη πτώση οπότε

$$s_y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Απαλείφουμε τον χρόνο μεταξύ των (1) και (2), θέτουμε όπου $s_y = h - y_1$ και βρίσκουμε την απόσταση $s_{x\max}$ του σημείου στο οποίο η φλέβα του νερού συναντάει το έδαφος

$$s_{x\max} = \upsilon\sqrt{\frac{2(h-y_1)}{g}} = 0{,}8\ m$$

γ) Η γενική σχέση που δίνει την ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται το νερό από μια τρύπα στο τοίχωμα του δοχείου που βρίσκεται σε ύψος s_y από τη βάση του είναι

$$\upsilon = \sqrt{2g\left(h-s_y\right)} \qquad (3)$$

Η γενική σχέση που δίνει την απόσταση $s_{x\max}$ του σημείου στο οποίο η φλέβα του νερού συναντάει το έδαφος είναι

$$s_{x\max} = \upsilon\sqrt{\frac{2s_y}{g}} \qquad (4)$$

Η (4) λόγω της (3) γίνεται $s_{x\max} = \sqrt{4s_y\left(h-s_y\right)}$

ή $$4s_y^2 - 4hs_y + s_{x\max} = 0$$

Θέτουμε $h = 1m$ και $s_{x\max} = 0{,}8m$

οπότε $$4s_y^2 - 4s_y + 0{,}64 = 0$$

Λύνουμε το τριώνυμο ως προς s_y και βρίσκουμε

$s_{y1} = 0{,}8m$ (η αρχική τρύπα)

$s_{y2} = 0{,}2m$ (η θέση της δεύτερης τρύπας που δίνει το ίδιο βεληνεκές με την πρώτη)

δ) Το ερώτημα είναι πανομοιότυπο με το ερώτημα της άσκησης 3.30 στην οποία καταλήξαμε ότι όταν η τρύπα βρίσκεται σε ύψος $\frac{h}{2} = 0{,}5m$ από τη βάση του κυλίνδρου έχουμε τη μέγιστη απόσταση $s_{x\max}$ του σημείου στο οποίο η φλέβα του νερού συναντάει το έδαφος.

4 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κινηματική της περιστροφής

4.1 (δ)

4.2 Η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή οπότε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{d\omega}{dt} = 0$.

4.3 (γ).

4.4 (β), (γ).

4.5 Ναι.

4.6 Όχι. Αν υπάρχει ένα σημείο του στερεού (έστω Α) το οποίο έχει πάντα την ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας (έστω Ο) τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό του οπότε το σώμα κάνει μεταφορική κίνηση.

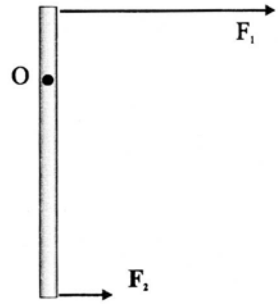
Ροπή - ισορροπία στερεού

4.7 ....την απόσταση της δύναμης από το σημείο............τη δύναμη και το σημείο............τον κανόνα του δεξιού χεριού.

4.8 Με μικρή σχετικά δύναμη επιτυγχάνεται μεγάλη ροπή που είναι απαραίτητη για να στραφεί το τιμόνι ενός μεγάλου οχήματος.

4.9 $\tau_5 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4 = \tau_1 = 0$

4.10 $F_2 < F_1$



4.11 (δ).

Ροπή αδράνειας

4.12 (δ).

4.13 Ο τροχός του ποδηλάτου, γιατί έχει πολύ μικρότερη ροπή αδράνειας.

4.14 Και οι τρεις μάζες έχουν ροπή αδράνειας $32 \times 10^{-3}\ kgm^2$.

4.15 Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner, αν I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, η ροπή αδράνειάς του ως προς ένα άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d $\left(I_p = I_{cm} + Md^2\right)$.

4.16 $I_2 < I_3 < I_4 < I_1$

Θεμελιώδης νόμος της περιστροφής

4.17 (δ).

4.18 Από την αριστερή πλευρά, όπως βλέπουμε το σχήμα, ώστε η πόρτα να έχει τη μικρότερη δυνατή ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα της περιστροφής της οπότε θα απαιτείται η μικρότερη δυνατή ροπή για να ανοιγοκλείνει.

4.19 (α), (δ).

4.20 α) η τριβή
β) η τριβή
γ) η συνιστώσα $mg\eta\mu\theta$ του βάρους και η τριβή.

Στροφορμή - διατήρησης της στροφορμής

4.21 Προς τη Δύση.

4.22 Θα έχουν την ίδια στροφορμή.

4.23 (δ).

4.24 (γ).

4.25 Θα είχαμε αύξηση της ροπής αδράνειας της Γης ως προς τον άξονα της περιστροφής της οπότε, αφού η στροφορμή της διατηρείται, θα μειωνόταν η γωνιακή της ταχύτητα και κατά συνέπεια η συχνότητα περιστροφής της.

4.26 Το παιδί θα αρχίσει να στρέφεται με φορά αντίθετη αυτής του τροχού ώστε να μη μεταβληθεί η στροφορμή του συστήματος παιδί-τροχός. Στην περίπτωση που στρέφεται ο τροχός απαιτείται πρόσθετη δύναμη ώστε η ροπή της να μεταβάλει τη στροφορμή του τροχού.

4.27 (ε).

Έργο και ενέργεια κατά την περιστροφή

4.28 1) Το ίδιο
2) Ο κύβος έχει μεγαλύτερη ταχύτητα.

4.29 (γ).

4.30

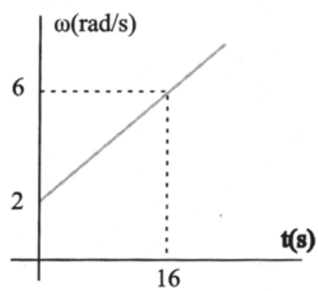
	Δυναμική ενέργεια	Κινητική ενέργεια από τη μεταφορική κίνηση	Κινητική ενέργεια από την περιστροφική κίνηση
Α	120 J	0	0
Β	60 J	40 J	20 J
Γ	0	80 J	40 J

4.31

Σύμβολο	Όνομα	Μέγεθος	Μονάδα στο SI
$\boldsymbol{\omega}$	Γωνιακή ταχύτητα	διανυσματικό	rad/s
$\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$	Γωνιακή επιτάχυνση	διανυσματικό	rad/s^2
$\boldsymbol{\tau}$	Ροπή δύναμης	διανυσματικό	N m
$\boldsymbol{I}$	Ροπή αδράνειας	μονόμετρο	$kg\ m^2$
$\boldsymbol{L}$	Στροφορμή	διανυσματικό	$kg\ m^2/s$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κινηματική του στερεού



4.32 $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0,25\ rad/s^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$

οπότε

$t = \dfrac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = 72\ s$

4.33 $\omega = \frac{\upsilon}{r} = 50\ rad/s$

4.34 $$a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r$$

οπότε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{r} = 5\ rad/s^2$

4.35 α) Κάθε σημείο της περιφέρειας του δίσκου περιστρέφεται με γραμμική ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου του τροχού (υ_{cm}). Όλα τα σημεία του τροχού κινούνται επιπλέον μεταφορικά με την ταχύτητα υ_{cm}. Για το ανώτερο σημείο του τροχού, από την επαλληλία της μεταφορικής και της περιστροφικής κίνησης, προκύπτει $\upsilon = 2\upsilon_{cm} = 10\ m/s$.

β) $\omega = 2\pi f$ οπότε $f = \frac{2\pi}{\omega}$ (1)

$\upsilon_{cm} = \omega r$ οπότε $\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r}$

αντικαθιστούμε το ω στην (1) και βρίσκουμε τελικά

$$f = \frac{\upsilon_{cm}}{2\pi r} = 9{,}9\ Hz$$

4.36 $\upsilon = \upsilon_0 - a_{cm} t$ οπότε για υ = 0 $t_1 = \frac{\upsilon_0}{a_{cm}}$

$x = \upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2$ και $x = \frac{\upsilon_0^2}{2a_{cm}}$

οπότε $a_{cm} = \frac{\upsilon_0^2}{2x}$ (2)

Αλλά $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R}$.

Από την (2) προκύπτει $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\upsilon_0^2}{2xR} = 8\ rad/s^2$

Ροπή δύναμης

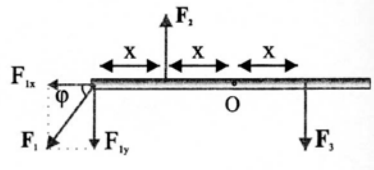
4.37 Η μέγιστη ροπή έχει μέτρο $\tau_{\max} = Fl = 200N \times 0,2m = 40Nm$ και επιτυγχάνεται όταν η δύναμη βρίσκεται στο επίπεδο περιστροφής του κλειδιού και είναι κάθετη στο κλειδί, στο άκρο του.

4.38 Η συνολική ροπή έχει μέτρο $\tau_{o\lambda} = F_2 R - F_1 R = 5\ Nm$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του βιβλίου και σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού φορά από το βιβλίο προς τον αναγνώστη.

4.39 $F_{1x} = F_1 \sigma\upsilon\nu\varphi$

$F_{1y} = F_1 \eta\mu\varphi$

$\Sigma\tau = F_{1y} 2x - F_2 x - F_3 x = 16\ Nm$



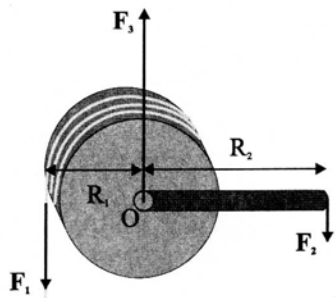
Ισορροπία στερεού σώματος

4.40 Για να ισορροπεί το βαρούλκο πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής του να είναι μηδέν

$$\Sigma\tau = 0$$

δηλαδή $F_1 R_1 - F_2 R_2 = 0$

οπότε $F_2 = \dfrac{F_1 R_1}{R_2} = 60\ N$



4.41 Η ράβδος ισορροπεί όταν

$$\Sigma F = 0$$

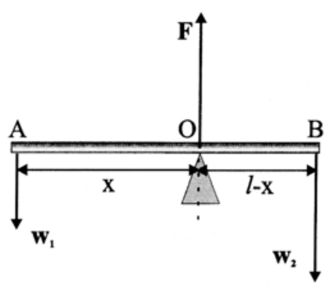
και $\Sigma\tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο

Από τη συνθήκη

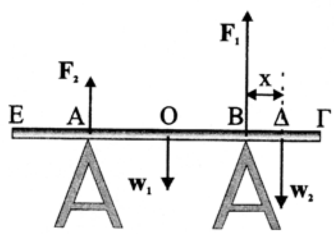
$\Sigma\tau = 0$, ως προς το Ο, έχουμε

$$w_1 x - w_2 (l - x) = 0$$

οπότε $x = \dfrac{w_2 l}{w_1 + w_2} = 1,2m$



4.42 Στη δοκό ασκούνται οι δυνάμεις $\mathbf{w_1}$ (το βάρος της), $\mathbf{w_2}$ (δύναμη που ασκεί ο ελαιοχρωματιστής - ίση με το βάρος του) και οι $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$ (από τα υποστηρίγματα).



Όταν η απόσταση x είναι η μέγιστη δυνατή η $\mathbf{F_2} = 0$.

Στην οριακή αυτή περίπτωση η συνθήκη $\Sigma\tau = 0$, ως προς το σημείο Β, δίνει

$$w_1\text{OB} - w_2 x = 0 \qquad (1)$$

Αν η δοκός είναι ομογενής σταθερής διατομής το κέντρο βάρους της Ο βρίσκεται στο μέσον της, οπότε

$$\text{OB} = \frac{l}{2} - \text{B}\Gamma = 1\ m$$

Από την (1) προκύπτει $x = \dfrac{w_1\text{OB}}{w_2} = 0,21\ m$

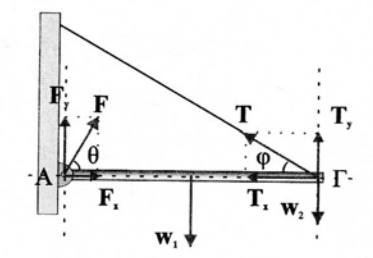
Η απόσταση του Δ από το άκρο Γ είναι

$\Gamma\Delta = \text{B}\Gamma - x = 0,79\ m = 79\ cm$

Ο ελαιοχρωματιστής μπορεί να στέκεται σε απόσταση μεγαλύτερη ή το πολύ ίση με 79 cm από το άκρο Γ της δοκού.

Λόγω της συμμετρίας του σχήματος η δοκός θα ισορροπεί και αν ο ελαιοχρωματιστής στέκεται σε απόσταση μεγαλύτερη ή το πολύ ίση με 79 cm από το άλλο άκρο Ε της δοκού.

4.43 Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει $\Sigma\mathbf{F} = 0$ και $\Sigma\boldsymbol{\tau} = 0$



Από $\Sigma\mathbf{F} = 0$ έχουμε

$$\Sigma F_x = 0$$

και $\Sigma F_y = 0$

ή $F_x = T\sigma\upsilon\nu 30^o \qquad (1)$

και $F_y = w_1 + w_2 - T\eta\mu 30^o \qquad (2)$

Από $\Sigma\boldsymbol{\tau} = 0$ (ως προς Α) έχουμε

$$T\eta\mu 30^o\, l - w_2 l - w_1 \frac{l}{2} = 0$$ οπότε

$$T = \frac{w_2 + \dfrac{w_1}{2}}{\eta\mu 30^o} = 2w_2 + w_1 = 180\ N$$

Από την (1) έχουμε $F_x = T\sigma\upsilon\nu 30^o = 90\sqrt{3}\ N$ και

από τη (2) $F_y = w_1 + w_2 - T\eta\mu 30^o = 50\ N$.

Επομένως

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 163,7\ N \text{ και } \varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = 0,32$$

Ροπή αδράνειας και θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

4.44 Από το θεώρημα Steiner βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας ενός πτερυγίου ως προς άξονα κάθετο στο πτερύγιο που περνάει από το άκρο του.

$$I = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = 1200\ kgm^2$$

Η συνολική ροπή αδράνειας των τεσσάρων πτερυγίων ως προς τον άξονα περιστροφής τους είναι

$$I_{o\lambda} = 4I = 4800\ kgm^2$$

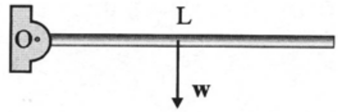
4.45 α) Η ροπή που ασκείται στον τροχό έχει σταθερό μέτρο, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ είναι σταθερή. Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού δίνεται από τη σχέση $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$, από την οποία βρίσκουμε

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0}{t} = 20\ rad/s^2$$ (ο τροχός θα σταματήσει όταν $\omega = 0$)

β) Από $\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ δηλαδή $FR = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

έχουμε $$F = \frac{I\alpha_{\gamma\omega\nu}}{R} = \frac{\frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}}{R} = 10\ N$$

4.46 Εφόσον η ράβδος είναι ομογενής και σταθερής διατομής το κέντρο βάρους της βρίσκεται στο μέσον της. Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη ράβδο και για τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση έχουμε $\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (1)



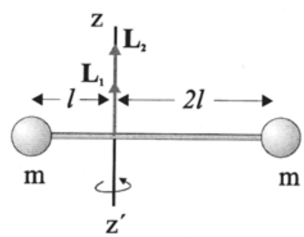
όπου τ η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου και I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον ίδιο άξονα.

Η (1) δίνει $$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\tau}{I} = \frac{w\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3Mg}{2ML} = 15\ rad/s^2 .$$

Στροφορμή - αρχή διατήρησης της στροφορμής

4.47 Η στροφορμή του συστήματος των σφαιρών ως προς τον άξονα z′z είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σφαιρών ως προς τον ίδιο άξονα.

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2}$$



Οι στροφορμές των σφαιρών είναι ομόρροπες οπότε για το μέτρο της **L** μπορούμε να γράψουμε

$$L = L_1 + L_2 = m\omega l^2 + m\omega(2l)^2 = 5m\omega l^2 = 5{,}12\ kg\ m^2/s$$

με κατεύθυνση αυτή των $\mathbf{L_1}$ και $\mathbf{L_2}$.

4.48 Χωρίζουμε τη μάζα του τροχού σε στοιχειώδεις μάζες m_i η κάθε μία από τις οποίες απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση R.
Η στροφορμή του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι

$$L = \Sigma m_i \omega r_i^2 = \omega R^2 \Sigma m_i = M\omega R^2 = 3{,}2\ kgm^2/s .$$

4.49 Όταν η λάσπη κολλήσει στο δίσκο αλλάζει η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του και επειδή η στροφορμή διατηρείται μεταβάλλεται η γωνιακή του ταχύτητα άρα και η συχνότητα περιστροφής του.

$$L = L' \qquad \text{ή} \qquad I\omega = I'\omega'$$

όμως $$I' = I + mr^2$$

όπου m: η μάζα του κομματιού της λάσπης
και r : η απόσταση από τον άξονα περιστροφής στην οποία κολλάει η λάσπη.

Τελικά $I2\pi f = (I + mr^2)2\pi f'$

ή $$f' = f\frac{I}{I+mr^2} = f\frac{\frac{1}{2}MR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} = 1{,}9\ Hz$$

Κινητική ενέργεια - έργο

4.50 Η ράβδος λόγω της περιστροφής της, έχει κινητική ενέργεια
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$
Από το θεώρημα του Steiner βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της
$$I = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{ML^2}{3}$$
οπότε $K = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 = 8\ J$.

4.51 Ο δίσκος έχει κινητική ενέργεια και λόγω της περιστροφικής και λόγω της μεταφορικής του κίνησης.
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2$$
όμως $\omega = \frac{\upsilon}{R}$ και $I = \frac{1}{2}MR^2$

οπότε $K = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{3}{4}M\upsilon^2 = 150\ J$

4.52 Η ισχύς που αποδίδει ο κινητήρας δίνεται από τη σχέση
$$P = \tau\omega = \tau 2\pi f = 400\pi\ W$$

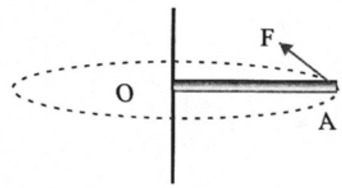
4.53 Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη στροφική κίνηση έχουμε

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 0 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2(2\pi f)^2 = -400\ J$$

Άρα, για να σταματήσουμε το δίσκο πρέπει να προσφέρουμε 400 J.

Η μέση ισχύς δίνεται από τη σχέση $P = \frac{W}{t} = 80\ W$.

4.54 α) Το έργο της **F** για μια πλήρη περιστροφή της ράβδου είναι
$W_F = \tau\theta = FL2\pi = 40\pi\ J$



β) Όταν η ράβδος ολοκληρώσει μια πλήρη περιστροφή θα αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω και κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, η οποία σύμφωνα με το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη ράβδο ισούται με το έργο της δύναμης στη διάρκεια της περιστροφής.

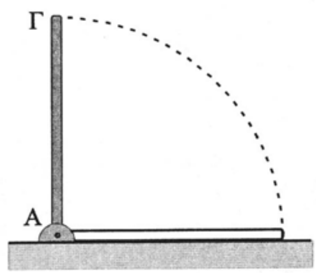
Είναι επομένως $\frac{1}{2}I\omega^2 = W_F$

οπότε $\omega = \sqrt{\frac{2W_F}{I}} = \sqrt{\frac{2W_F}{\frac{1}{3}ML^2}} = 7{,}9\ rad/s$

γ) Η στιγμιαία ισχύς της δύναμης μπορεί να βρεθεί με μια από τις ισοδύναμες σχέσεις $P = F\upsilon$ ή $P = \tau\omega$
Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο τελικά βρίσκουμε

$$P = FL\omega = 158\ W$$

4.55 Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του εδάφους.
Όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη η δυναμική της ενέργεια είναι $mg\frac{l}{2}$.



Όταν η ράβδος γίνει οριζόντια όλη η δυναμική ενέργεια θα έχει μετατραπεί σε κινητική $\frac{1}{2}I'\omega^2$ όπου I' η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνάει από το Α και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της ράβδου.

Ισχύει λοιπόν $$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}I'\omega^2$$

Από το θεώρημα του Steiner βρίσκουμε

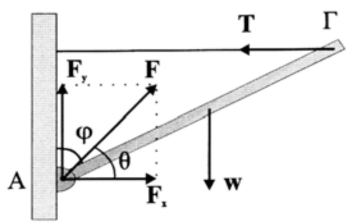
$$I'=I+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{ml^2}{12}+\frac{ml^2}{4}=\frac{ml^2}{3}$$

Επομένως $$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2$$

και $$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Τελικά $$\upsilon=\omega l=\sqrt{3gl}=3\ m/s$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



4.56 Για να ισορροπεί η δοκός πρέπει

$\Sigma \mathbf{F}=0$ και $\Sigma \boldsymbol{\tau}=0$

Από $\Sigma \mathbf{F}=0$ έχουμε

$\Sigma F_x=0$

και $\Sigma F_y=0$

ή $F_x=T$ (1)

και $F_y=w$ (2)

Από $\Sigma \boldsymbol{\tau}=0$ (ως προς Α) έχουμε

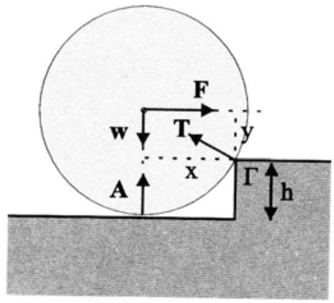
$$Tl\sigma\upsilon\nu\varphi-w\frac{l}{2}\eta\mu\varphi=0 \quad \text{ή} \quad T=\frac{w\varepsilon\varphi\varphi}{2}=50\sqrt{3}\ N$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $F_x=50\sqrt{3}\ N$ και $F_y=100\ N$

Επομένως η **F** έχει μέτρο $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=50\sqrt{7}\ N$ και σχηματίζει με

την κάθετη στον τοίχο γωνία θ για την οποία $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

4.57 Για να υπερπηδηθεί το εμπόδιο πρέπει, στην αρχική θέση, η ροπή της **F** να είναι μεγαλύτερη από τη ροπή του βάρους ως προς το ίδιο σημείο. Η αντίδραση του δαπέδου **A** μηδενίζεται αφού ο τροχός χάνει επαφή με το δάπεδο.



Αν στην αρχική θέση η ροπή της **F** ως προς το σημείο Γ είναι μεγαλύτερη από τη ροπή του βάρους αυτό θα ισχύει και σε κάθε άλλη θέση γιατί καθώς ο τροχός ανεβαίνει η απόσταση y της **F** από το Γ μεγαλώνει ενώ η απόσταση x του **w** από το Γ μικραίνει.
Πρέπει λοιπόν στην αρχική θέση $Fy>wx$

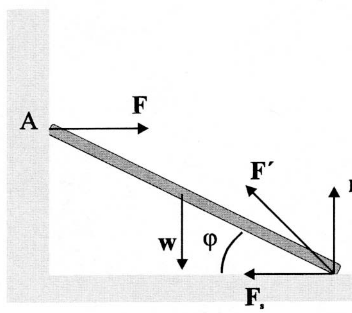
Στην αρχική θέση $\qquad y=R-h$

και $\qquad x=\sqrt{R^2-y^2}=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{h(2R-h)}$

οπότε $\qquad F(R-h)>w\sqrt{h(2R-h)}$

και $\qquad F>w\dfrac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$.

4.58 Στη σκάλα ασκούνται α) το βάρος της **w** β) η δύναμη **F** από τον τοίχο που επειδή ο τοίχος είναι λείος είναι κάθετη σ' αυτόν γ) η δύναμη **F′** από το δάπεδο η οποία αναλύεται στις **n** (κάθετη στο δάπεδο) και $\mathbf{F_s}$ (στατική τριβή).



Εάν η σκάλα ισορροπεί τότε

$$\Sigma\mathbf{F}=0 \text{ άρα και } \Sigma F_y=0$$

οπότε $\qquad w=n \qquad (1)$

επίσης πρέπει $\Sigma\tau = 0$ (ως προς το Α)

οπότε για $\varphi = 30°$

$$nl\sigma\upsilon\nu 30^o - w\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu 30^o - F_s l\eta\mu 30^o = 0$$

ή αν λάβουμε υπόψη την (1) και θέσουμε για τη στατική τριβή την οριακή της τιμή $F_s = \mu_s n = \mu_s w$

$$wl\frac{\sqrt{3}}{2} - w\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu_s wl\frac{1}{2} = 0 \qquad \text{και τελικά} \qquad \mu_s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.59 Θεωρούμε ότι η κάθετη δύναμη που ασκούν τα φρένα στον τροχό είναι σταθερή, κατά συνέπεια η επιβραδύνουσα δύναμη (τριβή ολίσθησης) είναι σταθερή. Για τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού ισχύει:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$$

Για $\omega = 0$ ($t = t_1$) και $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$0 = 2\pi f_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$$

προκύπτει $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{2\pi f_0}{t_1}$ (1)

Για τη ροπή της τριβής ισχύει $\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

όμως $I = \Sigma m_i R^2 = mR^2$ (3)

Από τις (1), (2), (3) βρίσκουμε

$$\tau = mR^2 \frac{2\pi f_0}{t_1} \qquad (4)$$

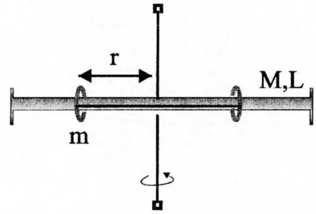
Η ροπή της τριβής (ως προς τον άξονα περιστροφής του τροχού)

είναι $\tau = \Im_k R = \mu_k nR$ (5)

Από τις (4), (5) προκύπτει

$$\mu_k nR = mR^2 \frac{2\pi f_0}{t_1} \qquad \text{και} \qquad n = \frac{mR^2 2\pi f_0}{\mu_k R t_1} = 1\ N$$

4.60 Από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος για τις δύο διαφορετικές θέσεις των δακτυλίων έχουμε



$L_1 = L_2$ ή $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

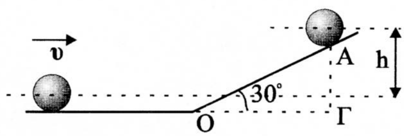
ή $I_1 2\pi f_1 = I_2 2\pi f_2$ και $f_2 = \dfrac{I_1}{I_2} f_1$

$$I_1 = I + 2mr^2 = \frac{1}{12}ML^2 + 2mr^2$$

$$I_2 = I + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{mL^2}{2}$$

και τελικά $f_2 = \dfrac{\frac{1}{12}ML^2 + 2mr^2}{\frac{1}{12}ML^2 + \frac{mL^2}{2}} f_1 = 5{,}8\ Hz$

4.61 Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το κέντρο της σφαίρας όταν αυτή βρίσκεται στην αρχική της θέση ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας (λόγω βαρύτητας).



Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τη σφαίρα έχουμε:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh$$

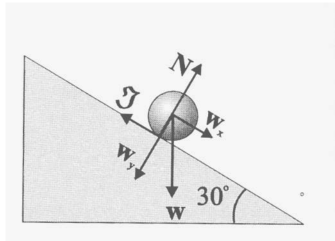
ή $$\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh$$

και $$h = \frac{7\upsilon^2}{10g}$$

Για το διάστημα που διανύει η σφαίρα στο πλάγιο επίπεδο, μέχρι να σταματήσει, ισχύει

$$\mathrm{OA} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\eta\mu 30^o} \qquad \text{όμως} \qquad \mathrm{A\Gamma} \approx h$$ [1]

οπότε $\mathrm{OA} = \dfrac{h}{\eta\mu 30^o} = \dfrac{14\upsilon^2}{10g} = 3,5\ m$



4.62 $\Sigma F_x = ma_{cm}$ δηλαδή $w_x - \Im = ma_{cm}$ ή

$mg\eta\mu 30^o - \Im = ma_{cm}$ (1)

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ δηλαδή $\Im R = \dfrac{2}{5}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή

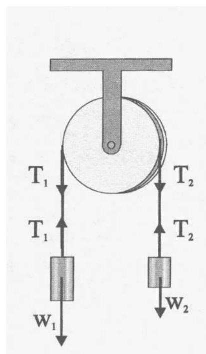
$\Im = \dfrac{2}{5}mR\alpha_{\gamma\omega\nu}$

Αλλά είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu}R = a_{cm}$ δηλαδή $\Im = \dfrac{2}{5}ma_{cm}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$mg\eta\mu 30^o = ma_{cm} + \dfrac{2}{5}ma_{cm} = \dfrac{7}{5}ma_{cm}$ και τελικά

$a_{cm} = \dfrac{5}{7}g\ \eta\mu 30^o = \dfrac{25}{7}m/s^2$



4.63 Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 κινούνται με επιτάχυνση a, ενώ η τροχαλία στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση α για την οποία ισχύει $\alpha \cdot R = a$ (1)
Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τα σώματα Σ_1, Σ_2 και το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία παίρνουμε αντίστοιχα

$w_1 - T_1 = m_1 a$ (2)

$T_2 - w_2 = m_2 a$ (3)

---

[1] Στην πραγματικότητα $\mathrm{A\Gamma} = h + R\left(1 - \sigma\upsilon\nu 30^o\right)$. Για μια σφαίρα μικρών διαστάσεων ΑΓ $\approx$ h .

και $\left(T_1 - T_2\right) R = I\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$

ή $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} mR \frac{a}{R}$

ή $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} ma$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (2), (3) και (4) και παίρνουμε

$$w_1 - w_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2} \right) a$$

ή $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g = 4\ m/s^2$

4.64 Εφόσον το σφαιρίδιο παραμένει στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και δεν υπάρχουν τριβές το έργο που προσφέρουμε για να μετακινήσουμε το άκρο του σκοινιού προς τα κάτω είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου.

$$W = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_1^2$$

όμως $\upsilon_1 = \omega_1 R_1$ και $\upsilon_2 = \omega_2 R_2$

οπότε $W = \frac{1}{2} m\omega_2^2 R_2^2 - \frac{1}{2} m\omega_1^2 R_1^2$ (1)

Η δύναμη που ασκείται στο σφαιρίδιο από το νήμα έχει μηδενική ροπή ως προς το κέντρο περιστροφής οπότε η στροφορμή του σφαιριδίου διατηρείται σταθερή, δηλαδή

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

ή $mR_1^2\omega_1 = mR_2^2\omega_2$

και $\omega_2 = \omega_1 \frac{R_1^2}{R_2^2}$

Αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε

$$W = \frac{1}{2} m\omega_1^2 R_1^2 \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) = 43{,}2\ J$$

4.65 $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$

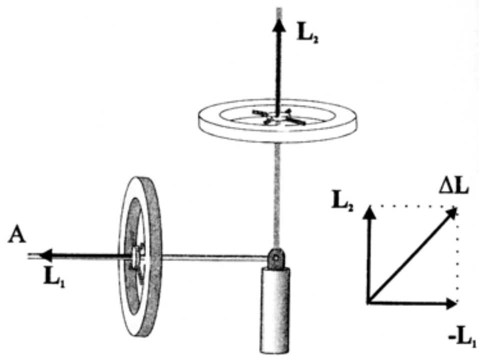
ή $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 + (-\mathbf{L}_1)$

οπότε $\Delta L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$

όμως $L_1 = L_2 = I\omega$

οπότε $\Delta L = I\omega\sqrt{2}$

ή $\Delta L = 4{,}5\sqrt{2}\ kg\ m^2 / s$



4.66 Σύμφωνα με το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη στροφική κίνηση

$\tau \cdot \theta = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega_{\alpha\rho\chi}^2$ δηλαδή

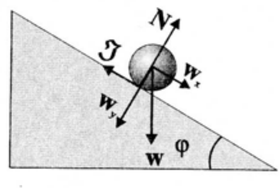
$FR \cdot 8\pi = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2$ και τελικά

$$m = \frac{32\pi F}{R\omega^2} = \frac{32\pi \times 20\pi}{20 \times 10^{-2} 64\pi^2} = 50kg$$

4.67 Για να μην ολισθαίνει ο τροχός η τριβή πρέπει να είναι στατική οπότε

$\Im \leq \mu_s N$ ή $\Im \leq \mu_s mg\sigma\upsilon\nu\varphi$

και $\mu_s \geq \frac{\Im}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (1)



Για τη στροφική κίνηση του τροχού ισχύει

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \Im R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \Im = \frac{mR\alpha_{\gamma\omega\nu}}{2} \qquad (2)$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και προκύπτει $\mu_s \geq \dfrac{R\alpha_{\gamma\omega\nu}}{2g\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (3)

Επίσης εάν ο τροχός δεν ολισθαίνει μεταξύ της γραμμικής και της γωνιακής του επιτάχυνσης ισχύει η σχέση

$$a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε στην (3) και προκύπτει $\mu_s \geq \dfrac{a_{cm}}{2g\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (5)

Για τη μεταφορική κίνηση του τροχού ισχύει

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \text{ ή } mg\eta\mu\varphi - \Im = ma_{cm} \qquad (6)$$

Η (6) λόγω της (2) γίνεται $mg\eta\mu\varphi - \dfrac{mR\alpha_{\gamma\omega\nu}}{2} = ma_{cm}$

και λαμβάνοντας υπόψη την (4) $mg\eta\mu\varphi - \dfrac{ma_{cm}}{2} = ma_{cm}$

οπότε $a_{cm} = \dfrac{2g\eta\mu\varphi}{3}$

Αντικαθιστούμε στην (5) και βρίσκουμε τελικά

$$\mu_s \geq \frac{\varepsilon\varphi\varphi}{3}$$

4.68 α) $\Sigma F = ma_{cm}$ οπότε

$w - T = ma_{cm}$

ή $mg - T = ma_{cm}$

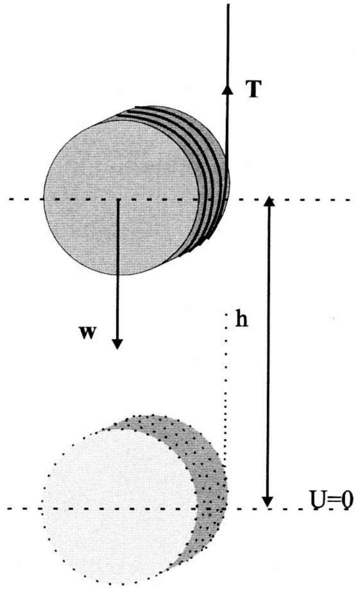
και $a_{cm} = \dfrac{mg - T}{m}$ (1)

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (ως προς τον άξονα του κυλίνδρου)

ή $TR = \dfrac{1}{2} mR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

όμως $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{a_{cm}}{R}$ (3)

Η (2) λόγω της (3) και της (1) γίνεται



$$TR = \frac{1}{2} mR^2 \frac{mg - T}{mR} = R\frac{mg - T}{2}$$

και $T = \dfrac{mg}{3}$

$\dfrac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau = TR = \dfrac{mgR}{3}$ ή $\dfrac{\Delta L}{\Delta t} = 6 \times 10^{-3} kgm^2 / s^2$

β) Ορίζουμε το οριζόντιο επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται ο άξονας του κυλίνδρου στην κατώτερη θέση ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τον κύλινδρο έχουμε

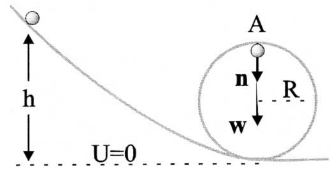
$$mgh = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

όμως $\omega = \dfrac{\upsilon_{cm}}{R}$ και $I = \dfrac{1}{2} mR^2$

οπότε $mgh = \dfrac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} mR^2 \dfrac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} = \dfrac{3}{4} m\upsilon_{cm}^2$

και τελικά $\upsilon_{cm} = 2\sqrt{\dfrac{gh}{3}} = 2m / s$.

4.69 Για να κάνει ανακύκλωση, η σφαίρα πρέπει στο ανώτερο σημείο Α της κυκλικής τροχιάς της να βρίσκεται σε επαφή με τον οδηγό.



Για την αντίδραση **n** που δέχεται η σφαίρα από τον οδηγό ισχύει

$n \geq 0$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται η σφαίρα στη θέση Α είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη

$$w + n = \frac{m\upsilon_A^2}{R}$$

Θέτουμε $w = mg$ και οριακά $n = 0$

οπότε $mg = \dfrac{m\upsilon_{A\min}^2}{R}$ και $\upsilon_{A\min} = \sqrt{gR}$

Ορίζουμε το οριζόντιο επίπεδο πάνω που περνάει από την κατώτερη θέση του οδηγού ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τη σφαίρα έχουμε

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}I\omega_A^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$$

Θέτουμε $I = \dfrac{2}{5}mr^2$, $\omega_A = \dfrac{\upsilon_A}{r}$, $\upsilon_A = \upsilon_{A\min} = \sqrt{gR}$ και λύνουμε ως προς h που θα είναι στην προκειμένη περίπτωση το $h_{\min}$.

$$mgh_{\min} = mg2R + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{gR}{r^2} + \frac{1}{2}mgR$$

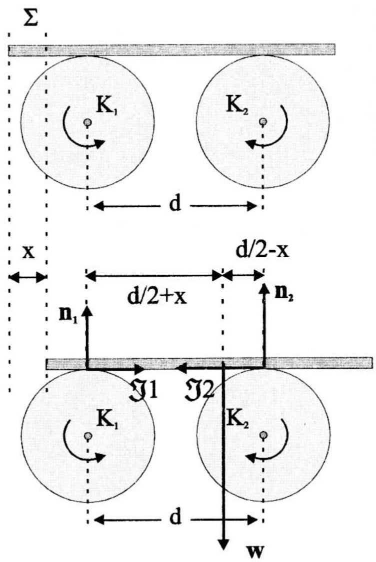
και τελικά $$h_{\min} = 2R + \frac{R}{5} + \frac{R}{2} = \frac{27R}{10} = 54\ cm\ .$$

4.70 Εάν η σανίδα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση θα ισχύουν

$$\Sigma F_x = -Dx$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$\Sigma\tau = 0$ (ως προς οποιοδήποτε σημείο)



Για μια τυχαία θέση στην οποία η σανίδα είναι μετατοπισμένη κατά x σε σχέση με την αρχική της θέση θα έχουμε

$$\Sigma F_x = \Im_1 - \Im_2 = \mu_\kappa n_1 - \mu_\kappa n_2 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = n_1 + n_2 - w = 0 \text{ ή}$$

$$n_1 = w - n_2 \qquad (2)$$

Η συνισταμένη των ροπών ως προς το μέσον της σανίδας είναι

$$n_2\left(\frac{d}{2} - x\right) - n_1\left(\frac{d}{2} + x\right) = 0 \text{ και λόγω της (2)}$$

$$n_2\left(\frac{d}{2} - x\right) - (w - n_2)\left(\frac{d}{2} + x\right) = 0$$

Λύνουμε ως προς n_2 και βρίσκουμε $n_2 = \dfrac{w\left(\dfrac{d}{2} + x\right)}{d}$ (3)

Αντικαθιστούμε στην (2) και βρίσκουμε

$$n_1 = w - \frac{wd}{2(d-x)} \qquad \text{ή} \qquad n_1 = \frac{w\left(\dfrac{d}{2} - x\right)}{d} \qquad (4)$$

Η (1) λόγω των (3) και (4) γίνεται

$$\Sigma F_x = \mu_\kappa \frac{w\left(\dfrac{d}{2} - x\right)}{d} - \mu_\kappa \frac{w\left(\dfrac{d}{2} + x\right)}{d} = -\frac{2\mu_\kappa w}{d}x$$

$$\Sigma F_x = -\frac{2\mu_\kappa mg}{d}x \qquad \text{της μορφής} \qquad \Sigma F_x = -Dx$$

όπου $D = \frac{2\mu_\kappa mg}{d}$

Η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

οπότε τελικά $T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu_\kappa g}}$

4.71 Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή οπότε

$$0 = \mathbf{L}_{\text{τρένου}} + \mathbf{L}_{\text{τροχού}} \qquad \text{ή} \qquad 0 = L_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon} - L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}}$$

και $L_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon} = L_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}}$ ή $I_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon}\omega_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon} = I\omega_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}}$

Άρα $\omega_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}} = \frac{I_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon}}{I}\omega_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon}$

$$I_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon} = mR^2 \qquad \text{και} \qquad \omega_{\tau\rho\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon} = \frac{\upsilon}{R}$$

όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του τρένου ως προς το έδαφος

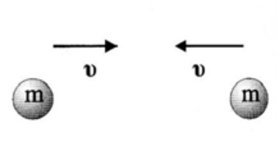
οπότε $\omega_{\tau\rho o\chi o\acute{\upsilon}} = \frac{mR^2}{I}\frac{\upsilon}{R} = \frac{mR}{I}\upsilon = 1,75\ rad/s$.

5 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κρούσεις

5.1 α) Η ορμή συστήματος σωμάτων είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα. Η κινητική ενέργεια συστήματος σωμάτων είναι το αλγεβρικό άθροισμα των κινητικών ενεργειών τους. Είναι δυνατόν το διανυσματικό άθροισμα των ορμών να είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των κινητικών ενεργειών διάφορο του μηδενός. Για παράδειγμα στο σύστημα του σχήματος



$$\mathbf{p_{ολ}} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = \mathbf{0} \text{ και } K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \neq 0$$

β) Για να έχει ένα σώμα κινητική ενέργεια πρέπει να κινείται ($\upsilon \neq 0$) και κατά συνέπεια να έχει ορμή.

5.2 ....6..................9..................3..................3..................

5.3 (γ)

5.4 (α)

5.5 (γ)

5.6 Όχι. Αν η κρούση ήταν ελαστική, οι σφαίρες εφόσον έχουν ίσες μάζες, θα έπρεπε να ανταλλάξουν ταχύτητες. Όμως $\upsilon_1' \neq \upsilon_2$.

5.7 (δ)

5.8 (α), (β), (δ).

5.9 (δ)

Συστήματα αναφοράς

5.10 Για τον επιβάτη του τρένου το αντικείμενο κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα υ_0. Για τον παρατηρητή του σταθμού το αντικείμενο κάνει πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα υ η οποία έχει οριζόντια συνιστώσα την ταχύτητα του τρένου και κατακόρυφη συνιστώσα την υ_0.

5.11 (α)

5.12 (δ)

5.13 Η ταχύτητα του επιβάτη ως προς το έδαφος θα είναι $\boldsymbol{\upsilon_E} = \boldsymbol{\upsilon} + \mathbf{u}$, με μέτρο $\upsilon_E = \upsilon - u$.

5.14 Το πλοίο Β κινείται ως προς την ακτή με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_B} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\upsilon}$, με μέτρο $\upsilon_B = \sqrt{u^2 + \upsilon^2}$.

5.15 (γ), (δ), (στ).

5.16 Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα είναι μηδέν. Αν η συνισταμένη κάποιων δυνάμεων είναι μηδέν ως προς ένα αδρανειακό σύστημα θα είναι μηδέν και ως προς οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα. Άρα αν η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα θα διατηρείται και ως προς κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα.

5.17 Όχι. Αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα των σωμάτων είναι διάφορη του μηδενός τότε το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας δεν είναι αδρανειακό.

5.18 (β), (γ).

Φαινόμενο Doppler

5.19 (γ)

5.20 α) $f_A > f_\Pi$ β) $f_A < f_\Pi$ γ) $f_A < f_\Pi$

δ) $f_A = f_\Pi$ ε) $f_A > f_\Pi$ στ) $f_A > f_\Pi$

5.21 α) μεγαλύτερη β) ίδιες
γ) μεγαλύτερη συχνότητα έχει ο ανακλώμενος ήχος

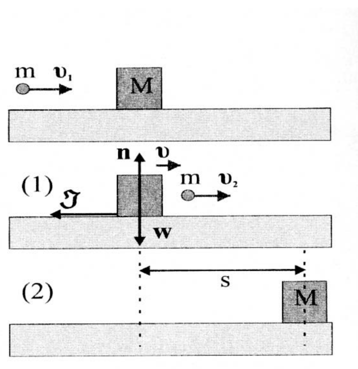
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κρούσεις

5.22 α) Από τη διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα - σώμα αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$$m\upsilon_1 = M\upsilon + m\upsilon_2$$

οπότε $\upsilon = \dfrac{m(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{M} = 20\ m/s$.



β) $\Delta K = \dfrac{1}{2}M\upsilon^2 + \dfrac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \dfrac{1}{2}m\upsilon_1^2 = -13600\ J$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι κατά την κρούση η μηχανική ενέργεια του συστήματος μειώθηκε.

γ) Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα μάζας M από τη θέση (1) έως τη θέση (2), όπου το σώμα σταματά, έχουμε

$$0 - \frac{1}{2}M\upsilon^2 = W_\Im \quad \text{δηλαδή} \quad -\frac{1}{2}M\upsilon^2 = -\mu_\kappa ns$$

Όμως $n = Mg$ και επομένως $\dfrac{1}{2}M\upsilon^2 = \mu_\kappa Mgs$.

Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε $s = \dfrac{\upsilon^2}{2\mu_\kappa g} = 40\ m$

5.23 Εφόσον η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ανάμεσα σε ένα κινούμενο και ένα ακίνητο σώμα για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση ισχύουν οι σχέσεις (5.8) και (5.9) (σελίδα 156 σχολικό βιβλίο), οπότε

$\upsilon_1{}' = \dfrac{m-3m}{m+3m}\upsilon = -6\ m/s$ το (-) δείχνει ότι η $\upsilon_1{}'$ έχει αντίθετη φορά με την υ.

$$\upsilon_2{}' = \frac{2m}{m+3m}\upsilon = 6\ m/s$$

5.24 α) Από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος των σφαιρών αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = \left(m_1 + m_2\right)\upsilon$ οπότε $\upsilon = \dfrac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = -0,33\ m/s$

το (-) δείχνει ότι το συσσωμάτωμα κινείται με την ίδια φορά με το σώμα μάζας m_2.

β) Το ποσοστό κατά το οποίο ελαττώθηκε η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών κατά την κρούση είναι

$$\frac{\left|\Delta K\right|}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\upsilon^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}100\% = 98\%$$

5.25 Εφόσον η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και το ένα από τα δύο σώματα ήταν αρχικά ακίνητο, η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας μετά την κρούση θα είναι $\upsilon_1{}' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

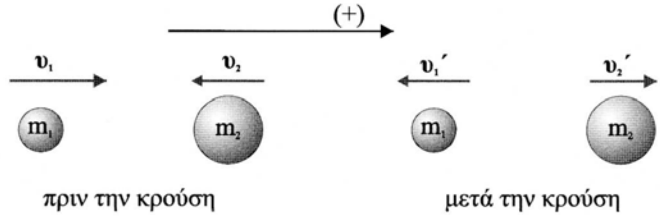
Στην πρώτη περίπτωση $\dfrac{\upsilon_1}{3} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

οπότε $m_2 = \dfrac{m_1}{2} = 0,5\ kg$

Στη δεύτερη περίπτωση $-\dfrac{\upsilon_1}{3} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

οπότε $m_2 = 2m_1 = 2\ kg$

5.26



Θεωρούμε ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας $\mathbf{\upsilon_1}$. Αφού η κρούση είναι ελαστική θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \qquad (2)$$

η (1) γράφεται και

$$m_1(\upsilon_1 + \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' + \upsilon_2) \qquad (3)$$

ενώ η (2) γράφεται

$$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2) \qquad (4)$$

Διαιρούμε τις (4) και (3) κατά μέλη και βρίσκουμε

$$\upsilon_1 - \upsilon_1' = \upsilon_2' - \upsilon_2 \qquad \text{και} \qquad \upsilon_2' = \upsilon_1 - \upsilon_1' + \upsilon_2 \quad (5)$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του υ_2' στην (1) και λύνουμε ως προς υ_1'

$$\upsilon_1' = \frac{m_2(\upsilon_1 + 2\upsilon_2) - m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = 8\ m/s$$

Αντικαθιστούμε στην (5) και βρίσκουμε

$$\upsilon_2' = 1\ m/s$$

5.27 Η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει η σφαίρα μάζας m_2 μετά την κρούση είναι το σύνολο της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών πριν την κρούση. Για να συμβεί αυτό πρέπει μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_1 να ακινητοποιηθεί κάτι που συμβαίνει όταν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες.

5.28 Αν η μάζα του νετρονίου είναι m_n τότε
ο πυρήνας πρωτίου (1 πρωτόνιο) έχει μάζα περίπου ίση με m_n,
ο πυρήνας του δευτερίου (1 πρωτόνιο + 1 νετρόνιο) $2m_n$
και ο πυρήνας ηλίου (2 πρωτόνια + 2 νετρόνια) $4m_n$
Σύμφωνα με τη σχέση (5.8) η ταχύτητα του νετρονίου μετά την κρούση, σε κάθε περίπτωση, θα είναι

με το πρώτιο $\upsilon_1' = \dfrac{m_n - m_n}{m_n + m_n}\upsilon_1 = 0$

με το δευτέριο $\upsilon_1' = \dfrac{m_n - 2m_n}{m_n + 2m_n}\upsilon_1 = -\dfrac{\upsilon_1}{3}$

με το ήλιο $\upsilon_1' = \dfrac{m_n - 4m_n}{m_n + 4m_n}\upsilon_1 = -\dfrac{3\upsilon_1}{5}$

Αν K_1 η κινητική ενέργεια του νετρονίου πριν την κρούση το ποσοστό της απώλειας κινητικής ενέργειας για το νετρόνιο κατά την κρούση θα είναι κατά περίπτωση

με το πρώτιο $\dfrac{|\Delta K_1|}{K_1}100\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_n\upsilon_1^2 - 0}{\frac{1}{2}m_n\upsilon_1^2}100\% = 100\%$

με το δευτέριο $\dfrac{|\Delta K_1|}{K_1}100\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_n\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_n\left(\frac{\upsilon_1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}m_n\upsilon_1^2}100\% = 88,9\%$

με το ήλιο $\dfrac{|\Delta K_1|}{K_1}100\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_n\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_n\left(\frac{3\upsilon_1}{5}\right)^2}{\frac{1}{2}m_n\upsilon_1^2}100\% = 64\%$

5.29 α) Έστω **V** η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

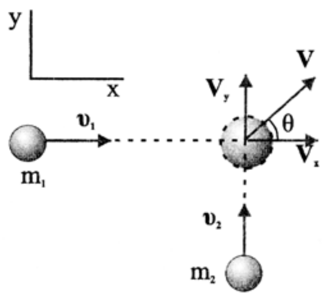
Αν $\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $\mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ η ορμή αμέσως μετά την κρούση θα είναι

$$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

Αναλύουμε το διάνυσμα **V** σε δύο συνιστώσες τη V_x κατά την διεύθυνση x και την V_y κατά την διεύθυνση y (σχ. 5.7). Όταν δύο διανύσματα είναι ίσα, είναι ίσες και οι συνιστώσες τους, επομένως

$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ άρα

$$p_x^{\pi\rho\iota\nu} = p_x^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$
$$p_y^{\pi\rho\iota\nu} = p_y^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$



ή

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V_x$$
$$m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V_y$$

Από όπου $V_x = \dfrac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$

και $V_y = \dfrac{m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$

Επομένως, η ταχύτητα του συσσωματώματος θα έχει μέτρο

$$V = \sqrt{\left(\frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\right)^2} = 6\ m/s$$

και θα σχηματίζει με την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_1$, γωνία θ για την οποία

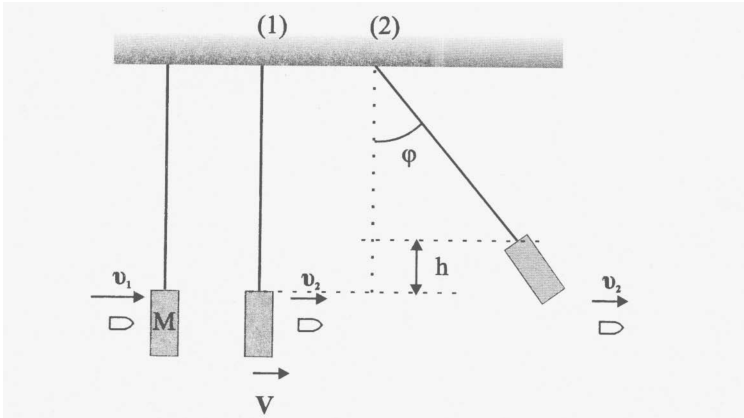
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\dfrac{m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}}{\dfrac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}} = \frac{m_2\upsilon_2}{m_1\upsilon_1} = \frac{3}{4}$$

β) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - \left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right) = -174\ J$$

5.30 Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα - πλάκα αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$m\upsilon_1 = MV + m\upsilon_2$ οπότε $V = \dfrac{m(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{M} = 4,4\ m/s$



Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για την πλάκα από τη θέση (1) έως τη θέση (2)

$$0 - \frac{1}{2}MV^2 = -Mgh = -Mgl(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

οπότε $\sigma\upsilon\nu\varphi = 1 - \dfrac{V^2}{2gl} = 0,516$

Κινήσεις σε αδρανειακά συστήματα

5.31 Το ποταμόπλοιο έχει ως προς την ξηρά ταχύτητα

$\boldsymbol{\upsilon_\pi = \upsilon + u}$ (**u** η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού)

Όταν το πλοίο κινείται ομόρροπα με το ρεύμα η ταχύτητά του έχει μέτρο

$\upsilon_{1\pi} = \upsilon + u = 25\ km/h$,

ενώ όταν κινείται αντίρροπα με το ρεύμα,

$\upsilon_{2\pi} = \upsilon - u = 15\ km/h$

Ο συνολικός χρόνος για τη διαδρομή ΑΒΑ είναι

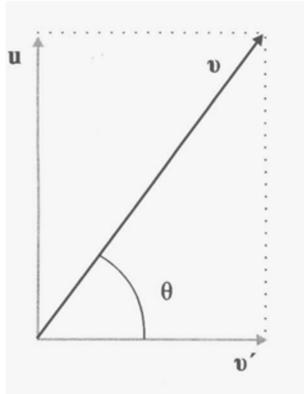
$$t_{o\lambda} = t_1 + t_2 = \frac{s}{\upsilon_{1\pi}} + \frac{s}{\upsilon_{2\pi}} = 2,56\ h$$

5.32 Αν **u** η ταχύτητα με την οποία κινείται ως προς τη Γη το πρώτο αεροπλάνο και **υ′** η ταχύτητα του δεύτερου αεροπλάνου ως προς το πρώτο, τότε τα ραντάρ στη Γη βλέπουν το δεύτερο αεροπλάνο να κινείται με ταχύτητα

$$\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\upsilon}'$$

οπότε $\upsilon = \sqrt{u^2 + \upsilon'^2} = 500\ m/s$

και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{u}{\upsilon'} = \dfrac{4}{3}$



5.33 α) Για τον παρατηρητή του Σ

$m\upsilon = (m+M)V$ οπότε $V = \dfrac{m}{m+M}\upsilon = 2\ m/s$

β) Για τον παρατηρητή του Σ′

το σώμα με μάζα m πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα $\upsilon' = \upsilon - u$

το σώμα με μάζα M πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα $\upsilon_2{}' = -u$

το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα $V' = V - u$

Αν ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση όπως τη βλέπει ο παρατηρητής του Σ′ πρέπει

$m\upsilon' + M\upsilon_2{}' = (m+M)V'$

ή $m(\upsilon - u) - Mu = (m+M)(V-u)$, που είναι αληθές.

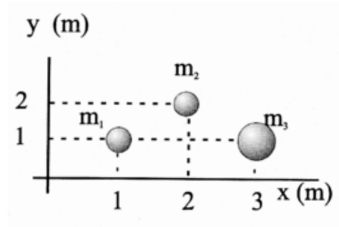
Κέντρο μάζας - Σχετικές κινήσεις

5.34 Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{15}{7}$$

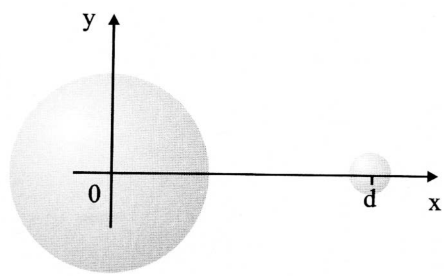
και

$$y_{cm} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{9}{7}$$



5.35 Αν θεωρήσουμε ότι το κέντρο του Ήλιου βρίσκεται στη θέση (0, 0) και ότι το κέντρο της Γης βρίσκεται στη θέση (d, 0) το κέντρο μάζας του συστήματος Ήλιος - Γη βρίσκεται στη θέση

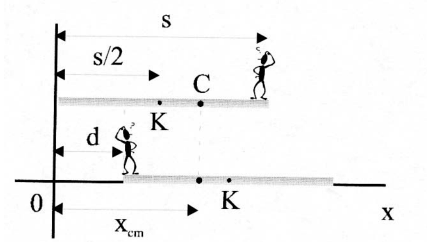
$$x = \frac{d m_\Gamma}{m_\Gamma + m_H} = 4,46 \times 10^5\, m$$



Παρατηρούμε ότι η απόσταση του κέντρου μάζας του συστήματος από το κέντρο του Ήλιου είναι περίπου 1500 φορές μικρότερη από την ακτίνα του Ήλιου.

5.36 <u>α΄ τρόπος</u>

Το σύστημα βάρκα - άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί απομονωμένο. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη μετακίνηση του ανθρώπου πάνω στη βάρκα το κέντρο μάζας C θα παραμείνει ακίνητο. Για να συμβεί αυτό πρέπει ταυτόχρονα με τον άνθρωπο να μετατοπίζεται και η βάρκα στην αντίθετη κατεύθυνση. Θεωρούμε ότι η βάρκα έχει το κέντρο μάζας της στο μέσον της.



Για την αρχική κατάσταση ισχύει

$$x_{cm} = \frac{M\dfrac{s}{2} + ms}{M + m} \qquad (1)$$

Για την τελική κατάσταση ισχύει

$$x_{cm} = \frac{M\left(d + \frac{s}{2}\right) + md}{M + m} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{M\frac{s}{2} + ms}{M + m} = \frac{M\left(d + \frac{s}{2}\right) + md}{M + m}$$

από οπου προκύπτει $d = \frac{ms}{M + m} = 2\ m$

<u>β΄ τρόπος</u>

Εφόσον οι τριβές μεταξύ βάρκας και νερού είναι αμελητέες το σύστημα βάρκα - άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί απομονωμένο. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα.

$$0 = M\upsilon_{\beta} - m\upsilon_{a} \quad (3)$$

όπου υ_{β} και υ_{α} οι ταχύτητες του ανθρώπου και της βάρκας ως προς το νερό. Αν θεωρήσουμε ότι οι ταχύτητες της βάρκας και του ανθρώπου είναι σταθερές η (3) γράφεται και ως εξής

$$0 = M\frac{d}{t} - m\frac{s-d}{t} \quad (4)$$

όπου d η μετατόπιση της βάρκας ως προς το νερό.

Τελικά από την (4) βρίσκουμε $d = \frac{ms}{m + M} = 2\ m$.

5.37 Η προωστική δύναμη που ασκούν τα καυσαέρια στον πύραυλο δίνεται από τη σχέση $F = u\frac{dm}{dt} = 140000\ N$

όμως επίσης $F = Ma$ και $a = \frac{F}{M} = 14\ m/s^2$.

5.38 $F = u\dfrac{dm}{dt}$ επίσης $F = Ma$

οπότε $u\dfrac{dm}{dt} = Ma$ και $\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{Ma}{u} = 40\ kg/s$.

Φαινόμενο Doppler

5.39 Η σχέση που δίνει τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής όταν αυτός απομακρύνεται από ακίνητη πηγή είναι

$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_s$$

όπου υ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, υ_A η ταχύτητα του παρατηρητή και f_s η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή.

$$f_A = \frac{9}{10} f_s \qquad \text{οπότε} \qquad \frac{9}{10} f_s = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_s$$

και $\upsilon_A = \dfrac{\upsilon}{10} = 34\ m/s$.

5.40 Όταν το περιπολικό πλησιάζει ο παρατηρητής ακούει ήχο συχνότητας

$$f_1 = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s \qquad (1)$$

όπου υ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, υ_s η ταχύτητα του περιπολικού και f_s η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει το περιπολικό.
Όταν το περιπολικό απομακρύνεται, ο παρατηρητής ακούει ήχο συχνότητας

$$f_2 = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s \qquad (2)$$

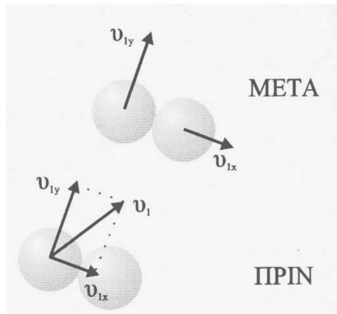
Από τις (1) και (2) έχουμε $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{\upsilon + \upsilon_s}{\upsilon - \upsilon_s}$

οπότε $\upsilon_s = \upsilon \dfrac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} = 17{,}9\ m/s$

Από την (1) βρίσκουμε $$f_s = f_1 \frac{(\upsilon - \upsilon_s)}{\upsilon} = 473,7Hz\ .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.41 <u>α΄ τρόπος</u>



Αναλύουμε την ταχύτητα υ_1 της κινούμενης σφαίρας αμέσως πριν την κρούση σε δύο άξονες. Ο ένας περνάει από τα κέντρα των σφαιρών και ο άλλος είναι κάθετος σ' αυτόν. Αν η σφαίρα 1 είχε πριν την κρούση μόνο την υ_{1x} η κρούση θα ήταν κεντρική και ελαστική, οι σφαίρες θα άλλαζαν μεταξύ τους ταχύτητες, επειδή έχουν ίδιες μάζες, δηλαδή η σφαίρα 1 θα έμενε ακίνητη μετά την κρούση ενώ η σφαίρα 2 θα αποκτούσε ταχύτητα υ_{1x}. Αν η σφαίρα 1 είχε πριν την κρούση μόνο την υ_{1y} δεν θα γινόταν κρούση και η σφαίρα 1 θα συνέχιζε την κίνησή της με υ_{1y}. Συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα καταλήγουμε ότι μετά την κρούση η σφαίρα 1 κινείται με υ_{1y} ενώ η σφαίρα 2 με υ_{1x}. Οι δύο ταχύτητες είναι κάθετες μεταξύ τους.

<u>β΄ τρόπος</u>

Από τη διατήρηση ορμής για την κρούση έχουμε

$$m\boldsymbol{\upsilon_1} = m\boldsymbol{\upsilon_1'} + m\boldsymbol{\upsilon_2'} \qquad \text{οπότε} \qquad \boldsymbol{\upsilon_1} = \boldsymbol{\upsilon_1'} + \boldsymbol{\upsilon_2'}$$

όπου $\boldsymbol{\upsilon_1}$ η ταχύτητα της κινούμενης σφαίρας πριν την κρούση, $\boldsymbol{\upsilon_1'}$ η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας μετά την κρούση και $\boldsymbol{\upsilon_2'}$ η ταχύτητα της αρχικά ακίνητης σφαίρας μετά την κρούση.

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε

$$\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 + 2\upsilon_1'\upsilon_2'\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (1)$$

όπου θ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\boldsymbol{\upsilon_1'}$ και $\boldsymbol{\upsilon_2'}$

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική ισχύει επίσης

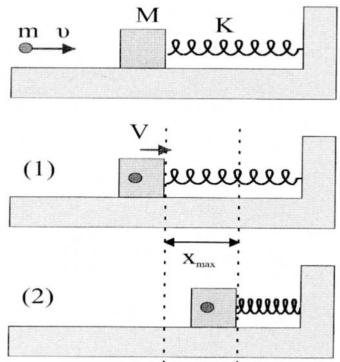
$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2$$

ή $$\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \qquad \text{δηλαδή} \qquad \theta = 90^{\circ}$$

5.42 α) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε



$$m\upsilon = (m+M)V$$

οπότε $$V = \frac{m\upsilon}{m+M}$$

Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (1) έως τη θέση (2) έχουμε

$$0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = W_{F_{\varepsilon\lambda}}$$

ή $$-\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m\upsilon}{m+M}\right)^2 = -\frac{1}{2}Kx_{max}^2$$

και $$x_{max} = \sqrt{\frac{m^2\upsilon^2}{K(m+M)}} = 0{,}1\ m$$

β) Πριν την κρούση το σύστημα είχε την κινητική ενέργεια του βλήματος

$$E_{\alpha\rho\chi} = K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Τελικά το σύστημα έχει τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$$

Το ποσοστό της ενέργειας που έχασε το σύστημα είναι

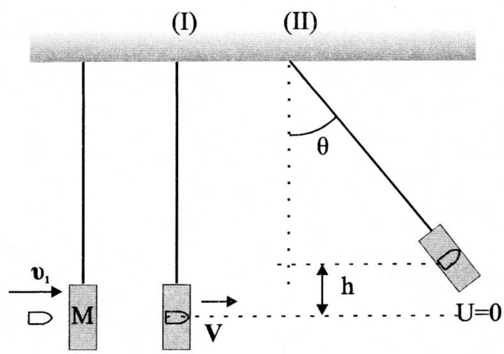
$$\frac{|\Delta E|}{E_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}Kx_{\max}^2}{\frac{1}{2}m\upsilon^2}100\% = 95\%$$

5.43 Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε

$$m\upsilon = (m+M)V$$

οπότε $$\upsilon = \frac{m+M}{m}V \qquad (1)$$

Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (Ι) έως τη θέση (ΙΙ) έχουμε



$$0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = -(m+M)gh = -(m+M)gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$$

οπότε $$V = \sqrt{2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε

$$\upsilon = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το κέντρο μάζας του συσσωματώματος στη θέση (Ι) ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω θέσης μέσα στο πεδίο βαρύτητας.

Αρχικά το σύστημα είχε την κινητική ενέργεια του βλήματος

$$E_{\alpha\rho\chi} = K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad \text{ή}$$

$$E_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\left(\frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}\right)^2 = \frac{(m+M)^2}{m}gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$$

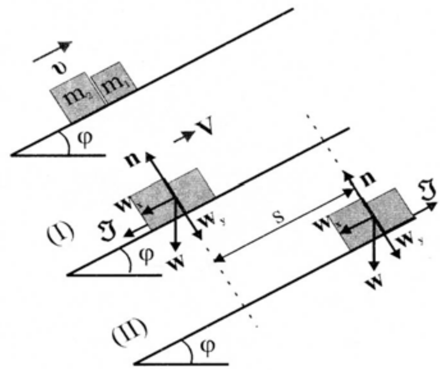
Τελικά το σύστημα έχει τη δυναμική ενέργεια του συσσωματώματος λόγω της θέσης του μέσα στο πεδίο βαρύτητας

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = U = (m+M)gh = (m+M)gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Η μηχανική ενέργεια που έχασε το σύστημα είναι

$$|\Delta E_{MHX}| = \frac{(m+M)^2}{m} gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta) - (m+M)gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta) = 255\ J$$

5.44 Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε



$$m_2\upsilon = (m_1+m_2)V$$

οπότε $V = \dfrac{m_2\upsilon}{m_1+m_2}$

Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (I) έως τη θέση (II) έχουμε

$$0 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = W_w + W_{\Im}$$

$$W_w = -(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi\ s$$

$$W_{\Im} = -\Im s = -\mu_K ns = -\mu_K(m_1+m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi\ s$$

οπότε $-\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dfrac{m_2\upsilon}{m_1+m_2}\right)^2 =$

$$= -(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi\ s - \mu_K(m_1+m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi\ s$$

και τελικά $s = \dfrac{m_2^2\upsilon^2}{2(m_1+m_2)^2 g(\eta\mu\varphi + \mu_K\sigma\upsilon\nu\varphi)} = 1{,}8\ m$

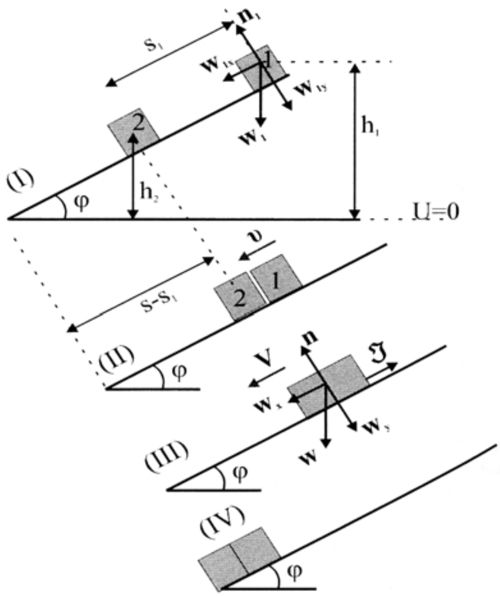
β) Το συσσωμάτωμα θα επιστρέψει αν η συνιστώσα w_x του βάρους είναι μεγαλύτερη από το όριο της στατικής τριβής την οποία εδώ θεωρούμε ίση με την τριβή ολίσθησης

$$w_x = (m_1 + m_2) g ημφ = 250\ N$$

$$\Im = μ_K n = μ_K (m_1 + m_2) g συνφ = 250\ N$$

Παρατηρούμε ότι $w_x = \Im$ οπότε το συσσωμάτωμα δεν επιστρέφει.

5.45 α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα 1 από τη θέση (I) έως τη θέση (II)



$$\frac{1}{2} m υ^2 = W_{w1}$$

$$W_{w1} = mg ημφ\ s_1$$ οπότε

$$\frac{1}{2} m υ^2 = mg ημφ\ s_1$$ και

$$υ = \sqrt{2g ημφ\ s_1}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε $mυ = 2mV$ οπότε

$$V = \frac{υ}{2} = \sqrt{\frac{g ημφ\ s_1}{2}}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (III) έως τη θέση (IV)

$$0 - \frac{1}{2} 2mV^2 = W_w + W_{\Im}$$

$$W_w = 2mg ημφ\ (s - s_1)$$

$$W_{\Im} = -\Im(s - s_1) = -μ_K n (s - s_1) = -μ_K 2mg συνφ (s - s_1)$$ οπότε

$$-m\frac{g\eta\mu\varphi\ s_1}{2} = 2mg\eta\mu\varphi\ \left(s-s_1\right) - \mu_K 2mg\sigma\upsilon\nu\varphi\left(s-s_1\right)$$

και τελικά $\mu_K = \dfrac{\dfrac{\eta\mu\varphi\ s_1}{2} + 2\eta\mu\varphi\left(s-s_1\right)}{2\sigma\upsilon\nu\varphi\left(s-s_1\right)} = \dfrac{5\sqrt{3}}{13}$

β) Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από τη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Η αρχική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων είναι

$$E_{\alpha\rho\chi} = mgh_1 + mgh_2 = mg\eta\mu\varphi\left[s + \left(s-s_1\right)\right] = 34\ J$$

Η τελική ενέργεια του συστήματος είναι $E_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$

Η συνολική θερμότητα που παράχθηκε είναι

$$\left|\Delta E\right| = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\varepsilon\lambda} = 34\ J$$

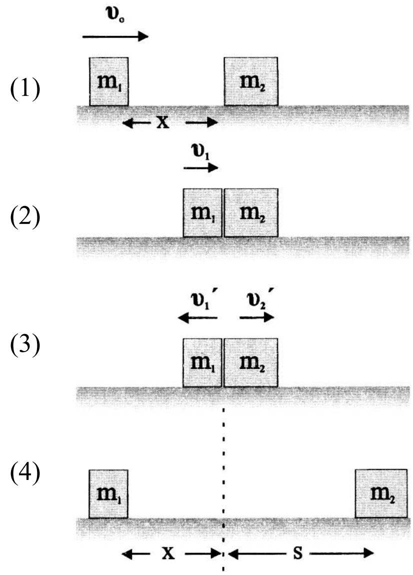
5.46 Το σύστημα άνθρωπος - αερόστατο αρχικά ηρεμεί οπότε η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δέχεται είναι μηδενική και το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο.
Όταν ο άνθρωπος αρχίσει να ανεβαίνει το αερόστατο θα κατεβαίνει ώστε το κέντρο μάζας να παραμένει ακίνητο στην αρχική του θέση. Αναγκαστικά το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο συνάντησης του ανθρώπου με το αερόστατο.
Η θέση του κέντρου μάζας βρίσκεται σε ύψος y_2 από το έδαφος και ισχύει

$$y_2 = \frac{MH}{m+M}$$

και επομένως το αερόστατο θα κατέβει κατά

$$y_1 = H - y_2 = H - \frac{MH}{m+M} = H\frac{m}{m+M}$$

5.47 α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση (3) έως τη θέση (4)



$$0-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2=W_{\Im}$$

$$W_{\Im}=-\Im x=-\mu_K nx=-\mu_K m_1 gx$$

οπότε $-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2=-\mu_K m_1 gx$

και $\upsilon_1'=\sqrt{2\mu_K gx}$

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική και μετωπική και το σώμα μάζας m_2 ήταν αρχικά ακίνητο, μετά την κρούση, το σώμα μάζας m_1 θα έχει ταχύτητα

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=-\frac{\upsilon_1}{3} \quad \text{οπότε} \quad \upsilon_1=-3\upsilon_1'=-3\sqrt{2\mu_K gx}$$

(Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η υ_1 έχει φορά αντίθετη με τη υ_1')

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση (1) έως τη θέση (2)

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=W_{\Im}$$

$$W_{\Im}=-\Im x=-\mu_K nx=-\mu_K m_1 gx$$

οπότε
$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=-\mu_K m_1 gx$$

ή
$$\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2\mu_K gx}\right)^2-\frac{1}{2}\upsilon_0^2=-\mu_K gx$$

και
$$\upsilon_0=\sqrt{2\mu_K gx+18\mu_K gx}=10\ m/s$$

β) Η ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση είναι

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2}{3}3\sqrt{2\mu_K g x} = \sqrt{8\mu_K g x}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα μάζας m_2 από τη θέση (3) έως τη θέση (4)

$$0 - \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2 = W_{\Im}$$

$$W_{\Im} = -\Im s = -\mu_K n_2 s = -\mu_K m_2 g x$$

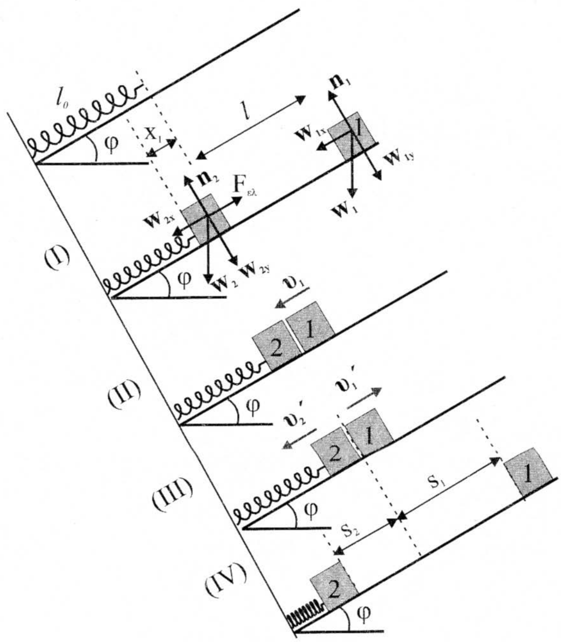
οπότε $\quad -\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -\mu_K m_2 g s$ και $s = \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu_K g} = \frac{8\mu_K g x}{2\mu_K g} = 4x = 4m$

5.48 Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα 1 από τη θέση (I) έως τη θέση (II)

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = W_{w1}$$

$$W_{w1} = m_1 g\eta\mu\varphi\, l \qquad \text{οπότε} \qquad \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1 g\eta\mu\varphi\, l$$

και $\qquad \upsilon_1 = \sqrt{2g\eta\mu\varphi\, l}$



Αμέσως μετά την κρούση τα σώματα θα έχουν ταχύτητες

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{\upsilon_1}{2} = -\sqrt{\frac{g\eta\mu\varphi\, l}{2}}$$

και $$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1}{2} = \sqrt{\frac{g\eta\mu\varphi\, l}{2}}$$

Το πρόσημο της ταχύτητας υ_1' υποδηλώνει ότι η φορά κίνησης του σώματος 1 είναι αντίθετη με την αρχική.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα μάζας 1 από τη θέση (ΙΙΙ) έως τη θέση (IV)

$$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = W_{w1}$$

Αλλά $W_{w1} = -m_1 g\eta\mu\varphi\, s_1$ επομένως $-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -m_1 g\eta\mu\varphi\, s_1$

και $$s_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2g\eta\mu\varphi} = \frac{\frac{g\eta\mu\varphi\, l}{2}}{2g\eta\mu\varphi} = \frac{l}{4} = 1\ m$$

Το σώμα 2 πριν την κρούση ισορροπεί στη θέση στην οποία η συσπείρωση του ελατηρίου είναι x_1, οπότε

$$F_{\varepsilon\lambda} = w_{2x} \qquad \text{ή} \qquad Kx_1 = m_2 g\eta\mu\varphi$$

και $$x_1 = \frac{m_2 g\eta\mu\varphi}{K} = 0{,}025\ m$$

Η ταχύτητα του σώματος 2 θα μηδενιστεί όταν διανύσει στο πλάγιο επίπεδο απόσταση s_2.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα 2 από τη θέση (ΙΙΙ) έως τη θέση (IV).

$$0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = W_{w2} + W_{F\varepsilon\lambda}$$

$$W_{w2} = m_2 g \eta\mu\varphi\, s_2 \qquad \text{και}$$

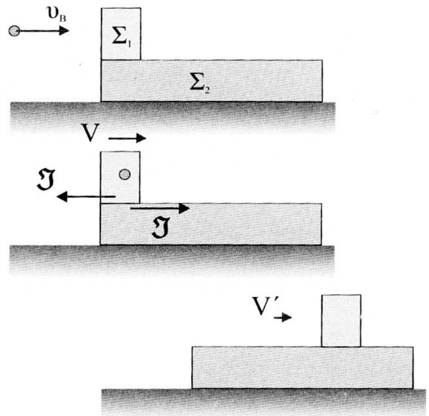
$$W_{F\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}K\left(s_2 + x_1\right)^2$$

οπότε $\quad -\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = m_2 g\eta\mu\varphi \quad s_2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}K\left(s_2 + x_1\right)^2$

ή $\quad -\frac{1}{2}m_2\frac{g\eta\mu\varphi\, l}{2} = m_2 g\eta\mu\varphi \quad s_2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}K\left(s_2 + x_1\right)^2$

και τελικά $\qquad s_2 = 0{,}1\sqrt{5}m$

5.49 α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα - σώμα Σ_1 αμέσως πριν και αμέσως μετά την πλαστική κρούση.



$m_B\upsilon_B = \left(m_B + m_1\right)V$ οπότε

$$V = \frac{m_B}{m_B + m_1}\upsilon_B = 5\ m/s$$

Το σύστημα (συσσωμάτωμα - Σ_2) είναι απομονωμένο οπότε η ορμή του διατηρείται σταθερή.

$$\left(m_B + m_1\right)V = \left(m_B + m_1 + m_2\right)V'$$

όπου V' η κοινή ταχύτητα που αποκτά το σύστημα τελικά

οπότε $\qquad V' = \frac{m_B + m_1}{m_B + m_1 + m_2}V = 1\ m/s$

Η συνολική θερμότητα που παράγεται είναι ίση με τη διαφορά της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος και της τελικής κινητικής ενέργειας του συστήματος.

$$Q = \frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}\left(m_B + m_1 + m_2\right)V'^2 = 247{,}5\ J$$

β) Το συσσωμάτωμα (βλήμα - Σ_1) επιβραδύνεται λόγω της τριβής που δέχεται από το Σ_2 λόγω της σχετικής του κίνησης με αυτό. Η τριβή είναι σταθερή και έχει μέτρο $\Im = \mu n = \mu\left(m_B + m_1\right)g$

Η επιβράδυνση με την οποία κινείται το συσσωμάτωμα είναι

$$a = \frac{\Im}{\left(m_B + m_1\right)} = \frac{\mu\left(m_B + m_1\right)g}{\left(m_B + m_1\right)} = 5\ m/s^2$$

Από $V' = V - at_1$ βρίσκουμε τον χρόνο κίνησης του συσσωματώματος μέχρι να απόκτησει το σύστημα κοινή ταχύτητα

$$t_1 = \frac{V - V'}{a} = 0{,}8\ s$$

Το διάστημα που διάνυσε το συσσωμάτωμα ως προς το έδαφος στον χρόνο αυτό είναι

$$s = Vt_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = 2{,}4\ m$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το Σ_2 κάνει κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη με την επίδραση της δύναμης που του ασκεί το συσσωμάτωμα και είναι η αντίδραση στην τριβή που δέχεται το συσσωμάτωμα από το Σ_2.

Το Σ_2 σε χρόνο t_1 διανύει, ως προς το έδαφος, διάστημα

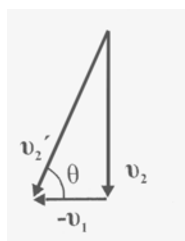
$$s' = \frac{1}{2}a't_1^2 \qquad \text{όπου} \qquad a' = \frac{\Im}{m_2} = \frac{\mu\left(m_B + m_1\right)g}{m_2} = 1{,}25\ m/s^2$$

οπότε $s' = 0{,}4\ m$

Τελικά το συσσωμάτωμα μετακινήθηκε ως προς το Σ_2 κατά

$$\Delta s = s - s' = 2\ m$$

5.50 Η μεγαλύτερη κάλυψη επιτυγχάνεται όταν ο άξονας της ομπρέλας τοποθετείται κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας των σταγόνων όπως την αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος. Το διάνυσμα της ταχύτητας της βροχής ως προς τον άνθρωπο είναι $\boldsymbol{\upsilon}_2' = \boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1$



$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$$

όπου θ η γωνία της ομπρέλας με το οριζόντιο επίπεδο.

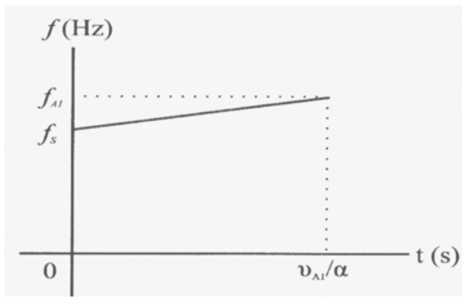
5.51 Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο κινούμενος παρατηρητής δίνεται από τη σχέση $f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S$ (1)

άρα η ταχύτητα με την οποία κινείται κάθε στιγμή ο παρατηρητής δίνεται από τη σχέση $\upsilon_A = \frac{f_A - f_S}{f_S}\upsilon$

Θέτουμε $f_A = f_{A1} = 603{,}5\ Hz$ και βρίσκουμε την ταχύτητα του παρατηρητή τη στιγμή που φτάνει στην πηγή $\upsilon_{A1} = 40\ m/s$.
Ο παρατηρητής κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα οπότε $\upsilon_{A1} = at_1$ και $d = \frac{1}{2}at_1^2$

Απαλείφουμε το χρόνο από τις παραπάνω εξισώσεις και βρίσκουμε

$$a = \frac{\upsilon_{A1}^2}{2d} = 2\ m/s^2$$



Θέτουμε στην (1) $\upsilon_A = at$ και βρίσκουμε την f_A ως συνάρτηση του χρόνου

$$f_A = \frac{\upsilon + at}{\upsilon} f_S \text{ ή } f_A = f_S + \frac{a}{\upsilon}t$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

5.52 $$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_S} f_S = 415\ Hz$$

5.53 Αν f_A η συχνότητα που ακούει ο σιδηροδρομικός όταν είναι ακίνητος, f_S η συχνότητα που εκπέμπει το τρένο και υ_S η ταχύτητα του τρένου ισχύει $f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$ οπότε $\upsilon_S = \frac{f_A - f_S}{f_A}\upsilon = 18{,}9\ m/s$

Αν ο υπάλληλος τρέχοντας με ταχύτητα υ_A διανύει διάστημα $s_1 = 500\ m$ στον ίδιο χρόνο το τρένο διανύει διάστημα $s_2 = 2000\ m$.

$$s_1 = \upsilon_A t_1 \qquad \text{και} \qquad s_2 = \upsilon_S t_1$$

οπότε $$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_S} \qquad \text{και} \qquad \upsilon_A = \upsilon_S \frac{s_1}{s_2} = 4,72\ m/s$$

Ενώ τρέχει, ο σιδηροδρομικός ακούει ήχο συχνότητας

$$f'_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S = 355\ Hz$$

6 ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

6.1 Το φως παρουσιάζει μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με τα άλλα κύματα. Η ταχύτητα διάδοσής του δεν υπακούει στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

6.2 ....ίδιοι..............του φωτός..............ίδια ....

6.3 Αν ένα αντικείμενο είναι ακίνητο ως προς ένα παρατηρητή έχει, γι' αυτόν, μήκος l_0. Το ίδιο αντικείμενο, όταν κινείται ως προς τον παρατηρητή με ταχύτητα c, στη διεύθυνση του μήκους του, έχει μηδενικό μήκος.

6.4 (γ)

6.5 Ο παρατηρητής Σ΄ από άλλο αδρανειακό σύστημα διαπιστώνει ότι ο φάρος ανάβει σε ίσα χρονικά διαστήματα, διαφορετικά όμως σε σχέση με αυτά που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Σ.
[Από τους μετασχηματισμούς Lorentz εύκολα προκύπτει ότι $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ για την χρονική απόσταση δύο γεγονότων που συμβαίνουν στην ίδια θέση. (u η ταχύτητα με την οποία κινείται ο Σ΄ ως προς τον Σ)].

6.6 Δε συμφωνούν. Ο παρατηρητής που ταξιδεύει βρίσκει για το μήκος του διαστημοπλοίου τιμή μεγαλύτερη από αυτή που βρίσκει ο ακίνητος παρατηρητής.

6.7 (α)

6.8 (ε)

6.9 Ο χρόνος ζωής των μιονίων που τους επιτρέπει να διανύσουν 600m πριν διασπαστούν είναι ο χρόνος που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής ως προς τον οποίο τα μιόνια είναι ακίνητα. Για ένα παρατηρητή ακίνητο στη Γη ο χρόνος ζωής των μιονίων είναι σημαντικά μεγαλύτερος γιατί τα μιόνια κινούνται ως προς αυτόν με ταχύτητα 0,99c.

6.10 Έστω ότι το διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα u ως προς τη Γη και ο πύραυλος με υ' ως προς το διαστημόπλοιο. Η ταχύτητα του πυραύλου, ως προς τη Γη, είναι $$\upsilon = \frac{\upsilon' + u}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'}$$

Αν u = 0 τότε $\upsilon = \upsilon'$

Αν u ≠ 0 τότε $\upsilon > \upsilon'$

6.11 Αν $\upsilon' = c$ τότε $\upsilon = \dfrac{\upsilon' + u}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'} = \dfrac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2}c} = c$

6.12 (α), (ε).

6.13 Έλλειψη με το μεγάλο άξονα στη διεύθυνση x και τον μικρό στη διεύθυνση y. Ο μικρός άξονας για τον παρατηρητή που κινείται με το αντικείμενο είναι ίσος με τη διάμετρο του κυκλικού αντικειμένου που αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής.

6.14 Ένας παρατηρητής που κινείται παράλληλα με τα ηλεκτρικά φορτία και με την ίδια ταχύτητα με αυτά τα αντιλαμβάνεται ως ακίνητα. Γι' αυτόν τα φορτία δε δημιουργούν μαγνητικό πεδίο. Για κάποιον άλλο παρατηρητή, ως προς τον οποίο τα φορτία κινούνται, δημιουργούν μαγνητικό πεδίο.

6.15 Από τη σχέση $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$ προκύπτει ότι η ενέργεια ενός σώματος εξαρτάται από την ταχύτητά του υ η οποία όμως δεν είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα. Επομένως η ενέργεια δεν είναι αναλλοίωτη ποσότητα. Η διατήρηση της ενέργειας, ως βασικός νόμος της φύσης, σύμφωνα με τις παραδοχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας ισχύει για όλα τα αδρανειακά συστήματα.

6.16 Οι σχέσεις (6.15) και (6.16) του βιβλίου του μαθητή που δίνουν την ορμή και την ενέργεια ενός σώματος στη σχετικότητα δείχνουν ότι όταν η ταχύτητα τείνει στο c η ορμή και η ενέργεια τείνουν στο άπειρο.

6.17 (γ) Η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου είναι μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου.

6.18 (β)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.19 Ο ακίνητος παρατηρητής στη Γη βλέπει τη μικρή διάσταση του τραπεζιού να έχει το ίδιο μήκος που έχει και για τον παρατηρητή του διαστημοπλοίου γιατί είναι κάθετη στη διεύθυνση της κίνησης.
Η μεγάλη διάσταση του τραπεζιού για τον επίγειο παρατηρητή είναι $l = 10\ m$ ενώ για τον παρατηρητή που βρίσκεται στο διαστημόπλοιο είναι $l_0 = 20\ m$.

Τα μήκη l και l_0 συνδέονται με τη σχέση

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad \text{(συστολή μήκους)}$$

από την οποία βρίσκουμε $u = c\sqrt{1 - \frac{l^2}{l_0^2}} = 0,87c$

6.20 Για τον παρατηρητή στη Γη ο αστροναύτης κοιμήθηκε επί χρόνο

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 35,5\min \quad \text{(διαστολή του χρόνου)}$$

6.21 Για τον ποδηλάτη $\Delta t_0 = 1\ h$

Για το γραφείο $\Delta t = 2\ h$

Οι χρόνοι Δt_0 και Δt συνδέονται με τη σχέση

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{(διαστολή χρόνου)}$$

από την οποία προκύπτει ότι $$u = c\sqrt{1-\frac{(\Delta t_0)^2}{(\Delta t)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

6.22 Το γραφείο στη Γη μετράει χρόνο Δt ενώ ο πιλότος χρόνο Δt_0.

Ισχύει $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Το χρονικό διάστημα Δt είναι μεγαλύτερο από το Δt_0 κατά

$$\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t_0}100\% = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)100\% = 15{,}5\%$$

6.23 $E = mc^2 = 9\times 10^{11}\,J$

6.24 Το διαστημόπλοιο στην ηρεμία έχει ενέργεια $E_0 = mc^2$ και όταν κινείται με $\upsilon = 0{,}5c$ έχει ενέργεια

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-0{,}5^2}}$$

Η ενέργεια που απαιτείται για να επιταχυνθεί το διαστημόπλοιο είναι ίση με τη μεταβολή στην ενέργειά του

$$\Delta E = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-0{,}5^2}} - mc^2 = 1{,}4\times 10^{19}\,J$$

6.25 α) Η ενέργεια που απαιτείται για την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου είναι $\Delta E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(0,9c)^2}{c^2}}} - \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(0,5c)^2}{c^2}}}$. Αν θέσουμε όπου mc^2 το ίσον του (0,511 MeV) βρίσκουμε $\Delta E = 0,582\ MeV$

β) $\Delta E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(0,99c)^2}{c^2}}} - \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(0,9c)^2}{c^2}}} = 2,45\ MeV$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

6.26 $$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{x+0,8ct}{\sqrt{1-\left(\dfrac{-0,8c}{c}\right)^2}} = 367\ km$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t-\dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{t+\dfrac{0,8cx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(-0,8c)^2}{c^2}}} = 1,28\ ms$$

6.27 Το μήκος του διαστημοπλοίου, όταν πετάει με ταχύτητα u, για ακίνητο παρατηρητή στη Γη είναι $l = l_0\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$ (1)

επίσης $u = \dfrac{l}{t}$ οπότε $l = ut$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει $ut = l_0\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$

και τελικά $$u = l_0 c \frac{1}{\sqrt{t^2 c^2 + l_0^2}} = 0,083c$$

6.28 Από τη σχέση $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$ (διαστολή χρόνου)

(όπου Δt ο γήινος χρόνος και Δt_0 ο χρόνος του διαστημοπλοίου)

προκύπτει $\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} = 99,87\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma \approx 100\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma$

δηλαδή 5 εικοσαήμερα.
Στο διάστημα αυτό ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα διπλασιασθεί 5 φορές και ο τελικός του αριθμός θα είναι $2^6 = 64$
Αν το διαστημόπλοιο παρέμενε στη Γη ο χρόνος θα ήταν 1000 μέρες ή 50 εικοσαήμερα δηλαδή το πλήθος των βακτηριδίων θα διπλασιαζόταν 50 φορές και ο τελικός αριθμός τους θα είναι 2^{51}.

6.29 Η ταχύτητα του Α ως προς τον Β είναι

$$\upsilon'_A = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{1 - \dfrac{\upsilon_B}{c^2}\upsilon_A} = \frac{0,8c + 0,6c}{1 + \dfrac{0,6c}{c^2}0,8c} = 0,946c$$

6.30 Η μάζα ηρεμίας του πυρήνα του δευτερίου είναι μικρότερη από το άθροισμα των μαζών ηρεμίας του πρωτονίου και του νετρονίου. Κατά το σχηματισμό του πυρήνα του δευτερίου από τα συστατικά του ελευθερώνεται ενέργεια που είναι ισοδύναμη με το έλλειμμα μάζας.

$$\Delta E = \left(m_p + m_n - m_d\right)c^2 = 3,564 \times 10^{-13} J = 2,22\ MeV$$

6.31 Αν Δt ο χρόνος ζωής των σωματιδίων για έναν παρατηρητή ως προς τον οποίο τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα u και Δt_0 ο χρόνος ζωής για έναν παρατηρητή ως προς τον οποίο τα σωματίδια είναι ακί-

νητα, τότε ισχύει $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ (διαστολή χρόνου)

οπότε $u = c\sqrt{1-\dfrac{\Delta t_0{}^2}{\Delta t^2}} = 2,78\times 10^8 \, m/s$

7 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Μέλαν σώμα

7.1 Αν αναλύσουμε με ένα φασματοσκόπιο το φως του αστέρα που παρατηρούμε με το τηλεσκόπιο θα διαπιστώσουμε ότι, εάν είναι ψυχρότερος από τον Ήλιο, το μήκος κύματος στο οποίο εκπέμπεται το μέγιστο της έντασης της ακτινοβολίας του είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο του Ήλιου.

7.2 Ναι. Παράδειγμα μιας τέτοιας ποσότητας είναι το ηλεκτρικό φορτίο, με quantum το φορτίο του ηλεκτρονίου.

7.3 Τα φωτόνια, σε αντίθεση με τα ηλεκτρόνια, έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας.

7.4 Όχι. Ένα φωτόνιο είναι συνδεδεμένο με ένα μήκος κύματος. Το λευκό φως περιλαμβάνει ένα φάσμα μηκών κύματος.

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

7.5 Το έργο εξαγωγής είναι διαφορετικό για κάθε υλικό.

7.6 (α), (γ).

7.7 (γ).

Φαινόμενο Compton

7.8 ....…….μεγαλύτερο…..…..φωτόνια……..μικρότερης………φωτονίων………..ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.

7.9 α) Από τη σχέση της σκέδασης Compton προκύπτει ότι η αύξηση του μήκους κύματος είναι ή ίδια και στις δύο περιπτώσεις για ίδια γωνία σκέδασης.
β) Στην πρώτη περίπτωση, η ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου είναι

$$K_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_1'} = \frac{\lambda_1' - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_1'} hc = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1\left(\lambda_1 + \Delta\lambda\right)} hc \qquad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, στη δεύτερη περίπτωση, θα είναι

$$K_2 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_2\left(\lambda_2 + \Delta\lambda\right)} hc \qquad (2)$$

Από τη σύγκριση των (1) και (2) προκύπτει ότι αν $\lambda_1 > \lambda_2$ θα είναι
$K_1 < K_2$

7.10 (γ).

Η κυματική φύση της ύλης

7.11 Το μήκος κύματος που αντιστοιχεί σε σωμάτιο ορμής p δίνεται από τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}$, από την οποία φαίνεται ότι το μικρότερο μήκος κύματος αντιστοιχεί στο σωμάτιο a - που έχει τη μεγαλύτερη μάζα - ενώ το μεγαλύτερο μήκος κύματος αντιστοιχεί στο ηλεκτρόνιο.

7.12 Μεγαλώνει στο (α)
Μικραίνει στο (β)
Μένει ίδιο στα (γ), (δ).

7.13 (α)

Αρχή της αβεβαιότητας

7.14 Για τα σώματα του μακρόκοσμου η αβεβαιότητα θέσης είναι μηδαμινή σε σχέση με τις διαστάσεις τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο - Ορμή φωτονίων

7.15 Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein έχουμε

$$K_1 = hf_1 - \varphi \qquad \text{οπότε} \qquad \varphi = hf_1 - K_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - K_1$$

$$K_2 = hf_2 - \varphi = \frac{hc}{\lambda_2} - \left(\frac{hc}{\lambda_1} - K_1\right) = 0,2861 \times 10^{-19}\, J = 0,18\ eV$$

7.16 Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein έχουμε

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = hf - \varphi \qquad \text{οπότε}$$

$$\varphi = hf - K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{2} m\upsilon^2 = 2,0575 \times 10^{-19}\, J = 1,3\ eV$$

7.17 $eV_0 = K$ και $K = hf - \varphi = \dfrac{hc}{\lambda} - \varphi$

άρα $V_0 = \dfrac{hc}{\lambda e} - \dfrac{\varphi}{e} = 1,3\ V$

7.18 Το ορατό φως περιλαμβάνει φωτόνια με ενέργεια

από $hf_{\min}$ έως $hf_{\max}$ ή

από $\dfrac{hc}{\lambda_{\max}}$ έως $\dfrac{hc}{\lambda_{\min}}$ ή

από $1,78\ eV$ έως $3,1\ eV$

Εξαγωγή φωτοηλεκτρονίων έχουμε όταν η ενέργεια των φωτονίων που προσπίπτουν στην κάθοδο είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το έργο εξαγωγής του υλικού. Αυτό συμβαίνει για το Βάριο και το Λίθιο.

7.19 $eV_0 = K$ και $K = hf - \varphi$

οπότε $eV_0 = \dfrac{hc}{\lambda} - \varphi$ και $\varphi = \dfrac{hc}{\lambda} - eV_0 = 1{,}82\ eV$

$eV_0' = \dfrac{hc}{\lambda'} - \varphi$ οπότε $\lambda' = \dfrac{hc}{eV_0' + \varphi} = 382\ nm$

7.20 Όταν στο μέταλλο προσπίπτουν φωτόνια που αντιστοιχούν στη συχνότητα κατωφλίου ισχύει $hf_0 = \varphi$ οπότε $\varphi = 37{,}11 \times 10^{-20} J$

$$K = hf - \varphi = 1{,}2\ eV$$

7.21 Σε χρόνο $\Delta t = 0{,}1 s$ η λάμπα εκπέμπει ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις φωτόνια συνολικής ενέργειας $E = P\Delta t$.

Το μέρος της ενέργειας που φτάνει στον αισθητήρα είναι

$$E_1 = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} E = \frac{r^2 P \Delta t}{4R^2}$$

Ο αριθμός των φωτονίων που φτάνουν στον αισθητήρα

$$n = \frac{E_1}{hf} = \frac{E_1 \lambda}{hc} = \frac{r^2 P \Delta t \lambda}{4R^2 hc} = 6{,}03 \times 10^{13}$$

7.22 Η ορμή του φωτονίου δίνεται από τη σχέση $p = \dfrac{h}{\lambda}$.

Εφόσον η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός η ορμή του δίνεται από τη σχέση $p_e = m_e \upsilon$

οπότε πρέπει $\dfrac{h}{\lambda} = m_e \upsilon$ και $\lambda = \dfrac{h}{m_e \upsilon} = 3{,}64\ nm$

Πρόκειται για φωτόνιο ακτίνων Χ.

7.23 Αν η επιφάνεια είναι απόλυτα ανακλαστική τα φωτόνια ανακλώνται με ορμή ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης με αυτή που προσπίπτουν. Αν p το μέτρο της ορμής ενός προσπίπτοντος φωτονίου το μέτρο της μεταβολής της ορμής του κατά την ανάκλαση είναι $\Delta p = 2p$. Η δύναμη που είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή αυτή της ορμής, άρα και η δύναμη που ασκεί το φωτόνιο στην επιφάνεια (δράση - αντίδραση) έχει μέτρο

$$F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2p}{\Delta t},$$

όπου Δt είναι η διάρκεια της κρούσης.
Αν N είναι ο αριθμός των φωτονίων που προσπίπτουν ανά δευτερόλεπτο στην επιφάνεια, σε χρόνο Δt θα προσπίπτουν $N\Delta t$ φωτόνια και θα ασκούν συνολικά δύναμη

$$F_{o\lambda} = N\Delta t \frac{2p}{\Delta t} = N2p$$

Επομένως $$N = \frac{F_{o\lambda}}{2p} = \frac{F_{o\lambda}}{2\,{}^{h}\!/_{\lambda}} = \frac{F_{o\lambda}\lambda}{2h} = 5\times 10^{26}\,\text{φωτόνια}\,/\,s$$

7.24 Η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα φωτοηλεκτρόνια από τη μεταλλική επιφάνεια είναι

$$K = hf - \varphi$$

Αν V_0 το δυναμικό της επιφάνειας (κάθοδος) σε σχέση με την άνοδο για να μη φτάνουν τα φωτοηλεκτρόνια από την κάθοδο στην άνοδο πρέπει να ισχύει $eV_0 = K$

οπότε $eV_0 = hf - \varphi$ και $$V_0 = \frac{hf - \varphi}{e} = \frac{\frac{hc}{\lambda} - \varphi}{e} = 1{,}2\ V$$

7.25 Για να γίνει φωτοηλεκτρική εκπομπή πρέπει

$$hf \geq \varphi \qquad \text{ή} \qquad \frac{hc}{\lambda} \geq \varphi \qquad \text{ή} \qquad \lambda \leq \frac{hc}{\varphi}$$

οπότε $$\lambda_{\max} = \frac{hc}{\varphi} = 4{,}6\times 10^{-7}\,m = 460\ nm$$

7.26 α) Η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα φωτοηλεκτρόνια από την επιφάνεια είναι

$$K = hf - \varphi \qquad \text{ή} \qquad K = \frac{hc}{\lambda} - \varphi$$

Επίσης $eV_1 = K_1$ οπότε $eV_1 = \dfrac{hc}{\lambda_1} - \varphi$

και $\varphi = \dfrac{hc}{\lambda_1} - eV_1 = 3{,}312 \times 10^{-19} J = 2{,}07\ eV$

β) Όταν στην επιφάνεια προσπέσει ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_2

$$eV_2 = hf_2 - \varphi \quad \text{ή} \quad eV_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi$$

και $V_2 = \dfrac{hc}{e\lambda_2} - \dfrac{\varphi}{e} = 4{,}47\ V$

γ) Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από τη μεταλλική επιφάνεια πρέπει

$$hf - \varphi \geq 0 \ \text{ ή } \ f \geq \frac{\varphi}{h}$$

Η συχνότητα κατωφλιού είναι $f_0 = \dfrac{\varphi}{h} = 5 \times 10^{14}\, Hz$

Φαινόμενο Compton

7.27 Αν λ' το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου και λ το μήκος κύματος του προσπίπτοντος, ισχύει

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

οπότε $$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Για $\varphi = 30^{\circ}$ $\quad \lambda' = 2{,}7\, pm$ και

για $\varphi = 60^{\circ}$ $\quad \lambda' = 3{,}6\, pm$

7.28 Το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει μήκος κύματος

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

για $\varphi = 180^{\circ}$ $\quad \lambda' = 1{,}49 \times 10^{-11} m$

Η μεταβολή στην ενέργεια του φωτονίου είναι

$$\Delta E = hf' - hf = hc\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = -41{,}4\ keV$$

7.29 α) Η ενέργεια ενός φωτονίου είναι

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{οπότε} \qquad \lambda = \frac{hc}{E} = 6,2 \times 10^{-12}\, m$$

β) $$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

οπότε $$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

για $\varphi = 90°$ $$\lambda' = 8,6 \times 10^{-12}\, m$$

γ) $$\lambda'' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

οπότε $$\lambda'' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

για $\varphi = 60^{o}$ $$\lambda'' = 7,4 \times 10^{-12}\, m$$

$$E'' = hf'' = \frac{hc}{\lambda''} = 2,68 \times 10^{-14}\, J = 0,168\ MeV$$

Κυματική φύση της ύλης

7.30 Το μήκος κύματος de Broglie που αντιστοιχεί σ' ένα σωματίδιο είναι

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Για σωματίδια που κινούνται με ταχύτητες αρκετά μικρότερες της ταχύτητας του φωτός $p = m\upsilon$

οπότε $$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$$

α) Για το ηλεκτρόνιο $\lambda = 3,6 \times 10^{-10}\, m$

β) Για το πρωτόνιο $\lambda = 2 \times 10^{-13}\, m$

γ) Για το μπαλάκι $\lambda = 1,65 \times 10^{-39}\, m$

7.31 Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για το ηλεκτρόνιο έχουμε

$$eV = K = \frac{p^2}{2m}$$

οπότε η ορμή που αποκτά το ηλεκτρόνιο είναι

$$p = \sqrt{2meV}$$

Το μήκος κύματος de Broglie για το ηλεκτρόνιο είναι

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = 10^{-10}\,m$$

7.32 α) Η ενέργεια του φωτονίου είναι

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = 1987{,}8 \times 10^{-19}\,J = 1242\ eV$$

β) Το μήκος κύματος de Broglie για το ηλεκτρόνιο είναι

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} \text{ οπότε } p_e = \frac{h}{\lambda_e}$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$K_e = \frac{1}{2} m_e \upsilon_e^2 = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2\lambda_e^2 m_e} = 2{,}41 \times 10^{-19}\,J = 1{,}5\ eV$$

Αρχή της αβεβαιότητας

7.33 Από την αρχή της αβεβαιότητας έχουμε

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

οπότε για την αβεβαιότητα θέσης ισχύει

$$\Delta x \geq \frac{h}{2\pi \Delta p}$$

Η αβεβαιότητα της ορμής είναι $\Delta p = \frac{1}{100} p = \frac{1}{100} m\upsilon$

οπότε $\Delta x \geq \dfrac{h}{2\pi \frac{1}{100} m\upsilon}$ ή $\Delta x \geq 0{,}96\ m$

7.34 Η αβεβαιότητα για το χρόνο εκπομπής του φωτονίου είναι $\Delta t = 10^{-8} s$.

Από τη σχέση $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ βρίσκουμε την αβεβαιότητα στην ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου

$\Delta E \geq \frac{h}{2\pi \Delta t}$ και τελικά $\Delta E \geq 0,66 \times 10^{-7} eV$

7.35 Το μήκος κύματος de Broglie για το σωματίδιο είναι $\lambda = \frac{h}{p}$

Εφόσον η ταχύτητα του σωματιδίου είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός $p = m\upsilon_x$ οπότε $\lambda = \frac{h}{m\upsilon_x}$

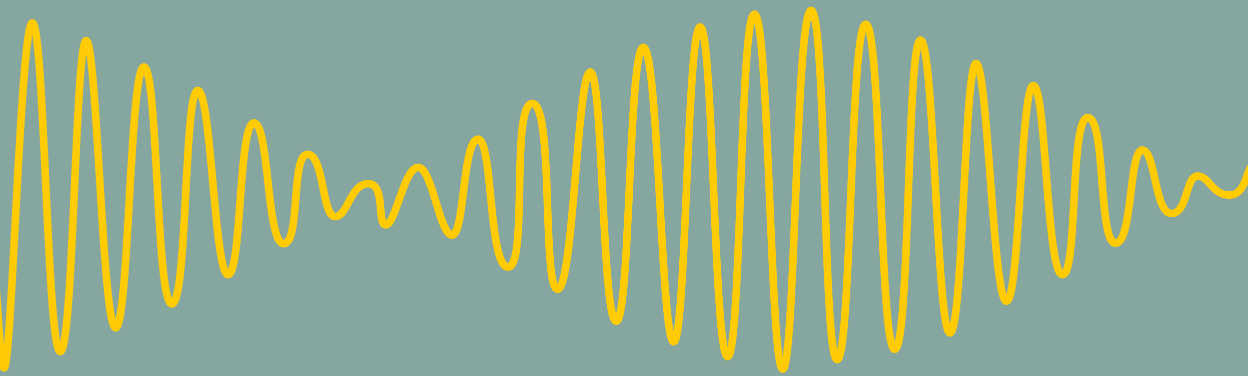
Από την αρχή της αβεβαιότητας έχουμε

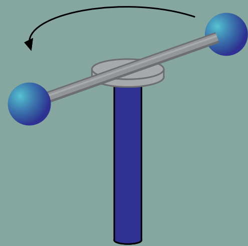
$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ ή $m\Delta\upsilon_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$

Για $\Delta x = \lambda = \frac{h}{m\upsilon_x}$ $\quad m\Delta\upsilon_x \frac{h}{m\upsilon_x} \geq \frac{h}{2\pi}$

οπότε $\quad \Delta\upsilon_x \geq \frac{\upsilon_x}{2\pi}$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ





ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ
22-0283

Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0283
ISBN 978-960-06-2433-5

ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
ινστιτούτο τεχνολογίας
υπολογιστών & εκδόσεων

(01) 000000 0 22 0283 9