ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Βρυώνης   Σπυρίδων Δουκάκης   Βασιλική Καρακώστα
Γεώργιος Μπαραλής   Ιωάννα Σταύρου

Μαθηματικά

Ε΄ Δημοτικού

Βιβλίο Εκπαιδευτικού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Μαθηματικά

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Βιβλίο εκπαιδευτικού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το εκπαιδευτικό υλικό που αναπτύχθηκε για τα Μαθηματικά της Ε΄ τάξης Δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών και Βιβλίο Εκπαιδευτικού) βασίζεται τόσο στο *Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών - Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ)*, όσο και στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ) στο πλαίσιο της Πράξης «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα)-Νέο Πρόγραμμα Σπουδών» για τα Μαθηματικά. Καταβλήθηκε προσπάθεια, ώστε το υλικό, από τη μια μεριά, να διαθέτει τον επιστημονικό προσανατολισμό βάσει της διεθνούς έρευνας και εμπειρίας σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών και, από την άλλη μεριά, να είναι εφαρμόσιμο στη διδακτική πράξη.

Το εκπαιδευτικό υλικό για τα Μαθηματικά της Ε΄ Δημοτικού φιλοδοξεί να διευκολύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες, ώστε να βιώσουν μία πλούσια, ουσιαστική και ενδιαφέρουσα μαθηματική εμπειρία.

Πολύτιμο εργαλείο-βοήθημα προς την κατεύθυνση αυτή μπορεί να αποτελέσει για τον/την εκπαιδευτικό το ***Βιβλίο Εκπαιδευτικού*** χωρίς όμως να συνιστά έναν οδηγό που είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί δίχως καμία παρέκκλιση. Ο/Η επιστήμονας εκπαιδευτικός έχει μια συνολική εικόνα της μαθησιακής πορείας των μαθητών/ριών του/της και είναι σε θέση να σχεδιάζει τη διδασκαλία του/της και με εναλλακτικές τεκμηριωμένες επιστημονικά επιλογές.

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα ιδιαίτερο αντικείμενο μάθησης και, κατά συνέπεια, και διδασκαλίας. Απαιτούν ενεργή και εντατική εμπλοκή στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος και επεξεργασμένο γλωσσικό και συμβολικό κώδικα έκφρασης των νοημάτων που χαρακτηρίζουν την αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα. Μέσα από την κύρια ενασχόλησή τους με την επίλυση προβλημάτων οι μαθητές/ήτριες καλλιεργούν την κριτική, δημιουργική και συνδυαστική τους σκέψη, αναπτύσσουν πολλές και διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης, αποκτούν ευχέρεια στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων σε διαφορετικά πλαίσια και εκφράζουν με σαφήνεια τη σκέψη τους χρησιμοποιώντας κατάλληλο λεξιλόγιο.

Το μαθηματικό περιεχόμενο προσφέρει το περιβάλλον για την ενεργοποίηση των παραπάνω στοιχείων και αποκτά σημασία, στον βαθμό που συμβάλλει στην ισχυροποίησή τους προς την κατεύθυνση της επαν-ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης από τον μαθητή και τη μαθήτρια.

Η μαθηματική σκέψη προϋποθέτει την ικανότητα διαχείρισης των σχέσεων των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μεταξύ τους και τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται σε ένα δίκτυο ιδεών. Ένα τέτοιο δίκτυο δημιουργείται γύρω από μια «θεμελιώδη ιδέα». Για παράδειγμα, στην περίπτωση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, η **«θεμελιώδης ιδέα»** είναι η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων, η οποία στηρίζεται σε μια άλλη «θεμελιώδη ιδέα», ότι, οι αριθμοί, διατηρώντας την αξία τους, μπορεί να αναπαρασταθούν με διάφορους τρόπους, δηλαδή ως κλάσματα, ως δεκαδικοί, ως ποσοστά κ.ά.

2.1. Στόχοι μάθησης και διδασκαλίας στα Μαθηματικά

Κυρίαρχη στόχευση για τη μάθηση και τη διδασκαλία στα Μαθηματικά, σύμφωνα με τα Προγράμματα Σπουδών, είναι ο *μαθηματικός γραμματισμός*, ο οποίος δεν περιορίζεται στη γνώση από την πλευρά του μαθητή και της μαθήτριας μαθηματικών όρων, διαδικασιών και μεθόδων, αλλά επεκτείνεται και στην ικανότητα του μαθητή και της μαθήτριας να εφαρμόζει την ίδια μαθηματική γνώση σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα Μαθηματικά, ο μαθητής/-ήτρια αναλύει, ερμηνεύει και παρεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον.

Η στόχευση αυτή υπακούει στις παρακάτω τρεις αρχές:

- Μετάβαση από τα «μαθηματικά-έτοιμο προϊόν» στη «μαθηματικοποίηση» και στις διαδικασίες που τη συγκροτούν: «διερεύνηση», «συλλογισμός» και «επικοινωνία».
- Αποδοχή της μάθησης μέσω ανακάλυψης ως βασικής διδακτικής αρχής.
- Ανάδειξη της συμπληρωματικότητας της «καθαρής» και της «εφαρμοσμένης» άποψης των Μαθηματικών.

Η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης, δηλαδή της γενίκευσης, της βεβαιότητας, της ακρίβειας και της συντομίας αποτελεί κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας.

2.2. Ειδικότεροι στόχοι μάθησης στα Μαθηματικά

- Η ανάπτυξη κάποιων καταρχήν ***γενικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων*** οι οποίες συνδέονται οριζοντίως με όλα τα γνωστικά αντικείμενα, όπως η ικανότητα *αποτελεσματικής χρήσης* κοινωνικο-πολιτισμικών (γλώσσας, συμβόλων, κειμένων) και ψηφιακών *εργαλείων, αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες, αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας, λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων.*
- Η ανάπτυξη της ***μαθηματικής σκέψης*** που μπορεί να θεωρηθεί με βάση τις τρεις παρακάτω συνιστώσες της: *δημιουργική σκέψη, αναστοχαστική σκέψη, κριτική σκέψη* (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).
- Η ανάπτυξη ***μεθοδολογικών χαρακτηριστικών*** που διέπουν τη διαδικασία ***συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης*** μέσα από τη μαθητεία σε *διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων.*
- Η διαμόρφωση **θετικής στάσης** απέναντι στα Μαθηματικά εκτιμώντας την κοινωνική και την αισθητική τους προοπτική αλλά και τον ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.

2.3. Μαθηματική δραστηριότητα

Προτείνονται καταστάσεις-προβλήματα που επιτρέπουν στον μαθητή και τη μαθήτρια να δράσει με κάποιο κίνητρο ατομικά και συλλογικά και αξιοποιώντας διαφορετικής μορφής εργαλεία, για να επιτύχει μια σειρά μαθηματικών στόχων και διεργασιών. Το είδος των καταστάσεων που προτείνονται στο Βιβλίο Μαθητή αφορούν:

- στη μοντελοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης,
- στην πραγματοποίηση ενός παιχνιδιού,
- στη μαθηματική διερεύνηση μέσα από τη χρήση εργαλείων και πηγών.

Η μαθηματική δραστηριότητα στην οποία τελικά εμπλέκονται οι μαθητές/ήτριες, όπως υποστηρίζεται και από τη σχετική έρευνα, δεν εξαρτάται μόνον από το περιεχόμενό της αλλά και από τη διαχείρισή της στη σχολική τάξη. Συχνά, μια «πλούσια» κατάσταση μπορεί να οδηγήσει σε μια «τετριμμένη» μαθηματική εμπλοκή των μαθητών/ριών όπου η έμφαση δίνεται κυρίως στη χρήση αλγόριθμων και τεχνικών χωρίς την απαιτούμενη κατανόηση. Η τετριμμένη δράση ή η απλή δράση πάνω σε μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι επαρκής, για να χαρακτηριστεί μια δραστηριότητα μαθηματική. Είναι απαραίτητη η αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, η εύρεση κανόνων, ο αναστοχασμός πάνω στη δράση και η γενίκευσή της. Μια μαθηματική δραστηριότητα επιτρέπει πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, παρουσίασης και επεξήγησης διαδικασιών και εννοιών. Προϋπόθεση για τη διατήρηση της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών/ριών σε υψηλό γνωστικό επίπεδο είναι ο/η εκπαιδευτικός να μπορεί να διακρίνει τα στοιχεία εκείνα που συνιστούν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα. Αυτή η ικανότητα συσχετίζεται τόσο με τη μαθηματική, όσο και την παιδαγωγική γνώση του/της, αναφορικά με το περιεχόμενο που διαχειρίζεται στη σχολική τάξη και την εμπλοκή του/της στην εκπαιδευτική διαδικασία μέσα από φθίνουσα καθοδήγηση προς τους μαθητές και τις μαθήτριες στον βαθμό που χρειάζεται, ώστε να διατηρεί ενεργό το ενδιαφέρον των μαθητών/ριών.

Ας σημειωθεί ότι ο/η εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα, εναλλακτικά, να αντικαταστήσει κάποιες από τις δραστηριότητες που έχουν συμπεριληφθεί στο Βιβλίο Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών), εφόσον κρίνει ότι υπηρετούν αποτελεσματικότερα τους στόχους της διδασκαλίας στην τάξη του/της. Επίσης, μπορεί να εμπλουτίσει το υλικό με πρόσθετες δραστηριότητες για τη διερεύνηση, την κατανόηση αλλά και την εμπέδωση των εννοιών και των διαδικασιών. Ενδεικτικά, στο *Νέο Πρόγραμμα Σπουδών* για την Ε΄ Δημοτικού έχουν συμπεριληφθεί 26 δραστηριότητες από όλα τα μαθηματικά περιεχόμενα.

Στο *Νέο Πρόγραμμα Σπουδών*, επίσης, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές/ήτριες σε ***συνθετικές εργασίες***. Η συνθετική εργασία δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά να συνεργαστούν και να ασχοληθούν με μιαν αυθεντική δραστηριότητα που συνδέεται με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα καθώς και με καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Οι εργασίες αυτές αποτελούν έναυσμα για τη δημιουργική εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών στον σχεδιασμό νέων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, που θα επιτρέπουν τη συμμετοχή των μαθητών/ριών σε μιαν πλούσια μαθηματική δραστηριότητα.

2.4. Επιλογή και χρήση εργαλείων

Η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ. χειραπτικών μοντέλων, τεχνολογικών εργαλείων, λογισμικού κ.λπ.) δεν διασφαλίζει την κατασκευή της γνώσης. Από τη μια πλευρά, πολλά παιδιά εμφανίζουν δυσκολίες στη χρήση εργαλείων (ακόμη και σε απλές περιπτώσεις χρήσης π.χ. του γνώμονα ή του μοιρογνωμονίου), από την άλλη πλευρά, συνήθως, τα εργαλεία δεν ενσωματώνονται λειτουργικά στη διαδικασία μάθησης. Οι μαθητές/ήτριες χρειάζεται να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία όπως και τις κατάλληλες υπολογιστικές στρατηγικές, προκειμένου να εκτελούν συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες και να επιλύουν προβλήματα. Με τα εργαλεία επεκτείνουν τις ικανότητές τους να διερευνούν και να αναλύουν μαθηματικές έννοιες, να εξερευνούν μαθηματικές κανονικότητες, να κατανοούν γεωμετρικές σχέσεις καλλιεργώντας ή αμφισβητώντας τη διαίσθησή τους.

Οι μαθητές/ήτριες κυρίως με τα χειραπτικά υλικά (π.χ. ράβδοι κλασμάτων), αναπαριστάνουν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα υλικά, εικόνες, διαγράμματα (π.χ. αριθμογραμμή), γραφήματα, πίνακες, σύμβολα. Η χρήση αναπαραστάσεων τους/τις βοηθά να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να εκφράσουν τη σκέψη τους, να διατυπώσουν επιχειρήματα, και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις.

Είναι σημαντικό οι μαθητές/ήτριες να αποκτήσουν σταδιακά την ικανότητα της μετάβασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο και να επιλέγουν το εκάστοτε κατάλληλο σύστημα αναπαράστασης μιας κατάστασης.

2.5. Ρόλος εκπαιδευτικού

Ο/Η εκπαιδευτικός δημιουργεί το κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον, ώστε οι μαθητές/ήτριες να συμμετέχουν ενεργά σε δραστηριότητες που έχουν νόημα γι' αυτούς/ές. Κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας ο/η εκπαιδευτικός στοχεύει στην κατανόηση των μαθηματικών διαδικασιών και όχι στην απομνημόνευση. Λαμβάνει υπόψη τις ιδιαιτερότητες του κάθε παιδιού, δημιουργεί ευκαιρίες για εξατομικευμένη και διαφοροποιημένη μάθηση και παρέχει χρόνο για εμπέδωση. Δημιουργεί ένα μαθησιακό περιβάλλον αλληλεπίδρασης, ενώ, παράλληλα, χρησιμοποιεί τη μαθηματική πρόκληση, για να ενθαρρύνει την ενεργοποίηση της μαθηματικής σκέψης και κατ' επέκταση τη διανοητική δράση.

Οι μαθητές/ήτριες μαθαίνουν αποδοτικότερα, όταν τους δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουν οι ίδιοι μαθηματικές ιδέες μέσω επίλυσης προβλημάτων, καθώς η εμπλοκή τους στη συγκεκριμένη διαδικασία τούς βοηθά να "κατασκευάσουν" προοδευτικά τη μαθηματική τους γνώση.

Ο/Η εκπαιδευτικός έχει την ευχέρεια να αφιερώσει περισσότερο χρόνο σε κεφάλαια, ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης του/της, να αντικαταστήσει κάποια διερευνητική δραστηριότητα με μιαν εναλλακτική, που σχετίζεται π.χ. με το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον των μαθητών/ριών και να εκτιμήσει ποιες από τις στρατηγικές - τεχνικές που προτείνονται είναι καταλληλότερες για το μαθητικό δυναμικό της τάξης του/της.

2.6. Αξιολόγηση

Ο/Η εκπαιδευτικός σχεδιάζει την **αξιολόγηση**, δίνοντας έμφαση στον **διαμορφωτικό της χαρακτήρα** και συνδέοντάς τη με τη διδασκαλία, ώστε να είναι πλήρως ενσωματωμένη στην τάξη του/της και να συμβάλλει ουσιαστικά στην ποιοτική μάθηση.

Ο σκοπός της αξιολόγησης είναι να παράγει πληροφορίες που συνεισφέρουν στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης και υποστηρίζουν τη λήψη εκπαιδευτικών αποφάσεων από τους μαθητές και τις μαθήτριες, τους/τις εκπαιδευτικούς, τους γονείς και τη διοίκηση.

Ο/Η εκπαιδευτικός, σύμφωνα και με τις αρχές της περιγραφικής αξιολόγησης, από τη μία, θέτει γενικά κριτήρια «Σκέφτομαι - Δημιουργώ - Αποφασίζω» στην τάξη και στο σχολείο, ώστε να παρακολουθεί τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές/ήτριες διαχειρίζονται την πληροφορία, επιλύουν προβληματικές καταστάσεις, λαμβάνουν αποφάσεις και δημιουργούν και, από την άλλη, θέτει γενικά κριτήρια «Δρω - Συμμετέχω - Συνεργάζομαι» στην τάξη και στο σχολείο, ώστε να παρακολουθεί τις δεξιότητες και ικανότητες που άπτονται της προσωπικής και κοινωνικής μάθησης και ανάπτυξης, όπως η συμμετοχή, η συνεργασία, η ανάληψη πρωτοβουλιών και η αυτονομία των μαθητών/ριών (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2017).

Με τον τρόπο αυτόν δίνεται η δυνατότητα στον/στην εκπαιδευτικό να κατανοήσει σε βάθος αυτά που γνωρίζουν οι μαθητές/ήτριες, ώστε να μπορεί να λάβει παιδαγωγικές αποφάσεις, βασισμένος/η σε πραγματικά δεδομένα. Χρησιμοποιεί πολλαπλά μέσα και σχέδια μέτρησης καθώς και σύγχρονες μορφές αξιολόγησης, όπως τον φάκελο εργασιών μαθητή/ήτριας και την αξιολόγηση δραστηριοτήτων. Έτσι απώτερος στόχος είναι να δίνεται προσοχή και έμφαση στο πώς σκέφτονται οι μαθητές/ήτριες στα μαθηματικά, στις προσεγγίσεις και στρατηγικές που χρησιμοποιούν και όχι σε αυτές που πιθανώς να αγνοούν.

Κατά την αξιολόγηση είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπόψη ότι κάθε παιδί έχει διαφορετική μαθησιακή πορεία ανάλογα με τις εμπειρίες του, τα ενδιαφέροντά του και τις πρότερες γνώσεις του. Επομένως πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η δυναμική και η μοναδικότητα του μαθητή και της μαθήτριας. Η αξιολόγηση είναι ένα εργαλείο στα χέρια του/της εκπαιδευτικού και μια συνεχής διαδικασία για τη βελτίωση της μάθησης και την ολόπλευρη ανάπτυξη του μαθητή και της μαθήτριας. Μέσω της αξιολόγησης ο/η εκπαιδευτικός συστηματικά παρέχει στους μαθητές/ήτριες ευκαιρίες για την κατανόηση εννοιών, διαδικασιών και την απόκτηση δεξιοτήτων και στάσεων (π.χ. συμμετοχή, συνεργασία, ανάληψη πρωτοβουλιών, αυτονομία επικοινωνία, λήψη αποφάσεων). Η αξιολόγηση χρειάζεται να έχει παρωθητικό χαρακτήρα, να ενισχύει και να ενθαρρύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες (Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, 2003).

Ο/Η εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να έχει αποφασίσει εκ των προτέρων τι θέλει να αξιολογήσει, με ποιους τρόπους θα το αξιολογήσει και πώς θα χρησιμοποιήσει τα τεκμήρια που θα συλλέξει. Έχοντας αποσαφηνίσει αυτά τα ζητήματα μπορεί να επιλέξει από ποικίλες μεθόδους αξιολόγησης, ανάλογα με τον στόχο της αξιολόγησης, το γνωστικό αντικείμενο ή τη διαδικασία που στοχεύει να αξιολογήσει αλλά και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μεθόδου (ΙΕΠ, 2017).

Προτείνονται έξι μέθοδοι αξιολόγησης χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι και οι μοναδικές που μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατά την αξιολόγηση. Οι μέθοδοι αυτές είναι: α) η αυτοαξιολόγηση, β) η ετεροαξιολόγηση, γ) η παρατήρηση, δ) οι γραπτές δοκιμασίες, ε) ο φάκελος μαθητή/ήτριας και στ) οι συζητήσεις.

Ο ρόλος της αξιολόγησης δεν πρέπει, πάντως, να περιορίζεται στη μέτρηση στο τέλος του μαθήματος, με μια γραπτή δοκιμασία, των επιδόσεων των μαθητών/ριών.

Ο/Η εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί διαφοροποιημένα τις διάφορες μεθόδους αξιολόγησης σύμφωνα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών/ριών της τάξης του/της που αφορούν στις εμπειρίες, το γνωστικό υπόβαθρο, τις μαθησιακές δυσκολίες, τις διαπολιτισμικές και γλωσσικές διαφορές. Στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών και στον Οδηγό για τον εκπαιδευτικό προτείνονται εργαλεία αξιολόγησης που είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν από τον/την εκπαιδευτικό:

α. για την αξιολόγηση της διδακτικής διαδρομής που υλοποιεί,

β. για την αξιολόγηση των στρατηγικών – προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές/ήτριες και της εξελικτικής πορείας μάθησής τους (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Είναι σημαντικό να αναδειχτεί ότι η αξιολόγηση αποτελεί έναν από τους βασικούς παράγοντες που μπορούν να ενισχύσουν τη διαμόρφωση μιας θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά, εκτιμώντας την κοινωνική και την αισθητική τους προοπτική αλλά και το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού (Κουλουμπαρίτση, 2018).

3. Η ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Το διδακτικό πακέτο για τα Μαθηματικά της Ε΄ Δημοτικού αποτελείται από το Βιβλίο Μαθητή (ΒΜ, 2 τεύχη), το Τετράδιο Εργασιών (ΤΕ, 2 τεύχη) και το Βιβλίο Εκπαιδευτικού (ΒΕ, 1 τεύχος).

Συνολικά, το ΒΜ αποτελείται από 60 δισέλιδα κεφάλαια. Από αυτά, τα 8 κεφάλαια είναι επαναληπτικά. Όλα τα κεφάλαια του ΒΜ συνοδεύονται από τα αντίστοιχα δισέλιδα στο ΤΕ. Για όλα σχεδόν τα κεφάλαια μπορεί να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες, κάτι για το οποίο θα αποφασίσει ο/η εκπαιδευτικός της τάξης.

Οι βασικές θεματικές ενότητες στις οποίες αναπτύσσονται τα μαθηματικά περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (στόχοι) είναι: Αριθμοί-Άλγεβρα, Χώρος και Γεωμετρία-Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική - Πιθανότητες) και ανταποκρίνονται πλήρως στο *ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ* και στο *ΝΠΣ*.

Οι παραπάνω βασικές θεματικές περιοχές, όπως ονομάζονται στο ΝΠΣ, (θεματικές ενότητες, σύμφωνα με το *ΑΠΣ*) χωρίζονται στο Βιβλίο Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού στις ακόλουθες 8 ενότητες:

- Αριθμοί-Άλγεβρα (Αριθμοί): Ενότητες 1, 2, 3, 5
- Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική - Πιθανότητες): Ενότητα 4
- Αριθμοί-Άλγεβρα (Άλγεβρα): Ενότητα 6

- Χώρος και Γεωμετρία - Μετρήσεις (Χώρος και Γεωμετρία) : Ενότητα 7
- Χώρος και Γεωμετρία - Μετρήσεις (Γεωμετρία - Μετρήσεις): Ενότητα 8

Η *επίλυση προβλήματος* δεν αποτελεί ξεχωριστή θεματική ενότητα δεδομένου ότι αποτελεί τον πυρήνα της διαδικασίας ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Οι μαθητές/ήτριες μαθαίνουν αποτελεσματικότερα, όταν τους δίνεται η ευκαιρία **να διερευνήσουν οι ίδιοι/ες μαθηματικές ιδέες μέσω επίλυσης προβλημάτων,** καθώς η εμπλοκή τους στη συγκεκριμένη διαδικασία τους/τις βοηθά να «κατασκευάσουν» προοδευτικά τη μαθηματική τους γνώση, εμβαθύνοντας εννοιολογικά σε αυτήν και συνειδητοποιώντας τη λειτουργική της πτυχή αλλά και την πολιτισμική και ιστορική της διάσταση. Αναγνωρίζοντας αυτόν τον κεντρικό ρόλο της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, η σχετική βιβλιογραφία προτείνει α) τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω της επίλυσης προβλήματος αλλά και για την επίλυση προβλημάτων και β) την ανάδειξη της επίλυσης προβλήματος σε κεντρικό στόχο των Προγραμμάτων Σπουδών για τα Μαθηματικά με έμφαση στις στρατηγικές επίλυσής του.

4. ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ (ΒΜ)

Στο ΒΜ εμφανίζονται 4 ήρωες, στην ηλικία των παιδιών της Ε΄ τάξης, η Αγγελική, η Δανάη, ο Αντρέι και ο Νίκος. Οι ήρωες υποστηρίζουν τη σεναριακή δομή του κεφαλαίου, προτείνουν διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης μιας δραστηριότητας ή συμμετέχουν στις δραστηριότητες με την παρουσία τους.

4.1. Μαθηματικός τίτλος

Στο πάνω μέρος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν:

1η σελίδα: α) χρωματικό πλαίσιο που υποδηλώνει τη θεματική περιοχή στην οποία εντάσσεται το κεφάλαιο, β) ο αύξων αριθμός του κεφαλαίου και γ) ο τίτλος του που διατυπώνει τη βασική μαθηματική έννοια την οποία πραγματεύεται.

2η σελίδα: α) το ίδιο χρωματικό πλαίσιο, β) ο τίτλος του κεφαλαίου και γ) ο αριθμός της ενότητας στην οποία ανήκει το κεφάλαιο.

4.2. Διερεύνηση

Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν και συζητούν τις μαθηματικές ιδέες, όπως αυτές προκύπτουν μέσα από δραστηριότητες με καταστάσεις που μπορεί να κινήσουν το ενδιαφέρον τους. Οι δραστηριότητες ενσωματώνουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των μαθηματικών, στηρίζονται στην προηγούμενη γνώση των μαθητών/ριών και σε προβλήματα που αποτελούν ερευνητικά αντικείμενα διάφορων επιστημών.

4.3. Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Σε χρωματικό πλαίσιο διατυπώνονται με ακρίβεια, σαφήνεια αλλά ταυτόχρονα με απλά λόγια, οι βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες που προέκυψαν από τη διερεύνηση στις δραστηριότητες της πρώτης σελίδας.

4.4. Παραδείγματα

Τα παραδείγματα για μεγαλύτερη διευκόλυνση καταγράφονται σε αντιστοίχιση με τις βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες.

4.5. Εφαρμογές

Εφαρμογή των βασικών μαθηματικών εννοιών και διεργασιών στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων. Υπόδειξη στρατηγικών επίλυσης ή τεχνικών που δύσκολα θα ανακάλυπταν ο μαθητής και η μαθήτρια χωρίς υποστήριξη.

4.6. Αναστοχασμός

Οι προβληματισμοί που τίθενται στους αναστοχασμούς αποτελούν σύντομη ανακεφαλαίωση των εννοιών, τις οποίες οι μαθητές/ήτριες διδάχτηκαν στο κεφάλαιο. Παράλληλα, δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές και τις μαθήτριες να αναστοχαστούν πάνω στις μαθηματικές διαδικασίες με έναν διαφορετικό τρόπο από αυτόν που ακολουθούν, όταν λύνουν ασκήσεις, βοηθώντας τους να γίνουν πραγματικοί «ιδιοκτήτες» και πραγματικές «ιδιοκτήτριες» της μάθησής τους, να αναπτύξουν τη μαθηματική διαίσθηση και να καλλιεργήσουν την κριτική σκέψη.

5. ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΩΝ (ΤΕ)

5.1. Ασκήσεις και προβλήματα

Ασκήσεις εμπέδωσης και προβλήματα για ατομική και ομαδική εργασία.

5.2. Διερεύνηση - Επέκταση

Εφαρμογή των νέων μαθηματικών εννοιών σε πραγματικές προβληματικές καταστάσεις. Οι μαθητές/ήτριες συνεργάζονται, για να επιλύσουν θέματα της καθημερινής ζωής ή από διαφορετικούς τομείς των επιστημών χρησιμοποιώντας μαθηματικά. Με αφορμή τη συγκεκριμένη δραστηριότητα διερευνάται και επεκτείνεται η γνώση περαιτέρω, ώστε οι μαθητές/ήτριες να κατανοήσουν σε βάθος το θέμα που εξετάζουν και να προσεγγίσουν τη γνώση κυρίως με βιωματικό τρόπο.

6. ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ (ΒΕ)

6.1. Εισαγωγικό μέρος

Περιλαμβάνει την Εισαγωγή, τις βασικές αρχές στις οποίες στηρίζεται το εκπαιδευτικό υλικό και τη δομή του.

6.2. Θεωρητικό μέρος ενοτήτων

Περιλαμβάνει:

Α. Το θεωρητικό μέρος και κάποια σημαντικά ερευνητικά δεδομένα για το μαθηματικό περιεχόμενο της συγκεκριμένης ενότητας καθώς και το προτεινόμενο εκπαιδευτικό υλικό.

Β. Τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών και το νέο περιεχόμενο της κάθε ενότητας.

Γ. Παρουσιάζονται, επίσης, οι δυσκολίες που ενδέχεται να συναντήσουν οι μαθητές/ήτριες στη συγκεκριμένη ενότητα καθώς και οι συνηθέστερες παρανοήσεις. Προτείνονται τεχνικές για την αντιμετώπιση των συγκεκριμένων δυσκολιών και επισημαίνονται κύρια σημεία που πρέπει να προσεχτούν ιδιαίτερα στη διδασκαλία.

Δ. Εποπτικό υλικό που μπορεί να αξιοποιηθεί ως μέσον διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών και επίλυσης προβλημάτων.

6.3. Η δομή κάθε κεφαλαίου

6.3. 1. Ταυτότητα κεφαλαίου

Στην αρχή κάθε κεφαλαίου αναγράφονται ο αύξων αριθμός του και ο τίτλος του.

6.3. 2. Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα - Στόχοι

Αναφέρονται οι στόχοι από το *ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ* και τα αντίστοιχα με αυτούς προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα από το *ΝΠΣ*, τα οποία μπορεί να λειτουργήσουν συμπληρωματικά.

6.3. 3. Εποπτικό υλικό - Διδακτικά εργαλεία

Γίνεται αναφορά στο εποπτικό υλικό που είναι σημαντικό να υπάρχει στην τάξη, ώστε να αξιοποιηθεί ως μέσο διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών και επίλυσης προβλημάτων.

6.3. 4. Ψηφιακά εργαλεία

Γίνεται αναφορά σε ψηφιακά εργαλεία που υπάρχουν και είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν ως μέσα διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών και επίλυσης προβλημάτων. Με αφετηρία τη διερευνητική δραστηριότητα οι μαθητές/ήτριες έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τα προτεινόμενα ψηφιακά εργαλεία με σκοπό την επεξήγηση μιας έννοιας ή την απαραίτητη εμβάθυνση για την κατανόησή της. Κάθε μικροπείραμα μπορεί να καλύπτει μια έννοια στενά ή σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πεδίο όπου εμπλέκονται συνδεδεμένες μαθηματικές έννοιες. Στις ενότητες του ΒΜ χρησιμοποιούνται επιλεκτικά με τη μορφή **μικροπειραμάτων** ψηφιακά εργαλεία από τον Εθνικό Συσσωρευτή Εκπαιδευτικού Περιεχομένου (http://photodentro.edu.gr/) που περιλαμβάνει τα μικροπειράματα από το Ψηφιακό Σχολείο (http://dschool.edu.gr/), από την πλατφόρμα Αίσωπος (http://aesop.iep.edu.gr)αλλά και από πηγές όπως το https://phet.colorado.edu/el/ *Σημείωση: Για τη λειτουργία τους, ίσως χρειαστεί η εγκατάσταση των απαραίτητων προσθέτων και η χρήση συμβατού με την εφαρμογή φυλλομετρητή.*

6.3. 5. Περιγραφή εργασιών

Σε κάθε κεφάλαιο της ενότητας αναλύονται οι διδακτικές προσεγγίσεις για τις δραστηριότητες διερεύνησης που παρουσιάζονται στο ΒΜ και δίνονται κατάλληλες επεξηγήσεις, όπου χρειάζεται, για τις εφαρμογές και τον αναστοχασμό. Παράλληλα, παρουσιάζονται τρόποι επίλυσης ορισμένων ασκήσεων και προβλημάτων που περιλαμβάνονται στο ΤΕ και ως προς τα σημεία εκείνα για τα οποία πιθανόν απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή. Οι διευκρινίσεις παρέχονται ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας. Κατά συνέπεια, στις περιπτώσεις στις οποίες δεν εντοπίζεται καμία δυσκολία, δεν δίνονται διευκρινίσεις.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Θεματική ενότητα: Αριθμοί- Άλγεβρα

Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Οι φυσικοί αριθμοί

Α. Θεωρητικό μέρος

Οι φυσικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που μετράμε με τα δάχτυλά μας και αποτελούν, αναφορικά με τα Μαθηματικά, το πρώτο πράγμα που διδάσκεται κάθε παιδί. Οι αριθμοί με τους οποίους μετράμε αρχίζουν από το 1. Για τους αρχαίους Έλληνες οι φυσικοί αριθμοί άρχιζαν με το 2, που αποτελούσε μια “πολλαπλότητα”. Κατά την ιστορική εξέλιξη της μελέτης των φυσικών αριθμών οι μαθηματικοί κατέληξαν ότι το 1 είναι ο πρώτος φυσικός αριθμός, από τον οποίο μπορούν να δημιουργηθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί με την πρόσθεση του κατάλληλου πλήθους από 1. Η επινόηση του ψηφίου μηδέν προέκυψε με την ανάπτυξη των συστημάτων αρίθμησης θέσης, οπότε και δημιουργήθηκε η ανάγκη ύπαρξης ενός ειδικού συμβόλου που να εξασφαλίζει στους άλλους αριθμούς τη σωστή τους θέση. Ο ορισμός του μηδενός ως αριθμού αποδίδεται στον Ινδό μαθηματικό Βραχμαγκούπτα το 628 μ.Χ.

Σήμερα, σύνολο των φυσικών αριθμών ονομάζεται το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών, ακριβώς επειδή οι φυσικοί είναι οι πιο συνηθισμένοι και πολυχρησιμοποιημένοι αριθμοί, ενώ ένα από τα πλεονεκτήματα του να αρχίζουμε τους φυσικούς αριθμούς από το μηδέν είναι ότι μας διευκολύνει στον ορισμό των τελεστών που χρησιμοποιούν φυσικούς αριθμούς (Bentley, 2010).

Για την ονομασία και γραφή των αριθμών αναπτύχθηκε σε όλο τον κόσμο μεγάλη ποικιλία από συστήματα αρίθμησης. Το Ινδοαραβικό σύστημα, που δημιουργήθηκε στην Ινδία και, στη συνέχεια, υιοθετήθηκε και διαδόθηκε από τους Άραβες, χρησιμοποιεί τα εξής δέκα σύμβολα: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Αυτά από μόνα τους είναι οι πρώτοι εννέα φυσικοί αριθμοί και το 0 που είναι το σύμβολο για το μηδέν. Ο επόμενος αριθμός σχηματίζεται με τη μετακίνηση του συμβόλου για το ένα (1) προς τα αριστερά και εισάγοντας το σύμβολο για το μηδέν. Αυτό δίνει τον αριθμό 10, που σημαίνει μία δεκάδα και καμία μονάδα. Οι διψήφιοι αριθμοί σχηματίζουν ένα κανονικό μοτίβο αριθμών 11, 12, 13, 14, ..., 19, 20, 21, ..., 98, 99 ως τις εννέα δεκάδες και εννέα μονάδες ή ενενήντα εννέα μονάδες. Σε ορισμένες ευρωπαϊκές γλώσσες οι ονομασίες για τους αριθμούς δεν είναι εντελώς κανονικές, για παράδειγμα, στην ελληνική γλώσσα το ένδεκα και το δώδεκα. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης είναι ότι μπορεί να επεκταθεί σε πολύ μεγάλους αριθμούς. Όσο πολλά ψηφία κι αν χρησιμοποιηθούν, όταν σε κάθε θέση είναι το ψηφίο 9, ο επόμενος αριθμός θα έχει ένα επιπλέον ψηφίο, που θα είναι το ψηφίο 1 στην επιπλέον θέση και μηδενικά σε όλες τις άλλες θέσεις (Hopkins, Pope & Pepperell, 2013).

Η έννοια του αριθμού είναι σύνθετη και πολύπλευρη και η κατανόησή της προϋποθέτει την κατανόηση πολλών διαφορετικών εννοιών, σχέσεων και δεξιοτήτων. Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού αποτελεί το θεμέλιο των αριθμητικών ιδεών και πραγματοποιείται σταδιακά ως το αποτέλεσμα της διερεύνησης των αριθμών, της νοερής τους απεικόνισης σε ποικίλα περιβάλλοντα και της αλληλοσυσχέτισής τους. Η αίσθηση του αριθμού, αναφορικά με τους φυσικούς αριθμούς, που καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος του Προγράμματος Σπουδών του δημοτικού σχολείου, αναφέρεται στην αίσθηση του σχετικού μεγέθους των αριθμών, τη σύνδεση των καθημερινών εννοιών με αυτούς, την ευέλικτη χρήση τους σε εκτιμήσεις και τη γνώση του αποτελέσματος των πράξεων με μεγάλους αριθμούς. Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και των υπολογιστικών δεξιοτήτων με πολλαπλές μεθόδους καθώς και των στρατηγικών εκτίμησης προϋποθέτουν την κατανόηση της αξίας θέσης των ψηφίων. Βασικές συνιστώσες για την κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου είναι η κατανόηση των ομαδοποιήσεων με δεκαδική βάση, με πρωταρχική την ιδέα της δεκάδας, τόσο ως μεμονωμένης οντότητας, όσο και ως συνόλου με 10 μονάδες κ.ο.κ., των προφορικών και των γραπτών ονομάτων.

Πέρα από τις βασικές έννοιες του συστήματος αρίθμησης και την ανάγνωση και γραφή των αριθμών, συνεχές στοιχείο της διδασκαλίας θα πρέπει να είναι δραστηριότητες που αφορούν στο μέγεθος του αριθμού σε σχέση με κάποιο άλλον, τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο, την ευέλικτη χρήση του αριθμού σε εκτιμήσεις. Για τους πολυψήφιους αριθμούς θα πρέπει να γενικευτεί η ιδέα της ομαδοποίησης με δεκαδική βάση, καθώς και η ιδέα της αναπαραγωγής του μοτίβου Μονάδες – Δεκάδες – Εκατοντάδες, για κάθε τρία ψηφία προς τα αριστερά (Ε-Δ-Μ Μονάδων, Ε-Δ-Μ Χιλιάδων, Ε-Δ-Μ Εκατομμυρίων κ.λπ.).

Επειδή είναι δύσκολο να βρεθούν ή να αναπαρασταθούν μοντέλα για τους πολυψήφιους αριθμούς, προτείνεται η πραγματοποίηση δραστηριοτήτων με ενδιαφέρουσες ποσότητες που θα αποτελούν διαρκή σημεία αναφοράς και θα δίνουν νόημα στους αριθμούς που συναντώνται στην καθημερινή ζωή των μαθητών/ριών. Για τον σκοπό αυτόν προτείνονται διερευνητικές δραστηριότητες διάρκειας αρκετών εβδομάδων, στις οποίες θα χρησιμοποιούνται, για παράδειγμα, συλλογές από μολύβια, κουμπιά, καπάκια, σχέδια με κουκκίδες, με τη μορφή εργασιών στο σπίτι ή ομαδικών εργασιών κ.λπ. Προκειμένου οι μαθητές/ήτριες να βελτιώσουν τη χρήση των αυτοσχέδιων στρατηγικών και των αλγόριθμων για τους φυσικούς αριθμούς, μεγάλη σημασία έχει η καλλιέργεια της ικανότητας διάσπασης και συνδυασμού των φυσικών αριθμών με ευελιξία (Van de Walle, 2005).

Β. Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να είναι σε θέση να χειρίζονται με σχετική ευχέρεια τους φυσικούς αριθμούς ως το 1.000.000.

Αντίστοιχες δραστηριότητες επαναλαμβάνονται στο Βιβλίο Μαθηματικών Ε΄ Δημοτικού, αλλά επεκτείνονται στη διαχείριση πολυψήφιων αριθμών μέχρι το 1 τρισεκατομμύριο, ώστε οι μαθητές/ήτριες να οδηγηθούν προοδευτικά στην κατανόηση των δομικών και των λειτουργικών χαρακτηριστικών του συνόλου των φυσικών αριθμών. Ενδείκνυται η αξιοποίηση δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών. Επίσης, οι μαθητές/ήτριες στρογγυλοποιούν φυσικούς αριθμούς, όπου είναι δυνατόν, και συζητούν για την αξία της στρογγυλοποίησης στην καθημερινή ζωή.

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Οι πιθανές δυσκολίες σχετίζονται με την πιθανή ελλιπή κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου, οι οποίες μπορεί να αντιμετωπιστούν με δραστηριότητες που αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης των αριθμών (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Δ. Εποπτικό υλικό

τετραγωνισμένο χαρτί, υλικό δεκαδικής βάσης, αριθμογραμμή, αριθμομηχανή τσέπης

Κεφάλαιο 1: Υπενθύμιση - Α΄ μέρος

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Το κεφάλαιο αυτό δίνει στους/στις μαθητές/ήτριες τη δυνατότητα να θυμηθούν γνώσεις των προηγούμενων τάξεων, ενώ επιτρέπει στον/στην εκπαιδευτικό να ελέγξει αν και κατά πόσο έχουν επιτευχθεί μερικοί από τους γενικούς στόχους στις γνωστικές περιοχές: αριθμοί και πράξεις.

Συγκεκριμένα, διερευνάται από τον/την εκπαιδευτικό αν οι μαθητές/ήτριες είναι ικανοί/ές:

- να διαβάζουν, να γράφουν και να διατάσσουν αριθμούς ως το 1.000.000,
- να διερευνούν και να εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών των τεσσάρων πράξεων,
- να εφαρμόζουν τους αλγορίθμους της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, καθώς και της διαίρεσης με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρέτη,
- να προσθέτουν και να αφαιρούν δεκαδικούς αριθμούς,
- να αναγνωρίζουν τους κλασματικούς, τους δεκαδικούς και τους συμμιγείς αριθμούς, καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους.

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Αριθμοί: Η μέτρηση μπορεί να γίνει με τη γραφή των αριθμών στον πίνακα και προτείνεται ο προσδιορισμός της θέσης του ψηφίου που αλλάζει και της αξίας του: 999.980, 999.981, ..., 999.989, 999.990, 999.991, ..., 999.999, 1.000.000.

- Ο μεγαλύτερος πενταψήφιος αριθμός είναι 99.999.
- Ο μικρότερος τετραψήφιος αριθμός είναι 1.000.
- Ο αμέσως προηγούμενος είναι 198.089 και ο αμέσως επόμενος 198.091.
- Από τη σύγκριση προκύπτει: 345.180 >43.854, 94.894 < 98.494, 890.182 = 890.182.

Πράξεις: Στις πράξεις της αριστερής στήλης συμπληρώνονται τα ψηφία που λείπουν, οπότε μπορεί να επισημανθεί ότι στους κάθετους αλγορίθμους ξεκινάμε από δεξιά εκτός από τη διαίρεση.

Πρόσθεση

	2	9	7	5
+	6	2	0	8
	9	1	8	3

Αφαίρεση

1	5	0	9	4
-	6	3	1	7
	8	7	7	7

Πολλαπλασιασμό

		1	1	5
		x	1	6
		6	9	0
+	1	1	5	
	1	8	4	0

Διαίρεση τέλεια

	7	8	3	0	1	8	
-	7	2		4	3	5	
		6	3				
	-	5	4				
			9	0			
		-	9	0			
				0			

Διαίρεση ατελής

	7	8	5	2	1	8	
-	7	2			4	3	6
		6	5				
	-	5	4				
		1	1	2			
	-	1	0	8			
				4			

Στους οριζόντιους αλγορίθμους οι μαθητές/ήτριες προτρέπονται να υπολογίσουν νοερά. Χρήσιμο είναι να γίνει συζήτηση σχετικά με τους τρόπους υπολογισμού που ακολούθησαν. Τα αποτελέσματα των οριζόντιων αλγόριθμων είναι τα εξής:

- προσθέσεις: 12.000, 486.000, 288.135,
- αφαιρέσεις: 1.900, 638.000, 340.010,
- πολλαπλασιασμοί: 1.000.000, 1.000.000, 1.000.000, 600.000, 90.000,
- διαιρέσεις τέλειες: 120.000, 40.000, 48.000, 3.000, 40 και
- διαίρεση ατελής: υπόλοιπο 2, γιατί 2.502=5x500+2.

Στους κάθετους αλγορίθμους προτείνεται να γίνει συζήτηση σχετικά με το γιατί στην πρόσθεση και την αφαίρεση οι αριθμοί γράφονται, έτσι ώστε οι Μονάδες του ενός να είναι κάτω από τις Μονάδες του άλλου κ.λπ. Τα αποτελέσματα των κάθετων αλγόριθμων είναι τα εξής:

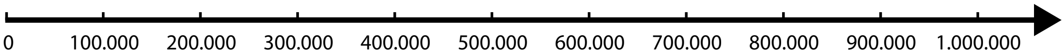
- πρόσθεση: 18.964,
- αφαίρεση: 654.196,
- πολλαπλασιασμοί: 7.182, 11.124,
- διαιρέσεις τέλειες: 14.150, 5.964 και
- διαίρεση ατελής: πηλίκο 6.428 υπόλοιπο 5.

Κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί: Προτείνεται να αξιοποιηθούν οι αναπαραστάσεις της αριστερής στήλης, να συζητηθεί η κλασματική μονάδα και η ισοδυναμία $\frac{1}{10} = 0{,}1$. Επίσης, αντικείμενο συζήτησης μπορεί να αποτελέσει το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος των δεκαδικών αριθμών.

Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς: Τα αποτελέσματα είναι τα εξής: προσθέσεις οριζόντιες: 5,8, 4,9, 4,81, 4,801, πρόσθεση κάθετη: 42,96, αφαιρέσεις οριζόντιες: 3,8, 4,7, 4,79, 4,7999 και αφαίρεση κάθετη: 76,37.

Συμμιγείς αριθμοί: Μπορεί να γίνει συζήτηση για τις βασικές μονάδες μέτρησης του μήκους, της μάζας, του χρόνου και τις υποδιαιρέσεις τους, καθώς επίσης και για άλλα γνωστά μεγέθη: 1 μ. 2δεκ. 4 εκ. 8 χιλ., 3κ. 600γρ., 1 ώρ. 30λ.

Αριθμογραμμή: Επισημαίνεται η αρχή της αριθμογραμμής και η διαμέρισή της.



Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι αριθμοί που δείχνουν τα κυβάκια είναι 1.249, 2.294, 3.066, 3.880.

2η Άσκηση: Προτείνεται να γίνει συζήτηση σχετικά με την αξία θέσης του ψηφίου 0 σε διαφορετικές θέσεις του ακέραιου και του δεκαδικού μέρους των δεκαδικών αριθμών. Οι αριθμοί της 1ης στήλης είναι οι εξής: εννέα, ενενήντα, εννιακόσια, εννέα δέκατα, εννέα εκατοστά και της 2ης: εννέα χιλιάδες, ενενήντα χιλιάδες, εννιακόσιες χιλιάδες, εννέα ακέραιος και εννιακόσια εννιά χιλιοστά, ενενήντα ακέραιος και εννιά εκατοστά.

3η Άσκηση: Δ: 4, Μ: 8, ΔΧ: 3, ΧΜ: 6, Ε: 2, ΕΧ: 9

4η άσκηση: Τα ψηφία που λείπουν είναι στην 1η σειρά: 6ΔΧ, 3ΜΧ, 5Ε, 4Δ, στη 2η σειρά: 63.547 και στην 3η σειρά: 3.000, 40, 7

5η και 6η άσκηση: 36<360<3.609<36.009, 6.142>6.124>4.126>2.146.

7η άσκηση:

	2	**5**	9	9
+	**6**	6	**0**	7
	9	2	0	**6**

5	6	**1**	9	0
-	6	2	**0**	5
4	9	9	8	**5**

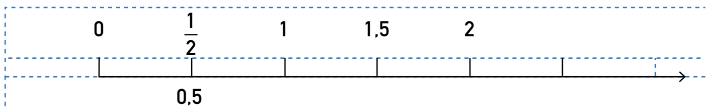
			8	**2**	9
			X	3	**5**
		4	1	**4**	5
+	2	4	8	7	
	2	9	0	1	5

	6	5	4	1		**7**	
-	6	3			9	3	**4**
		2	4				
	-	2	**1**				
			3	**1**			
		-	2	8			
				3			

8η άσκηση: Προτείνεται να συζητηθεί κάθε αναπαράσταση.

9η άσκηση: __ έτ. __μήν. __ημ.

10η άσκηση: Για την κατασκευή της αριθμογραμμής και της ισοδιαμέρισής της, οι μαθητές/ήτριες χρησιμοποιούν τον διαβαθμισμένο κανόνα.



Κεφάλαιο 2: Υπενθύμιση - Β΄ μέρος

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Το κεφάλαιο αυτό δίνει στους μαθητές και στις μαθήτριες τη δυνατότητα να ανακαλέσουν στη μνήμη τους γνώσεις των προηγούμενων τάξεων, ενώ επιτρέπει στον/στην εκπαιδευτικό να ελέγξει αν και κατά πόσο έχουν επιτευχθεί οι γενικοί στόχοι στις γνωστικές περιοχές: Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις.

Συγκεκριμένα, διερευνάται από τον/την εκπαιδευτικό αν οι μαθητές/ήτριες είναι ικανοί/ές:

- να διακρίνουν παράλληλες, κάθετες και τεμνόμενες ευθείες,
- να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά,
- να υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδό ορθογωνίου και τετραγώνου,
- να μετρούν μεγέθη χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης.

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Προτείνεται να αξιοποιηθεί η αριστερή εικόνα και να γίνει συζήτηση για τα εξής: σημείο, ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, τετράγωνο (γεωμετρικό σχήμα), κύβος (γεωμετρικό στερεό).

Η σειρά της αντιστοίχισης των ευθειών είναι: τεμνόμενες, παράλληλες, κάθετες.

Γεωμετρικά σχήματα: τετράγωνο, ορθογώνιο, πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβος.

Καθένα έχει τέσσερις πλευρές, τέσσερις γωνίες και τέσσερις κορυφές.

Γεωμετρικά στερεά: κύβος, σφαίρα, κύλινδρος, κώνος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πυραμίδα.

Μετρήσεις: Προτείνεται να γίνει συζήτηση για τα διάφορα μεγέθη και τις βασικές μονάδες μέτρησής τους, καθώς και των συντομογραφιών τους.

μήκος→μ., επιφάνεια→τ.μ., χρόνος →ώρ., βάρος→κ., χωρητικότητα→λ. και χιλιοστά του λίτρου, χαρτονομίσματα.

Μετράμε το μήκος: Περίμετρος τετραγώνου 8 εκ. και ορθογωνίου 12 εκ.

Μετράμε την επιφάνεια: Εμβαδό τετραγώνου 4τ.εκ. και ορθογωνίου 8 τ.εκ.

Μετράμε τον χρόνο: Το ρολόι της εικόνας 2 ώρες και 45 λεπτά μετά θα δείχνει 7:45 και πριν από 1 ώρα και 15 λεπτά έδειχνε 3:45.

Οι καλοκαιρινές μας διακοπές είναι 15 ημ. του Ιουνίου + 31ημ. του Ιουλίου + 31ημ. του Αυγούστου +10 ημ. του Σεπτεμβρίου= 87 ημέρες.

Μετράμε το βάρος: Γράφουμε το βάρος σε κιλά. Μετράμε με ακρίβεια το βάρος μας σε κιλά και γραμμάρια.

Μετράμε τη χωρητικότητα: Ένα μεγάλο μπουκάλι νερού έχει, συνήθως, χωρητικότητα 1,5 λίτρο κι ένα μικρό 500 χιλιοστά του λίτρου ή μισό λίτρο.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση:

- πλάγιο παραλληλόγραμμο: τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες,
- ορθογώνιο: παραλληλόγραμμο που έχει μία ορθή γωνία,

- τετράγωνο: παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος,
- ρόμβος: παραλληλόγραμμο που έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες.

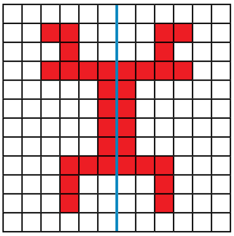
Προτείνεται η άσκηση να αξιοποιηθεί από τον/την εκπαιδευτικό με τους/τις μαθητές/μαθήτριες στην τάξη.

1ο Πρόβλημα: Δίνεται ενδεικτικά η λύση:

5εκ. + 5 εκ. = 10 εκ., 26-10=16εκ., 16:2=8εκ., Ε=8x5=40 τ.εκ.

2ο Πρόβλημα: α) 3 μ. β) 30 δεκ. γ) 300 εκ. δ) 3.000 χιλ.

3ο Πρόβλημα:



Α.Π=34 εκ. Ε=16 τ.εκ.

Β. Π=56 εκ. Ε=32 τ.εκ.

4ο Πρόβλημα: Π τετρ.=12εκ., επομένως Π παρ/μου= 2x12=24 εκ. 3εκ.+3εκ.=6εκ., 24 – 6εκ.=18εκ. 18 : 2 = 9 εκ. το πλάτος του παραλληλογράμμου, άρα η περίμετρος ολόκληρου του σχήματος είναι 3+9+3+9+3+3=30εκ.

5ο Πρόβλημα: αφαίρεση συμμιγών:... έτ. ... μήνες ... ημέρες, -1798 έτ. 4 μήνες 8 ημέρες.

6ο Πρόβλημα: Η Μαρία είναι 58 – 29=29 ετών και ο αδερφός της 29 – 6 = 23 ετών.

7ο Πρόβλημα: 1χ. των 10 € + 8χ. των 5 €, 2χ. των 10 € + 6χ. των 5 €, 3χ. των 10 € + 4χ. των 5 €, 4χ. των 10 € + 2χ. των 5 €.

Κεφάλαιο 3: Πώς λύνουμε ένα πρόβλημα

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να εξοικειωθούν με τις διεργασίες επίλυσης προβλήματος,
- να αναγνωρίζουν, να επισημαίνουν και να αναλύουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων,
- να αναφέρουν παραδείγματα στρατηγικών κι εργαλείων επίλυσης προβλήματος,

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Η δραστηριότητα αυτή περιλαμβάνει τα βασικά βήματα επίλυσης προβλήματος:

1. Την ανάλυση του προβλήματος, δηλαδή τον προσδιορισμό των ζητουμένων: *Πόσες μπάλες του βόλεϊ και πόσες του ποδοσφαίρου πούλησε το κατάστημα; και των δεδομένων: 200 μπάλες συνολικά, 80 μπάλες μπάσκετ, μπάλες βόλεϊ διπλάσιες του ποδοσφαίρου.*

2. Την ανάπτυξη κι επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών και εργαλείων για την επίλυσή του. Οι μαθητές/ήτριες προτρέπονται να αναφέρουν στρατηγικές και εργαλεία που μπορεί να αξιοποιηθούν, για να λύσουν το πρόβλημα.

	Στρατηγικές		**Εργαλεία**
√	Παρουσιάζω το πρόβλημα	√	ζωγραφιά
	Δοκιμάζω, ελέγχω, αναθεωρώ		πίνακας
	Αναζητώ ένα μοτίβο		κατάλογος
	Επιχειρηματολογώ		διάγραμμα
	Εργάζομαι αντίστροφα		θεατρικό παιχνίδι
	Λύνω ένα πιο απλό πρόβλημα		αντικείμενο

3. Την αναζήτηση των μαθηματικών σχέσεων που συνδέουν τα δεδομένα με τα ζητούμενα: *Οι μπάλες του βόλεϊ και του ποδοσφαίρου είναι 200-80=120. Επειδή οι μπάλες του βόλεϊ είναι διπλάσιες από τις μπάλες του ποδοσφαίρου, σε μία μπάλα ποδοσφαίρου και μία μπάλα βόλεϊ αντιστοιχούν τρεις μπάλες ποδοσφαίρου. Επομένως, οι μπάλες του ποδοσφαίρου είναι 120 : 3 = 40 και οι μπάλες του βόλεϊ είναι 2 x 40 = 80.*

4. Την απάντηση: *Το κατάστημα πούλησε 80 μπάλες του βόλεϊ και 40 μπάλες του ποδοσφαίρου*

5. Τον αναστοχασμό, δηλαδή τον έλεγχο των αποτελεσμάτων και των διεργασιών που ακολουθήθηκαν: *Το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι λογικό, γιατί 80+40+80=200 μπάλες συνολικά. Οι πράξεις που κάναμε είναι σωστές και η απάντησή μας σαφής.*

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Χρήσιμο είναι να γίνει συζήτηση γενίκευση τόσο αναφορικά με άλλα προβλήματα, όσο και με αυτά της καθημερινής μας ζωής, καθώς και σχετικά με το αν και κατά πόσο στρατηγικές και εργαλεία που αναφέρονται στα παραδείγματα μπορεί να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Αν υπάρχει χρόνος, μπορεί να ζητηθεί από τα παιδιά να αναφέρουν παραδείγματα προβλημάτων για κάθε στρατηγική και εργαλείο από αυτά που αναγράφονται στους πίνακες με τα παραδείγματα.

Εφαρμογή: Το ίδιο πρόβλημα λύνεται με αναπαράσταση σε τετραγωνισμένο χαρτί.

Αναστοχασμός

1. Η απάντηση του Νίκου είναι λανθασμένη, γιατί το 80 και το 40 είναι αριθμοί, ενώ θα έπρεπε να αναφέρει ότι είναι μπάλες και, συγκεκριμένα, ποδοσφαίρου και βόλεϊ.
2. Σε κάθε πρόβλημα γράφουμε τη λύση και την απάντησή του, γιατί αυτές αποτελούν βασικά βήματα για την επίλυσή του.
3. Η άποψη της Αγγελικής δίνει τη δυνατότητα να γίνει συζήτηση σχετικά με τη γενίκευση των διεργασιών επίλυσης προβλημάτων στην καθημερινή ζωή, καθώς και να αναπτυχθεί θετική στάση στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Τετράδιο Εργασιών

1ο Πρόβλημα: ενδεικτική λύση

Οι μαθητές/ήτριες, με βάση τις «Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες», συμπληρώνουν τις φράσεις που αποτελούν τα βασικά βήματα επίλυσης προβλήματος:

1. Διαβάζουμε και διακρίνουμε: *Τι προσπαθούμε να βρούμε;* Τι γνωρίζουμε;
2. Σχεδιάζουμε πώς θα λύσουμε το πρόβλημα.
3. Λύνουμε το πρόβλημα.
4. Απαντάμε στο πρόβλημα.
5. Αναστοχαζόμαστε.

2ο Πρόβλημα: Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι δύο από τις στρατηγικές που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος είναι η παρουσίασή του με ζωγραφιά και η δημιουργία πίνακα.

Για να καθίσουν τα 23 παιδιά και η Δανάη, χρειάζονται 11 τραπέζια.

Πλήθος τραπεζιών	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Πλήθος παιδιών	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

Διερεύνηση – Επέκταση: Μία ενδεικτική λύση είναι η δοκιμή και η χρήση πίνακα. Αν το πλήθος των ποδηλάτων ήταν ίδιο με το πλήθος των αυτοκινήτων, τότε οι ρόδες θα ήταν:

Πλήθος ποδηλάτων	Πλήθος αυτοκινήτων	Πλήθος ροδών
12	12	2x12+4x12=24+48=72
13	11	2x13+4x11=26+44=70
14	10	2x14+4x10=28+40=68
15	9	2x15+4x9=30+36=66
16	8	2x16+4x8=32+32=64
17	7	2x17+4x7=34+28=62

Επομένως ο Νίκος έχει στη συλλογή του 17 ποδήλατα και 7 αυτοκίνητα.

Κεφάλαιο 4: οι φυσικοί αριθμοί

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες:

- να διαβάζουν, να γράφουν και να αναγνωρίζουν αριθμούς σε ποικιλία πλαισίων,
- να διερευνούν τη σχέση των φυσικών αριθμών με τους κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς,
- να αναγνωρίζουν και να κάνουν χρήση της ακολουθίας των φυσικών αριθμών,
- να διακρίνουν την ακολουθία των άρτιων και των περιττών φυσικών αριθμών.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

αριθμομηχανή

Ψηφιακά εργαλεία

http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03363/

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3758?locale=el

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3751?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

Με αφορμή την εικόνα και τις λεζάντες γίνεται διάκριση των φυσικών αριθμών από τους κλασματικούς, τους δεκαδικούς και τους αρνητικούς ακεραίους, ενώ γίνεται ξεχωριστή αναφορά στο ψηφίο 0, αφού είναι ο πρώτος αριθμός του συνόλου των φυσικών αριθμών, αλλά δεν είναι ο αριθμός με τον οποίο αρχίζουμε να μετράμε. Μετράμε ως εξής: 1, 2, 3, ... και όχι 0, 1, 2, 3, ...

1. Στη συνέχεια οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να αναγνωρίσουν ότι κάθε αριθμομηχανή έχει δέκα ψηφία με αριθμούς, δηλαδή όσα είναι και τα ψηφία με τα οποία γράφουμε τους αριθμούς.
2. Τα ψηφία που έχουν σβηστεί στην αριθμομηχανή είναι 5, 7 και 0, οπότε ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός που μπορεί να γραφτεί είναι ο 9.864.321 και ο μικρότερος 1.234.689.

Ο μικρότερος φυσικός αριθμός είναι το 0, ενώ δεν υπάρχει μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, γιατί για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ο επόμενός του.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Με τις διερευνητικές δραστηριότητες οι μαθητές/ήτριες έχουν τη δυνατότητα να συζητήσουν ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί, τι εκφράζουν, πώς σχηματίζονται, ποιοι είναι οι άρτιοι και ποιοι οι περιττοί, καθώς επίσης και ότι το 0 είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός.

Εφαρμογή: Οι φυσικοί, οι άρτιοι και οι περιττοί αριθμοί, παρουσιάζονται ως αριθμητικά μοτίβα, τα οποία οι μαθητές/ήτριες καλούνται να αναγνωρίσουν, να περιγράψουν και να συμπληρώσουν προσδιορίζοντας τη σχέση κάθε αριθμού όρου του μοτίβου με τον προηγούμενο και τον επόμενό του. Η σχέση αυτή είναι:

α. 1= 0+1, 2=1+1, 3=2+1, 5= 4 +1

β. 2=0+2, 4= 2+2, 6=4+2, 8=6+2

γ. 3= 1+2, 5=3+2, 7=5+2, 9=7+2

Αναστοχασμός

1. Ο επόμενος φυσικός αριθμός του 1.000 είναι ο 1.001.
2. Ο προηγούμενος αριθμός του 10.000.000 είναι ο 9.999.999.
3. Η Αγγελική έχει δίκιο. Για παράδειγμα ο επόμενος αριθμός του 999.999, που είναι εξαψήφιος, είναι το 1.000.000, που είναι επταψήφιος.
4. Για να βρούμε τον προηγούμενο ενός φυσικού αριθμού αφαιρούμε το 1 και για να βρούμε τον επόμενό του, προσθέτουμε το 1.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι προηγούμενοι φυσικοί αριθμοί είναι αντίστοιχα: 78.900, 479.168, 8.367.029, 63.156.998, 999.999.999 και οι επόμενοι: 78.902, 479.170, 8.367.031, 63.157.000, 1.000.000.001.

2η Άσκηση: Οι μικρότεροι φυσικοί αριθμοί είναι αντίστοιχα: 10, 1.000, 100.000.000 και οι μεγαλύτεροι: 999, 999.999, 9.999.999.999. Παρατηρούμε ότι οι μικρότεροι φυσικοί αριθμοί με συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων αποτελούνται από τα ψηφία 1 και 0, ενώ οι μεγαλύτεροι από το ψηφίο 9.

3η Άσκηση: Οι απαντήσεις είναι: 963.000, ένα εκατομμύριο διακόσιες χιλιάδες, 3.100.000.

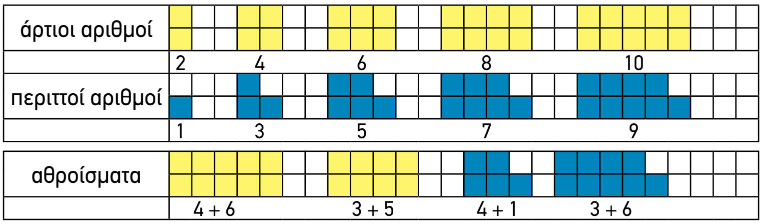
4η Άσκηση: Τα αριθμητικά μοτίβα είναι:

α. 175, 186, 197, 208, 219, 230, 241, 252.

β. 350.086, 375.086, 400.086, 425.086, 450.086, 475.086, 500.086, 525.086.

Πρόβλημα: Η αρίθμηση έχει γίνει με βάση τους άρτιους και τους περιττούς. Ο μεγαλύτερος άρτιος στον χάρτη είναι 36 στην οδό Σωκράτους και ο μικρότερος περιττός είναι 39 στην ίδια οδό.

Διερεύνηση-Επέκταση: Κάθε άρτιος σχηματίζεται από τον προηγούμενό του με την προσθήκη δύο τετραγώνων κατακόρυφα δεξιά. Κάθε περιττός σχηματίζεται από τον προηγούμενό του με την προσθήκη δύο τετραγώνων κατακόρυφα αριστερά.



α. άρτιος + άρτιος = άρτιος, β. περιττός + περιττός = άρτιος, γ. άρτιος + περιττός = περιττός

Κεφάλαιο 5: Αξία θέσης ψηφίου στους φυσικούς αριθμούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διερευνούν τη σχέση μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του,
- να αναλύουν και να συνθέτουν φυσικούς αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους,
- να διακρίνουν τα βασικά χαρακτηριστικά του δεκαδικού συστήματος (ότι είναι σύστημα θέσης, έχει βάση το 10 και ότι 10 μονάδες μιας τάξης μας κάνουν μία μονάδα της αμέσως επόμενης τάξης).

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

κάρτες με ψηφία, άβακας, πίνακας αξίας θέσης

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8663?locale=el
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3745?locale=el
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3755?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

Στο πρόβλημα σχετικά με τον πληθυσμό της Κίνας γίνεται συζήτηση για το πώς μπορούμε να διαβάζουμε και να γράφουμε πολυψήφιους αριθμούς. Τα διαφορετικά ψηφία στον αριθμό που δείχνει τον πληθυσμό της Κίνας είναι τα εξής τρία: 0, 1 και 4.

Για να τοποθετήσουμε έναν αριθμό σε έναν πίνακα αξίας θέσης εργαζόμαστε ως εξής:

Ο πίνακας αξίας θέσης είναι χωρισμένος σε τριψήφια τμήματα κι επισημαίνεται ότι οι αριθμοί χωρίζονται από τα δεξιά προς τα αριστερά. Κάθε τριψήφιο τμήμα αποτελεί μία ομάδα που από αριστερά προς τα δεξιά είναι: Μονάδες, Χιλιάδες, Εκατομμύρια και Δισεκατομμύρια. Κάθε τριψήφια ομάδα αποτελείται από δεξιά προς τα αριστερά από τις ίδιες υποομάδες: Μονάδες, Δεκάδες και Εκατοντάδες.

Το ψηφίο με τη μεγαλύτερη αξία είναι το 1 που βρίσκεται στη θέση των Μονάδων Δισεκατομμυρίων. Το ψηφίο 4 βρίσκεται στη θέση των Εκατοντάδων Εκατομμυρίων ενώ σε όλες τις επόμενες θέσεις τα ψηφία είναι 0, οπότε το άθροισμα της αξίας των ψηφίων σε Μονάδες είναι :

1x1.000.000.000+4x100.000.000+0x10.000.000+0x1.000.000+0.100.000+0x10.000+0x1.000+ 0x100+0x10+0=1.000.000.000+400.000.000+0+0+0+0+0+0+0+0=1.400.000.000.

Ο πληθυσμός της Ινδίας το 2050 θα είναι 300.000.000 κάτοικοι περισσότεροι από τον πληθυσμό της Κίνας τον Ιούνιο του 2016, οπότε μπορεί να υπολογιστεί είτε με πρόσθεση πολυψήφιων αριθμών είτε με την πρόσθεση στη θέση των Εκατοντάδων Εκατομμυρίων των ψηφίων 4+3=7. Αυτό ισχύει για το συγκεκριμένο παράδειγμα, οπότε επισημαίνεται η θέση στην οποία γίνεται η αλλαγή.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Προτείνεται να δοθεί έμφαση στα παραδείγματα και να γραφτούν στον πίνακα. Το πρώτο παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί, για να γίνει συζήτηση σχετικά με τη διαφορετική αξία, ανάλογα με τη θέση του ψηφίου μέσα στον αριθμό, που εδώ είναι το ίδιο σε τέσσερις διαφορετικές θέσεις. Σκόπιμο είναι να δοθεί έμφαση στην ανάλυση του αριθμού, αφού θα ζητηθεί στο ΤΕ.

Εφαρμογή: Ο κανόνας του αριθμητικού μοτίβου της αξίας θέσης από αριστερά προς τα δεξιά είναι x10. Η αξία κάθε θέσης είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από την αμέσως προηγούμενή της και δέκα φορές μικρότερη από την αμέσως επόμενή της.

Αναστοχασμός

1. Β, **2.** Β, **3.** Ο Αντρέι έγραψε τον αριθμό 3.450.006.000, ενώ ο αριθμός είναι 3.000.450.006. Τα λάθη που έκανε είναι: α. στη θέση των εκατομμυρίων έγραψε τις Χιλιάδες, β. στη θέση των Χιλιάδων έγραψε τις Μονάδες και γ. στη θέση των Μονάδων έγραψε τα Εκατομμύρια (0).

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση:

ΜΧ: 9.000 ΔΕ: 90.000.000 ΜΕ: 5.000.000 ΜΔ: 6.000.000.000

2η Άσκηση: Ο πίνακας αξίας θέσης προτείνεται να συμπληρωθεί κατά τον τρόπο με τον οποίο είναι συμπληρωμένος στο ΒΜ.

αριθμός α:9.000.096.021 9x1.000.000.000 + 9x10.000+6x1.000+2x10+1

αριθμός β: 106.003.002 1x100.000.000+6x1.000.000+3x1.000+2x1

Η ανάλυση των αριθμών μπορεί να γίνει και ως εξής:

9.000.000.000+90.000+6.000+20+1, 100.000.000+6.000.000+3.000 +2

3η Άσκηση: Οι αριθμοί είναι:

30.630.709 τριάντα εκατομμύρια εξακόσιες τριάντα χιλιάδες επτακόσια εννέα

86.020.001 ογδόντα έξι εκατομμύρια είκοσι χιλιάδες ένα

4η άσκηση: Η άσκηση είναι ανοιχτού τύπου, δηλαδή έχει πολλές σωστές απαντήσεις. Στις θέσεις των ψηφίων, εκτός από αυτές που δίνονται στην εκφώνηση της άσκησης, μπορεί να μπει οποιοδήποτε ψηφίο. _ ._ _ 7. _ _ 2 . _ _ _

5η Άσκηση: 36.457.182, 26.458.182, 27.457.182, 26.457.282, 26.557.182, 26.457.192, 26.467.182, 26.457.183.

6η Άσκηση: Οι μεγαλύτεροι άρτιοι είναι 998, 9.998, 99.998, 999.998, 9.999.998 και οι μικρότεροι περιττοί 101, 1.001, 10.001, 100.001, 1.000.001.

1ο Πρόβλημα: Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1,3,8 και 9, ο μεγαλύτερος δεκαψήφιος είναι 9.999.999.831 και ο μικρότερος εννιαψήφιος είναι 111.111.389.

Διερεύνηση – Επέκταση

α. Στην πρώτη αριθμογραμμή συμπληρώνονται οι φυσικοί αριθμοί ανά 100 ως το 1.000. Στη δεύτερη τα κουτιά είναι λιγότερα και συμπληρώνονται οι αριθμοί: 100.000.000, 300.000.000, 500.000.000, 700.000.000 και 900.000.000.

β. Η κατασκευή των αριθμογραμμών είναι ελεύθερη αναφορικά με το πού θα τελειώνει καθεμιά, καθώς και ποια μπορεί να είναι η διαμέρισή της, οπότε απαραίτητο είναι να παρουσιαστούν οι διαφορετικοί τρόποι συμπλήρωσής της από τα παιδιά.

Κεφάλαιο 6: Σύγκριση και διάταξη φυσικών αριθμών

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να συγκρίνουν και να διατάσσουν φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τα σύμβολα σύγκρισης,
- να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ακολουθία των φυσικών αριθμών.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

κάρτες με ψηφία, άβακας, πίνακας αξίας θέσης

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8663

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

α. Με τη διερευνητική αυτή δραστηριότητα οι μαθητές/ήτριες καλούνται, αρχικά, να διαβάσουν τους πολυψήφιους αριθμούς του πίνακα, να συμπληρώσουν τον πίνακα αξίας θέσης με βάση το κεφάλαιο 5 και, στη συνέχεια, να τους τοποθετήσουν σε αυτόν. Με βάση τα ερωτήματα που τίθενται, γίνεται συζήτηση σχετικά με το πώς μπορεί να προσδιοριστεί ο μεγαλύτερος και ο μικρότερος από τους παραπάνω φυσικούς αριθμούς, καθώς και αναφορικά με το πώς μπορεί να υπολογιστεί η διαφορά δύο φυσικών αριθμών.

Εκατομμύρια			Χιλιάδες			Μονάδες		
Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ
	2	0	7	1	5	6	6	4
		1	5	1	5	3	8	6
				6	1	6	8	5
		1	0	9	4	7	5	0
			2	1	1	2	7	0

1. Οι περισσότεροι τουρίστες που επισκέφτηκαν την Ελλάδα το 2015 προέρχονταν από την Ευρώπη 20.715.664.
2. Οι λιγότεροι τουρίστες προέρχονταν από την Αφρική 61.685.
3. Οι τουρίστες που επισκέφτκαν την Ελλάδα το 2015 ήταν 420.636 περισσότεροι από αυτούς που επισκέφτηκαν την Ασία σε σύγκριση με την Αμερική.

Στη συνέχεια, γίνεται συζήτηση σχετικά με τη σύγκριση φυσικών αριθμών με: α) διαφορετικό πλήθος ψηφίων και β) με ίσο πλήθος ψηφίων.

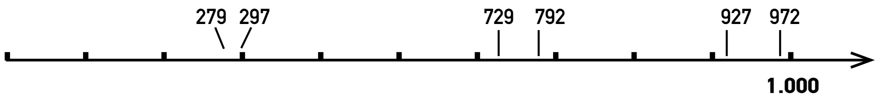
β. Η διάταξη των αριθμών, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, είναι:

61.685 < 211.970 < 1.094.750 < 1.515.386 < 20.715.664.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Χρήσιμο είναι να επισημανθεί ότι η μέτρηση του πλήθους των ψηφίων προηγείται, προκειμένου να γίνει η σύγκριση δύο φυσικών αριθμών, όπως προκύπτει και από τα παραδείγματα.

Εφαρμογή: Οι τριψήφιοι αριθμοί είναι : 279, 297, 729, 792, 927 και 972.

Η σειρά τους από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο είναι: 279 <297< 729< 792< 927< 972.



Μετά την τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή μπορεί να γίνει σχολιασμός αναφορικά με την απόσταση που έχουν μεταξύ τους τα ζεύγη με το ίδιο ψηφίο στη θέση των Εκατοντάδων, π.χ. το 279 με το 297 είναι πιο κοντά από ότι το 729 και το 792.

Αναστοχασμός

1. Η Αγγελική χρησιμοποίησε το σύμβολο < αντί για > ή άρχισε να συγκρίνει ένα ένα τα ψηφία των φυσικών αριθμών χωρίς προηγουμένως να μετρήσει το πλήθος των ψηφίων καθενός.

2. Το 2.398.726 > 2.397.726, γιατί οι αριθμοί έχουν ίδιο πλήθος ψηφίων, ίδια τα τρία πρώτα ψηφία και στη θέση των Μονάδων Χιλιάδων ο πρώτος αριθμός έχει το ψηφίο 8, που είναι μεγαλύτερο από το ψηφίο 7, στην ίδια θέση στον δεύτερο αριθμό.

3. Ο Νίκος κάνει λάθος, γιατί στη θέση των Μονάδων βρίσκεται το 0 που είναι το ψηφίο με τη μικρότερη αξία, ενώ θα έπρεπε να είναι το 9.

4. Οι τριψήφιοι άρτιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 882 είναι: 884, 886, 888, 890, 892, 894, 896, 898, 900, 902, 904, ..., 998.

5. Οι τριψήφιοι αριθμοί είναι 108, 180, 801 και 810. Το λάθος είναι ότι υπολόγισε ως τριψήφιους τους 018 και 081. Το 0 δεν μπορεί να είναι το πρώτο ψηφίο ενός φυσικού αριθμού με δύο ή περισσότερα ψηφία.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: α. αριθμοί με διαφορετικό πλήθος ψηφίων:

642.507.912>95.750.306>9.575.036>3.608.442>642.750>360.844

β. αριθμοί με ίσο πλήθος ψηφίων:

365.810>365.108>365.018>356.801>356.180>350.618

2η Άσκηση:

356.098 < ... < 356.100,

53.099 < ... < 53.101,

3.486.288 < ... < 3.486.290,

32.999.999 < ... < 33.000.001,

6.903.998 < ... < 6.904.000,

99.998.998 < ... <99.999.000.

3η Άσκηση:

- 3.000.000, 3.200.000,
- 658.500, 658.000, 657.500,
- 26.095, 26.195, 26.295,

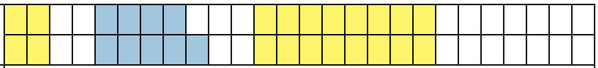
4η Άσκηση: Σημαντικό είναι να επισημανθεί στην τάξη ότι η άσκηση αυτή είναι ανοιχτή κι έχει πολλές σωστές απαντήσεις.

5η Άσκηση: Ο μεγαλύτερος εξαψήφιος αριθμός είναι ο 999.999 και ο μικρότερος ο 100.000.

6η Άσκηση: Οι περιττοί τετραψήφιοι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 9.985 είναι: 9.987, 9.989, 9.991, 9.993, 9.995, 9.997, 9.999.

7η Άσκηση: 272, 209, 590, 1.256, 469.020, 37.199.

Διερεύνηση – Επέκταση: Προτείνεται οι μαθητές/ήτριες προηγουμένως να παραπεμφθούν στη Διερεύνηση – Επέκταση του 4ου κεφαλαίου του ΤΕ.

αθροίσματα	
	1+3=4 1+3+5=9 1+3+5+9=16

Κεφάλαιο 7: Στρογγυλοποίηση στους φυσικούς αριθμούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να εξοικειωθούν με τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2224

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

Οι μαθητές/ήτριες καλούνται να παρατηρήσουν τις αλλαγές στα ψηφία των αριθμών πριν από τη στρογγυλοποίηση και ύστερα από αυτήν. Η στρογγυλοποίηση έχει γίνει στη θέση των Μονάδων Χιλιάδων. Χρήσιμο είναι να υπογραμμιστεί ότι το ψηφίο της αμέσως επόμενης θέσης είναι αυτό που καθορίζει αν θα αλλάξει το ψηφίο στη θέση που γίνεται η στρογγυλοποίηση ή θα παραμείνει το ίδιο.

Παραδείγματα από την καθημερινή μας ζωή στα οποία μπορούμε να κάνουμε στρογγυλοποίηση είναι στο σούπερμάρκετ, όπου, συνήθως, στρογγυλοποιούμε δεκαδικούς αριθμούς σε φυσικούς και γενικά, όταν έχουμε να διαχειριστούμε πολυψήφιους αριθμούς, προκειμένου να ελέγξουμε τα αποτελέσματα πράξεων που κάνουμε. Παραδείγματα στα οποία δεν μπορούμε να κάνουμε στρογγυλοποίηση είναι: οι αριθμοί των τηλεφώνων και κυκλοφορίας αυτοκινήτων, οι Ταχυδρομικοί Κώδικες κ.λπ. Ο αριθμός κυκλοφορίας ενός αυτοκινήτου είναι μοναδικός, όπως και ο αριθμός ταυτότητας, ο αριθμός μητρώου μαθητή/ήτριας στο σχολείο, ο αριθμός ασφαλισμένου, διάφοροι κωδικοί στην τράπεζα κ.λπ.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Απαραίτητο είναι να δοθεί έμφαση στη διάκριση μεταξύ της θέσης του ψηφίου στο οποίο γίνεται η στρογγυλοποίηση (αλλάζει ή όχι) και στη θέση του ψηφίου στο οποίο αρχίζει η αντικατάσταση με το ψηφίο 0. Προτείνεται ακόμη να αξιοποιηθούν τα παραδείγματα τα οποία αφορούν στις στρογγυλοποιήσεις του ίδιου αριθμού σε δύο διαφορετικές θέσεις.

Εφαρμογή: Σκόπιμο είναι να συζητηθεί τι αλλάζει στον προσδιορισμό του στρογγυλοποιημένου αριθμού στην αριθμογραμμή, αν η στρογγυλοποίηση του 45.210 γίνει σε άλλη θέση, για παράδειγμα στις Μονάδες Χιλιάδων. Προτείνεται ακόμη να δοθεί το παράδειγμα στρογγυλοποίησης στις ίδιες θέσεις άλλου αριθμού, για παράδειγμα του 45.610 στην αριθμογραμμή.

Αναστοχασμός

1. Με τη στρογγυλοποίηση του 83.456.057 στις ΕΧ προκύπτει ο αριθμός 83.500.000, γιατί το επόμενο ψηφίο στη θέση των ΔΧ είναι το 5.

2. Η Αγγελική υπολόγισε ότι το άθροισμα 5.134 + 6.237 είναι περίπου 11.000, γιατί έκανε στρογγυλοποίηση στη θέση των ΔΧ (5.000+6.000=11.000).

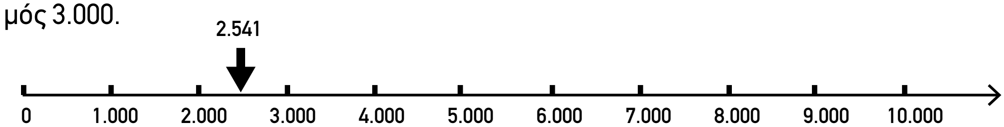
3. Η Δανάη υπολόγισε ότι η διαφορά 8.978-4.209 είναι περίπου 4.800 στρογγυλοποιώντας στις ΜΧ (9.000-4.200=4.800).

4. Ο Νίκος υπολόγισε πως το γινόμενο 19x11 είναι περίπου 200 στρογγυλοποιώντας στις Δεκάδες (20x10=200).

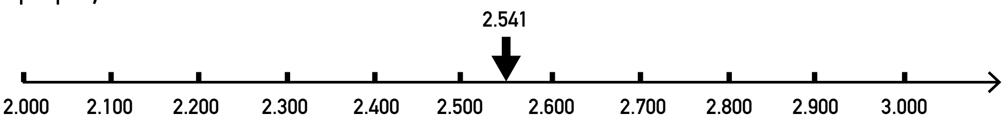
5. Ο Αντρέι υπολόγισε πως το πηλίκο 3.565:6 είναι περίπου 600 στρογγυλοποιώντας στη θέση των Μ.Χ (3.600:6).

Τετράδιο Εργασιών

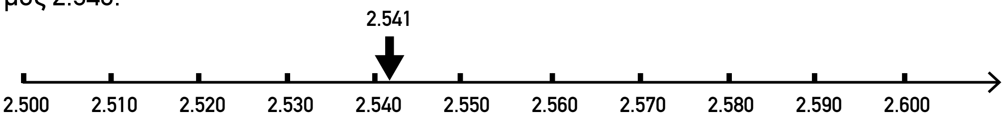
1η Άσκηση: Με τη στρογγυλοποίηση του 2.541 στην πλησιέστερη χιλιάδα προκύπτει ο αριθμός 3.000.



2η Άσκηση: Με τη στρογγυλοποίηση του 2.541 στην πλησιέστερη εκατοντάδα προκύπτει ο αριθμός 2.500.



3η Άσκηση: Με τη στρογγυλοποίηση του 2.541 στην πλησιέστερη δεκάδα προκύπτει ο αριθμός 2.540.



4η Άσκηση: Οι τριψήφιοι αριθμοί είναι:

785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794.

5η Άσκηση: Οι αριθμοί είναι μετά τη στρογγυλοποίηση στις:

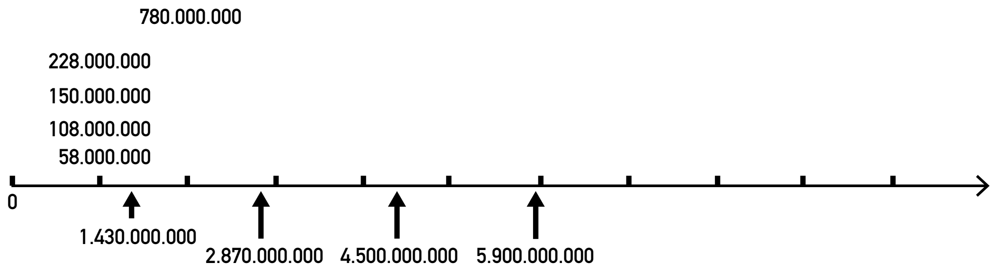
- Δεκάδες Χιλιάδων: 24.000, 990.000, 25.140.000, 6.750.000, 860.000, 20.170.000
- Εκατοντάδες: 24.600, 990.800, 25.139.500, 6.746.400, 860.800, 20.165.300.

Πρόβλημα: Ο αριθμός μπορεί να είναι οποιοσδήποτε από το 29.995 ως το 30.004.

Διερεύνηση – Επέκταση

Οι πλανήτες με τη σειρά, από τον πιο κοντινό στον Ήλιο προς τον πιο μακρινό, είναι:

Ερμής, Αφροδίτη, Γη, Άρης, Δίας, Κρόνος, Ουρανός, Ποσειδώνας, Πλούτωνας.



Στην παραπάνω αριθμογραμμή παρατηρούμε ότι οι κοντινές αποστάσεις δεν μπορεί να αναπαρασταθούν με ακρίβεια. Αντίθετα, μια αριθμογραμμή με διαφορετική διαμέριση που θα επέτρεπε ακριβέστερη αναπαράσταση των πιο κοντινών αποστάσεων, πιθανότατα δεν θα χωρούσε τις πιο μακρινές αποστάσεις. Μπορεί ακόμη να συζητηθεί η πρόταση αναπαράστασης σε δύο διαφορετικές αριθμογραμμές.

Επαναληπτικό 1

Βιβλίο μαθητή

Ασκήσεις

- Οι φυσικοί αριθμοί είναι: 0, 1, 2, 3, …, 98, 99, 100, ...,
- Οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί είναι: 0, 2, 4, 6, 8, ...,
- Οι περιττοί φυσικοί αριθμοί είναι: 1, 3, 5, 7, ...,
- 2.709.036 = 2.000.000 + 700.000 + 9.000 + 30 + 6.
- Ο αριθμός είναι: 30.630.009.
- Η σειρά των αριθμών, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, είναι: 45.258 < 350.890 < 459.810 < 3.508.970 < 45.890.000.
- Ο αριθμός 12.453.089 στρογγυλοποιείται ως εξής: στις Δ: 12.453.090, στις ΜΧ: 12.453.000, στις ΕΧ: 12.500.000, στις ΔΕ: 10.000.000.

1ο Πρόβλημα: Για να φτιάξει με τον ίδιο τρόπο μία σκάλα με 10 σκαλοπάτια, ο Γιάννης χρειάζεται 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 τουβλάκια.

2ο Πρόβλημα: Σε 3 τελάρα χωράνε 12 κιλά μήλα, άρα στο 1 τελάρο χωρούν 12:3=4 κιλά μήλα. Κατά συνέπεια, σε 246 τελάρα χωρούν 4x246=984 κιλά μήλα.

3ο Πρόβλημα: Επειδή 1€=2κέρματα x50 λ., 146 κέρματα των 50λ. είναι 146:2=73€. Η μπλούζα και το παντελόνι κοστίζουν 15+20=35€. Επομένως η Δανάη αγοράζει το μπουφάν χωρίς να πάρει ρέστα με 73—35=38€.

4ο Πρόβλημα: Η κυρία Μαρία μάζεψε τη 2η ημέρα 3x8=24 πορτοκάλια, την 3η 2x24=48 πορτοκάλια, την 4η 8+24+48=80 πορτοκάλια, επομένως και τις τέσσερις ημέρες μάζεψε 8 + 24 + 48 + 80 = 160 πορτοκάλια.

5ο Πρόβλημα: Αφού ο Νίκος κάθεται στην καρέκλα με τον αριθμό 7 και η Δανάη απέναντί του στην καρέκλα με τον αριθμό 18, ανάμεσά τους κάθονται 18-7=11 άτομα, οπότε: ο 1ος έχει απέναντί του τον 12ο, ο 2ος τον 13ο, ο 3ος τον 14ο, ο 4ος τον 15ο, ο 5ος τον 16ο, ο 6ος τον 17ο, ο 7ος τον 18ο, ο 8ος τον 19ο, ο 9ος τον 20ό, ο 10ος τον 21ο και ο 11ος τον 22ο, ο 12ος τον 23ο, ο 13ος τον 24ο, ο 14ος τον 25ο, ο 15ος τον 26ο και ο 17ος τον 28ο.Ο 18ος έχει απέναντί του όχι τον 29ο αλλά τον 7ο. Επομένως οι μαθητές/ήτριες της Ε΄ τάξης είναι 29-7=22.

Για την επίλυση του προβλήματος μπορεί να αξιοποιηθεί και η χρήση του πίνακα:

1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	**12**
12	13	14	15	16	17	**18**	19	20	21	22	**1**

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι αριθμοί διαβάζονται ως εξής: διακόσιες τριάντα χιλιάδες εκατόν είκοσι επτά, τέσσερα εκατομμύρια τετρακόσιες χιλιάδες ένα, εξήντα τρία εκατομμύρια οκτώ χιλιάδες ενενήντα, εκατόν δύο εκατομμύρια οκτακόσιες χιλιάδες εξήντα πέντε, τέσσερα δισεκατομμύρια τετρακόσιες χιλιάδες σαράντα.

2η Άσκηση: Οι αριθμοί γράφονται με ψηφία ως εξής: 30.609.092, 650.008.004, 9.000.080.000, 107.003.000.000, 330.000.002.004.

3η Άσκηση

ΔΙΣΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			.	ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			.	ΧΙΛΙΑΔΕΣ			.	ΜΟΝΑΔΕΣ		
Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ		Ε	Δ	Μ
x100.000.000.000	x10.000.000.000	x1.000.000.000		x100.000.000	x10.000.000	x1.000.000		x100.000	x10.000	x1.000		x100	x10	x1
					3	0		6	0	9		0	9	2
				6	5	0		0	0	8		0	0	4
		9		0	0	0		0	8	0		0	0	0
1	0	7		0	0	3		0	0	0		0	0	0
3	3	0		0	0	0		0	0	2		0	0	4

1ο Πρόβλημα: Ο μεγαλύτερος εξαψήφιος είναι 631.000 και ο μικρότερος 100.036.

2ο Πρόβλημα: Οι διαδοχικοί αριθμοί είναι 3.064 και 3.065.

3ο Πρόβλημα: Οι διψήφιοι αριθμοί που έχουν ίδια ψηφία είναι εννέα, οι εξής: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Οι διψήφιοι αριθμοί που δεν έχουν ίδια ψηφία είναι ενενήντα.

4ο Πρόβλημα: Το έτος 2018 η Μαρία είναι 2018 - 2011=7 ετών, η μητέρα της 2018-1974 = 44 ετ. και η γιαγιά της 2018-1947=71ετ.

5ο Πρόβλημα: Το ψηφίο 6, όταν γινόταν η αρίθμηση του βιβλίου, χρησιμοποιήθηκε συνολικά 18 φορές στις σελίδες με την ακόλουθη αρίθμηση : 6, 16, 26, 36, 46, 56, <u>66</u>, 76, 86, 96, 106, 116, 126, 136, 146, 156 και 160.

6ο Πρόβλημα: Τα άτομα που περιμένουν στη σειρά χωρίς τον κύριο Γιάννη είναι 49 – 1= 48. Τα 48 άτομα είναι χωρισμένα σε έξι ίσα μέρη, από τα οποία τα πέντε είναι μπροστά του και το ένα πίσω από αυτόν. Επομένως μπροστά του είναι $48 \times \frac{5}{6} = 40$ άτομα, οπότε ο κύριος Γιάννης είναι 41ος στη σειρά.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Θεματική ενότητα: Αριθμοί- Άλγεβρα

Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Οι πράξεις στους φυσικούς αριθμούς

Α. Θεωρητικό μέρος

Για καθεμία από τις τέσσερις πράξεις, εκτός από τους τυπικούς αλγορίθμους, υπάρχουν νοερές μέθοδοι και άτυπες γραπτές μέθοδοι. Οι τυπικές μέθοδοι εκτέλεσης των πράξεων δεν είναι παρά αυτές που έχουν χρησιμοποιηθεί περισσότερο σε έναν συγκεκριμένο πολιτισμό. Υπάρχουν άλλες πιο αποτελεσματικές μέθοδοι που έχουν χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικούς χρόνους και σε διαφορετικούς πολιτισμούς. Οι ιδιότητες των τεσσάρων πράξεων δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να καθοδηγούν και να βοηθούν τα παιδιά να επινοούν νοερές και γραπτές μεθόδους και να αποφεύγουν τις παρανοήσεις (Hopkins et al., 2013).

Αντίληψη των αριθμητικών πράξεων θεωρείται η απόλυτα ολοκληρωμένη κατανόηση των τεσσάρων πράξεων και των πολλών διαφορετικών και αλληλοσυσχετιζόμενων σημασιών που μπορεί να λάβουν σε πραγματικές καταστάσεις. Η καλλιέργεια αυτής της αντίληψης πραγματοποιείται με την επίλυση προβλημάτων και τη χρήση μοντέλων, όπως η αριθμογραμμή. Έχει, επίσης, διαπιστωθεί πως στις περισσότερες καταστάσεις της καθημερινής ζωής χρησιμοποιούνται όχι οι τυπικοί αλγόριθμοι αλλά αυτοσχέδιες στρατηγικές υπολογισμού που είναι πιο εύκολες, πιο γρήγορες και που είναι δυνατόν συχνά να γίνουν νοερά. Η ένταξη των αυτοσχέδιων στρατηγικών στην εκπαιδευτική διαδικασία καλλιεργεί αποτελεσματικότερα τις έννοιες που σχετίζονται με τη δεκαδική βάση του συστήματος αρίθμησης, οδηγεί τα παιδιά σε λιγότερα υπολογιστικά λάθη και προάγει τη μαθηματική σκέψη. Οι αυτοσχέδιες στρατηγικές οικοδομούνται με βάση την κατανόηση κι εξυπηρετούν τα παιδιά τουλάχιστον εξίσου καλά με τους τυπικούς αλγορίθμους (Van de Walle, 2005).

Τα βασικά δεδομένα για την πρόσθεση ή τον πολλαπλασιασμό είναι οι συνδυασμοί δύο προσθετέων ή δύο παραγόντων που είναι μικρότεροι του 10, ενώ για την αφαίρεση ή τη διαίρεση αντιστοιχούν στα δεδομένα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Η καλή γνώση των βασικών δεδομένων δεν είναι αποτέλεσμα εξάσκησης αλλά κατανόησης σε βάθος των αριθμητικών πράξεων και των αριθμητικών σχέσεων, που κατακτάται με τη βοήθεια αποδοτικών στρατηγικών.

Οι μαθητές/ήτριες θα πρέπει να ενθαρρύνονται να κατανοήσουν την έννοια της πράξης και να την ξεχωρίζουν από τον αλγόριθμο της εκτέλεσής της (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011). Είναι επωφελές οι αυτοσχέδιες στρατηγικές να παρουσιάζονται από τους μαθητές και τις μαθήτριες στην τάξη, να καταγράφονται στον πίνακα και να συζητούνται (Van de Walle, 2005).

Β. Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να μπορούν να χειρίζονται με ευχέρεια τις τέσσερις πράξεις με φυσικούς αριθμούς, καθώς και να επιλύουν απλά και σύνθετα προβλήματα με τέσσερις πράξεις (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Αντίστοιχες δραστηριότητες επαναλαμβάνονται στο Βιβλίο Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού, αλλά επεκτείνονται, πλέον και σε μεγαλύτερους αριθμούς, σταθεροποιούνται οι συνήθεις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων, προτείνονται τεχνικές μοντελοποίησης – αναπαράστασης των πράξεων και αξιοποιούνται οι ιδιότητες των πράξεων για τη διευκόλυνση των υπολογισμών. Οι μαθητές/ήτριες αποκτούν την ικανότητα να διασπούν τους αριθμούς και να τους συνδυάζουν με ευελιξία, η οποία είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας για πολυψήφιους αριθμούς. Αναγνωρίζουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών των τεσσάρων πράξεων, καθώς, επίσης, κάνουν και χρήση της αριθμομηχανής κυρίως για την επαλήθευση αποτελεσμάτων.

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Τα λάθη των παιδιών και τα προβλήματα στην κατανόηση εμφανίζονται πιο συχνά στην αφαίρεση από ό,τι στην πρόσθεση και σχετίζονται με την ανεπαρκή κατανόηση της διαδικασίας της αναομαδοποίησης, της αξίας θέσης ψηφίου και του μηδενός. Στον πολλαπλασιασμό παρουσιάζονται λιγότερα λάθη, ενώ η κατανόηση του αλγόριθμου της διαίρεσης προϋποθέτει την κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου, καθώς και τη δυνατότητα εκτέλεσης των τριών άλλων πράξεων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Δ. Εποπτικό υλικό

τετραγωνισμένο χαρτί, πίνακας πολλαπλασιασμού, υλικό δεκαδικής βάσης, αριθμογραμμή, αριθμομηχανή τσέπης

Κεφάλαιο 8: Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους φυσικούς αριθμούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να αναγνωρίζουν και να αναπαριστάνουν καταστάσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης με διαφορετικούς τρόπους,
- να εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών πρόσθεσης κι αφαίρεσης,
- να αναπτύσσουν τους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα και αναπαραστάσεις,
- να αξιοποιούν τους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα και αναπαραστάσεις,
- να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

αριθμομηχανή

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4315?locale=el

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4347?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

Οι μαθητές/ήτριες καλούνται να διατυπώσουν ένα πρόβλημα πρόσθεσης με βάση τα δεδομένα του πίνακα. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να έχει από δύο ή περισσότερους προσθετέους. Η συζήτηση μπορεί να κινηθεί γύρω από τον αλγόριθμο της πρόσθεσης (οριζόντια ή κάθετα), καθώς επίσης και τους όρους προσθετέοι και άθροισμα, που είναι γνωστοί από τις μικρότερες τάξεις.

Στο πρόβλημα της αφαίρεσης μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ του πλήθους των επισκεπτών/τριών σε δύο διαφορετικά έτη της λειτουργίας του Μουσείου, ενώ στη συζήτηση σκόπιμο είναι να επισημανθεί ότι ο μειωτέος είναι στους φυσικούς αριθμούς πάντοτε μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο.

Από τη λύση των προβλημάτων αναμένεται να προκύψει συζήτηση αναφορικά με την αντιμεταθετική ιδιότητα και την αναγκαιότητα τοποθέτησης στους κάθετους αλγορίθμους των Μ κάτω από τις Μ, των Δ κάτω από τις Δ. κ.λπ.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Τα παραδείγματα είναι: α. οριζόντιας πρόσθεσης χωρίς κρατούμενο, κάθετης πρόσθεσης με τρεις προσθετέους με κρατούμενο, β. οριζόντιας αφαίρεσης και κάθετης αφαίρεσης με αναομαδοποίηση. Η έννοια της αναομαδοποίησης αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας από την Α΄ τάξη και μπορεί να επισημανθεί και να συζητηθεί με αφορμή τα παραδείγματα των κάθετων αλγόριθμων.

Εφαρμογή: 1. Αναπαράσταση της πρόσθεσης στην αριθμογραμμή: Βρίσκουμε στην αριθμογραμμή το πλήθος των αγοριών και προχωράμε προς τα δεξιά τόσα βήματα, όσο είναι το πλήθος των κοριτσιών. Ο αριθμός στον οποίο σταματάμε είναι το πλήθος των παιδιών της τάξης.

2. Αναπαράσταση της αφαίρεσης στην αριθμογραμμή: Βρίσκουμε στην αριθμογραμμή το πλήθος των παιδιών της τάξης και προχωράμε προς τα αριστερά τόσα βήματα, όσο είναι το πλήθος των αγοριών. Ο αριθμός στον οποίο σταματάμε είναι αυτός που δείχνει το πλήθος των κοριτσιών.

Αναστοχασμός

1. Πρόκειται για την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης, οπότε αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να αναφέρουν ότι στην πρόσθεση δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία προσθέτουμε τους αριθμούς.

2. Αναμένουμε οι μαθητές/ήτριες να αναφέρουν δύο τρόπους επαλήθευσης της πρόσθεσης: α) πρόσθεση με αλλαγή στη σειρά των προσθετέων και β) αφαίρεση του αθροίσματος από τον ένα ή τον άλλον προσθετέο, καθώς και δύο τρόπους επαλήθευσης της αφαίρεσης: α) αφαίρεση της διαφοράς από τον μειωτέο και β) πρόσθεση του αφαιρετέου και της διαφοράς.

3. Το λάθος της Αγγελικής είναι ότι εφάρμοσε την αντιμεταθετική ιδιότητα στην αφαίρεση. Αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να αναφέρουν ότι στην αφαίρεση των φυσικών αριθμών δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, αλλά ο μειωτέος είναι πάντοτε μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο.

4. Χρήσιμο είναι να γίνει συζήτηση πάνω στην αξία θέσης ψηφίου αναφορικά με τις δύο πράξεις.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Είναι σημαντικό να συζητηθούν στην τάξη οι στρατηγικές νοερών υπολογισμών, που χρησιμοποίησαν οι μαθητές/ήτριες. Τα αθροίσματα είναι: 12.000.000, 60.000.000, 8.201.000, 2.000.000, 100.000.000, 850.000.000.

2η Άσκηση: Τα αθροίσματα είναι: 1.043.695, 25.803.672, 667.864.101.

3η Άσκηση: Όπως στην 1η Άσκηση, σκόπιμο είναι να συζητηθούν οι στρατηγικές νοερών υπολογισμών, που χρησιμοποίησαν οι μαθητές/ήτριες. Οι διαφορές είναι: 6.000.000, 81.000.000, 125.000.000, 656.000, 95.770.000, 49.999.900

4η Άσκηση: Οι διαφορές είναι 231.836, 1.843.833, 37.071.271.

1ο Πρόβλημα: Η τιμή του φορητού υπολογιστή (λάπτοπ) είναι 983+519=1.502€, πλήρωσαν 983+1.502=2.485€, οπότε τούς έμειναν 2.500-2.485=15€.

2ο Πρόβλημα: Οι γυναίκες της πόλης είναι 8.206+426=8.632, μαζί με τους άνδρες είναι 8.206+8.632=16.838, οπότε τα παιδιά της πόλης είναι 20.000-16.838=3.162.

Διερεύνηση-Επέκταση

Οι πίνακες των βασικών δεδομένων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μπορεί να αξιοποιηθούν με πολλούς τρόπους από τον εκπαιδευτικό.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Ενδεικτικά: οι αριθμοί στις στήλες και στις σειρές του πίνακα της πρόσθεσης είναι διαδοχικοί κατά αύξουσα σειρά, ενώ στις διαγωνίους είναι, εναλλάξ, άρτιοι και περιττοί.

-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
17	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
19	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

Στον πίνακα της αφαίρεσης είναι πιθανόν τα παιδιά να χαρακτηρίσουν ''εύκολες'' τις αφαιρέσεις μέσα στην ίδια δεκάδα, δηλαδή όταν οι Μονάδες του μειωτέου είναι μεγαλύτερες από τις Μονάδες του αφαιρετέου και ''δύσκολες'' αυτές στις οποίες οι Μονάδες του μειωτέου είναι μικρότερες από αυτές του αφαιρετέου.

Κεφάλαιο 9: Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να αναγνωρίζουν και να αναπαριστάνουν καταστάσεις πολλαπλασιασμού με διαφορετικούς τρόπους,
- να αναγνωρίζουν, να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών πολλαπλασιασμού,
- να αναπτύσσουν και να αξιοποιούν αλγορίθμους πολλαπλασιασμού χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα, και αναπαραστάσεις,

- να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης πολλαπλασιασμού.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1834?locale=el

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1835?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Η συζήτηση για τον πίνακα του πολλαπλασιασμού μπορεί να έχει ως αφετηρία την τάξη στην οποία άρχισαν τα παιδιά να μαθαίνουν την προπαίδεια. Έτσι ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας ανά ..., ή προσθέτοντας ή αφαιρώντας κάθε φορά τον ίδιο αριθμό κ.λπ., προκύπτουν διάφοροι τρόποι συμπλήρωσης του πίνακα. Στον πίνακα επισημαίνεται ότι:

α. Το γινόμενο του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού με το 1 είναι ο ίδιος ο αριθμός.

β. Το γινόμενο του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού με το 0 είναι το 0.

γ. Το γινόμενο του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού με τον εαυτό του δίνει τους τετράγωνους αριθμούς, για παράδειγμα: 1x1=1, 2x2=4, 3x3=9, 4x4=16, 5x5=25, ...

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	18	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

δ. Πολλαπλασιασμοί στους οποίους το γινόμενο είναι πολλαπλάσιο του 2 ή του 10 είναι όλοι οι πολλαπλασιασμοί στους οποίους πολλαπλασιαστέος ή πολλαπλασιαστής είναι το 2 ή το 10 αντίστοιχα. Η ερώτηση είναι ανοιχτή, δηλαδή έχει πολλές σωστές απαντήσεις.

ε. Ένα μοτίβο που μας βοηθά είναι: 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, ...

στ. Για να συμπληρώσουμε τον πίνακα του πολλαπλασιασμού, χρησιμοποιούμε το μοτίβο ν x α, όπου ν φυσικός αριθμός, οπότε προκύπτουν τα πολλαπλάσια του αριθμού α που είναι 0 x α, 1 x α, 2 x α, 3 x α, ...

2. Ακολουθεί διατύπωση διαφόρων προβλημάτων πολλαπλασιασμού και συζήτηση για τις βασικές ιδιότητές του, στρατηγικές πολλαπλασιασμού διψήφιων αριθμών. Χρήσιμο είναι να συζητηθούν ακόμη τα κριτήρια επιλογής των διψήφιων αριθμών τους οποίους τα παιδιά χρησιμοποίησαν στα προβλήματά τους.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Προτείνεται να συζητηθούν οι έννοιες *γινόμενο, παράγοντες* με βάση τα παραδείγματα.

Εφαρμογή

1. Πρόκειται για την αναπαράσταση της αντιμεταθετικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού: α) σε τετραγωνισμένο χαρτί και β) με ράβδους.

2. Τα διπλά γινόμενα μπορούν να μας βοηθήσουν ως σημεία εκκίνησης πάνω στην αριθμογραμμή.

Αναστοχασμός

1. Το ερώτημα είναι ανοιχτό. Μία από τις σωστές απαντήσεις είναι: 4x4=16, 16+16=32. 32-4=28 ή 4x4=16, 3x4=12, 16+12=28.

2. Όπως η Δανάη, μπορούμε να βρούμε τα γινόμενα ενός αριθμού με το 9 βρίσκοντας πρώτα το γινόμενό του με το 10 και αφαιρώντας τον αριθμό μία φορά.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Προτείνεται να γίνει συζήτηση αναφορικά με τη στρατηγική υπολογισμού γινομένων, όταν ο ένας παράγοντας είναι το 10 ή πολλαπλάσιά του. Τα γινόμενα κάθε στήλης είναι: 1η στήλη: 60, 600, 6.000, 60.000, 2η στήλη: 750, 7.500, 75.000, 750.000, 3η στήλη: 160, 1.600, 16.000, 160.000 και 4η στήλη: 450, 4.500, 45.000, 450.000.

2η Άσκηση: Οι παρακάτω στρατηγικές είναι ενδεικτικές:

(16x10)+16=176	(27x100)-27=2.673	(14x100)+14=1.414
(57x30)-57=1.653	(45x1.000)-5=44.995	(16x100)+(16x10)=1600+160=1760

3η Άσκηση

39x13=(30+9)x(10+3)=(30x10)+(30x3)+(9x10)+(9x3)=300+90+90+27=507
66x54=(60+6)x(50+4)=(60x50)+(60x4)+(6x50)+(6x4)=3.000+240+300+24=3.564

4η Άσκηση: Οι παράγοντες είναι β και δ.

5η Άσκηση: Τα γινόμενα είναι 6.000, 18.000, 135, 1.900, 250.000 και 16.000.

6η Άσκηση: Τα γινόμενα είναι 805 και 2.714. Επισημαίνεται ότι: α) ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα και β) τα μερικά γινόμενα είναι διαφορετικά.

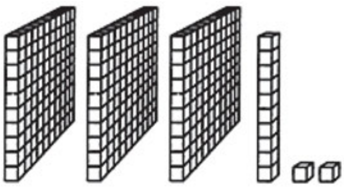
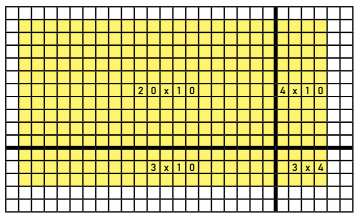
1ο Πρόβλημα: Ο εβδομαδιαίος μισθός της Δανάης είναι 8x38=304€ και ο μηνιαίος 4x304=1.216 €.

2ο Πρόβλημα: Η Αγγελική είχε: 1x100+2x50+3x20+4x10=300 €. Τα είδη που αγόρασε κόστιζαν: 89+38+73=200 €. Της έμειναν 300-200=100 €.

3ο Πρόβλημα: Τα εισιτήρια κόστιζαν (2x23)+(4x13)=46+52=98€. Πήραν ρέστα 100-98=2€.

Διερεύνηση-Επέκταση

Το γινόμενο 13x24=(10+3)x(20+4)=10x20+10x4+3x20+3x4=312

α.με υλικό δεκαδικής βάσης	β. σχεδιάζοντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα:
	

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να υπολογίζουν τα πολλαπλάσια των φυσικών αριθμών,
- να είναι σε θέση να βρουν το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο,
- να μπορούν να βρουν τους διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού,
- να αναπτύσσουν και να αξιοποιούν αλγορίθμους του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα και αναπαραστάσεις.
- να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1987?locale=el

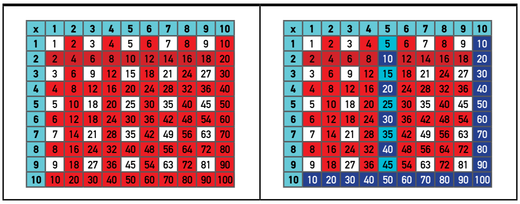
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1785?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Η διερευνητική αυτή δραστηριότητα αξιοποιεί τους συνδυασμούς των βασικών χρωμάτων στην αναπαράσταση του τρόπου εύρεσης των κοινών πολλαπλασίων δύο αριθμών. Με μοβ χρώμα χρωματίζονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 10 και αποτελούν τα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 5.Ο μικρότερος αριθμός που χρωματίζεται μοβ είναι ο 10, που αποτελεί το Ε.Κ.Π. των αριθμών 2 και 5.



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	18	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	18	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

2. Με τη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες επιλέγουν δύο από τους αριθμούς του πίνακα και βρίσκουν τα πολλαπλάσιά τους. Τα κοινά πολλαπλάσια του αριθμού, που είναι το γινόμενο των δύο αριθμών που επέλεξαν, χρωματίζονται με πράσινο χρώμα, π.χ. τα πολλαπλάσια του 3 και του 4 δίνουν τα πολλαπλάσια του 12, του 3 και του 6 δίνουν τα πολλαπλάσια του 18 κ.ο.κ. Ο μικρότερος αριθμός που είναι χρωματισμένος με πράσινο είναι το Ε.Κ.Π. των δύο αριθμών.

Με τη συζήτηση αναφορικά με τα ζευγάρια των αριθμών που δίνουν γινόμενα φυσικούς αριθμούς δίνεται η δυνατότητα οι μαθητές/ήτριες να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι όλοι οι φυσικοί αριθμοί που τον διαιρούν, καθώς και ότι είναι μικρότεροι ή ίσοι του αριθμού. α. Τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν γινόμενο τον αριθμό 8 είναι: 1x8, 2x4, 4x2, 8x1. Οι αριθμοί που διαιρούν το 8 είναι οι: 1,2,4 και 8. β. Τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν γινόμενο τον αριθμό 12 είναι: 1x12, 2x6, 3x4, 4x3, 6x2, 12x1. Οι αριθμοί που διαιρούν το 12 είναι οι: 1, 2, 3, 4, 6 και 12.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Σκόπιμο είναι να αξιοποιηθούν τα αντίστοιχα παραδείγματα: πολλαπλάσια, κοινά πολλαπλάσια, Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και διαιρέτες.

Εφαρμογή: Πρόκειται για την αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε τετραγωνισμένο χαρτί. Ο πολλαπλασιασμός που δείχνει το σχήμα είναι 20x15 και η διαίρεση 300:20 ή 300:15.

Αναστοχασμός

1. Η Δανάη δεν έχει δίκιο, γιατί τα πολλαπλάσια του 5 τελειώνουν σε 5 ή 0.

2. Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλον είναι πολλαπλάσιό του, γιατί πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού είναι όλοι οι αριθμοί που σχηματίζονται από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

3. Ο Νίκος έχει δίκιο, γιατί το γινόμενο κάθε φυσικού αριθμού με το 0 είναι 0.

4. Για παράδειγμα, το 4 διαιρεί το 8, επομένως διαιρεί και τα πολλαπλάσια του 8.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οποιαδήποτε πέντε πολλαπλάσια.

2η Άσκηση: Τα ζευγάρια είναι: 24-4, 58-8, 54-9 και 40-8.

3η Άσκηση: Ο αριθμός είναι ο 7, αφού είναι διαιρέτης των αριθμών 14, 21 και 63.

4η Άσκηση: Η πεντάδα είναι η γ, ενώ χρήσιμο είναι γίνει συζήτηση, γιατί δεν είναι οι άλλες.

5η Άσκηση: Οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 8 είναι το 16 και το 24.

6η Άσκηση: Ξεκινάμε από το 1 και συνεχίζουμε με το 2, το 3 κ.λπ. Για παράδειγμα: Οι διαιρέτες του 60 είναι: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 και 60.Τα γινόμενά τους ανά δύο ξεκινώντας από τον πρώτο με τον τελευταίο δίνουν το 60 (1x60, 2x30, 3x20, 4x15, 5x12, 6x10, 10x6, 12x5, 15x4, 20x3, 30x2, 60x1).

1ο Πρόβλημα: Η Δανάη δεν έχει δίκιο, γιατί οι αριθμοί 1, 2, 4 και 8 είναι οι διαιρέτες και όχι τα πολλαπλάσια του 8.

2ο Πρόβλημα: Επειδή Ε.Κ.Π. (6,8)=24, οι δύο συρμοί θα αναχωρήσουν ξανά ταυτόχρονα από τον σταθμό στις 7:24.

3ο Πρόβλημα: Κ.Π.(2,3,5)=30, 60, ... Το εργοστάσιο συσκευάζει 60 μπάρες ανά λεπτό.

4ο Πρόβλημα: Όλες οι δυνατές περιπτώσεις μπισκότων σε σακούλες είναι:1x60, 2x30, 3x20, 4x15, 5x12, 6x10, 10x6, 12x5, 15x4, 20x3, 30x2, 60x1.

5ο Πρόβλημα: Επειδή το Ε.Κ.Π.(5,4,3)=60, τα εγγόνια θα συναντηθούν στο σπίτι της γιαγιάς 2 μήνες μετά. Ως τότε το πρώτο εγγόνι θα έχει επισκεφτεί το σπίτι 60: 5=12 φορές, το δεύτερο 60:4=15 φορές και το τρίτο 60:3=20 φορές.

Διερεύνηση-Επέκταση: Τα σχέδια στο τετραγωνισμένο χαρτί είναι ορθογώνια που αποτελούνται από 24 τετραγωνάκια. Όλες οι περιπτώσεις είναι οκτώ:

μήκος	1μ.	2μ.	3μ.	4μ.	6μ.	8μ.	12μ.	24μ.
πλάτος	24μ.	12μ.	8μ.	6μ.	4μ.	3μ.	2μ.	1μ.

Κεφάλαιο 11: Κριτήρια διαιρετότητας

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διατυπώνουν, να υπολογίζουν και να εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας των 2, 3, 5, 9 και 10.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3760?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης: Οι μαθητές/ήτριες καλούνται να διερευνήσουν ποιο μπορεί να είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 4.32_, έτσι ώστε να μην περισσεύει κανένα κυκλάμινο στις ανθοδέσμες των 2, 3, 5, 9 και 10 κυκλάμινων. Αναμένεται να βρουν, με βάση την εμπειρία τους ή ύστερα από δοκιμή, τους αριθμούς: για τα 2 κυκλάμινα: 4.320. 4.322, 4.324, 4.326, 4.328, για τα 5: 4.320 και 4.325, για τα 10: 4.320, ενώ για τα 3: 4.320, 4.323, 4.326, 4.329 και για τα 9: 4.320, 4.329. Είναι σημαντικό με τη συζήτηση να γίνει η διάκριση των κριτηρίων σε αυτά που αναφέρονται στο τελευταίο ψηφίο του αριθμού (2, 5 και 10) και σε αυτά που αναφέρονται στο άθροισμα των ψηφίων του (3 και 9).

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Προτείνεται να ζητηθούν παραδείγματα αριθμών που διαιρούνται με το 3 και το 9.

Εφαρμογή: Οι αριθμοί είναι: α. 3.150, β.3.852, γ. 3.654, δ. 3.456, ε.3.258.

Αναστοχασμός

1. Ένας άρτιος αριθμός διαιρείται με το 2, γιατί οι άρτιοι αριθμοί είναι 0, 2, 4, 6,...

2. Ο Νίκος μπορεί να σκέφτηκε πως διαιρέτες ενός αριθμού είναι όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν και το 1 διαιρεί όλους τους αριθμούς.

3. Η Αγγελική μπορεί να σκέφτηκε ότι ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο κάποιου άλλου, αν η διαίρεσή τους είναι τέλεια, αφού ένας φυσικός αριθμός (όχι το 0) διαιρεί μόνον τα πολλαπλάσιά του.

4. Ο αριθμός που προκύπτει αν αλλάξουμε τη σειρά των ψηφίων του αριθμού, διαιρείται με το 3, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του είναι το ίδιο.

5. Τα κριτήρια διαιρετότητας μάς βοηθούν να διαπιστώσουμε αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, το 3, το 5, το 10, κ.λπ χωρίς να κάνουμε διαίρεση. Αν δεν έχει προκύψει από τη συζήτηση στην τάξη, απαραίτητο είναι να επισημανθεί στα παιδιά ότι υπάρχουν κριτήρια διαιρετότητας και για άλλους αριθμούς που θα τα διδαχτούν σε επόμενη τάξη, όπως του 6 (2x3), του 4, του 8 κ.λπ.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι αριθμοί αυτοί είναι: με το 2 οι: 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, με το 3: 123, 126, 129, 132, 135, 138, με το 5: 125, 130, 135, με το 9: 126, 135.

2η Άσκηση: Οι αριθμοί αυτοί είναι: με το 10 οι: 360 και 370, με το 9: 360 και 369.

3η Άσκηση : Οι αριθμοί είναι: Α. 108, Β.432, Γ. 954.

4η Άσκηση:

Αριθμοί	το 2	το 5	το 10	το 3	το 9
250	✓	✓	✓		
700	✓	✓	✓		
3.500	✓	✓	✓		
63.000	✓	✓	✓	✓	✓
84.360	✓	✓	✓	✓	
126.090	✓	✓	✓	✓	✓

5η Άσκηση: Το ψηφίο που λείπει μπορεί να είναι το 2 (225), το 5 (255) ή το 8 (285).

6η Άσκηση: Ένας αριθμός διαιρείται με το 100, το 1.000 και το 10.000, αν τα δύο, τρία και τέσσερα, αντίστοιχα, τελευταία ψηφία του είναι 0. Η άσκηση μπορεί να επεκταθεί και σε μεγαλύτερους αριθμούς πολλαπλασίων του 10.

1ο Πρόβλημα: Μπορούμε να μοιράσουμε εξίσου από 3 καραμέλες σε 459:3=153 φίλους ή από 9 σε 51 φίλους.

2ο Πρόβλημα: Οι αριθμοί από το 248 ως το 358 που διαιρούνται με το 9 είναι οι εξής: 252, 261, 270, 279, 288, 297, 306, 315, 324, 333, 342, 351.

3ο Πρόβλημα: Τα τραπέζια μπορεί να είναι: 50 με έναν άνδρα, μία γυναίκα κι ένα παιδί, 25 με δύο άνδρες, δύο γυναίκες και δύο παιδιά και 10 με πέντε άνδρες, πέντε γυναίκες και πέντε παιδιά.

Διερεύνηση-Επέκταση

Το αριθμητικό **μοτίβο του τελευταίου διψήφιου τμήματος** ενός αριθμού που διαιρείται με το 5 είναι: 00, 05, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95.

Το **μοτίβο του τελευταίου διψήφιου τμήματος** ενός αριθμού που διαιρείται με το 10 είναι: 00, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Το **μοτίβο του τελευταίου τριψήφιου τμήματος** ενός αριθμού που διαιρείται με το 100 είναι: 000, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900.

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να αναγνωρίζουν και να αναπαριστάνουν καταστάσεις διαίρεσης με διαφορετικούς τρόπους,
- να αναγνωρίζουν, να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών διαίρεσης,
- να διερευνούν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών και να τον χρησιμοποιούν, για να κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης,
- να μπορούν να ελέγχουν το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης χρησιμοποιώντας τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης Δ= δ x π +υ, 0≤υ<δ και να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης διαίρεσης,
- να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης διαίρεσης.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3727?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να λύσουν το πρόβλημα με ζωγραφιά ή τη δημιουργία πίνακα. Οι θέσεις που έχει, συνολικά, ο χώρος στάθμευσης είναι 21x8=168. Από το παραπάνω πρόβλημα πολλαπλασιασμού μπορεί να προκύψουν δύο προβλήματα διαίρεσης. Στη συνέχεια, ακολουθεί συζήτηση σχετικά με τις ομοιότητες και τις διαφορές των δύο προβλημάτων.

2. Με αφορμή τα ερωτήματα α και β γίνεται λόγος α) για την τέλεια διαίρεση: 152 = 19 x 8 + 0 και β) για την ατελή: 156= 19 x 8 +4.

Ακολουθεί συζήτηση σχετικά με τους τρόπους αναπαράστασης της διαίρεσης: α. σε τετραγωνισμένο χαρτί και β. με υλικό δεκαδικής βάσης (βλέπε εφαρμογή στο κεφάλαιο 10).

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Σημαντικό είναι να αξιοποιηθούν τα παραδείγματα για τη δοκιμή της διαίρεσης.

Εφαρμογή: Πρόκειται για παράδειγμα Ευκλείδειας διαίρεσης με ανάλυση του αριθμού.

Αναστοχασμός

1. Για παράδειγμα, πολλαπλασιασμός του διαιρέτη με το πηλίκο και πρόσθεση του υπολοίπου.
2. Το πηλίκο είναι ο αριθμός 1.
3. Το πηλίκο είναι ο Διαιρετέος.
4. Το πηλίκο είναι το 0, γιατί το 0 είναι πολλαπλάσιο κάθε φυσικού αριθμού.
5. Για παράδειγμα 63:9=7, 7x9=63.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Δεν μπορεί να είναι υπόλοιπο οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι με τον διαιρέτη, άρα στη διαίρεση με το 3 : 4, 5, 9, με το 6: 6,7, με το 5: 6,5 και με το 9: 9.

2η Άσκηση: από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης: Δ=πxδ+υ=7x48+25= 336+25=361.

3η Άσκηση: Τα παιδιά μπορεί να χρησιμοποιήσουν διάφορες στρατηγικές, οι οποίες είναι ενδιαφέρον να συζητηθούν στην τάξη. Τα πηλίκα κάθε στήλης είναι: 1η στήλη: 16.000, 1.600, 160, 16, 2η στήλη: 34.000, 3.400, 340, 34 και 3η στήλη: 50.000, 5.000, 500, 50.

4η Άσκηση: Οι διαιρέσεις που το πηλίκο τους είναι μικρότερο από 60 είναι η α και η δ.

5η Άσκηση: Τα πηλίκα των διαιρέσεων είναι αντίστοιχα: 40,5, 90 και 1.008,125.

1ο Πρόβλημα: Ο Νίκος πρέπει να αποταμιεύει κάθε μήνα 1.248 : 24 = 52€.

2ο Πρόβλημα: Θα σχηματιστούν 168:3= 56 τριάδες, 168 : 4 = 42 τετράδες, 168 : 6 = 28 εξάδες, 168 : 7 = 24 επτάδες.

3ο Πρόβλημα: Το πρόβλημα είναι ανοιχτό κι έχει πολλές σωστές λύσεις.

Διερεύνηση- Επέκταση: Οι διαιρέσεις είναι της μορφής: Δ= π x δ + υ = 6 x 1 +3=9 και μπορεί να αναπαρασταθούν σε τετραγωνισμένο χαρτί.

Επαναληπτικό 2

Βιβλίο μαθητή

Ασκήσεις

- Τα αθροίσματα είναι: 100.968 και 6.405.972.
- Η διαφορά είναι: 17.398.
- Τα γινόμενα είναι: 3.698.400 και 459.895.000.
- Πολλαπλάσια του 12: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120 και του 15: 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120.
- Διαιρέτες του 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 και του 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
- Τα ψηφία που λείπουν μπορεί να είναι αυτά που σχηματίζουν τους αριθμούς: 67<u>05</u>, 67<u>35</u>, 67<u>65</u>, 67<u>95</u>, 67<u>50</u>.
- Ενδεικτική λύση: 45.600 = 45 x 1.000 + 600

1ο Πρόβλημα: Τα σοκολατάκια είναι, συνολικά, 684 + 536 = 1.220, οπότε το εργαστήριο θα χρειαστεί 1.220 : 20 = 61 κουτιά.

2ο Πρόβλημα: Η Δανάη θα έχει 457 + 39 = 496 γραμματόσημα, άρα ο Νίκος έχει 496 + 39 = 535 γραμματόσημα.

3ο Πρόβλημα: Μια οικογένεια με τρία παιδιά θα πληρώσει (18 x 2) + (3 x 16) =36 + 48 = 84 €.

4ο Πρόβλημα: Ο Νίκος θα γεμίσει το δοχείο των 3 λ. και στη συνέχεια τα 3λ. θα τα βάλει στο δοχείο των 5 λ. Έπειτα θα γεμίσει το δοχείο των 3 λ. άλλη μια φορά. Από αυτά τα 3 λίτρα θα χρησιμοποιήσει τα 2 λ για να γεμίσει το δοχείο των 5 λ. κι αυτό που θα μείνει στο δοχείο των 3 λίτρων θα είναι το ένα λίτρο που χρειάζεται.

5ο Πρόβλημα: Ο παππούς του Νίκου θα ποτίσει και τις τρεις γλάστρες 30 ημέρες μετά, γιατί Ε.Κ.Π. (2,3 και 5) = 30.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Το μισό και το διπλάσιο κάθε αριθμού είναι, αντίστοιχα, 6.234.000 και 24.936.000, 125.200.219 και 500.800.876, 4.375.450 και 17.501.800.

2η Άσκηση: Το Ε.Κ.Π. (8, 12, 15) είναι 120.

3η Άσκηση:

x	8	9	5
7			
9		81	
11			55

4η Άσκηση: Οι αριθμοί που λείπουν στις παρακάτω πράξεις είναι 1.764.393, 40, 180.000.450 και 5.255.250.

1ο Πρόβλημα: Ο Διαιρετέος είναι 27 x 36 +18 = 990.

2ο Πρόβλημα: 1.240 – 180 = 1.060€, 1.060 : 2 = 530€, 530 + 180= 710€. Το ένα τάμπλετ κοστίζει 530€ και το άλλο 710€.

3ο Πρόβλημα: Ο συνεταιρισμός συγκέντρωσε τις δύο χρονιές 1.800.000 + 1.250.000 = 3.050.000 κ. λάδι., οπότε του έμειναν 3.050.000 – 2.950.000 = 100.000 κ. λάδι.

4ο Πρόβλημα: Για την παράσταση πουλήθηκαν 12.136 – 286 = 11.850 εισιτήρια, οπότε η τιμή του εισιτηρίου ήταν 237.000: 11.850 = 20€.

5ο Πρόβλημα: Τα παιδιά δεν γνωρίζουν τα κριτήρια διαιρετότητας του 8 και του 7, οπότε αναμένεται να διαιρέσουν με το 8 (πιθανόν μόνον τους ζυγούς) και το 7 τους αριθμούς από το 190 ως το 200. Ο μελισσοκόμος έχει 195 κ. μέλι, γιατί 192: 8 = 24, άρα 24x8=192, 192+3=195 και 196: 7 = 28, άρα 28 x 7=196, 196 – 1 = 195.

6ο Πρόβλημα: Αν όλοι οι θεατές ήταν παιδιά, τότε ένα παιδί, μία γυναίκα κι ένας άνδρας είναι τόσοι, όσα είναι τα παιδιά, δηλαδή (1+2+4=) 7 παιδιά, επομένως το πλήθος των παιδιών είναι 798: 7 =114, των γυναικών 2x114=228 και των αντρών 4 x114 = 456.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Θεματική ενότητα: Αριθμοί- Άλγεβρα

Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Οι κλασματικοί αριθμοί

Α. Θεωρητικό μέρος

Η έννοια του κλασματικού αριθμού

Η έννοια του κλασματικού αριθμού παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία με πέντε διαφορετικές αλλά αλληλοσυνδεόμενες (Lamon, 2001 Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) διαστάσεις.

α) Το κλάσμα ως μέρος όλου: Το κλάσμα μπορεί να παρουσιαστεί ως μέρος μιας επιφάνειας ενός γεωμετρικού σχήματος, που είναι χωρισμένη σε ίσα τμήματα ή ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων. Στην περίπτωση αυτή το κλάσμα $\frac{2}{5}$,για παράδειγμα, σημαίνει «τα 2 μέρη από τα 5 ίσα μέρη». Το κλάσμα ως μέρος επιφάνειας είναι, συνήθως, και η πρώτη επαφή των μαθητών/ριών με τα κλάσματα και θεωρείται ευκολότερη προσέγγιση σε σχέση με τις υπόλοιπες (Γαγάτσης κ.ά., 2006). Μετά τη διδασκαλία του κλάσματος ως μέρους επιφάνειας, συνήθως, ακολουθεί η διδασκαλία του κλάσματος ως μέρους ενός συνόλου αντικειμένων. Σε αυτά, το σύνολο αποτελεί τη μονάδα αναφοράς, ενώ τα μέρη εκφράζονται ως υποσύνολα του αρχικού συνόλου.

β) Το κλάσμα ως λόγος: Το κλάσμα ως λόγος εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Το μέγεθος μίας ποσότητας συγκρίνεται με το μέγεθος μίας άλλης ποσότητας. Έτσι, στο παράδειγμα μας το κλάσμα 2/5 σημαίνει «2 μέρη προς 5 τα μέρη».

γ) Το κλάσμα ως μέτρο: Η αριθμογραμμή εκφράζει την έννοια του αριθμού ως μέτρου, δηλαδή ως σημείου πάνω στην αριθμογραμμή και ως απόσταση (Lamon, 2001 Marshall, 1993). Το κλάσμα μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα σημείο πάνω στην αριθμογραμμή που χαρακτηρίζει την απόσταση του σημείου αυτού από το μηδέν. Στο παράδειγμα μας το κλάσμα $\frac{2}{5}$ σημαίνει ότι «η μονάδα έχει διαιρεθεί σε 5 ίσα μέρη μήκους $\frac{1}{5}$ το καθένα και ότι το σημείο, που αντιστοιχεί στο κλάσμα $\frac{2}{5}$ πάνω στην αριθμογραμμή, απέχει από το μηδέν 2 διαστήματα μήκους $\frac{1}{5}$ το καθένα (επαναλαμβάνεται η μονάδα μέτρησης, που είναι το $\frac{1}{5}$ δύο φορές)».

δ) Το κλάσμα ως διαίρεση - πηλίκο: Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να θεωρηθεί ως το πηλίκο της διαίρεσης α:β, δηλαδή δύο ακέραιων αριθμών του αριθμητή α δια του παρονομαστή β, με $\beta \neq 0$. Οι μαθητές/ήτριες πρέπει να κατανοήσουν τον ρόλο του Διαιρετέου και του διαιρέτη και να κατανοήσουν, επίσης, ότι ο Διαιρετέος αναφέρεται στον αριθμό της ποσότητας ή των στοιχείων που θα μοιραστούν, ενώ ο διαιρέτης, στον αριθμό των ίσων μερών στα οποία θα μοιραστεί το κάθε στοιχείο (Κολέζα, 2000). Για παράδειγμα, αν ζητηθεί από τους μαθητές και τις μαθήτριες να μοιράσουν 2 πίτσες σε 5 παιδιά, πρέπει να κατανοήσουν ότι οι πίτσες θα μοιραστούν σε πέμπτα και το κάθε παιδί θα πάρει δύο κομμάτια (Marshall, 1993), δηλαδή η έννοια του πηλίκου βασίζεται στην έννοια της ισοδιαμέρισης μίας απλής ή σύνθετης μονάδας.

Η ισοδιαμέριση είναι μία διαδικασία μέσα από την οποία προκύπτουν τα κλάσματα (Lamon, 2012) και, συγκεκριμένα, μια διαδικασία διαίρεσης ενός ή περισσότερων στοιχείων σε έναν αριθμό ξεχωριστών μεριδίων που δεν επικαλύπτονται, έχουν το ίδιο μέγεθος (ανεξάρτητα από το σχήμα τους) και εξαντλούν το όλο. Ενώ, αν η μονάδα είναι σύνθετη, δηλαδή αποτελείται από περισσότερα από ένα στοιχεία, αυτά πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος.

ε) Το κλάσμα ως πολλαπλασιαστής, τελεστής: Στη συγκεκριμένη περίπτωση το κλάσμα νοείται ως μία συνάρτηση που εφαρμόζεται σε αριθμούς, συλλογές διακριτών αντικειμένων, γεωμετρικά σχήματα, και τα μετασχηματίζει ως προς κάποιο μέγεθος (π.χ. μέγεθος αριθμού, πλήθος, επιφάνεια).

Για παράδειγμα, όταν ζητούνται «τα 2/5 του 65», το κλάσμα λειτουργεί ως τελεστής, δηλαδή ο τελεστής είναι ο πολλαπλασιαστής, με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η αρχική ποσότητα, για να προκύψει η τελική ποσότητα. Το κλάσμα ως πολλαπλασιαστής σημαίνει ότι για το γινόμενο $\frac{2}{5}$ x 65 ο πολλαπλασιασμός 2 x 65 προηγείται της διαίρεσης με το 5. Το γινόμενο των κλασμάτων, σε αντίθεση με το γινόμενο ακεραίων, μπορεί να δίνει αποτέλεσμα μικρότερο από τους παράγοντες που πολλαπλασιάζονται.

Β. Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών

Οι μαθητές/ήτριες σε προηγούμενες τάξεις έχουν εμπλακεί σε δραστηριότητες σύγκρισης εμπράγματων ποσοτήτων, διακριτών και συνεχών, διερεύνησης της σχέσης μεγέθους τους και της λεκτικής περιγραφής τους. Ακόμη έχουν εισαχθεί στη συμβολική γραφή απλών κλασμάτων (π.χ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$) (Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, 2003 Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Οι δραστηριότητες αυτές στο παρόν βιβλίο επαναλαμβάνονται, αλλά περιλαμβάνουν, πλέον, και εικονικές και συμβολικές ποσότητες, ενώ προστίθενται και κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας και μεικτοί αριθμοί. Οι μαθητές/ήτριες κατασκευάζουν ισοδύναμα κλάσματα και αναπαριστάνουν την ίδια σχέση μεγεθών με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις, βρίσκουν οποιοδήποτε κλάσμα ανάμεσα σε άλλα και συγκρίνουν κλάσματα με διαφορετικούς τρόπους. Αναφορικά με τις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, οι μαθητές/ήτριες μαθαίνουν να κάνουν όλες τις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς. Και για τις τέσσερις πράξεις, αξιοποιούνται και ενθαρρύνονται διάφορες μέθοδοι/ στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Πολλά παιδιά δυσκολεύονται στην κατανόηση και στον αποτελεσματικό χειρισμό των κλασμάτων, επειδή δεν αντιλαμβάνονται την αφηρημένη φύση τους, την ποικιλία των ερμηνειών τους, την ιδιαίτερη γλώσσα που χρησιμοποιείται στη μελέτη τους και τους αλγορίθμους που απαιτεί η αριθμητική τους (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

- Οι μαθητές/ήτριες αντιμετωπίζουν δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων που σχετίζονται με το φαινόμενο της μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005). Η πλέον χαρακτηριστική δυσκολία κατανόησης οφείλεται στην πυκνή δομή των ρητών αριθμών σε αντίθεση με τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).
- Οι μαθητές/ήτριες αρκετές φορές κάνουν λάθη στις αναπαραστάσεις των κλασματικών αριθμών, όπως στην αναγνώριση του κλάσματος μέσα από συνεχή επιφάνεια, καθώς στρέφουν την προσοχή τους μόνον στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται και δεν συγκρατούν και τις δύο διαστάσεις που απεικονίζει ένας κλασματικός αριθμός (Φιλίππου & Χρίστου, 2004). Επίσης, στην αναγνώριση κλασμάτων ως μέρος συνόλου αντικειμένων απαντούν με κλάσμα, αλλά συχνά αναφέρονται σε λόγο και όχι σε μέρος από σύνολο αντικειμένων.
- Λάθη των μαθητών/ριών παρουσιάζονται και στις διαφορετικές διαστάσεις της έννοιας του κλασματικού αριθμού και κυρίως στην αναγνώριση του κλασματικού αριθμού ως μέτρου και την αναπαράστασή του στην αριθμογραμμή. Επίσης, δυσκολεύονται να θεωρήσουν το κλάσμα ως πηλίκο της διαίρεσης ανάμεσα σε δύο αριθμούς (Γαγάτσης κ.ά., 2006).
- Όσον αφορά στους μεικτούς αριθμούς, οι Fazio & Siegler (2011) σημειώνουν ότι κάποια παιδιά αγνοούν το κλασματικό μέρος των μεικτών και ασχολούνται μόνον με το ακέραιο μέρος. Άλλα αντιμετωπίζουν το ακέραιο μέρος ως ένα κλάσμα το οποίο έχει όμοιο παρονομαστή με το κλάσμα που δίνεται. Τέλος, κάποια προσθέτουν το ακέραιο μέρος του μικτού αριθμού στον αριθμητή του κλάσματος. Συχνά οι μαθητές/ήτριες ταυτίζουν την έννοια του κλάσματος με εκείνη του κλάσματος που είναι μικρότερο από την ακέραιη μονάδα και στο ότι μόνον αυτό εκφράζει τη σχέση «μέρος - όλο».
- Σύμφωνα με τη θέση αρκετών επιστημόνων, η ερμηνεία του κλάσματος ως σημείου της αριθμογραμμής προσφέρεται περισσότερο για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία της ισοδυναμίας κλασμάτων. Οι μαθητές/ήτριες, αν και δυσκολεύονται με τη βοήθεια της αριθμογραμμής, κατανοούν το γεγονός ότι, ενώ κάθε αριθμός θεωρείται μοναδικός, μπορεί να ονομαστεί με διαφορετικούς τρόπους και επομένως το ίδιο σημείο της αριθμογραμμής, μπορεί να εκφραστεί με δύο διαφορετικά κλάσματα (Saxe et al., 2007). Οι μαθητές/ήτριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι δυο κλάσματα με διαφορετικούς όρους είναι ισοδύναμα όπως και ότι κλάσματα με διαφορετικούς όρους μπορεί να εκφράζουν το ίδιο μέρος μίας ποσότητας. Βρήκε ακόμη ότι οι μαθητές/ήτριες συχνά δεν αντιλαμβάνονται ότι ανάμεσα σε δύο κλάσματα, στην αριθμογραμμή, υπάρχουν άπειρα άλλα κλάσματα.
- Οι μαθητές/ήτριες συχνά θεωρούν ότι μεγαλύτερα κλάσματα είναι εκείνα που έχουν με-

γαλύτερους παρονομαστές. Επίσης, ότι το κλάσμα με τους μικρότερους αριθμούς είναι και το μικρότερο.

- Στις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς οι μαθητές/ήτριες στην πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων πολλές φορές αντιλαμβάνονται τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος ως φυσικούς αριθμούς ανεξάρτητους μεταξύ τους. Ακόμη συνδέουν ελλιπώς ή λανθασμένα τα κλάσματα με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των φυσικών αριθμών. Έτσι θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει πάντοτε τους αριθμούς και η διαίρεση τους μικραίνει. Τέλος, η δυσκολία στην εκτέλεση πράξεων με κλασματικούς αριθμούς συνδέεται με τους πολύπλοκους κανόνες που διέπουν τους αλγορίθμους εκτέλεσης των συγκεκριμένων πράξεων. Συνήθως, οι κανόνες αυτοί, που μαθαίνονται κυρίως "από μνήμης", άλλοτε χρησιμοποιούνται μηχανικά και άλλοτε παραποιούνται και εφαρμόζονται λανθασμένα (Γαγάτσης κ.ά., 2004).

Δ. Εποπτικό υλικό

Οι μαθητές/ήτριες με τη χρήση διαφορετικών **χειραπτικών αντικειμένων - μοντέλων** (επιφάνειας, συνόλου, μέτρησης) εξασκούνται στην οπτικοποίηση, στον υπολογισμό και στη δημιουργία αναπαραστάσεων των κλασμάτων. Στην ενότητα αυτήν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω μοντέλα (Van de Walle, 2005):

α) Τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού: Τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού περιλαμβάνουν ορθογώνιες επιφάνειες, κυκλικούς δίσκους, γεωπίνακες, διάστικτους καμβάδες, ορθογωνίους, pattern blocks, διπλωμένο χαρτί.

β) Μοντέλα μήκους μέτρησης: Στα μοντέλα μήκους ή μέτρησης αντί για εμβαδά συναντάμε μήκη. Σε αυτήν την κατηγορία μοντέλων είτε σχεδιάζουμε και υποδιαιρούμε ευθείες γραμμές, είτε συγκρίνουμε χειραπτικά υλικά ως προς το μήκος τους. Μοντέλα μήκους ή μέτρησης είναι οι λωρίδες κλασμάτων και οι ράβδοι Cuisenaire, ευθύγραμμα τμήματα, διπλωμένες λωρίδες χαρτιού, και η αριθμογραμμή.

γ) Μοντέλα συνόλων: Στα μοντέλα συνόλων περιλαμβάνονται διάφορα σύνολα αντικειμένων. Σε αυτά τα μοντέλα το ίδιο το σύνολο είναι η μονάδα αναφοράς, ενώ τα υποσύνολα του συνόλου αποτελούν κλασματικά μέρη.

Επιπρόσθετα, η εμπλοκή των μαθητών/ριών σε δραστηριότητες μαθηματικών συλλογισμών και επικοινωνίας με την αξιοποίηση των **ψηφιακών εργαλείων** σε πραγματικά προβλήματα και μοντελοποίηση των κλασμάτων θα συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης τους.

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να ερμηνεύουν το κλάσμα ως μέρος της ακεραίας μονάδας, ως μέρος συνόλου και ως μέτρο,
- να αναγνωρίζουν και να αναπαριστάνουν τις διαφορετικές ερμηνείες της σχέσης μέρους/όλου,
- να χωρίζουν διακριτές και συνεχείς ποσότητες σε ίσα μέρη, να διερευνούν και να περιγράφουν τη μεταξύ τους σχέση και να την εκφράζουν με κλάσμα,
- να τοποθετούν πάνω στην αριθμογραμμή κλασματικούς αριθμούς.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτί για δίπλωση, ο αντίστοιχος για το κεφάλαιο πίνακας του παραρτήματος, σύνολα αντικειμένων δύο χρωμάτων (π.χ. χάντρες, μολύβια, μπαλόνια)

Ψηφιακά εργαλεία

https://phet.colorado.edu/el/simulation/legacy/fractions-intro

https://phet.colorado.edu/el/simulation/legacy/build-a-fraction

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Αναδεικνύονται οι ιδέες των μαθητών/ριών για την έννοια του κλάσματος ως μέρους συνεχούς επιφάνειας και διερευνούν σχέσεις μεταξύ διαφορετικών μερών της επιφάνειας. Οι μαθητές/ήτριες για τη διερεύνηση χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο πίνακα του παραρτήματος. Κόβουν τα μέρη του πίνακα και με δοκιμές πάνω στον πίνακα του ΒΜ ανακαλύπτουν τι μέρος του όλου, δηλαδή του πίνακα, είναι το καθένα από τα γεωμετρικά σχήματα Α, Β, Γ, Δ και Ε.

Προτρέπουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες να παρατηρήσουν τον πίνακα (η μονάδα αναφοράς- το όλο είναι ο πίνακας). Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να βρουν όλα τα αποτελέσματα (με εξαίρεση το Ε) με τοποθέτηση κάθε κομματιού πάνω στον πίνακα και έλεγχο πόσες φορές επαναλαμβάνεται, για να καλύψει ολόκληρο τον πίνακα. <u>Ο/Η εκπαιδευτικός προτείνεται να παροτρύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κάνουν και συγκρίσεις μεταξύ των κομματιών και να βρουν και πιο σύντομους τρόπους.</u>

Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι το Α μέρος χωράει 4 φορές πάνω στον πίνακα. Επομένως είναι Α = $\frac{1}{4}$. Το Β μέρος χωράει 8 φορές πάνω στον πίνακα. Επομένως Β= $\frac{1}{8}$. *<u>Σημείωση</u>: Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να καταλήξουν στο ίδιο συμπέρασμα ανακαλύπτοντας ότι το Β χωράει στο Α 2 φορές. Ο πίνακας μπορεί να χωριστεί σε 16Γ, επομένως Γ=* $\frac{1}{16}$. *<u>Σημείωση</u>: Οι μαθητές/ήτριες και εδώ* *μπορούν να καταλήξουν στο ίδιο συμπέρασμα με πολλούς τρόπους.* Με αντίστοιχους τρόπους καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $Δ=\frac{1}{32}$.

Για την περίπτωση του Ε, το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προκύψει ύστερα από επανάληψη της τοποθέτησης πάνω στον πίνακα, πρέπει επομένως να γίνουν συγκρίσεις με τα άλλα κομμάτια. *Σημείωση: Για παράδειγμα το Ε αποτελείται από το Β και το μέρος που περισσεύει είναι, συνολικά, 1Δ (μισό και μισό). Άρα Ε=Δ+Β=Δ+4Δ=5Δ και αφού* $Δ = \frac{1}{32}$, *θα είναι* $Ε = \frac{5}{32}$.

2. Στη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες διερευνούν την έννοια του κλάσματος ως μέρους ενός συνόλου αντικειμένων. Ενθαρρύνουμε τα παιδιά να εκφράσουν με διαφορετικούς τρόπους με κλάσμα το μέρος που εκφράζει τις κόκκινες και τις κίτρινες χάντρες. Οι μαθητές/ήτριες ενδέχεται να χωρίσουν τις χάντρες σε τετράδες του ίδιου χρώματος (3 ίσα μέρη) ή σε δυάδες του ίδιου χρώματος (6 ίσα μέρη). *Σημείωση: Η χρήση μοντέλων στα οποία δεν υπάρχει προκαθορισμένη μονάδα οδηγεί τους μαθητές και τις μαθήτριες στο να επιλέξουν με νοητικούς χειρισμούς τη μονάδα για την αναπαράσταση των δυο κλασμάτων.*

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζεται η έννοια του κλάσματος ως μέρος ενός όλου (μίας ακεραίας μονάδας).

Εφαρμογή: Με τη βοήθεια του τετραγωνισμένου χαρτιού, οι μαθητές/ήτριες χωρίζουν την αριθμογραμμή από το 0 μέχρι το 1 σε 4 ίσα μέρη, τόσα, δηλαδή, όσα δείχνει ο παρονομαστής τους κλάσματος. Προσδιορίζουν τη θέση της κλασματικής μονάδας $\frac{1}{4}$ στην αριθμογραμμή και, στη συνέχεια, την επαναλαμβάνουν όσες φορές υποδεικνύουν τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ (3 φορές) και $\frac{4}{4}$ (4 φορές) σύμφωνα με τον αριθμητή. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι το $\frac{4}{4}$ είναι ίσο με το 1.

Αναστοχασμός

2. Οι μαθητές/ήτριες πιθανόν να αναρωτηθούν τι συμβαίνει, όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. *Σημείωση: Ίσως κάποια παιδιά με τη βοήθεια ενός μοντέλου (π.χ. αριθμογραμμής) να μπορούν να εξηγήσουν ότι ένα κλάσμα, όπως το* $\frac{5}{3}$, *είναι μεγαλύτερο του 1. Στην περίπτωση κατά την οποία οι μαθητές/ήτριες μας πουν ότι δεν υπάρχουν κλάσματα μεγαλύτερα του 1, τους λέμε ότι θα το συζητήσουμε στο επόμενο μάθημα.*

3. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να δημιουργήσουν και ψηφιακή αφίσα και να την αναρτήσουν σε εκπαιδευτικές ψηφιακές πλατφόρμες.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Στον σχηματισμό με τα αστέρια οι μαθητές/ήτριες δύναται να εκφράσουν το χρωματισμένο μέρος με το κλάσμα $\frac{2}{6}$ αλλά και με το $\frac{1}{3}$. *Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες που αντιλαμβάνονται ότι η ισοδιαμέριση του συνόλου μπορεί να γίνει και σε 3 υποσύνολα, αντί για 6 υποσύνολα,* *έχουν προχωρήσει με νοητικούς χειρισμούς σε υψηλότερο επίπεδο κατανόησης της μαθηματικής έννοιας του κλάσματος ως μέρους ενός συνόλου.*

2η Άσκηση: Η ερώτηση του Νίκου δίνει την ευκαιρία να γίνει συζήτηση για την έννοια του κλάσματος ως μέρους του όλου και ο χωρισμός του όλου σε ίσα μέρη. Στη σημαία της Κόστα Ρίκας το κόκκινο είναι διπλάσιο από τα υπόλοιπα μέρη. Επομένως έχουμε 6 ίσα μέρη και όχι 5.

3η Άσκηση: α, β. Οι μαθητές/ήτριες είναι προφανές ότι δεν υποχρεούνται να ακολουθήσουν συγκεκριμένη σειρά. δ. Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο με τρεις γραμμές και τρεις στήλες (δηλαδή ένα τετράγωνο 3x3). *Σημείωση: Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια.*

1ο Πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες χωρίζουν με τη βοήθεια του τετραγωνισμένου χαρτιού την αριθμογραμμή σε ίσα μέρη με όποιον τρόπο θέλουν. *Σημείωση: χωρισμός σε τρία ίσα μέρη.*

2ο Πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες είτε μπορούν να συγκρίνουν τα κλάσματα $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$ αναπαριστώντας τα με κυκλικούς δίσκους (ή με όποιο άλλο μοντέλο αναπαράστασης επιθυμούν) είτε να συγκρίνουν τα λεπτά της ώρας.

3ο Πρόβλημα: Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές/ήτριες την αλλαγή που γίνεται στη μονάδα αναφοράς. α. Το οικόπεδο μπορεί να χωριστεί οριζόντια ή κάθετα. Όμως ο κάθετος χωρισμός οδηγεί σ' ένα αρκετά μακρόστενο σπίτι. β. Στη συνέχεια, οι μαθητές/ήτριες χωρίζουν το υπόλοιπο οικόπεδο, δηλαδή το άλλο μισό σε 5 ίσα μέρη. Τα 2 από αυτά είναι ο κήπος (6 τετραγωνάκια).

Διερεύνηση- Επέκταση: Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν το κυκλικό διάγραμμα και βρίσκουν με κλάσμα το μέρος των μαθητών/ριών που προτιμούν κάθε όμιλο: αθλητισμού: $\frac{1}{2}$, μουσικής: $\frac{1}{4}$, θεάτρου: $\frac{1}{8}$, εικαστικών: $\frac{1}{8}$. Στο ραβδόγραμμα οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι ο άξονας που δείχνει το πλήθος των μαθητών/ριών είναι χωρισμένος ανά 20 μαθητές/ήτριες και συμπληρώνουν αντίστοιχα: 20, 40, 60, 80, 100. Επίσης, στη μέση, ανάμεσα στο 20 και το 40, τοποθετούν το 30, που αντιστοιχεί στους μαθητές/ήτριες του ομίλου εικαστικών και του ομίλου θεάτρου.

Μπορούμε να πάρουμε και από τα δύο διαγράμματα τις ίδιες πληροφορίες. Στο κυκλικό διάγραμμα όμως παρουσιάζεται κυρίως το μέρος των μαθητών/ριών που προτιμούν τον κάθε όμιλο σε σχέση με το σύνολο, ενώ στο ραβδόγραμμα δίνεται η δυνατότητα απεικόνισης του πλήθους των μαθητών/ριών που προτιμούν κάθε όμιλο.

Θα χρησιμοποιούσαμε κυρίως το κυκλικό διάγραμμα, για να απεικονίσουμε τη σχέση του μέρους ως προς το όλο. Θα χρησιμοποιούσαμε το ραβδόγραμμα στις περισσότερες περιπτώσεις, γιατί είναι πιο εύκολο στην κατασκευή με το χέρι, μας δίνει πολλές πληροφορίες (απόλυτες τιμές, μέρη) και εύκολα μπορούμε να συγκρίνουμε τις διαφορετικές συχνότητες (τα διαφορετικά μέρη) μεταξύ τους.

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας,
- να μετατρέπουν κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας σε μεικτούς αριθμούς και το αντίστροφο.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτόνι, αριθμογραμμή, ράβδοι κλασμάτων

Ψηφιακά εργαλεία

http://demonstrations.wolfram.com/search.html?query=fractions

https://phet.colorado.edu/en/simulation/fraction-matcher

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Στη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες εργάζονται με τα υλικά του προβλήματος. Χωρισμένοι σε ομάδες μπορούν να κόψουν δύο χαρτόνια, σε 4 ίσα κομμάτια το καθένα (με δίπλωση στα τέσσερα). Επεξεργάζονται τον διάλογο των παιδιών και συζητούν τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να εκφράσουν το μέρος του χαρτονιού (5 χαρτόνια) με μονάδα αναφοράς το ένα χαρτόνι και να βρουν τους τρόπους με τους οποίους είναι δυνατόν να το αναπαραστήσουν.

α΄ τρόπος: Στον πρώτο τρόπο οι μαθητές/ήτριες σχεδιάζουν τα 5 κομμάτια χαρτιού. Καθώς κάθε κομμάτι είναι το $\frac{1}{4}$ του κάθε χαρτονιού, τα 5 κομμάτια είναι τα $\frac{5}{4}$ $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})$ των χαρτονιών συνολικά. Παρατηρούν ότι στο κλάσμα αυτό ο αριθμητής, είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.

β΄ τρόπος: Στον δεύτερο τρόπο οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι τα 4 κομμάτια χαρτονιού είναι τα 4/4 του κάθε χαρτονιού, δηλαδή ένα ολόκληρο χαρτόνι. Το 5ο κομμάτι χαρτονιού είναι το $\frac{1}{4}$ του δεύτερου χαρτονιού. Συνολικά, έχουμε $\frac{4}{4}$ και $\frac{1}{4}$ ακόμη ή $1\frac{1}{4}$.

Σημείωση: Οι παραπάνω διαδικασίες βοηθούν τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν πώς μπορεί ένα κλάσμα να είναι μεγαλύτερο της μονάδας.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζονται κλάσματα μεγαλύτερα της ακέραιης μονάδας. Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες τη σχέση του αριθμητή με τον παρονομαστή στα κλάσματα που είναι μεγαλύτερα της μονάδας και τον τρόπο με τον οποίο ο μεικτός αριθμός αναπαριστάνεται με τη χρήση του «συν».

Εφαρμογή: 1. Εδώ χρησιμοποιείται η αριθμητική γραμμή ως ένα διαφορετικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι της μονάδας. Η αριθμητική γραμμή βοηθάει τους μαθητές και τις μαθήτριες στην αναγνώριση του κλάσματος ως μέτρου. Επομένως πάνω σε μιαν αριθμογραμμή στην οποία φαίνονται 2 ή 3 και περισσότερες ακέραιες μονάδες, οι μαθητές/ήτριες αναγνωρίζουν και τοποθετούν το $\frac{1}{4}$, τα $\frac{4}{4}$ (δηλαδή το 1), τα $\frac{8}{4}$ (δηλαδή το 2), και τα $\frac{9}{4}$. Διαπιστώνουν και με αυτόν τον τρόπο ότι τα κλάσματα μπορεί να είναι και μεγαλύτερα από την ακέραιη μονάδα. *<u>Σημείωση:</u> Το συνηθισμένο τέχνασμα της μετατροπής μεικτού αριθμού σε κλάσμα ($2\frac{1}{4} = \frac{2x4+1}{4} = \frac{9}{4}$) προτείνεται να αποφεύγεται, γιατί δυσκολεύει αρκετά τους μαθητές και τις μαθήτριες χωρίς να βοηθάει στην κατανόηση των κλασμάτων των μεγαλύτερων της ακέραιης μονάδας.*

2. Στην περίπτωση μετατροπής μεικτού αριθμού σε κλάσμα γίνεται ανάλυση του μεικτού αριθμού (σε ακέραιο και κλασματικό μέρος) και μετατροπή των ακέραιων μονάδων του σε κλάσμα.

Αναστοχασμός

Οι μαθητές/ήτριες αναστοχάζονται πάνω στη σχέση του αριθμητή και του παρονομαστή στην περίπτωση των κλασμάτων που είναι μεγαλύτερα της μονάδας. Στο κλάσμα $\frac{a}{3}$, το α μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, δηλαδή α>3. Στη συνέχεια, γενικεύουν τη διαπίστωσή τους συμπεραίνοντας ότι στα κλάσματα που είναι μεγαλύτερα της μονάδας ο αριθμητής είναι πάντοτε μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Γίνεται αντιστοίχιση της εικονικής (των γεωμετρικών μοντέλων συνεχούς επιφάνειας) με τη συμβολική αναπαράσταση των κλασμάτων που είναι μεγαλύτερα της μονάδας και των μεικτών αριθμών.

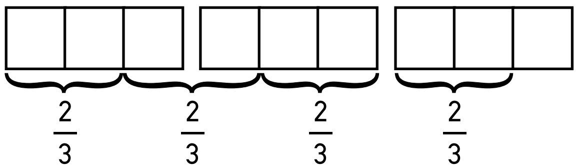
2η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες τοποθετούν τα κλάσματα και τον μεικτό αριθμό στην κατάλληλη αριθμογραμμή. Για την τοποθέτησή τους απαραίτητη είναι η παρατήρηση του παρονομαστή που δείχνει τον τρόπο χωρισμού της ακέραιης μονάδας.

3η Άσκηση: Συζητάμε με τους μαθητές/ήτριες για το αν η εικόνα αναπαριστάνει κλάσμα μεγαλύτερο ή μικρότερο της μονάδας. Επισημαίνουμε κάθε φορά τη μονάδα αναφοράς. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι τα κομμάτια της τρίτης πίτσας αναπαριστάνουν τα $\frac{3}{4}$ αυτής. Για να βρουν το κλάσμα που αναπαριστάνεται, πρέπει να χωριστούν και οι υπόλοιπες δυο πίτσες σε 4 ίσα μέρη. Κάθε πίτσα αναπαριστάνει το κλάσμα $\frac{4}{4}$. Βρίσκουν το κλάσμα, το μεγαλύτερο της μονάδας, $\frac{11}{4}$ ($\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$) και τον αντίστοιχο μεικτό του, $2\frac{3}{4}$.

1ο Πρόβλημα: Η Αθηνά πατώντας το κουμπί δύο φορές μετακινεί το ρομποτάκι της στο σημείο που αντιστοιχεί στα $\frac{10}{4}$ της αριθμογραμμής.

Διερεύνηση- Επέκταση: Τα παιδιά που θα μοιραστούν τα παστέλια είναι 4 και ο αριθμός των λιγότερων παστελιών που μπορεί να μοιραστούν είναι 3. Οι μαθητές/ήτριες σχεδιάζουν τα παστέλια που θα μοιραστούν οι 4 φίλοι, έτσι ώστε καθένας να πάρει τα $\frac{2}{3}$ από το καθένα. Χωρίζουν κάθε παστέλι σε 3 ίσα μέρη.

1. Ρωτάμε τους μαθητές/ήτριες αν μπορούν οι 4 φίλοι να μοιραστούν ένα παστέλι, δύο παστέλια κ.λπ., ώστε ο καθένας να πάρει τα $\frac{2}{3}$. Οι μαθητές/ήτριες πειραματίζονται σχεδιάζοντας.



2. Οι τέσσερις φίλοι έφαγαν $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

3. Τα παιδιά αγόρασαν 3 παστέλια.

4. Περίσσεψε το $\frac{1}{3}$ του παστελιού.

- Δεν θα περίσσευε κανένα κομμάτι παστελιού, αν τα παιδιά ήταν 3, 6, 9 (αν, δηλαδή, το πλήθος των παιδιών ήταν πολλαπλάσιο του 3).

Κεφάλαιο 15: Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διαπιστώσουν ότι το κλάσμα εκφράζει το πηλίκο διαίρεσης,
- να εκφράζουν κλάσματα ως διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή και να βρίσκουν το πηλίκο.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

αριθμομηχανή

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-6485

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-6495

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Στη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες διερευνούν την έννοια του κλάσματος ως πηλίκου.

α. Στο πρώτο μέρος οι μαθητές/ήτριες διερευνούν μιαν οικεία προβληματική κατάσταση διαίρεσης με πηλίκο ακέραιο αριθμό (8:4 = 2), που θα τους δώσει τη δυνατότητα να κατανοήσουν ότι σε κάθε άλλη ανάλογη προβληματική κατάσταση μπορούμε να κάνουμε πάλι διαίρεση.

Στη συνέχεια, με τη σύντομη συζήτηση – προβληματισμό που ακολουθεί, αναμένουμε μέσα από παραδείγματα οι μαθητές/ήτριες να κατανοήσουν (ή να επαναφέρουν στη μνήμη τους) ότι όταν μοιράζουμε, το αποτέλεσμα δεν μπορεί να είναι πάντοτε ακέραιες μονάδες.

β. Στο δεύτερο μέρος οι μαθητές/ήτριες συνεχίζοντας από την προηγούμενη συζήτηση γνωρίζουν ότι μπορούν να βρουν το αποτέλεσμα κάνοντας διαίρεση. Δουλεύοντας με τον τρόπο του Νίκου διερευνούν έναν άλλον τρόπο εύρεσης του αποτελέσματος.

Σημείωση: Σχεδιάζουμε 3 σοκολάτες και χωρίζουμε καθεμία σε 4 κομμάτια. Τα 4 παιδιά θα πάρουν ένα κομμάτι από κάθε σοκολάτα. Όπως έχουμε προαναφέρει, ενδέχεται οι μαθητές/ήτριες να μοιράσουν τις 2 σοκολάτες σε δύο κομμάτια και να πάρει το κάθε παιδί από ένα κομμάτι και την τρίτη σοκολάτα σε τέσσερα κομμάτια και να πάρουν πάλι από ένα. Στην περίπτωση αυτή (που μοιάζει με τα εναδικά κλάσματα των αρχαίων Αιγυπτίων) παροτρύνουμε τα παιδιά να σκεφτούν τρόπους, για να εκφράσουν το αποτέλεσμα με ένα μόνον κλασματικό αριθμό.

- Στη συνέχεια, αναμένουμε οι μαθητές/ήτριες παρατηρώντας το σχέδιο να αναγνωρίσουν ότι ο αριθμητής δείχνει τα αντικείμενα που θα χωριστούν (τις σοκολάτες), ενώ ο παρονομαστής τα μέρη στα οποία χωρίζουμε την κάθε σοκολάτα (όσα είναι τα παιδιά).
- Οι μαθητές/ήτριες διαπιστώνουν ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης δεν μπορεί να είναι διαφορετικό από αυτό που βρήκαν σχεδιάζοντας, δηλαδή $3:4 = \frac{3}{4}$.

γ. Στο τρίτο μέρος τα παιδιά αντιμετωπίζουν μιαν προβληματική κατάσταση στην οποία τα ίσα μερίδια είναι μεγαλύτερα από τη μονάδα και, κατά συνέπεια, ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Εργάζονται με τον προηγούμενο τρόπο και διαπιστώνουν ότι $5:4= \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζεται η έννοια του κλάσματος ως του πηλίκου της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή.

<u>Σημείωση:</u> Στη διαίρεση δύο φυσικών αριθμών, η γραφή του πηλίκου με δεκαδικό αριθμό δεν είναι πάντοτε εύκολη, αφού ενδέχεται ο δεκαδικός αριθμός να είναι περιοδικός (π.χ. 2:3 = 0,666…).

Στρατηγικές διαχείρισης αριθμών: 1. Με το δεδομένο ότι οι μαθητές/ήτριες γνωρίζουν τους δεκαδικούς αριθμούς, μπορούμε να δείξουμε τη μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό. Επειδή ακόμη δεν έχουν διδαχτεί τον μηχανισμό της διαίρεσης με πηλίκο δεκαδικό αριθμό, χρησιμοποιούμε για τις μετατροπές αριθμομηχανή τσέπης.

2. Στη μετατροπή κλάσματος μεγαλύτερου της μονάδας σε μεικτό αριθμό εφαρμόζεται η έννοια του κλάσματος ως πηλίκου με τη μετρική ερμηνεία του, σύμφωνα με την οποία ο διαιρέτης μετρά κάποια ποσότητα, η οποία επαναληπτικά εξάγεται από τον Διαιρετέο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα ίσα μερίδια είναι «έβδομα». Τα $\frac{35}{7}$ είναι οι 5 ακέραιες μονάδες και το $\frac{1}{7}$ είναι το υπόλοιπο.

<u>Σημείωση:</u> Στην έννοια του κλάσματος ως πηλίκου, μπορεί να γίνει μια διάκριση ερμηνειών του πηλίκου: στη μεριστική ερμηνεία, κατά την οποία ο Διαιρετέος μερίζεται σε τόσα μέρη, όσα καθορίζει ο διαιρέτης και στη μετρική ερμηνεία, κατά την οποία ο διαιρέτης μετρά κάποια ποσότητα, η οποία επαναληπτικά εξάγεται από το διαιρετέο (Κολέζα, 2000). Οι δύο αυτές ερμηνείες του πηλίκου αντιστοιχούν στη διαίρεση μερισμού και μέτρησης αντίστοιχα.

Εφαρμογή: Εμπέδωση της διαδικασίας της ισοδιαμέρισης. Επειδή η μονάδα είναι σύνθετη, τα αντικείμενα (μήλα) θα πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος. Τα ίσα μερίδια μπορεί να είναι μικρότερα, ίσα ή μεγαλύτερα από τη μονάδα και, συνεπώς, ο αριθμητής μπορεί να είναι μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Στην περίπτωσή μας είναι μεγαλύτερος.

Ο Διαιρετέος (6) αναφέρεται στον αριθμό των αντικειμένων που θα μοιραστούν, ενώ ο διαιρέτης (4+1=5) στον αριθμό των ίσων κομματιών στα οποία θα μοιραστεί το κάθε αντικείμενο.

<u>Σημείωση:</u> Η Κολέζα (2000) αναφέρει το ενδεχόμενο να έχουμε π.χ. 6 διαφορετικά φρούτα που μοιράζουμε σε 5 φίλους. Στην περίπτωση αυτή γίνεται περισσότερο σαφές το γιατί πρέπει να μοιράσουμε το κάθε φρούτο σε 5 ίσα μέρη.

Αναστοχασμός

1. Ο διαιρέτης στην ευκλείδεια διαίρεση δεν μπορεί να είναι μηδέν, επομένως, αφού κάθε κλάσμα είναι το πηλίκο του αριθμητή δια του παρονομαστή, ο παρονομαστής (ως διαιρέτης) δεν μπορεί να είναι μηδέν.

2. Επειδή η έννοια του ρητού αριθμού με τις αλγεβρικές του ιδιότητες θα αποτελέσουν αντικείμενο διδασκαλίας σε μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές/ήτριες σε αυτήν την ηλικία μπορούν να ερμηνεύουν την έννοια του κλάσματος ως πηλίκου μέσα από προβληματικές καταστάσεις διαίρεσης, π.χ. «Μοιράζω 7 τυρόπιτες σε 5 παιδιά». Ο αριθμητής δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων (τυρόπιτες) που θα μοιραστούν, ενώ ο παρονομαστής τον αριθμό των ίσων κομματιών (5 ίσα μέρη) στα οποία θα μοιραστεί το κάθε αντικείμενο.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες εκφράζουν το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης και το αντίστροφο.

2η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες μετατρέπουν τα κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας σε μεικτούς αριθμούς με τη βοήθεια της διαίρεσης: $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$, $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$, $\frac{21}{7} = 3$

1ο Πρόβλημα: 7 χαρτόνια μοιράζονται σε 3 αδέρφια. Είναι 7:3 = $\frac{7}{3}$. Καθένα από τα αδέρφια χρησιμοποίησε τα $\frac{7}{3}$ ενός χαρτονιού.

2ο Πρόβλημα: Το κάθε κουταβάκι έφαγε τα $\frac{8}{12}$ της σκυλοτροφής.

3ο Πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες εκφράζουν με κλάσμα το μέρος της πίτσας που θα φάει κάθε άτομο στο καθένα από τα δύο τραπέζια και συγκρίνουν. Στο τραπέζι των τριών ατόμων καθένα θα φάει τα $\frac{2}{3}$ της πίτσας και στο τραπέζι των 8 ατόμων καθένα θα φάει τα $\frac{4}{8}$ της πίτσας, δηλαδή τη μισή πίτσα. Οι μαθητές/ήτριες προβαίνουν σε σύγκριση των κλασμάτων. Το $\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερο από το μισό, επομένως στο τραπέζι των τριών ατόμων καθένας θα φάει περισσότερη πίτσα.

4ο Πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες δημιουργούν τα δικά τους προβλήματα διαίρεσης (διαίρεσης μερισμού).

Διερεύνηση- Επέκταση: Στη δραστηριότητα αυτήν κατευθύνουμε τη συζήτηση στον τρόπο με τον οποίο μπορούν να μοιραστούν 3 φίλοι 4 διαφορετικά φρούτα. Οι μαθητές/ήτριες χρειάζεται να κατανοήσουν ότι κάθε φρούτο θα χωριστεί σε 3 ίσα κομμάτια και κάθε παιδί θα πάρει το $\frac{1}{3}$ κάθε φρούτου. Συνολικά, κάθε παιδί θα έχει πάρει $\frac{4}{3}$ φρούτα. Ο αριθμητής δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων (φρούτων) που θα μοιραστούν, ενώ ο παρονομαστής τον αριθμό των ίσων κομματιών (3 ίσα μέρη) στα οποία θα μοιραστεί το κάθε αντικείμενο (φρούτο).

Κεφάλαιο 16: Ισοδυναμία κλασμάτων - Απλοποίηση κλασμάτων

Στόχοι- Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν ισοδύναμα κλάσματα,
- να απλοποιούν κλάσματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

ράβδοι κλασμάτων από το παράρτημα, χαρτί Α4, αριθμογραμμή

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-1962

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν διαφορετικούς τρόπους, για να χωρίσουν τη σελίδα με τα γραμματόσημα σε ίσα μέρη, ώστε να διαπιστώσουν τι μέρος της σελίδας καταλαμβάνουν τα γραμματόσημα. Με τις κατάλληλες διπλώσεις καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι και τα δύο παιδιά έχουν δίκιο, γιατί $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, δηλαδή ότι τα δύο κλάσματα εκφράζουν το ίδιο μέρος της σελίδας.

Αναμένουμε οι μαθητές/ήτριες να παρατηρήσουν ότι το κλάσμα $\frac{3}{4}$ προκύπτει από το κλάσμα $\frac{9}{12}$, αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους του τελευταίου με το 3.

2. Τα παιδιά, για να βρουν κλάσματα ισοδύναμα με το $\frac{6}{12}$, χρησιμοποιούν τις ράβδους κλασμάτων του παραρτήματος. Τοποθετούν τη μία ράβδο κάτω από την άλλη και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Οι όροι των κλασμάτων προκύπτουν από τη διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή με τον ίδιον αριθμό.

$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2}$					

Εισάγουμε τον όρο ανάγωγο κλάσμα, το οποίο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Στην απλοποίηση οι μαθητές/ήτριες διαπιστώνουν ότι θα μπορούσαν να καταλήξουν σε ισοδύναμο ανάγωγο κλάσμα, αν εξ αρχής διαιρούσαν αριθμητή και παρονομαστή με τον μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη.

Εφαρμογή: 1. Οι μαθητές/ήτριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν τον χωρισμό της ακέραιης μονάδας σε ίσα διαστήματα με δύο διαφορετικά μέτρα μέτρησης (το $\frac{1}{5}$ και το $\frac{1}{20}$).

2. Μια από τις δυσκολίες εννοιολογικής φύσης, που οφείλονται στην πυκνή δομή των ρητών αριθμών, σε αντίθεση με τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών, είναι και η αντίληψη ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κλάσματα, όπως $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$, δεν υπάρχει άλλος κλασματικός αριθμός. Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής και της ισοδυναμίας οι μαθητές/ήτριες διευκολύνονται να κατανοήσουν ότι οι ρητοί αριθμοί είναι άπειροι.

Αναστοχασμός

1. Εφόσον είναι άπειροι οι φυσικοί αριθμοί με τους οποίους μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή ενός κλάσματος, άπειρα είναι και τα ισοδύναμα κλάσματα που μπορεί να έχει ένα κλάσμα.

2. Είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση της ισοδυναμίας να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές/ήτριες τις ράβδους κλασμάτων.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Για να βρουν οι μαθητές/ήτριες κλάσματα ισοδύναμα με το αρχικό, πρέπει να χρωματίσουν το ίδιο μέρος στα συνεχή μοντέλα αναπαράστασης.

Είναι : $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. *<u>Σημείωση:</u> Στις δύο πρώτες περιπτώσεις οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι το μισό μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$.

2η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες τοποθετούν τα κλάσματα στην κατάλληλη αριθμογραμμή. Για την τοποθέτησή τους απαραίτητη είναι η παρατήρηση του παρονομαστή που δείχνει τον τρόπο χωρισμού της ακέραιης μονάδας. Παρατηρούν τη θέση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή και βρίσκουν ζεύγη ισοδύναμων κλασμάτων (βρίσκονται στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής). $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ και $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

3η Άσκηση: Δημιουργία ανάγωγων κλασμάτων με τη χρήση των κριτηρίων διαιρετότητας :
$\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$, $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$, $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, $\frac{16}{100} = \frac{4}{25}$, $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$, $\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$

1ο Πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες εκφράζουν τα 10 λεπτά της ώρας με κλάσμα. Η μονάδα αναφοράς τους (το όλο) είναι τα 60 λεπτά. $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

Διερεύνηση – Επέκταση: Οι μαθητές/ήτριες μελετούν τη σχέση των Μαθηματικών συμβόλων με τα γλωσσικά σύμβολα και κατανοούν μορφές κωδικοποίησης της γλώσσας με τη βοήθεια των Μαθηματικών. Ο κώδικας βασίζεται στην αντικατάσταση κάθε γράμματος του αλφαβήτου με κάποιο άλλο, όχι όμως επιλεγμένο τυχαία αλλά με βάση έναν μυστικό αριθμό. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές/ήτριες συνδέουν τα Μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με τη διαχείριση της κωδικοποίησης των χαρακτήρων στη γλώσσα (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Οι μαθητές/ήτριες σχηματίζουν ισοδύναμα κλάσματα:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18} = \frac{10}{20} = \frac{11}{22} = \frac{12}{24}$$

Με τη βοήθεια των ισοδύναμων κλασμάτων συμπληρώνουν στην πράσινη γραμμή τα γράμματα που αντιστοιχούν στους παρονομαστές:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
Β	Δ	Ζ	Θ	Κ	Μ	Ξ	Π	Σ	Υ	Χ	Ω												

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	21	23	24
Ω	Ψ	Χ	Φ	Υ	Τ	Σ	Ρ	Π	Ο	Ξ	Ν	Μ	Λ	Κ	Ι	Θ	Η	Ζ	Ε	Δ	Γ	Β	Α
Ψ	Φ	Τ	Ρ	Ο	Ν	Λ	Ι	Η	Ε	Γ	Α												

Στη συνέχεια, λύνουν τον γρίφο:

Ν Ξ   Α Ο Τ Ν Β   Ν Ψ Α   Τ Ι Σ Λ Ν Ε Ο Ζ Κ Α Α Μ Α

Τ Η   Ν Υ Χ Τ Α   Τ Ω Ν   Χ Ρ Ι Σ Τ Ο Υ Γ Ε Ν Ν Ω Ν

Λ Ν Ε	Α Ξ Λ Σ	Π Β	Δ Ζ Ε Ο Α	Η Κ Σ Ι Β Ν Κ Λ
Σ Τ Ο	**Ν Η Σ Ι**	**Θ Α**	**Β Γ Ο Υ Ν**	**Π Ε Ι Ρ Α Τ Ε Σ**

- Η ιστορία της κρυπτογραφίας ξεκινά περίπου το 4.000 π.χ. στην αρχαία Αίγυπτο, συνεχίζεται στην αρχαία Ελλάδα σύμφωνα με τις αναφορές που υπάρχουν στο έργο του ιστορικού Πολύβιου και καταλήγει στα κρυπτογραφημένα μηνύματα του Ιούλιου Καίσαρα. Η κρυπτογραφία άρχισε να χρησιμοποιείται για στρατιωτικούς σκοπούς και για απόκρυψη πληροφοριών. Από τη δεκαετία του 60 και μετά η κρυπτογραφία γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης των υπολογιστών και των τηλεπικοινωνιών.

Οι μαθητές/ήτριες σε ομάδες δημιουργούν τους δικούς τους γρίφους και τους ανταλλάσσουν.

Κεφάλαιο 17: Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διατάσσουν ένα σύνολο κλασματικών αριθμών,
- να βρίσκουν ενδιάμεσους, μικρότερους και μεγαλύτερους, κλασματικούς αριθμούς.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

μοντέλα συνεχή ή επιφάνειας: χάρτινα κυκλικά και ορθογώνια μοντέλα, τετραγωνισμένο χαρτί, λωρίδες χαρτιού

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1936

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Στη δραστηριότητα διερεύνησης οι μαθητές/ήτριες, για να υπολογίσουν το μέρος της διαδρομής που κάλυψε ο κάθε ήρωας, συγκρίνουν τα ζεύγη κλασμάτων. Προτρέπουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες να περιγράψουν τις στρατηγικές σύγκρισης των κλασμάτων με εννοιολογικό τρόπο (πρότυπα εννοιολογικής σκέψης για τη σύγκριση: περισσότερα μέρη του ίδιου μεγέθους, ίδιος αριθμός μερών αλλά διαφορετικά μεγέθη, περισσότερο και λιγότερο από το μισό ή το ένα, πιο κοντά στο μισό ή στο όλο).

α. $\frac{4}{7} < \frac{5}{7}$, γιατί συγκρίνουμε μέρη του ίδιου μεγέθους και παίρνουμε περισσότερα μέρη.

β. $\frac{2}{17} > \frac{2}{19}$, γιατί έχουμε ίδιο αριθμό μερών (ίδιον αριθμητή) αλλά διαφορετικά μεγέθη (διαφορετικό παρονομαστή). Τα δέκατα ένατα είναι μικρότερα σε μέγεθος μέρη από τα δέκατα έβδομα.

γ. $\frac{1}{2} < \frac{17}{31}$, γιατί το 17 είναι μεγαλύτερο από το μισό του 31.

δ. $\frac{16}{27} < \frac{18}{24}$, γιατί παίρνουμε περισσότερα και μεγαλύτερου μεγέθους μέρη.

Στρατηγικές σύγκρισης: Συζητάμε με τους μαθητές/ήτριες τις στρατηγικές σύγκρισης κλασμάτων. Επιμένουμε στην εννοιολογική προσέγγιση της γνώσης.

Εφαρμογή: Παρουσιάζονται δύο τρόποι σύγκρισης κλασμάτων: α) δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων με χρήση του Ε.Κ.Π. και β) σύγκριση με βάση ένα κοινό σημείο αναφοράς.

Αναστοχασμός

1. Δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων με το $\frac{1}{2}$.

2. Μία από τις παρανοήσεις των μαθητών/ριών είναι ότι μπορούν να δημιουργήσουν ισοδύναμα κλάσματα προσθέτοντας στους όρους του κλάσματος τον ίδιον αριθμό.

3. Προτρέπουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες να δημιουργήσουν κλάσματα κοντά στο 1. Ο αριθμητής του κλάσματος θα είναι λίγο μικρότερος ή λίγο μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος, τόσο πιο κοντά στο 1 είναι το κλάσμα.

Τετράδιο Εργασιών

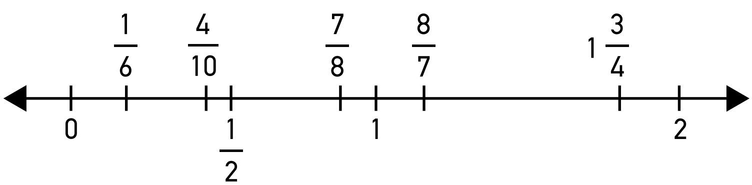
1η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες συγκρίνουν τα κλάσματα χρησιμοποιώντας μοντέλα εμβαδού και συνόλων και χρωματίζουν κατάλληλα κάθε μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων.

2η Άσκηση: Βασίζεται στις στρατηγικές σύγκρισης που παρουσιάστηκαν στο ΒΜ και στην Εφαρμογή.

$\frac{3}{9} < \frac{5}{9} < \frac{8}{9}$	Συγκρίνουμε κλασματικά μέρη του ίδιου μεγέθους (ένατα). Τα οκτώ είναι περισσότερα από τα πέντε και τα τρία μέρη (από τα κλάσματα που έχουν κοινούς παρονομαστές μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τον μεγαλύτερο αριθμητή).
$\frac{4}{10} < \frac{4}{7} < \frac{4}{5}$	Έχουμε τον ίδιο αριθμό κλασματικών μερών αλλά διαφορετικά μεγέθη. Τα δέκατα είναι μικρότερα σε μέγεθος μέρη από τα έβδομα και τα πέμπτα (από τα κλάσματα που έχουν ίσους αριθμητές μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει μικρότερο παρονομαστή).
$\frac{1}{3} < \frac{3}{4} < \frac{10}{12}$	Οι μαθητές/ήτριες μετατρέπουν τα κλάσματα σε ισοδύναμα με κοινό παρονομαστή με τη χρήση του Ε.Κ.Π ($\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$).

3η Άσκηση: $\frac{9}{9} > \frac{8}{9}$, $\frac{2}{4} > \frac{2}{5}$, $\frac{1}{2} > \frac{2}{20}$, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{35}{100} > \frac{25}{100}$, $\frac{3}{10} < \frac{9}{12}$

4η Άσκηση:



5η Άσκηση: Μέσω της ισοδυναμίας κλασμάτων οι μαθητές/ήτριες διαπιστώνουν ότι ανάμεσα σε δύο κλάσματα στην αριθμογραμμή υπάρχουν άπειρα κλάσματα.

α. Δημιουργούν ισοδύναμα κλάσματα με ίδιον παρονομαστή: $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$ και $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$. Ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{2}{10}$ και $\frac{4}{10}$ βρίσκεται το $\frac{3}{10}$.

β. Δημιουργούν ισοδύναμα κλάσματα με ίδιον παρονομαστή: $\frac{1}{4}=\frac{6}{24}$ και $\frac{1}{3}=\frac{8}{24}$. Ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{6}{24}$ και $\frac{8}{24}$ βρίσκεται το $\frac{7}{24}$.

6η Άσκηση

κοντά στο 0	**κοντά στο $\frac{1}{2}$**	**κοντά στο 1**
$\frac{1}{17}, \frac{2}{47}, \frac{5}{125}$	$\frac{9}{19}, \frac{30}{57}, \frac{15}{32}$	$\frac{17}{18}, \frac{47}{49}, \frac{91}{100}, \frac{89}{87}$

1ο Πρόβλημα: Η μονάδας αναφοράς – η ακέραιη μονάδα είναι διαφορετική. Ο Νίκος συγκρίνει κλάσματα τα οποία δεν εκφράζουν μέρη του ίδιου όλου.

Διερεύνηση – Επέκταση: Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να συγκρίνουν τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{10}$ δημιουργώντας ισοδύναμα κλάσματα με κοινό παρονομαστή. Το κλάσμα $\frac{2}{5}$ είναι ισοδύναμο με το $\frac{4}{10}$, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $\frac{3}{10}$.

Το μέρος του κήπου που καλύπτουν τα αρωματικά φυτά και τα λαχανικά είναι $\frac{7}{10}$. Το μέρος που καλύπτεται με λουλούδια είναι $\frac{3}{10}$.

Κεφάλαιο 18: Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Στόχοι- Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να μετατρέπουν ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα,
- να δημιουργούν και να διακρίνουν ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα,
- να προσθέτουν και να αφαιρούν κλάσματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

ράβδοι κλασμάτων, τετραγωνισμένο χαρτί, αριθμογραμμή

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3710?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Η διερεύνηση έχει στόχο την πρόσθεση κλασμάτων με κοινούς παρονομαστές. Καθώς προσθέτουμε μεγέθη του ίδιου μέρους (κλάσματα με κοινούς παρονομαστές), προσθέτουμε μόνον τους αριθμητές των κλασμάτων.

2. Η διερεύνηση έχει στόχο την πρόσθεση κλασμάτων με διαφορετικούς παρονομαστές. Οι μαθητές/ήτριες χρησιμοποιούν τις ράβδους τους παραρτήματος και αναπαριστάνουν την πρόσθεση των δύο κλασμάτων. Προτρέπουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες να εξηγήσουν την άποψη του Νίκου.

α. Για να προσθέσουμε διαφορετικού μεγέθους μέρη, πρέπει να τα μετατρέψουμε σε ίδιου μεγέθους (σε κλάσματα με κοινό παρονομαστή) μέρη. Για να γίνει πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων, πρέπει να μετατρέψουμε τα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{5}$ σε κλάσματα με κοινό παρονομαστή το 10. Επομένως $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{4}{10}+\frac{2}{10}=\frac{6}{10}$. Μπορεί να γίνει απλοποίηση του κλάσματος.

<u>Σημείωση:</u> Είναι προφανές ότι τα μέρη της ακέραιης μονάδας που είναι «δεύτερα» είναι μεγαλύτερα από αυτά που είναι «πέμπτα». Εξίσου προφανές είναι ότι τα μέρη αυτά είναι ανόμοια και επομένως δεν μπορεί να προστεθούν. Για να μπορέσουμε να τα προσθέσουμε, συνεπώς, πρέπει να μετατραπούν όλα σε μέρη του ίδιου μεγέθους. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα.

β. Ο Νίκος δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ράβδους $\frac{1}{8}$, καθώς δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε κλάσματα με παρονομαστή το 8 τα οποία, ταυτόχρονα, να είναι ισοδύναμα του $\frac{1}{5}$.

γ. Για να αφαιρέσουμε διαφορετικού μεγέθους μέρη, πρέπει να τα μετατρέψουμε σε ίδιου μεγέθους (σε κλάσματα με κοινό παρονομαστή) μέρη. Για να γίνει αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων, πρέπει να μετατρέψουμε τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{8}$ σε κλάσματα με κοινό παρονομαστή το 8 : $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

δ. Παρατηρώντας τις ράβδους κλασμάτων, οι μαθητές/ήτριες διαπιστώνουν ότι θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τις ράβδους $\frac{1}{16}$.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζονται οι όροι ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα καθώς και οι τρόποι πρόσθεσης και αφαίρεσης ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων. *<u>Σημείωση:</u> Στις δραστηριότητες διερεύνησης εξηγείται επαρκώς ο τρόπος πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων και η αναγκαιότητα μετατροπής τους σε ομώνυμα.*

Εφαρμογή

1. Παρουσιάζονται οι τρόποι πρόσθεσης μεικτών αριθμών.

2. Στην αφαίρεση μεικτών αριθμών (όπως και στην πρόσθεση αυτών) μπορούμε είτε να μετατρέψουμε τους μεικτούς σε ομώνυμα κλάσματα είτε να αφαιρέσουμε χωριστά τις ακέραιες μονάδες από τα κλάσματα. Στην εφαρμογή το κλάσμα του μειωτέου είναι μικρότερο από το κλάσμα του αφαιρετέου. Για να γίνει η αφαίρεση, μετατρέπουμε τη μία ακέραιη μονάδα του μειωτέου σε κλάσμα $\frac{4}{4}$ και συνεχίζουμε την αφαίρεση.

Αναστοχασμός

1. Το κλάσμα $\frac{1}{4}$ έχει ισοδύναμα κλάσματα $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{20}$ κ.λπ. Επομένως οι μαθητές/ήτριες δημιουργούν ζεύγη ομώνυμων κλασμάτων (π.χ. με παρονομαστή το 8, 12, 20) που να έχουν διαφορά $\frac{1}{4}$.

2. Χρησιμοποιούμε το Ε.Κ.Π., για να μετατρέψουμε τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα.

3. Πρέπει να τα μετατρέψουμε σε ίδιου μεγέθους (σε κλάσματα με κοινό παρονομαστή) μέρη.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση

α. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{\square}{\square} = 1$ $\quad \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{\square}{\square} = 1$ $\quad \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$

β. $\frac{8}{8} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$

γ. $1\frac{1}{2} - \frac{4}{6} = \frac{\square}{6}$ $\quad \frac{3}{2} - \frac{4}{6} = \frac{\square}{6}$ $\quad \frac{3 \times 3}{2 \times 3} - \frac{4}{6} = \frac{\square}{6}$ $\quad \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$

δ. $1\frac{11}{5} - \frac{\square}{10} = \frac{6}{5}$ Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να πουν, χωρίς να λάβουν υπόψη τον παρονομαστή του κλάσματος που ψάχνουν, ότι ο αφαιρετέος είναι το $\frac{5}{5}$ (αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων) και, στη συνέχεια, να σχηματίσουν το ισοδύναμό του, που είναι το $\frac{10}{10}$.

2η Άσκηση

- $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} < 1$, επειδή ο μειωτέος είναι μικρότερος από τη μονάδα.
- $\frac{8}{5} - \frac{1}{10} > 1$, το $\frac{8}{5}$ είναι αρκετά μεγαλύτερο από το 1 και αφαιρούμε το $\frac{1}{10}$, που είναι κοντά στο 0.
- $\frac{8}{9} + \frac{1}{3} > 1$, το $\frac{8}{9}$ βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 και σε αυτό προσθέτουμε το $\frac{1}{3}$.
- $2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{6} > 1$, το $\frac{3}{5}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{2}{6}$.
- $2\frac{5}{6} - 1\frac{7}{8} > 1$, το $2\frac{5}{6}$ είναι κοντά στο 3 και το $1\frac{7}{8}$ λίγο μικρότερο από το 2.

- $\frac{12}{5} - \frac{14}{15} > 1$, το $\frac{12}{5}$ είναι μεγαλύτερο από το 2 και το $\frac{14}{15}$ λίγο μικρότερο από το 1.

3η Άσκηση: Προτού οι μαθητές/ήτριες κάνουν τις πράξεις μπορούν να υποθέσουν με τη σύγκριση των κλασμάτων στην είσοδο και την έξοδο της μηχανής, αν ο κρυμμένος αριθμός μέσα στη μηχανή αφαιρείται ή προστίθεται στον αρχικό αριθμό.

$1\frac{4}{6} - \frac{2}{3} = \frac{10}{6} - \frac{2}{3} = \frac{10}{6} - \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$ (Προστίθεται το 1).

$\frac{14}{10} - \frac{4}{5} = \frac{14}{10} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (Αφαιρείται το $\frac{2}{5}$).

$2 - \frac{10}{9} = \frac{18}{9} - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$ (Αφαιρείται το $\frac{8}{9}$).

4η Άσκηση

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ Το κλάσμα $\frac{5}{6}$ είναι μικρότερο από το 1. Οι μαθητές/ήτριες χωρίζουν στην αριθμογραμμή κάθε ακέραιη μονάδα σε 6 ίσα μέρη.

1ο Πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες υπολογίζουν, πρώτα, το μήκος της μικρότερης πλευράς του ορθογωνίου. $\frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} - \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{16}{20} - \frac{5}{20} = \frac{9}{20}$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{20} + \frac{9}{20} = \frac{8}{5} + \frac{18}{20} = \frac{32}{20} + \frac{18}{20} = \frac{50}{20}$ μ. ή $= \frac{5}{2}$ μ. ή 2,5 μ.

2ο Πρόβλημα: α. Οι μαθητές/ήτριες βρίσκουν πόσα χμ. έτρεξε, συνολικά, ο Νίκος κάθε μέρα

Ημέρα 1η: $\frac{9}{10}$ χμ. Ημέρα 2η: $\frac{11}{8}$ χλμ. = $1\frac{1}{3}$ χμ. Ημέρα 3η: $\frac{19}{10}$ χμ. $=1\frac{9}{10}$ χμ.

<u>Σημείωση:</u> Οι μαθητές/ήτριες ενδέχεται να παρατηρήσουν ότι την τρίτη ημέρα το πρωί ο Νίκος έτρεξε $\frac{6}{5}$ χμ., που είναι απόσταση μεγαλύτερη από ένα χιλιόμετρο και να μην προχωρήσουν στην πράξη της πρόσθεσης.

β. $1\frac{9}{10} - 1\frac{1}{3} = \frac{17}{30}$

3ο πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες είτε μπορούν να μετατρέψουν τους μεικτούς σε κλάσματα και μετά να κάνουν την πράξη είτε να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν χωριστά τις ακέραιες μονάδες τους από τα κλάσματα.

α) $2\frac{5}{6}$ ώρες β) $1\frac{17}{30}$ ώρα

<u>Σημείωση:</u> Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να εκτιμήσουν την ώρα που χρειάστηκαν οι κατασκηνωτές, για να φτάσουν στην κορυφή (περίπου $1\frac{1}{2}$ ώρες).

Διερεύνηση- Επέκταση: Οι μαθητές/ήτριες, αρχικά, βρίσκουν το μέρος της εφημερίδας που καλύπτει κάθε θέμα.

τα νέα του σχολείου: $\frac{1}{2}$ σπαζοκεφαλιές: $\frac{1}{4}$ σταυρόλεξα: $\frac{1}{8}$ δημοτικά νέα: $\frac{1}{16}$ αινίγματα: $\frac{1}{16}$

α. $\frac{5}{16}$ της σελίδας **β.** $\frac{11}{16}$ της σελίδας

Οι μαθητές/ήτριες, αφού συζητήσουν τα θέματα που θα συμπεριλάβουν στην εφημερίδα τους, αποφασίζουν το μέρος που θα καταλαμβάνει καθένα από αυτά στο έντυπό τους και χωρίζουν ανάλογα τις σελίδες.

Κεφάλαιο 19: Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα κλασμάτων - Αντίστροφοι αριθμοί

Στόχοι-Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να πολλαπλασιάζουν κλάσματα με φυσικούς και κλάσματα με κλάσματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

γεωμετρικά σχήματα του παραρτήματος

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-4272

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-1858

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Οι μαθητές/ήτριες υπολογίζουν το γινόμενο είτε με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ($\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$) είτε με πολλαπλασιασμό $3 \times \frac{2}{3}$. Συζητάμε με τα παιδιά με ποιον τρόπο προκύπτει το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με κλάσμα και καταλήγουμε σε συμπέρασμα.

2. Στη συγκεκριμένη διερεύνηση οι μαθητές/ήτριες, χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά σχήματα του παραρτήματος, διερευνούν τα γινόμενα που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό φυσικού αριθμού με κλάσμα. Η μονάδα αναφοράς είναι το εξάγωνο.

α. $3 \times \frac{1}{2}$: Το $\frac{1}{2}$ είναι το ένα τραπέζιο. Για να υπολογίσουμε το γινόμενο 3 φορές το $\frac{1}{2}$, χρησιμοποιούμε 3 τραπέζια. 2 τραπέζια μαζί δημιουργούν ένα εξάγωνο και μένει ένα ακόμη τραπέζιο. Επομένως $3 \times \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ ή $\frac{3}{2}$.

$4 \times \frac{1}{2}$:Το $\frac{1}{2}$ είναι το ένα τραπέζιο. Για να υπολογίσουμε το γινόμενο 4 φορές το 1/2, χρησιμοποιούμε 4 τραπέζια, τα οποία, αν τα ενώσουμε, δημιουργούμε 2 εξάγωνα. Επομένως $4 \times \frac{1}{2} = 2$ ή $\frac{4}{2}$.

β. $2 \times \frac{1}{6}$:Το $\frac{1}{6}$ είναι το τρίγωνο. Για να υπολογίσουμε το γινόμενο 2 φορές το $\frac{1}{6}$, χρησιμοποιούμε 2 τρίγωνα, τα οποία, αν τα ενώσουμε, δημιουργούμε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο. Επομένως $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{2}{6}$.

$\frac{1}{6} \times 2$:Οι 2 ακέραιες μονάδες είναι τα 2 εξάγωνα. Η μονάδα αναφοράς τώρα είναι τα 2 εξάγωνα. Θα χωρίσω τη μονάδα αναφοράς σε 6 ίσα μέρη και θα πάρω το 1. Για να γίνει αυτό, κάθε εξάγωνο θα χωριστεί σε 3 ίσα μέρη. Επομένως το $\frac{1}{6}$ των 2 εξαγώνων είναι το ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο. Επομένως $\frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$ ή $\frac{2}{6}$.

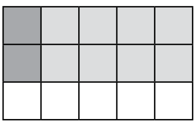
γ. $6 \times \frac{1}{6}$: Το $\frac{1}{6}$ είναι το τρίγωνο. Για να υπολογίσουμε το γινόμενο 6 φορές το $\frac{1}{6}$, χρησιμοποιούμε 6 τρίγωνα τα οποία, αν τα ενώσουμε, δημιουργούμε 1 εξάγωνο. Επομένως $6 \times \frac{1}{6} =$ 1 ή $= \frac{6}{6}$.

$3 \times \frac{1}{3}$:Το $\frac{1}{3}$ είναι το ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο. Για να υπολογίσουμε το γινόμενο 3 φορές το $\frac{1}{3}$, χρησιμοποιούμε 3 πλάγια παραλληλόγραμμα τα οποία, αν τα ενώσουμε, δημιουργούμε 1 εξάγωνο. Επομένως $3 \times \frac{1}{3} = 1$ ή $\frac{3}{3}$.

Συζητάμε με τα παιδιά την έννοια του αντίστροφου αριθμού.

<u>Σημείωση:</u> Η διερευνητική δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά να συζητήσουν για τη διαδικασία της απλοποίησης και τον τρόπο εύρεσης του γινομένου ενός κλάσματος με φυσικό αριθμό. Ο/Η εκπαιδευτικός ενδείκνυται να παροτρύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες να χρησιμοποιήσουν τα γεωμετρικά σχήματα με ποικίλους τρόπους.

3. Οι μαθητές/ήτριες βρίσκουν το μέρος ενός μέρους κάνοντας πολλαπλασιασμό. Το ορθογώνιο αναπαριστάνει το οικόπεδο και είναι χρωματισμένο τα $\frac{2}{3}$ αυτού. Για να υπολογίσουμε το $\frac{1}{5}$ του $\frac{2}{3}$, χωρίζουμε το $\frac{2}{3}$ κάθετα σε 5 ίσα μέρη και χρωματίζουμε το 1 από τα 5 ίσα μέρη.



Ομοίως, χωρίζουμε και το υπόλοιπο ορθογώνιο σε 5 ίσα μέρη. Το ορθογώνιο έχει χωριστεί σε 15 ίσα μέρη. Τα λουλούδια καλύπτουν τα $\frac{2}{15}$ του κήπου. Επομένως $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$.

4. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$: Χρωματίζουμε τα $\frac{2}{3}$ του ορθογωνίου. Χωρίζουμε τα $\frac{2}{3}$ του σε 2 ίσα μέρη και στη συνέχεια χρωματίζουμε το ένα από τα 2 αυτά ίσα μέρη. Ομοίως, χωρίζουμε και το υπόλοιπο ορθογώνιο σε 2 ίσα μέρη. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$

$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$: Χρωματίζουμε τα $\frac{2}{3}$ του ορθογωνίου. Χωρίζουμε τα $\frac{2}{3}$ σε 4 ίσα μέρη και στη συνέχεια χρωματίζουμε το ένα από τα 4 ίσα μέρη. Ομοίως, χωρίζουμε και το υπόλοιπο ορθογώνιο σε 4 ίσα μέρη.$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$

$\frac{1}{8} \times \frac{2}{3}$: Χρωματίζουμε τα $\frac{2}{3}$ του ορθογωνίου. Χωρίζουμε τα $\frac{2}{3}$ σε 8 ίσα μέρη και στη συνέχεια χρωματίζουμε το ένα από τα 8 ίσα μέρη. Ομοίως, χωρίζουμε και το υπόλοιπο ορθογώνιο σε 8 ίσα μέρη. $\frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{24}$

Στα μοντέλα αναπαράστασης ο χωρισμός του ορθογωνίου έχει γίνει εξαρχής. Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο χωρίζεται το υπόλοιπό του μέρος.

Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες συνδέουν ελλιπώς ή λανθασμένα τα κλάσματα με τον πολλαπλασιασμό των φυσικών αριθμών. Με τη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες συμπεραίνουν ότι, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα κλάσμα με όλο και μικρότερες κλασματικές μονάδες, το γινόμενο γίνεται όλο και μικρότερο.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζονται οι αλγόριθμοί του πολλαπλασιασμού κλάσματος με κλάσμα και κλάσματος με φυσικό αριθμό.

Εφαρμογή: Παρουσιάζονται με τη βοήθεια μοντέλων αναπαράστασης ο πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα και ο πολλαπλασιασμός μεικτού με φυσικό αριθμό με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και τη μετατροπή του μεικτού σε κλάσμα.

Αναστοχασμός

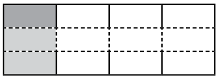
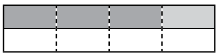
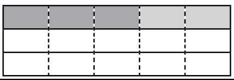
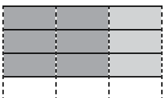
1. Θέλουμε να βρούμε τα $\frac{5}{6}$ του $\frac{1}{2}$, δηλαδή ένα μέρος του. Επομένως το γινόμενο είναι μικρότερο από το $\frac{1}{2}$.

2. Οι μαθητές/ήτριες είτε προτιμήσουν τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$) είτε το $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$ ($\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$) είναι το ίδιο.

3. Το ερώτημα είναι σχετικό με την 4η δραστηριότητα διερεύνησης.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες συνδέουν τη λεκτική περιγραφή του πολλαπλασιασμού δυο κλασμάτων με τη μαθηματική πρόταση και την αναπαριστάνουν.

Λεκτική περιγραφή		Αναπαράσταση	Μαθηματική πρόταση
α	το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
β	τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
γ	τα $\frac{3}{5}$ του $\frac{1}{3}$		$\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{15}$
δ	τα $\frac{2}{3}$ των $\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

2η Άσκηση

$4 \times \frac{5}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \times 5}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ $\quad \frac{4}{3} \times 12 = \frac{4 \times \overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{4 \times 4}{1} = 16$ $\quad 27 \times \frac{4}{9} = \frac{\overset{3}{\cancel{27}} \times 4}{\underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{3 \times 4}{1} = 12$

3η Άσκηση

α. $2 \times \frac{3}{7} < 1$ β. $\frac{9}{100} \times \frac{100}{9} = 1$ γ. $3\frac{5}{7} \times \frac{1}{8} > 1$ 1 δ. $\frac{50}{3} \times \frac{1}{10} > 1$

4η Άσκηση: Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες το γινόμενο που προκύπτει, όταν πολλαπλασιάζουμε έναν μεικτό αριθμό με το $\frac{1}{2}$. Το γινόμενο μπορεί να προκύψει με τους δύο τρόπους που προτείνονται στην εφαρμογή 2 στο ΒΜ.

$2\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}$ ή $\frac{4}{3}$. Στο σημείο Β.

1ο Πρόβλημα: Τα $\frac{2}{6}$ των $\frac{3}{5}$ είναι: $\frac{2}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{6 \times 5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$. Τα $\frac{2}{6}$ των 30€ είναι: $\frac{2}{6} \times 30 = 10$ €

2ο Πρόβλημα: Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι : $4\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{2} = \frac{21}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{105}{10} = 10\frac{5}{10}$ τ.μ.

Διερεύνηση – Επέκταση

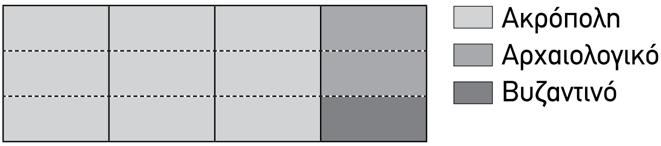
α. Καθώς τα $\frac{3}{4}$ των παιδιών επισκέφτηκαν την Ακρόπολη, το $\frac{1}{4}$ των παιδιών επισκέφτηκε το Αρχαιολογικό και το Βυζαντινό μουσείο.

Βρίσκουμε το κλάσμα που εκφράζει το μέρος των παιδιών που επισκέφτηκαν το Αρχαιολογικό Μουσείο, δηλαδή το $\frac{1}{4}$ του $\frac{2}{3}$. Είναι $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$.

Βρίσκουμε το κλάσμα που εκφράζει το μέρος των παιδιών που επισκέφτηκαν το Βυζαντινό Μουσείο: $\frac{1}{4} - \frac{2}{12} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$. Αφού το $\frac{1}{12}$ είναι 16 παιδιά, τα παιδιά που επισκέφτηκαν το Αρχαιολογικό Μουσείο, δηλαδή τα $\frac{2}{12}$, είναι $2 \times \frac{1}{12} = 2 \times 16 = 32$ παιδιά.

β. Τα παιδιά του σχολείου, δηλαδή τα $\frac{12}{12}$, είναι $16 \times 12 = 192$.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ως εξής:



γ. Το Βυζαντινό Μουσείο επισκέφτηκε το $\frac{1}{12}$ των παιδιών.

Κεφάλαιο 20: Διαίρεση κλασμάτων

Στόχοι -Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να διαιρούν κλάσματα,
- να χρησιμοποιούν κατάλληλες αναπαραστάσεις για τη διαίρεση κλασμάτων.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτόνι, ψαλίδι, χαρτί Α4, αριθμογραμμή, ράβδοι κλασμάτων

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-4288

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Παρουσιάζεται η διαίρεση κλάσματος με κλάσμα. Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$ χρησιμοποιώντας μοντέλα αναπαράστασης. Για να βρούμε πόσες φορές χωρά το $\frac{1}{6}$ στο $\frac{2}{3}$, πρέπει πρώτα να χωρίσουμε τα χαρτόνια σε ίδιου μεγέθους μέρη, δηλαδή να δημιουργήσουμε ομώνυμα κλάσματα.

$\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = 4 \div 1 = 4$

2. Παρουσιάζεται η διαίρεση κλάσματος με φυσικό αριθμό. Οι μαθητές/ήτριες χρησιμοποιούν τις ράβδους κλασμάτων του παραρτήματος και βρίσκουν πόσες φορές χωράει το $\frac{3}{5}$ στις 3 ακέραιες μονάδες.

1					1					1				
$\frac{1}{5}$					$\frac{1}{5}$					$\frac{1}{5}$				

Παρατηρούν ότι χωρά 5 φορές. Επομένως 3: $\frac{3}{5}$ = 5.

Στη συνέχεια, μετατρέπουν τον φυσικό αριθμό 3 σε κλάσμα με παρονομαστή το 5.

$3 : \frac{3}{5} = \frac{15}{5} \div \frac{3}{5} = 15 : 3 = 5$

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Συζητάμε με τα παιδιά τους όρους *ομώνυμα* και *ετερώνυμα* κλάσματα και τον τρόπο με τον οποίο διαιρούμε ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα.

Παρουσιάζεται και μια πρόσθετη μαθηματική ιδέα που δεν παρουσιάστηκε στη διερευνητική δραστηριότητα, καθώς αποτελεί μηχανιστικό κανόνα και τον οποίο ο /η εκπαιδευτικός ενδείκνυται να επεξεργαστεί με τα παιδιά, αφού πρώτα γίνουν οι δραστηριότητες διερεύνησης και οι μαθητές/ήτριες κατανοήσουν τον τρόπο διαίρεσης των κλασμάτων.

Εφαρμογή: Παρουσιάζονται τρόποι διαίρεσης κλάσματος με κλάσμα (με τη βοήθεια της αριθμογραμμής, μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα, αντιστροφή του διαιρέτη και πολλαπλασιασμό)

Αναστοχασμός

1. Οι μαθητές/ήτριες παρουσιάζουν τους διάφορους τρόπους με τους οποίους είναι δυνατόν να βρουν το πηλίκο της διαίρεσης $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ (χρησιμοποιώντας μοντέλα αναπαράστασης, τις ράβδους κλασμάτων, τους τυπικούς αλγορίθμους της διαίρεσης).

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τα σχήματα.3 : $\frac{1}{2}$ = 6, το $\frac{1}{2}$ χωρά 6 φορές στο 3 και 4 : $\frac{1}{6}$ = 24, το $\frac{1}{6}$ χωρά 24 φορές στο 4.

2η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να εργαστούν είτε δημιουργώντας ομώνυμα κλάσματα είτε αντιστρέφοντας τους όρους του δεύτερου κλάσματος και, αντί για διαίρεση, να κάνουν πολλαπλασιασμό. Στην α2 περίπτωση εκφράζουν με κλάσμα το πηλίκο της διαίρεσης. Στην περίπτωση ύπαρξης μεικτού αριθμού (γ1. και γ2.), μπορούν να μετατρέψουν τον μεικτό αριθμό σε κλάσμα.

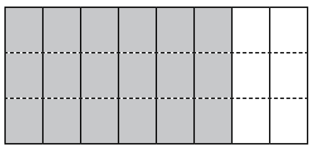
α1. $3 : \frac{1}{4} = 12$ α2. $3 : 4 = \frac{3}{4}$ α3. $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$

β1. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{8}$ β2. $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$ β3. $\frac{6}{8} : \frac{3}{8} = 6 : 3 = 2$

γ1. $6\frac{1}{2} : \frac{2}{5} = \frac{13}{2} : \frac{2}{5} = 16\frac{1}{4}$ γ2. $2 : 3\frac{1}{2} = \frac{4}{7}$

3η Άσκηση:

α. $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ β. $\frac{7}{9} : \frac{21}{9} = \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$



1ο Πρόβλημα: α. Η μονάδα αναφοράς είναι ολόκληρο το ορθογώνιο. Προτείνεται οι μαθητές/ήτριες να σχεδιάσουν το παρακάτω σχέδιο. Χρωματίζουν τα $\frac{6}{8}$ του ορθογωνίου. Για να μοιραστεί το μέρος αυτό στα 3 εγγόνια, χωρίζουν τα $\frac{6}{8}$ σε τρία ίσα μέρη. Κάθε εγγόνι θα πάρει τα $\frac{6}{24}$ της τυρόπιτας.

β. Η μαθηματική πράξη είναι $\frac{6}{8} : 3 = \frac{6}{24}$.

2ο Πρόβλημα: α. Αναμένουμε οι μαθητές/ήτριες στον 1ο τρόπο να χρησιμοποιήσουν τη διαίρεση 4: $\frac{2}{3}$.

β. Στον β΄ τρόπο με τη βοήθεια της αριθμογραμμής μπορούν με διαδοχικές προσθέσεις να υπολογίσουν πόσες φορές επαναλαμβάνεται το διάστημα $\frac{2}{3}$ σε όλη τη διαδρομή (από το 0 έως το 4).

Αλγεβρικά έχουμε : $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4$

Αντίστοιχη διαδικασία έχουμε με τις διαδοχικές αφαιρέσεις ξεκινώντας από το 4 μέχρι το 0.

Αλγεβρικά έχουμε : $4-(\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}) = 4-\frac{12}{3} = 4-4=0$

Άρα τοποθετήθηκαν 6 πινακίδες.

3ο Πρόβλημα: Χρειάζεται να ληφθεί υπόψη ότι δύο παιδιά ήπιαν μόνον νερό.

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να μετατρέψουν τον δεκαδικό αριθμό 1,5 σε κλάσμα και να κάνουν τον πολλαπλασιασμό $6 \times 1\frac{1}{2} = 6 \times \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ λίτρα.

Στη συνέχεια, κάνουν τη διαίρεση: $9 : \frac{3}{8} = 9 \times \frac{8}{3} = \frac{72}{3} = 24$ παιδιά

Τα παιδιά στη σχολική εκδήλωση ήταν 24+2=26.

Διερεύνηση – Επέκταση: Οι μαθητές/ήτριες κάνουν τη διαίρεση $4\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = 24\frac{1}{2}$ μέρες.

Βρίσκουν τρόπους με τους οποίους μπορούν να επιλύσουν το πρόβλημα. πχ. με διαδοχικές αφαιρέσεις ή προσθέσεις του $\frac{1}{3}$.

Εφόσον οι εργάτες τοποθετούν σε μίαν ημέρα γραμμές σε διπλάσια απόσταση, θα χρειαστούν μισές μέρες, δηλαδή $12\frac{1}{4}$ μέρες.

Κεφάλαιο 21: Αναγωγή στη κλασματική μονάδα

Στόχοι-Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αναγωγής στην κλασματική μονάδα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

ράβδοι κλασμάτων

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Η μέθοδος της αναγωγής στην κλασματική μονάδα ενισχύει την κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές/ήτριες βρίσκουν σε μέτρα το μέρος του σκοινιού που χρησιμοποίησαν για το παιχνίδι με δύο τρόπους: α. με πολλαπλασιασμό: $\frac{2}{5} \times 20$ και β. με αναγωγή στην κλασματική μονάδα. Γνωρίζουμε το όλο, το οποίο είναι τα $\frac{5}{5}$ του σκοινιού. Για να βρούμε τα $\frac{2}{5}$, πρέπει να βρούμε πρώτα το $\frac{1}{5}$ αυτού κάνοντας διαίρεση και στη συνέχεια να πολλαπλασιάσουμε επί 2. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται αναγωγή στην κλασματική μονάδα, καθώς χρειάζεται να βρούμε πρώτα το μέρος του όλου που εκφράζει η κλασματική μονάδα.

2. Οι μαθητές/ήτριες σε ομάδες δημιουργούν το δικό τους αντίστροφο πρόβλημα, στο οποίο αναζητούν το συνολικό μήκος του σκοινιού.

Στρατηγική επίλυση προβλήματος: Παρουσιάζεται πότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο αναγωγής στην κλασματική μονάδα. *<u>Σημείωση:</u> Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορους τρόπους για την επίλυση ανάλογων προβλημάτων (π.χ. για να βρούμε το μέρος, έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε πολλαπλασιασμό και για να βρούμε το όλο, να κάνουμε διαίρεση). Η μέθοδος της αναγωγής στην κλασματική μονάδα είναι ένας από τους δυνατούς τρόπους. Δεν είναι ο πιο σύντομος, αλλά γίνεται εύκολα κατανοητός από τους μαθητές και τις μαθήτριες.*

Εφαρμογή: Στην εφαρμογή παρουσιάζεται η μέθοδος της αναγωγής στην κλασματική μονάδα, όταν γνωρίζουμε ένα κλασματικό μέρος του όλου και θέλουμε να βρούμε κάποιο άλλο κλασματικό του μέρος.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες πρέπει, πρώτα, να βρουν:

- το $\frac{1}{5}$ του μέτρου και στη συνέχεια τα $\frac{2}{5}$ αυτού,
- το $\frac{1}{6}$ του εικοσιτετραώρου και μετά τα $\frac{2}{6}$ αυτού.

Λύση: τα $\frac{3}{4}$ της ώρας είναι 45 λεπτά (Τα $\frac{4}{4}$ της ώρας είναι 60 λεπτά, το $\frac{1}{4}$ της ώρας είναι 60 : 4 = 15 λεπτά, τα $\frac{3}{4}$ της ώρας είναι 3 x 15 = 45 λεπτά)

Λύση: τα $\frac{2}{5}$ του λίτρου είναι 400 ml (Τα $\frac{5}{5}$ του λίτρου είναι 1000ml, το $\frac{400}{1000} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$)

2η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τον δείκτη της στάθμης της βενζίνης. Το αυτοκίνητο έχει καταναλώσει τα $\frac{3}{4}$ του ντεπόζιτου της βενζίνης.

Με γεμάτο ($\frac{4}{4}$) το ντεπόζιτο της βενζίνης, το αυτοκίνητο διανύει 580 χιλιόμετρα.

Με το $\frac{1}{4}$ γεμάτο, μπορεί να διανύσει 580:4 = 145 χιλιόμετρα περίπου

Με τα $\frac{3}{4}$ γεμάτο, μπορεί να διανύσει 3x145= 435 χιλιόμετρα περίπου

Το αυτοκίνητο έχει διανύσει 435 περίπου χιλιόμετρα.

3η Άσκηση:

Όνομα	Ηλικία
Άννα	12 χρόνων
Ανδρέας	8 χρόνων
Μπιλ	16 χρόνων

Διερεύνηση – Επέκταση

α. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν το κυκλικό διάγραμμα της εικόνας. Με τη μέθοδο αναγωγής στην κλασματική μονάδα, βρίσκουν τη χωρητικότητα του δεσμευμένου αποθηκευτικού χώρου.

Τα $\frac{4}{4}$ του δίσκου έχουν χωρητικότητα 1024 MB.

Το $\frac{1}{4}$ του δίσκου έχει χωρητικότητα 1024 : 4= 256 MB.

Τα $\frac{3}{4}$ του δίσκου έχουν χωρητικότητα 3 x 256 = 768 MB.

β. Οι μαθητές/ήτριες εκτιμούν ότι τα 512 MB είναι περίπου το $\frac{1}{2}$ της συνολικής χωρητικότητας του δίσκου. Παρατηρώντας το κυκλικό διάγραμμα, οδηγούνται στη σκέψη ότι αυτό δεν είναι εφικτό, καθώς ο δεσμευμένος αποθηκευτικός χώρος είναι τα $\frac{3}{4}$ του συνολικού χώρου αποθήκευσης. Ο ελεύθερος αποθηκευτικός χώρος είναι το $\frac{1}{4}$ της συνολικής χωρητικότητας του δίσκου, δηλ. 256 MB.

Το νέο στικάκι έχει χωρητικότητα 2.048 MB. Ο δεσμευμένος αποθηκευτικός χώρος είναι 512+768= 1280 MB.

Στο αρχικό στικάκι τα 512 MB ήταν το $\frac{1}{2}$ των 1.024 MB. Αφού διπλασιάστηκε η χωρητικότητα, τώρα είναι το $\frac{1}{2}$ ή τα $\frac{2}{8}$ των 2.048 MB.

Στον αρχικό δίσκο τα 768 MB ήταν τα $\frac{3}{4}$ των 1.024MB. Αφού διπλασιάστηκε η χωρητικότητα, τώρα είναι τα 3/8 των 2.048 MB.

Επομένως ο συνολικός δεσμευμένος χώρος είναι $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Επαναληπτικό 3

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

1η Άσκηση: α. Τα τετράγωνα είναι χωρισμένα σε 64 τετραγωνάκια. Παροτρύνουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες να τα χωρίσουν σε 4 ίσα μέρη με ποικίλους, μη συμβατικούς, τρόπους χωρισμού.

β. Το τετράγωνο είναι χωρισμένο σε 64 τετραγωνάκια. Το $\frac{1}{2}$ του τετραγώνου είναι 32 τετραγωνάκια, το $\frac{1}{8}$ είναι 8 τετραγωνάκια, το $\frac{1}{4}$ είναι 16 τετραγωνάκια και το $\frac{1}{16}$ είναι 4 τετραγωνάκια.

2η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες βρίσκουν κλάσματα ισοδύναμα με το $\frac{1}{7}$ και το κλάσμα $\frac{2}{7}$.

3η Άσκηση: Τα κλάσματα που βρίσκονται στα σημεία της πρώτης αριθμογραμμής είναι κατά σειρά: $\frac{2}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{15}{12}$ ή $1\frac{3}{12}$. Τα αντίστοιχα ισοδύναμα ανάγωγα κλάσματά τους είναι : $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ ή $1\frac{1}{4}$.

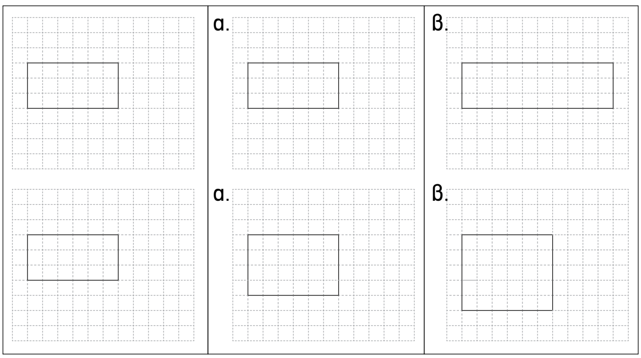
4η Άσκηση

1	$\frac{2}{8}$	2	2	$\frac{11}{5}$	3	3	$\frac{21}{6}$	4	3	$3\frac{1}{4}$	4

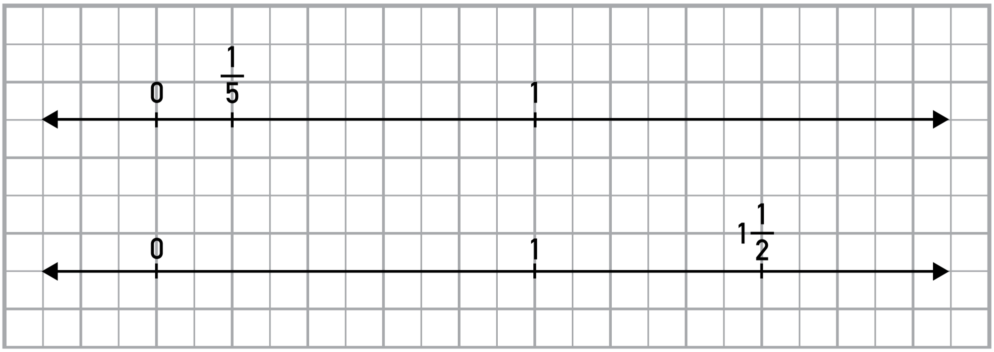
1ο Πρόβλημα: Για να φτιάξουμε μεγαλύτερη ποσότητα μπισκότων, χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε την ποσότητα των υλικών με το 2(β) ή να διαιρέσουμε την ποσότητα των υλικών με το $\frac{1}{3}$ (γ).

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Το ορθογώνιο μπορεί να χωριστεί σε 4 ίσα μέρη είτε οριζόντια (κατά μήκος) είτε κάθετα (κατά πλάτος). Το $\frac{1}{4}$ που προστίθεται κάθε φορά είναι 6 τετραγωνάκια.



3η Άσκηση:



1ο Πρόβλημα: Η Αγγελική έδωσε στον Αντρέι 20 κάρτες. Ο Αντρέι πρέπει να δώσει το $\frac{1}{4}$ των καρτών του.

2ο Πρόβλημα: Η καταιγίδα θα φτάσει σε 3 $\frac{1}{2}$ ώρες, δηλαδή στις 11.30 π.μ.

3ο Πρόβλημα: $\frac{1}{2} : 3$

4ο Πρόβλημα: Κάθε φίλος θα πάρει τα $\frac{2}{3}$ της σοκολάτας.

5ο Πρόβλημα: Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποιος ξόδεψε τα περισσότερα χρήματα, καθώς δεν ξέρουμε τα χρήματα που είχε κάθε παιδί.

Επειδή το $\frac{1}{3}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{4}$, ο Νίκος μπορεί να ξόδεψε τα περισσότερα χρήματα, αν είχε αρχικά μεγαλύτερο ποσό χρημάτων από αυτό της Δανάης. Οι μαθητές/ήτριες δίνουν παραδείγματα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά
Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Στατιστική - Πιθανότητες

Α. Θεωρητικό μέρος

Η Στατιστική και οι Πιθανότητες μελετούν προβλήματα που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα δεδομένων, δηλαδή με τη διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν). Επομένως οι μαθητές/ήτριες καλούνται να αναπτύξουν την ικανότητα να αξιολογούν κριτικά πληροφορίες, να εξάγουν συμπεράσματα, να κάνουν προβλέψεις και να λαμβάνουν αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011). Η καλλιέργεια της στατιστικής σκέψης στους μαθητές και τις μαθήτριες επιτυγχάνεται μέσα από τη διεξαγωγή μικρών ερευνών από τα ίδια τα παιδιά. Η διδασκαλία των Πιθανοτήτων δίνει την ευκαιρία στους μαθητές και τις μαθήτριες να πραγματοποιούν πειράματα τύχης και να αξιολογούν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή τους.

Οι βασικές έννοιες που αναπτύσσονται στη θεματική ενότητα της **Στατιστικής** είναι:

1. Τα **δεδομένα** που μπορεί να είναι «κατηγορικά δεδομένα» (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί π.χ. παιχνίδια, χρώματα κ.λπ.), «διακριτά ποσοτικά δεδομένα» (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους είναι ακέραιοι αριθμοί π.χ. αριθμός παιδιών μιας οικογένειας), «συνεχή ποσοτικά δεδομένα» (δηλαδή δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι μόνον ακέραιοι αριθμοί π.χ. ύψος παιδιών)

Οι μαθητές/ήτριες συλλέγουν, οργανώνουν, αναπαριστάνουν και ερμηνεύουν δεδομένα. Χρησιμοποιούν για τις αναπαραστάσεις τους εικονογράμματα, σημειογράμματα, ραβδογράμματα, διπλά ραβδογράμματα.

2. Τα **μέτρα θέσης** αφορούν σε χαρακτηριστικές αριθμητικές τιμές, που χρησιμοποιούνται για τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων. Μέτρα θέσης που δείχνουν το "κέντρο" των παρατηρήσεων είναι η «επικρατούσα τιμή», η «διάμεσος» και η «μέση τιμή».

   Επικρατούσα τιμή ονομάζεται η τιμή των δεδομένων που εμφανίζεται με τη μεγαλύτερη συχνότητα. **Διάμεσος** είναι η μεσαία τιμή των δεδομένων, αν διατάξουμε όλες τις τιμές σε αύξουσα σειρά και το πλήθος των τιμών είναι περιττός αριθμός, ή είναι η μέση τιμή (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων τιμών, αν το πλήθος των τιμών είναι άρτιος αριθμός.

3. Η **μεταβλητότητα** αναφέρεται σε αριθμητικές εκφράσεις που χαρακτηρίζουν τη διασπορά των δεδομένων. Στην Ε΄ Δημοτικού περιοριζόμαστε στο «εύρος» των τιμών, δηλαδή στο ποια είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή και ποια είναι η διαφορά τους.

Οι βασικές έννοιες που αναπτύσσονται στη θεματική ενότητα των **Πιθανοτήτων** είναι:

1. Το **πείραμα τύχης** που αναφέρεται στην πραγματοποίηση πειραμάτων που μπορεί να επαναληφθούν πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και των οποίων τα αποτελέσματα

δεν είναι προβλέψιμα. Για παράδειγμα, το τράβηγμα ενός χαρτιού της τράπουλας, η ρίψη ενός ζαριού, η γέννηση ενός παιδιού κοκ.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος ονομάζεται **δειγματικός χώρος**. Έτσι, για παράδειγμα, στο πείραμα της γέννησης ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο {αγόρι, κορίτσι}, στη ρίψη ενός ζαριού {1,2,3,4,5,6} κ.λπ.

Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, όταν αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές (εμπειρική πιθανότητα) και προσδιορίζουν αριθμητικά την πιθανότητα σε πειράματα τύχης (θεωρητική πιθανότητα). Η σύγκριση της σχετικής συχνότητας (εμπειρικής πιθανότητας) και της θεωρητικής πιθανότητας επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται τη διαφορά ανάμεσα στο προβλεπόμενο και στο πραγματικό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης.

2. Η **πιθανότητα ενδεχομένου** αφορά στον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου και αναπτύσσεται από την περιγραφή ενός ενδεχομένου ως βέβαιου, πιθανού, απίθανου, αδύνατου μέχρι τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός απλού ενδεχομένου με κλάσματα.

Β. Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών

Οι μαθητές/ήτριες έχουν εμπλακεί σε προηγούμενες τάξεις σε δραστηριότητες που τους δίνεται η δυνατότητα να διατυπώσουν ερωτήματα, να συλλέξουν, να οργανώσουν και να αναπαραστήσουν δεδομένα με στόχο, αρχικά, την απλή ανάγνωση και σύγκριση των πληροφοριών και σταδιακά την εξαγωγή συμπερασμάτων και την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας.

Η έννοια της πιθανότητας, αν και υπάρχει στο ΔΕΠΠΣ, απουσιάζει τόσο από το ΑΠΣ, όσο και από τα διδακτικά εγχειρίδια.

Η εισαγωγή των στοχαστικών Μαθηματικών (Στατιστική και Πιθανότητες) από την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία προτείνεται στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών.

Οι μαθητές/ήτριες στο Βιβλίο Μαθηματικών Ε΄ Δημοτικού διενεργούν έρευνες, συλλέγουν και οργανώνουν δεδομένα, επεκτείνοντας τους τρόπους οργάνωσής τους και στις απλές ομαδοποιήσεις, αναλύουν δεδομένα και κατασκευάζουν ποικιλία στατιστικών διαγραμμάτων. Μέσω των ερευνών, επίσης, εξάγουν συμπεράσματα, επιχειρηματολογούν και κάνουν προβλέψεις, ενώ προσδιορίζουν χαρακτηριστικές τιμές των δεδομένων (μέση τιμή) και διερευνούν τα χαρακτηριστικά τους.

Τέλος, πραγματοποιώντας πειράματα και αξιολογώντας εμπειρικά δεδομένα, εκφράζουν την πιθανότητα ενός απλού ενδεχομένου με κλάσμα.

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Οι μαθητές/ήτριες μερικές φορές δυσκολεύονται:

Α. Στη Στατιστική:

1. Να διακρίνουν ποια ερωτήματα δεν μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο στατιστικής επεξεργασίας.
2. Να αντιληφθούν ότι ο αριθμός των μονάδων του πληθυσμού (π.χ. ο αριθμός των μαθητών και των μαθητριών που συμμετέχουν σε μιαν έρευνα) είναι ίδιος με τον αριθμό των

δεδομένων (π.χ. κάθε μαθητής/ήτρια απαντά μία φορά) (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

3. Να κατανοήσουν τα διαφορετικά νοήματα των αριθμών κατά την περιγραφή των δεδομένων: κάποιοι αριθμοί δείχνουν την τιμή των δεδομένων και κάποιοι άλλοι πόσο συχνά εμφανίζεται μια τιμή. Για παράδειγμα, 138 είναι το ύψος σε εκατοστά κάποιων μαθητών (τιμή δεδομένων) και 4 μαθητές από τον υπό εξέταση πληθυσμό έχουν αυτό το ύψος (συχνότητα εμφάνισης).
4. Στην κατασκευή διαγραμμάτων και πολύ περισσότερο σε ερωτήσεις που απαιτούν ανάλυση των σχέσεων που υπονοούνται στο διάγραμμα (γενίκευση και πρόβλεψη).
5. Να κατανοήσουν το σύνολο των δεδομένων ως ολότητα, γεγονός που δεν τους επιτρέπει να αντιληφθούν την αντιπροσωπευτική διάσταση του μέσου όρου ως μιας ισοσταθμισμένης κατανομής (Van De Walle, 2005), ή με τη μορφή ενός μαθηματικού σημείου ισορροπίας των δεδομένων (Mokros & Russell, 1995). Συχνά, επίσης, αντιλαμβάνονται τη μέση τιμή ως δίκαιη μοιρασιά (π.χ. πόσα γράμματα θα είχαν τα ονόματα των μαθητών/ριών, αν όλα τα ονόματα είχαν τον ίδιο αριθμό γραμμάτων) και μόνον σε μεγαλύτερες τάξεις ως σημείο ισορροπίας.
6. Να κατανοήσουν ότι η διάμεσος και η μέση τιμή δεν είναι απαραίτητο να βρίσκονται πάντοτε στις τιμές των δεδομένων, άρα χρειάζεται να τις ερμηνεύουν πάντοτε στο πλαίσιο της αντίστοιχης δραστηριότητας.

Β. Στις Πιθανότητες:

1. Δεν είναι πάντοτε εύκολο για τους μαθητές και τις μαθήτριες να αντιληφθούν ότι δεν μπορεί να προβλεφθεί η εμφάνιση ενός ενδεχομένου σε κάθε δοκιμή κατά την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης. Δυσκολεύονται, συνήθως, να κατανοήσουν θεμελιώδεις έννοιες που σχετίζονται με τις πιθανότητες όπως, για παράδειγμα, ο «Νόμος των Μεγάλων Αριθμών» και έτσι έχουν την αντίληψη ότι:

- Τα πιο πιθανά αποτελέσματα είναι αυτά που υποθέτουν με βάση τις προσωπικές τους επιθυμίες και κρίσεις (π.χ. τυχερός αριθμός, μικρή η πιθανότητα να φέρουν τον "δύσκολο" αριθμό 6 κατά τη ρίψη ενός ζαριού κ.λπ.).
- Έχουν την αντίληψη ότι ύστερα από πολλές συνεχόμενες εμφανίσεις ενός αποτελέσματος (π.χ. κορώνα στη ρίψη ενός κέρματος), την επόμενη φορά θα εμφανιστεί το άλλο ενδεχόμενο (π.χ. γράμματα) (Φεσάκης, Καφούση & Μαλισόβα, 2017). Επίσης, μπορεί να υποθέσουν και το αντίθετο, δηλαδή ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί π.χ. κορώνα στη ρίψη ενός κέρματος είναι μεγαλύτερη, αφού και τις προηγούμενες φορές ερχόταν πολύ συχνά το ίδιο.

<u>Σημείωση:</u> Ο «Νόμος των Μεγάλων Αριθμών» είναι το θεώρημα που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρεται ένα συγκεκριμένο πείραμα, όταν ο αριθμός των επαναλήψεων είναι μεγάλος. Συμφώνα με τον Νόμο αυτόν, ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων θα είναι κοντά στην αναμενόμενη τιμή (θεωρητική πιθανότητα) και θα τείνει να πλησιάζει σ' αυτήν περισσότερο όσο αυξάνεται ο αριθμός των δοκιμών.

2. Επίσης, οι μαθητές/ήτριες δυσκολεύονται να εντοπίσουν κάθε φορά τον δειγματικό χώρο (το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων) σε ένα πείραμα τύχης.

3. Ακόμη η έκφραση της πιθανότητας με κλάσματα προϋποθέτει καλή γνώση των ρητών αριθμών (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Δ. Εποπτικό υλικό

αποκόμματα από εφημερίδες ή από περιοδικά στα οποία υπάρχουν διαγράμματα διάφορων ερευνών, χαρτί μιλιμετρέ, τροχός παραρτήματος, ζάρια, ομοιόμορφοι κύβοι ή μικρές μπίλιες που μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε πειράματα τύχης κ.λπ.

Κεφάλαιο 22: Συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορεί να απαντηθούν με δεδομένα,
- να συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών, μετρήσεων και πειραμάτων και να τα οργανώνουν σε πίνακες απόλυτων συχνοτήτων αλλά και με απλές ομαδοποιήσεις,
- να αναπαριστάνουν τα δεδομένα σε διαγράμματα, εικονογράμματα, ραβδογράμματα και διπλά ραβδογράμματα,
- να κάνουν μετατροπές από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη,
- να επιχειρηματολογούν βασιζόμενοι στα δεδομένα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

εφημερίδες με έρευνες

Ψηφιακά εργαλεία

Ενδείκνυται η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή για την κατασκευή γραφημάτων.

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης: Στη δραστηριότητα αυτήν παρουσιάζονται σε πίνακα οι απαντήσεις των μαθητών/ριών σε ένα σχολείο της Αθήνας για τις συνολικές ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού που έχουν τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας (δεδομένα έρευνας). Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες πώς μπορεί να έγινε η συλλογή των δεδομένων και με ποιους άλλους τρόπους μπορεί να συλλέγουν τα δεδομένα σε μιαν έρευνα. Στη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες συζητούν τα δεδομένα του πίνακα για το σχολείο της Αθήνας.

1. Πραγματοποιούν στη δική τους τάξη αντίστοιχη έρευνα. Καταγράφουν τις απαντήσεις τους στον πίνακα δεδομένων. Κάθε μαθητής/ήτρια δίνει μόνον μίαν απάντηση. *<u>Σημείωση:</u> Κατά την κρίση του/της εκπαιδευτικού, το ερευνητικό ερώτημα μπορεί να έχει δοθεί από την προηγούμενη ημέρα στους μαθητές και τις μαθήτριες, για να το σκεφτούν και να το συζητήσουν την επόμενη ημέρα.*

Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες αν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα από τα δεδομένα στους δύο πίνακες, έτσι όπως τα έχουμε καταγράψει. Αναμένεται μέσα από τη συζήτηση να αναδειχθεί η ανάγκη οργάνωσης και επεξεργασίας των δεδομένων.

2. Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες πώς μπορούμε να οργανώσουμε τα δεδομένα μας συμπληρώνοντας τους πίνακες συχνοτήτων. Στη συνέχεια, συζητάμε τον λόγο ομαδοποίησης των δεδομένων στην πρώτη στήλη. *Σημείωση: Όταν το πλήθος των τιμών είναι μεγάλο και δεν ενδιαφέρει απαραίτητα η μεμονωμένη καταγραφή των τιμών, προτιμάμε να τις ομαδοποιούμε καθορίζοντας αυθαίρετα το πλήθος των ομάδων.*

Οι μαθητές/ήτριες γνωρίζουν από μικρότερες τάξεις να καταγράφουν με γραμμές τη συχνότητα εμφάνισης των δεδομένων (πόσο συχνά εμφανίζεται μια τιμή στα δεδομένα) και, κατά συνέπεια, είναι σε θέση να συμπληρώσουν τις αντίστοιχες στήλες. Στη συνέχεια, συμπληρώνουν και τις στήλες στις οποίες καταγράφεται με αριθμό η συχνότητα εμφάνισης των δεδομένων.

Οι μαθητές/ήτριες, αφού καταγράψουν τα δεδομένα στον πίνακα συχνοτήτων, μετά μπορούν να συζητήσουν και να κάνουν συγκρίσεις ανάμεσα στις δύο έρευνες. Περιγράφουν το εύρος των δεδομένων, δηλαδή από πού μέχρι πού είναι "απλωμένα" τα δεδομένα, όπως, επίσης, πού είναι πολύ συγκεντρωμένα και πού υπάρχουν λίγα ή καθόλου δεδομένα.

3. Κατόπιν οι μαθητές/ήτριες συμπληρώνουν το διπλό ραβδόγραμμα. Αναπαριστάνουν τα δεδομένα του πίνακα συχνοτήτων της δικής τους έρευνας στο ραβδόγραμμα. Σχεδιάζουν με διαφορετικό χρώμα (κόκκινο) τις ράβδους που αναπαριστάνουν το πλήθος των παιδιών που αντιστοιχούν σε κάθε ομάδα απαντήσεων.

- Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να αντλήσουν την πληροφορία για το πλήθος των μαθητών/ριών που έλαβαν μέρος στην έρευνα από όποιον πίνακα επιθυμούν (δεδομένων, συχνοτήτων ή από το ραβδόγραμμα). *Σημείωση: Θα διαπιστώσουν τον διαφορετικό βαθμό δυσκολίας άντλησης της πληροφορίας από κάθε πίνακα.* Οι μαθητές/ήτριες που έλαβαν μέρος στην έρευνα του σχολείου της Αθήνας είναι 24.
- Το ύψος των ράβδων δείχνει το πλήθος των παιδιών για κάθε ομάδα διαφορετικών απαντήσεων ως προς τις ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού στις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας.
- Οι μαθητές/ήτριες μπορούν εύκολα να διαπιστώσουν από το ραβδόγραμμα σε ποια ομάδα απαντήσεων ανήκει η ψηλότερη κόκκινη ράβδος, που δείχνει τι απάντησαν τα περισσότερα παιδιά του σχολείου.

Στη συνέχεια, οι μαθητές/ήτριες συγκρίνουν τα αποτελέσματα των δύο ερευνών και εξάγουν συμπεράσματα (για ποιον λόγο τα αποτελέσματα διαφέρουν ή είναι όμοια). *Σημείωση: Συγκρίνουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων σε διαφορετικούς πληθυσμούς ή σε διαφορετικά μη σταθμισμένα δείγματα του ίδιου πληθυσμού.*

Η ερμηνεία των δεδομένων αποσκοπεί στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τους μαθητές και τις μαθήτριες και στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Σημείωση: Ο/Η εκπαιδευτικός μπορεί να εμπλέξει τα παιδιά στην πραγματοποίηση και άλλης μιας μικρής έρευνας στην τάξη τους για ένα ερώτημα που προκαλεί το ενδιαφέρον τους. Η διατύπωση του ερωτήματος από τα παιδιά είναι σημαντική, καθώς αυτά εμπλέκονται ενεργά στην ερευνητική διαδικασία και εισάγονται στην ανάπτυξη προβληματισμών για τον τρόπο συλλογής και οργάνωσης των δεδομένων. Επίσης, είναι σημαντικό ο/η εκπαιδευτικός να βοηθήσει τα παιδιά να συνδέσουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους με την καθημερινότητά τους (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Οι βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες αφορούν στη συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία των δεδομένων. Παρουσιάζονται, επίσης, τα διάφορα είδη διαγραμμάτων. Συζητάμε με τους μαθητές/ήτριες τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ των διαγραμμάτων.

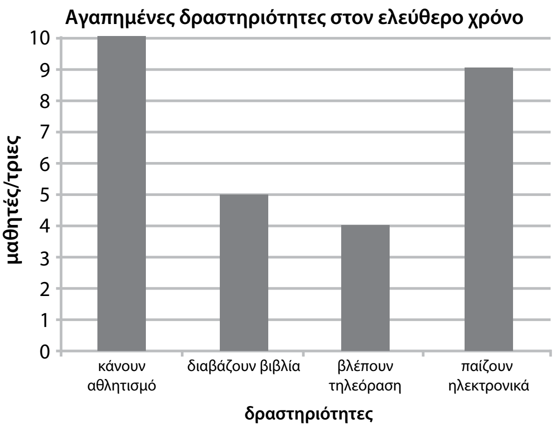
Εφαρμογή: Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες τη διαδικασία διενέργειας μιας έρευνας και τον τρόπο κατασκευής ενός ραβδογράμματος. Οι μαθητές/ήτριες είναι απαραίτητο να κατανοήσουν ότι δεν είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε αριθμητικά δεδομένα στον άξονα παρά μόνον αν τον χωρίσουμε σε ίσα διαστήματα.

Αναστοχασμός: Κατά την περιγραφή και την οργάνωση ποσοτικών δεδομένων οι μαθητές/ήτριες χρειάζεται να κατανοήσουν τα διαφορετικά νοήματα των αριθμών, δηλαδή ότι κάποιοι αριθμοί δείχνουν την τιμή των δεδομένων και ότι κάποιοι άλλοι αποτυπώνουν πόσο συχνά εμφανίζεται μία τιμή. Για παράδειγμα, αν τα δεδομένα μας είναι τα ύψη των παιδιών μιας τάξης, οι αριθμοί που δείχνουν τα ύψη των παιδιών είναι οι τιμές των δεδομένων, ενώ κάποιοι άλλοι αριθμοί δείχνουν πόσο συχνά εμφανίζεται η κάθε τιμή ύψους (πλήθος μαθητών με συγκεκριμένο ύψος).

Τετράδιο Εργασιών

1ο Πρόβλημα: Στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι οι μαθητές/ήτριες να οργανώσουν και να αναπαραστήσουν τα δεδομένα της έρευνας. *<u>Σημείωση</u>: Επισημαίνεται ο τρόπος κατασκευής του ραβδογράμματος (όπως στην εφαρμογή).*

Αγαπημένες δραστηριότητες στον ελεύθερο χρόνο		
Δραστηριότητες	**Καταμέτρηση με γραμμές**	**Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό**
κάνουν αθλητισμό	𝍸 𝍸	10
διαβάζουν βιβλία	𝍸	5
βλέπουν τηλεόραση	||||	4
παίζουν ηλεκτρονικά	𝍸 ||||	9



α. Τα περισσότερα παιδιά (10) κάνουν αθλητισμό και τα λιγότερα (4) βλέπουν τηλεόραση. **β.** Μπορούμε να θεωρήσουμε κατά κανόνα ότι μόνον ο αθλητισμός είναι εκτός σπιτιού. Αν όμως οι μαθητές/ήτριες δώσουν και διαφορετικές απαντήσεις (π.χ. διαβάζουν βιβλία εκτός σπιτιού) θα είναι αποδεκτές, αρκεί να αιτιολογηθούν σωστά. **γ.** 28. **δ.** Οι μαθητές/ήτριες σχολιάζουν ελεύθερα τα αποτελέσματα της έρευνας επιχειρηματολογώντας σχετικά όπου χρειάζεται. **ε.** Οι μαθητές/ήτριες αναγνωρίζουν τους περιορισμούς των δεδομένων (δείγμα, πληθυσμός). Η έρευνα δεν μπορεί να αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό όλων των παιδιών της Ε΄ τάξης της Ελλάδας, καθώς το δείγμα είναι πολύ μικρό.

4. Αφού θα αλλάξει το δείγμα, τα αποτελέσματα αναμένεται να είναι διαφορετικά, χωρίς να αποκλείεται να είναι εντελώς τυχαία ακριβώς ίδια.

Διερεύνηση – Επέκταση: Τα παιδιά καλούνται να αποκωδικοποιήσουν πληροφορίες που παρέχονται μέσω του διαγράμματος γραμμής, να τις μεταφέρουν στον πίνακα συχνοτήτων και, στη συνέχεια, να αναπαραστήσουν τα δεδομένα σε εικονόγραμμα. Το διάγραμμα γραμμής εμφανίζεται στις ιστοσελίδες και δείχνει το πλήθος των επισκεπτών/τριών της ιστοσελίδας για κάθε μέρα της εβδομάδας. Οι μαθητές/ήτριες συζητούν σε τι διαφέρει το συγκεκριμένο διάγραμμα σε σχέση με όσα διαγράμματα έχουν ήδη μελετήσει σε προηγούμενες τάξεις (ραβδόγραμμα, εικονόγραμμα, σημειόγραμμα) και τι είδους πληροφορίες παρουσιάζει. Κατόπιν αναπαριστάνουν σε μορφή εικονογράμματος. Σε αυτήν τη δραστηριότητα οι μαθητές/ήτριες κατασκευάζουν στατιστικά διαγράμματα και συγκρίνουν την αποτελεσματικότητα διαφορετικών αναπαραστάσεων για την παρουσίαση μιας ομάδας δεδομένων.

1. Πιθανοί λόγοι της χαμηλής επισκεψιμότητας την Κυριακή είναι ότι τόσο οι μαθητές/ήτριες, όσο και οι γονείς ασχολούνται με άλλες δραστηριότητες λόγω της αργίας.

Αριθμός ατόμων που επισκέφτηκαν στην ιστοσελίδα του σχολείου σε μια εβδομάδα							
Ημέρα	ΔΕΥΤ.	ΤΡ.	ΤΕΤ.	ΠΕΜ.	ΠΑΡ.	ΣΑΒ.	ΚΥΡ.
Αριθμός επισκεπτών/ επισκεπτριών	120	80	130	90	110	40	10

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να προσδιορίζουν χαρακτηριστικές τιμές των δεδομένων (επικρατούσα τιμή, διάμεσο) και να διερευνούν τα χαρακτηριστικά τους,
- να κατανοούν την αναγκαιότητα της εύρεσης και χρήσης του μέσου όρου.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

αποκόμματα από εφημερίδες ή από περιοδικά στα οποία υπάρχουν διαγράμματα διάφορων ερευνών.

Ψηφιακά εργαλεία

Ενδείκνυται η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή (υπολογιστικά φύλλα) για τον υπολογισμό της μέσης τιμής.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4215?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Σημείωση: Εισαγωγική δραστηριότητα: Ο/Η εκπαιδευτικός ενδείκνυται να μοιράσει στα παιδιά αποκόμματα από εφημερίδες ή από περιοδικά στα οποία υπάρχουν διαγράμματα και να συζητήσουν για την αναγκαιότητα των ερευνών σε θέματα της καθημερινής ζωής, για τη σημασία των γραφημάτων ως προς την ευκολία ανάγνωσης των δεδομένων και για την ένδειξη του μέσου όρου που υπάρχει σε γραφικές αναπαραστάσεις. (μέση θερμοκρασία, μέσο μηνιαίο εισόδημα). Μπορούμε επίσης να συζητήσουμε για τη σημασία του μέσου όρου στην καθημερινή ζωή: το βάρος ενός ενήλικα (για το ασανσέρ), το ύψος ενός ενήλικα (για την κατασκευή των καρεκλών, των κρεβατιών, των θέσεων στα αεροπλάνα).

Δραστηριότητες διερεύνησης

α1. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τα δεδομένα που παρουσιάζονται στο ραβδόγραμμα και υπολογίζουν το άθροισμα των πόντων που σημείωσε ο Τζέιμς στους 10 αγώνες. Σημείωσε 210 πόντους.

α2. Με το ερώτημα αυτό εισάγουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες στην έννοια της μέσης τιμής (ή μέσος όρος). Μια ερώτηση που θα μπορούσε να τεθεί στους μαθητές και στις μαθήτριες είναι: «Υπάρχει ένας αριθμός που θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει πόσους πόντους περίπου πετυχαίνει ο Τζέιμς σε κάθε αγώνα;». *Σημείωση: Η μέση τιμή στις μικρότερες τάξεις γίνεται αντιληπτή από τα παιδιά ως δίκαιη μοιρασιά μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες και σε μεγαλύτερες τάξεις ως σημείο ισορροπίας.* Πριν φτάσουμε στον αλγόριθμο της εύρεσης της μέσης τιμής, συζητάμε με τους μαθητές/ήτριες τις δικές τους στρατηγικές εύρεσης της μέσης τιμής (π.χ. μοίρασμα των πόντων σε κάθε αγώνα, ώστε να μοιραστούν, με αφαίρεση ή πρόσθεση πόντων, εξίσου σε όλους τους αγώνες, ώστε όλες οι ράβδοι να έχουν το ίδιο ύψος. Στη συνέχεια, εισάγουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες στον υπολογισμό της μέσης τιμής με τον τυπικό αλγόριθμο. Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων. Οι μαθητές/ήτριες ενδείκνυται να βρουν ζεύγη πόντων που έχουν άθροισμα αριθμούς “βολικούς” (26+14, 25+25, 25+15), για να κάνουν πιο εύκολα την πρόσθεση με νοερούς υπολογισμούς ή να χρησιμοποιήσουν αριθμομηχανή και μετά να διαιρέσουν με το πλήθος των αγώνων.

α1, α2: Συζητάμε πιθανούς παράγοντες που οδήγησαν τον παίκτη να σημειώσει άλλοτε λιγότερους και άλλοτε περισσότερους πόντους.

α3: Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες για τη θέση της κόκκινης γραμμής πάνω στο ραβδόγραμμα. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουν ότι η κόκκινη γραμμή είναι πάνω από την κατώτερη τιμή και κάτω από την ανώτερη τιμή.

β. Συμπληρώνουμε κατά τα γνωστά τον πίνακα συχνοτήτων. Η μικρότερη τιμή πόντων είναι 11 και η μεγαλύτερη 30.

β3: Η τιμή πόντων που εμφανίζεται πιο συχνά είναι το 25. *Σημείωση: Η ερώτηση β3 αναφέρεται στην επικρατούσα τιμή (η τιμή που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές).*

γ: Οι μαθητές/ήτριες διατάσσουν όλες τις τιμές των δεδομένων από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη: 11, 13, 15, 17, 23, 25, 25, 25, 26, 30. Στη συνέχεια βρίσκουν ποια ή ποιες δυο τιμές βρίσκονται στο μέσο της διάταξης. *Σημείωση: Αν το πλήθος των τιμών είναι μονός αριθμός, τότε η τιμή αυτή, η διάμεσος, είναι ένας αριθμός. Αν το πλήθος των τιμών είναι ζυγός αριθμός, τότε οι τιμές είναι δύο και πρέπει να βρούμε τον μέσο όρο από αυτές τις δύο τιμές, για να βρούμε τη διάμεσο.* Οι μαθητές/ήτριες προσδιορίζουν τη θέση του “κέντρου” των δεδομένων (διάμεσος): οι δυο τιμές που βρίσκονται στο μέσο της διάταξης είναι οι τιμές 23 και 25 [και ο μέσος όρος του είναι (23+25):2=24]. *Σημείωση: Η διάμεσος μπορεί να εκφραστεί με την πρόταση «Σε πάνω από τους μισούς αγώνες ο Τζέιμς πέτυχε περισσότερους από 24 πόντους».*

- Η εύρεση του μέσου όρου (της μέσης τιμής) μας βοηθά να κάνουμε συγκρίσεις και προβλέψεις. Οι πόντοι του συγκεκριμένου παίκτη προβλέπεται να είναι περίπου 21 πόντοι ανά αγώνα στη διάρκεια της αγωνιστικής περιόδου.
- Οι πιθανοί παράγοντες που μπορεί να ανατρέψουν τις προβλέψεις μας για την πορεία του παίκτη είναι: τραυματισμός/ασθένεια παίκτη, αποβολή του σε αγώνες, χαμηλή απόδοση λόγω πολλών αγωνιστικών υποχρεώσεων, ψυχολογική πίεση κ.λπ.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Οι βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες περιέχουν μία από τις χαρακτηριστικές τιμές δεδομένων, τη μέση τιμή ή μέσο όρο, που αποτελεί και το κύριο στοιχείο του κεφαλαίου.

Εφαρμογή: Στην εφαρμογή γίνεται σύγκριση της μέσης μηνιαίας βροχόπτωσης των δυο πόλεων και οι μαθητές/ήτριες οδηγούνται σε χρήσιμα συμπεράσματα. *Σημείωση: Οι μετρήσεις αφορούν στον 20ο αιώνα. Για να βγουν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με το κλίμα ενός τόπου, οι απαραίτητες μετρήσεις εκτείνονται σε δεκάδες χρόνια.*

Αναστοχασμός

1. Η μέση τιμή δεν είναι πάντοτε η τιμή ενός από τα δεδομένα. Μπορούμε να επανέλθουμε στα παραδείγματα των βασικών μαθηματικών εννοιών και διεργασιών και στην εφαρμογή, για να δούμε σχετικά παραδείγματα.

2. Μπορούμε να κάνουμε μιαν εκτίμηση του ύψους των αγοριών της Ε΄ Δημοτικού στη χώρα μας, καθώς το δείγμα θεωρείται αρκετά αντιπροσωπευτικό.

3. Δεν μπορούμε να κάνουμε εκτίμηση της μέσης τιμής της θερμοκρασίας για την επόμενη εβδομάδα, καθώς την προηγούμενη εβδομάδα μπορεί να σημειώθηκαν θερμοκρασίες (πολύ υψηλές ή πολύ χαμηλές), που να επηρέασαν τη μέση τιμή της θερμοκρασίας. Η μέση τιμή της θερμοκρασίας ενός τόπου για συγκεκριμένη εποχή απαιτεί μακροχρόνιες μετρήσεις και δεν αφορά σε συγκεκριμένες εβδομάδες κατά τις οποίες μπορεί να παρουσιαστούν έκτακτα καιρικά φαινόμενα.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: (189+203+196+202+198):5= 197,6 εκ. *Σημείωση: Η μέση τιμή σε συνεχή ποσοτικά δεδομένα περιλαμβάνει και αριθμούς που μπορεί να μην είναι ακέραιοι αριθμοί.*

- Η μέση τιμή θα αυξανόταν, καθώς θα αυξανόταν μια τιμή των δεδομένων.

2η Άσκηση: Για την εκτίμηση της μέσης τιμής οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι η τιμή 25 και 26 εμφανίζεται τις περισσότερες φορές στον πίνακα, ενώ οι υπόλοιπες τιμές ανεβοκατεβαίνουν περίπου το ίδιο γύρω από την τιμή 25. *Σημείωση: Παρατηρώντας την αυξομείωση των τιμών μπορούμε να κάνουμε μιαν πολύ καλή εκτίμηση της μέσης τιμής. Η μέση τιμή είναι 25.*

3η Άσκηση: Οι μαθητές/ήτριες γράφουν τις δικές τους τιμές δεδομένων λαμβάνοντας υπόψη το πλήθος των δεδομένων. Εφόσον οι αριθμοί είναι 5 και η μέση τιμή 7, το σύνολο των δεδομένων θα πρέπει να έχει άθροισμα 5x7=35. Επομένως οι μαθητές/ήτριες συμπληρώνουν τις τιμές δεδομένων με 5 αριθμούς που έχουν άθροισμα 35.

1ο Πρόβλημα: Η μέση τιμή των επιδόσεων όλης της ομάδας είναι 53.

2ο Πρόβλημα: Με τις 5 ρίψεις, η μέση τιμή είναι: $\frac{2+6+4+6+3}{5}=\frac{21}{5}$. Ο υπολογισμός της μέσης τιμής για 7 ρίψεις θα έχει παρονομαστή το 7. Για να είναι το πηλίκο φυσικός αριθμός, πρέπει ο αριθμητής να είναι πολλαπλάσιο του 7 και μεγαλύτερο από το 21. Αν υποθέσουμε ότι στις δύο επόμενες ρίψεις ο Νίκος έφερνε το μέγιστο δυνατόν, δηλαδή 6+6=12, τότε το σύνολο των τιμών των δεδομένων θα ήταν 21+12=33. Επομένως ψάχνουμε ένα πολλαπλάσιο του 7 ανάμεσα στο 22 και το 33. Είναι ο αριθμός 28. Άρα το άθροισμα από τις δύο τελευταίες ρίψεις πρέπει να είναι 28-21=7. Οι μαθητές/ήτριες γράφουν τους πιθανούς συνδυασμούς για τις δυο ρίψεις, οι οποίες δίνουν άθροισμα 7, δηλαδή (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3).

3ο Πρόβλημα: Για να πετύχουν το στόχο τους, η Αγγελική και ο Αντρέι θα πρέπει το σύνολο των βιβλίων να είναι πολλαπλάσιο του 6. Επομένως οι μαθητές/ήτριες, πριν ανακατανείμουν τα βιβλία, θα πρέπει να ελέγξουν το σύνολο των βιβλίων. Είναι 42. Επομένως 42:6=7 είναι η μέση τιμή, που είναι φυσικός αριθμός. Άρα είναι εφικτός ο στόχος της μετακίνησης των βιβλίων και κάθε στήλη χρειάζεται να έχει από 7 βιβλία.

- Δεν θα μπορούσε όλες οι στοίβες να έχουν τον ίδιο αριθμό βιβλίων, εάν το πλήθος όλων των βιβλίων δεν ήταν πολλαπλάσιο του 6.

Διερεύνηση- Επέκταση: Στόχος της διερεύνησης είναι οι μαθητές/ήτριες να κατανοήσουν ότι η μέση τιμή επηρεάζεται από τις «ακραίες τιμές».

α. Η τιμή που διαφέρει πολύ από τις υπόλοιπες (ακραία τιμή) είναι η τιμή 178 εκ.

β. Γίνεται ο υπολογισμός της μέσης τιμής για τις δύο περιπτώσεις (147 και 152).

δ. Η τιμή 178 αυξάνει την τιμή της μέσης τιμής.

γ. Επειδή η τιμή 178 εκ. διαφέρει πολύ από τις υπόλοιπες τιμές των δεδομένων, η μέση τιμή που αντιπροσωπεύει καλύτερα το ύψος των μαθητών/ριών είναι η τιμή 147 εκ.

Κεφάλαιο 24: Πιθανότητες

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διερευνούν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές,
- να καταγράφουν τα χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης και να προβλέπουν την συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά την επανάληψη ενός πειράματος,
- να διερευνούν τη σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά την επανάληψη ενός πειράματος,
- να εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ενδεχόμενο έως βέβαιο ενδεχόμενο με τη μέση της κλίμακας να αντιπροσωπεύει το ίδιο πιθανόν να συμβεί, όσο το να μην συμβεί,
- να συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους (λιγότερο πιθανό, περισσότερο πιθανό, ισοπίθανο),
- να υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου χρησιμοποιώντας κλάσματα και να την αναπαριστάνουν σε κλίμακα από 0 έως 1.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

τροχός παραρτήματος, ζάρια

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-6975

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

α. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τον τροχό και συζητούν ποιο χρώμα χρειάζεται να διαλέξουν, για να νικήσουν στο πείραμα τύχης. Εκφράζουν τις προβλέψεις τους, π.χ. είναι πιο πιθανόν να έρθει το κίτρινο χρώμα στον τροχό (γιατί το κίτρινο εμφανίζεται περισσότερες φορές στον τροχό ή το κίτρινο καταλαμβάνει το περισσότερο μέρος του τροχού, ή τα $\frac{4}{8}$ του τροχού είναι κίτρινο και μόνον τα $\frac{2}{8}$ κόκκινο και τα $\frac{1}{8}$ μπλε ή πράσινο) και είναι λιγότερο πιθανόν να έρθει το μπλε και το πράσινο χρώμα (γιατί εμφανίζεται μόνον μία φορά το κάθε χρώμα στον τροχό). Ο/Η εκπαιδευτικός βοηθά τα παιδιά να κάνουν προβλέψεις και να αιτιολογήσουν την απόφασή τους με αριθμητικές εκφράσεις, αν δεν το κάνουν μόνα τους, π.χ. το κίτρινο είναι 4 περιπτώσεις στις 8 να τύχει, το κόκκινο είναι 2 περιπτώσεις στις 8, ενώ το μπλε και το πράσινο 1 στις 8 περιπτώσεις.

β. Οι μαθητές/ήτριες κόβουν τον τροχό του παραρτήματος. *Σημείωση: Καλύτερα να τον έχουν έτοιμο από την προηγούμενη μέρα.* Στη συνέχεια, πραγματοποιούν το πείραμα τύχης περιστρέφοντας 20 φορές τον τροχό και καταγράφουν τα αποτελέσματα στον πίνακα πρώτα με γραμμές (μπορεί να περιστρέφει ο καθένας το δικό του τροχό). Μετά εκφράζουν τα αποτελέσματα με **«σχετικές συχνότητες»** - εμπειρική πιθανότητα (π.χ. το κίτρινο έτυχε 12 φορές στις 20 δοκιμές) μετρώντας τις γραμμές. Συγκρίνουν τα πραγματικά αποτελέσματα του πειράματος με την αρχική τους πρόβλεψη στηριζόμενοι στα κλάσματα.

1. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τη συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος. Μπορεί να αναγνωρίσουν το κίτρινο ως το χρώμα με τις μεγαλύτερες πιθανότητες εμφάνισης κάθε φορά, αλλά αρκετά παιδιά θα διαπιστώσουν διαφορές ανάμεσα στις προβλέψεις τους και στο τελικό αποτέλεσμα ύστερα από τις 20 περιστροφές του τροχού.
2. Οι μαθητές/ήτριες θα μπορούσαν να υποθέσουν ότι, αν γυρίσουμε τον τροχό 8 φορές, αφού τα μέρη είναι ίσα μεταξύ τους, αναμένουμε να εμφανιστεί κόκκινο χρώμα 1 φορά. Μετά ο τροχός να σταματήσει σε ένα από τα άλλα μέρη κ.λπ.
3. Με την ίδια σκέψη αναμένουμε να εμφανιστεί πράσινο χρώμα 2 φορές στις 8 περιστροφές του τροχού.

γ. Ο/Η εκπαιδευτικός εισάγει τη χρήση κλασμάτων για την έκφραση της πιθανότητας. Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, όταν αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές (σχετική συχνότητα - εμπειρική πιθανότητα) και προσδιορίζουν αριθμητικά την πιθανότητα σε πειράματα τύχης (θεωρητική πιθανότητα). Η σύγκριση της εμπειρικής πιθανότητας και της θεωρητικής πιθανότητας επιτρέπει στους μαθητές και στις μαθήτριες να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται τη διαφορά ανάμεσα στο προβλεπόμενο και στο πραγματικό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης.

Σημείωση: Επειδή οι μαθητές/ήτριες βλέπουν ότι στην πραγματικότητα δεν συμβαίνει πάντοτε αυτό που υποθέτουν με το παραπάνω σκεπτικό (β2, β3), οφείλουμε να τους /τις εξηγήσουμε ότι η σκέψη αυτή αποτελεί μια βάση, για να αρχίσουμε να κάνουμε προβλέψεις. Στη συνέχεια, μπορούμε να του/τις ζητήσουμε να δουν τα αποτελέσματα στο σύνολο της τάξης. Για παράδειγμα, ένας/μια μαθητής/ήτρια μπορεί να έφερε κίτρινο μόνον 3 φορές στις 20. Αν όμως έχουμε στο σύνολο 20 μαθητές/ήτριες και μετρήσουμε τι συνέβη με τις 20x20=400 περιστροφές, θα διαπιστώσουμε ότι το κίτρινο προσεγγίζει τον αριθμό 200 (δηλαδή τη θεωρητική πιθανότητα $\frac{4}{8}$ ή $\frac{1}{2}$). Αν κάνουμε το ίδιο με έναν ψηφιακό τροχό στον Η/Υ μερικές χιλιάδες φορές, θα διαπιστώσουμε ότι πλησιάζει το $\frac{1}{2}$ ακόμη περισσότερο (στη θεωρία των Πιθανοτήτων αυτό αποτελεί θεμελιώδη έννοια και λέγεται «Νόμος των Μεγάλων Αριθμών»).

Η παραπάνω δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να επιχειρηματολογήσουν για τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης πολλών δοκιμών. Ωστόσο, στα πειράματα τύχης υπάρχει πάντοτε η περίπτωση τα πραγματικά αποτελέσματα να μην συμφωνούν με τις προβλέψεις των μαθητών/ριών. Η σχετική συχνότητα (εμπειρική πιθανότητα) πλησιάζει τη θεωρητική πιθανότητα όσο αυξάνεται το πλήθος των επαναλήψεων.

Σημείωση: Ο/Η εκπαιδευτικός εμπλέκει ενεργά τα παιδιά στην πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης. Είναι σημαντικό οι μαθητές/ήτριες να έχουν την ευκαιρία : α) να εκφράζουν και να δικαιολογούν τις αρχικές τους προβλέψεις, β) να πραγματοποιούν έναν ικανοποιητικό αριθμό δοκιμών του πειράματος και να καταγράφουν τα αποτελέσματα και γ) να αξιολογούν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή του, προκειμένου να οδηγηθούν σε ένα συμπέρασμα (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Οι μαθητές/ήτριες εκφράζουν την πιθανότητα ενός απλού ενδεχομένου ως το κλάσμα (πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων) / (πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων).

Εφαρμογή: Στην εφαρμογή οι μαθητές/ήτριες: α. Υπολογίζουν τη θεωρητική πιθανότητα για ένα πείραμα τύχης. *Σημείωση: Η πιθανότητα είναι 0 για κάποιο ενδεχόμενο, όταν το ενδεχόμενο αυτό είναι αδύνατο να συμβεί, όσες φορές και αν επαναληφθεί το πείραμα. Για παράδειγμα, όσες φορές και αν τραβάμε μπάλες από την τσάντα, ποτέ δεν θα τραβήξουμε μιαν πράσινη μπάλα, αφού δεν υπάρχει μπάλα με αυτό το χρώμα μέσα στην τσάντα. Επίσης, η πιθανότητα είναι 1 για κάποιο ενδεχόμενο, όταν το ενδεχόμενο αυτό είναι βέβαιο ότι θα συμβαίνει, κάθε φορά κατά την οποία επαναλαμβάνεται το πείραμα.*
β. Τοποθετούμε τις πιθανότητες στην αριθμογραμμή.

Αναστοχασμός: 1. Η πιθανότητα να έρθει ο αριθμός 17 είναι $\frac{1}{20}$. Κάθε αριθμός από το 1 μέχρι το 20 είναι το ίδιο πιθανόν να κληρωθεί.

2. Οι μαθητές/ήτριες εκφράζουν τη θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 2 κατά τη ρίψη ενός ζαριού. Η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 2 είναι $\frac{1}{6}$, επομένως σε 10.000 ρίψεις είναι περίπου = 1.700 φορές (για ένα κατ' εκτίμηση υπολογισμό της διαίρεσης, η θεωρητική πιθανότητα ακριβώς είναι 1.666,6). *<u>Σημείωση:</u> Εδώ υπολογίζουμε τη θεωρητική πιθανότητα. Οι ρίψεις θα μπορούσε να πραγματοποιηθούν μόνον με ένα ψηφιακό εργαλείο, οπότε θα ήταν δυνατόν να διαπιστώσουμε και τις διαφορές με τη σχετική συχνότητα(εμπειρική πιθανότητα).*

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: μπλε χρώμα: $\frac{1}{8}$, κόκκινο χρώμα: $\frac{2}{8}$, κίτρινο χρώμα : $\frac{5}{8}$

Οι μαθητές/ήτριες χωρίζουν την αριθμογραμμή σε 8 ίσα μέρη και τοποθετούν τα παραπάνω κλάσματα στην αριθμογραμμή.

2η Άσκηση: Οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 2 και βρίσκονται στο ζάρι είναι: 2,4,6. Επομένως η πιθανότητα είναι $= \frac{\textit{πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\textit{πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3η Άσκηση: Στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι οι μαθητές/ήτριες να χαρακτηρίσουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο ή άδικο. Το παιχνίδι είναι άδικο, καθώς η πιθανότητα να έρθει μονός αριθμός είναι $\frac{5}{9}$, ενώ η πιθανότητα να έρθει ζυγός αριθμός είναι $\frac{4}{9}$. Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες πώς μπορεί το παιχνίδι να γίνει δίκαιο.

1ο πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες εκφράζουν την πιθανότητα να έρθει το καθένα χρώμα με κλάσμα με παρονομαστή το 6 (όσα και τα ίσα μέρη του τροχού):

κόκκινο χρώμα: $\frac{1}{6}$, μπλε χρώμα $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, πράσινο χρώμα: $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. Άρα στον τροχό 1 μέρος θα χρωματιστεί κόκκινο, 1 πράσινο και 4 μπλε.

2ο πρόβλημα: Όλοι οι κύβοι που βρίσκονται στη σακούλα είναι 15. **α.** Αρκεί το σύνολο των κύβων να είναι πενταπλάσιο από τους κόκκινους κύβους. Υπάρχουν πολλές λύσεις (εξαρτάται από το πόσους κύβους μπορεί να χωρέσει η σακούλα). Ενδεικτικά, αναφέρουμε: Αν το σύνολο των κύβων είναι 15, θα πρέπει οι κόκκινοι να είναι 3, ώστε η πιθανότητα να είναι $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, θα πρέπει δηλαδή να αφαιρεθεί ένας κόκκινος κύβος και να προστεθεί ένας κύβος οποιουδήποτε άλλου χρώματος. Επίσης, για να γίνει η πιθανότητα $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, χρειάζεται να αφαιρεθούν 2 κόκκινοι κύβοι και το πλήθος των υπόλοιπων χρωμάτων να είναι 8 κ.λπ.

β. Υπάρχουν πολλές λύσεις. Αφού θέλουμε η τυχαία επιλογή οποιουδήποτε χρώματος κύβου να είναι το ίδιο πιθανή και τα χρώματα είναι 5, θα πρέπει το πλήθος των κύβων να είναι πολλαπλάσιο του 5 και να έχουμε κάθε φορά ίσο πλήθος κύβων από κάθε χρώμα.

Διερεύνηση – Επέκταση

α. Οι μαθητές/ήτριες προβλέπουν με βάση τη θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης του κάθε χρώματος. Πράσινο χρώμα: $\frac{3}{10}$, κόκκινο χρώμα: $\frac{5}{10}$, κίτρινο χρώμα: $\frac{2}{10}$. Σύμφωνα με τη θεωρητική πιθανότητα οι προβλέψεις για 20 επαναλήψεις του πειράματος τύχης είναι: πράσινο 6, κόκκινο 10, κίτρινο 4.

β. Οι μαθητές/ήτριες χωρίζονται σε ομάδες, κάνουν το πείραμα τύχης και καταγράφουν τα αποτελέσματα στον πίνακα (με γραμμές και με αριθμό).

γ. Συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με τις αρχικές τους προβλέψεις. Επειδή το πείραμα τύχης εκτελείται λίγες φορές, οι μαθητές/ήτριες αξιολογούν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα εμπειρικά αποτελέσματα (σχετικές συχνότητες- εμπειρική πιθανότητα) που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή του, προκειμένου να οδηγηθούν σε ένα συμπέρασμα.

δ. Οι μαθητές/ήτριες συλλέγουν τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης των συμμαθητών και συμμαθητριών τους και συμπληρώνουν στον πίνακα τη συχνότητα εμφάνισης του κόκκινου κύβου.

Σημείωση: Με τον τρόπο αυτόν, αν έχουμε στην τάξη τουλάχιστον 4 ομάδες, το πείραμα θα εκτελεστεί 80 φορές συνολικά. Στη συνέχεια, συμπληρώνουν το κλάσμα $\frac{\textit{συχνότητα εμφάνισης}}{\textit{επαναλήψεις πειράματος}}$

ε. Η πιθανότητα να τραβήξουμε από την τσάντα ένα κόκκινο κύβο (η θεωρητική πιθανότητα) είναι $\frac{2}{10} = \frac{1}{2}$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, όσο αυξάνεται το πλήθος των δοκιμών του πειράματος τύχης, τόσο η τιμή του κλάσματος της τρίτης στήλης, δηλαδή η σχετική συχνότητα (εμπειρική πιθανότητα), πλησιάζει προς την τιμή $\frac{1}{2}$, δηλαδή τη θεωρητική πιθανότητα.

Επαναληπτικό 4

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

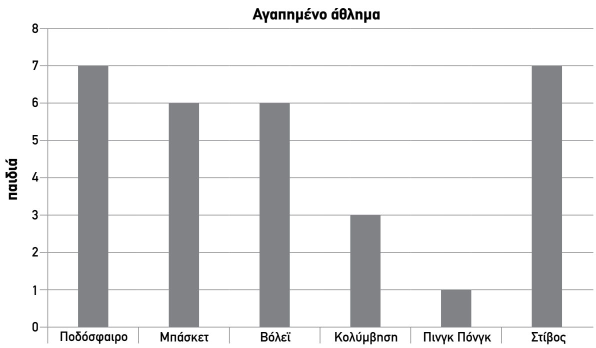
χαρτί μιλιμετρέ

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

1ο Πρόβλημα: Συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων και κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα.

Άθλημα	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό
Ποδόσφαιρο	~~IIII~~ II	7
Μπάσκετ	~~IIII~~ I	6
Βόλεϊ	~~IIII~~ I	6
Κολύμβηση	III	3
Πινγκ Πονγκ	I	1
Στίβος	~~IIII~~ II	7



2ο Πρόβλημα: α. Τα αδέλφια μου: Μέση τιμή 2,6. β. Βιβλία: Μέση τιμή 5.

3ο Πρόβλημα: α. μωβ: $\frac{3}{6}$, β. Κίτρινο: 0, γ. Ποτέ πράσινο: $\frac{4}{6}$, δ. Κόκκινο ή πράσινο ή μωβ:1.

4ο Πρόβλημα: 1. Η πρόβλεψη για το αν θα τραβήξουμε μιαν άσπρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$.

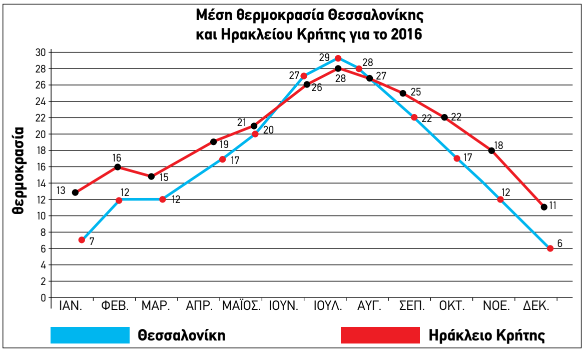
2. Ανάλογα με τα αποτελέσματα θα συμπληρωθούν οι πίνακες.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: α. Όλος ο δίσκος πράσινος, β. τα 3 μέρη από τα 8 κίτρινα, γ. το 1 μέρος από τα 3 κίτρινο $(\frac{1}{3} = \frac{2}{6})$, κανένα μέρος του δίσκου πράσινο.

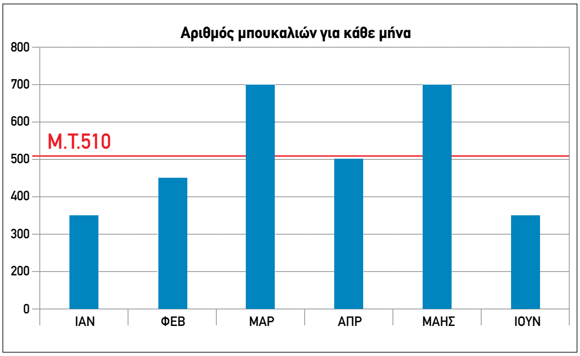
1ο Πρόβλημα:

- Κατασκευάζουμε το διάγραμμα.
- Υψηλότερες θερμοκρασίες: ΙΟΥΛΙΟ και για τις δύο πόλεις.
- Μέγιστη διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στις δύο πόλεις: τον ΝΟΕΜΒΡΙΟ (6°C).
- Διαφορά υψηλότερη από τη χαμηλότερη θερμοκρασία: ΗΡΑΚΛΕΙΟ: 17°C, ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ: 23°C.



2ο Πρόβλημα :

1. Σχεδιάζουμε το ραβδόγραμμα.
2. Η μέση τιμή είναι 510.
3. Οι τιμές 350 και 700 εμφανίζονται από 2 φορές.



3ο Πρόβλημα: Ο τροχός που έχουμε είναι δύο χρωμάτων: κόκκινου και μπλε.

1. Το σύνολο των γραμμών, που είναι 30, δείχνει πόσες φορές επαναλήφθηκε το πείραμα τύχης. Επομένως στις 30 φορές η συχνότητα εμφάνισης του κόκκινου ήταν 11 φορές και του μπλε 19 φορές. Το κλάσμα $\frac{\textit{πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\textit{πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων}}$ για το μπλε χρώμα είναι $\frac{19}{30}$ και για το κόκκινο χρώμα είναι $\frac{11}{30}$. Οι τιμές αυτές είναι κοντά στις τιμές $\frac{2}{3}$ και αντίστοιχα. Επομένως ο τροχός θα μπορούσε να αποτελείται από τρία ίσα μέρη που είναι τα 2 μέρη μπλε και το 1 μέρος κόκκινο.
2. Πράγματι, ο τροχός θα μπορούσε να ήταν χωρισμένος και διαφορετικά, γιατί ακόμη και οι 30 επαναλήψεις δεν επαρκούν, για να μας δώσουν με ακρίβεια το πώς είναι κατανεμημένα τα χρώματα στον τροχό. Ακόμη και αν είχαμε χιλιάδες επαναλήψεις, ποτέ δεν θα είμαστε απόλυτα σίγουροι, ωστόσο θα είχαμε έναν αξιόπιστο δείκτη, για να χρωματίσουμε τον τροχό. Πάντως, οι 30 επαναλήψεις είναι πολύ λίγες, για να χρωματίσουμε με ασφάλεια τον τροχό.

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Θεματική ενότητα: Αριθμοί - Άλγεβρα

Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Οι δεκαδικοί αριθμοί

Α. Θεωρητικό μέρος

Οι δεκαδικοί αριθμοί και οι κλασματικοί αριθμοί είναι δύο αριθμητικά συστήματα διαφορετικής μορφής, που ωστόσο εκφράζουν τις ίδιες ιδέες, αποτελούν μορφές αναπαράστασης των ρητών αριθμών. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η κατανόηση των κλασμάτων οδηγεί ομαλά στην κατανόηση των δεκαδικών αριθμών μέσα από τη σύνδεση τους με τα δεκαδικά κλάσματα.

Η έννοια του δεκαδικού αριθμού

Η έννοια του δεκαδικού αριθμού, όπως και του κλασματικού αριθμού, παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία με διαφορετικές αλλά αλληλοσυνδεόμενες διαστάσεις. Έτσι, ένας δεκαδικός αριθμός, όπως και ένα κλάσμα, μπορεί να ερμηνευτεί ως μέρος όλου (εμβαδόν χωρίου, υποσύνολο), ως αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης και ως μέτρο, δηλαδή ως σημείο πάνω στην αριθμογραμμή (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Η κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου αποτελεί προϋπόθεση για την αισθητοποίηση του αριθμού και στους δεκαδικούς αριθμούς. Βασική συνιστώσα για την κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου είναι η κατανόηση των ομαδοποιήσεων με δεκαδική βάση. Έτσι, όπως στους φυσικούς αριθμούς, έχουμε πρωταρχική έννοια την ιδέα της δεκάδας τόσο ως μεμονωμένης οντότητας, όσο και ως συνόλου με 10 μονάδες, έτσι και στους δεκαδικούς αριθμούς έχουμε την ιδέα του δέκατου και ως μεμονωμένης οντότητας και ως συνόλου που απαρτίζεται από 10 ίσα μέρη στα οποία χωρίσαμε την ακέραιη μονάδα. Κατά ανάλογο τρόπο, όπως έχουμε τη συνεχή μέχρι το άπειρο επέκταση του δεκαδικού συστήματος προς τα αριστερά (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κ.λπ.), έχουμε, αντίστοιχα, τη δυνατότητα του συνεχούς μέχρι το άπειρο χωρισμού της ακέραιης μονάδας και την επέκταση του δεκαδικού συστήματος με τον ίδιο τρόπο αυτό και προς τα δεξιά (δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά). Βασική διαφορά όμως στους δεκαδικούς αριθμούς με την επέκταση αυτή είναι ότι, όσο χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα σε 10 δέκατα, το κάθε ένα δέκατο σε 10 εκατοστά, το κάθε ένα εκατοστό σε 10 χιλιοστά, οι αριθμοί γίνονται όλο και πιο πυκνοί.

Η διαφορά αυτή της πυκνότητας του συνόλου των ρητών αριθμών (δεκαδικοί, κλάσματα) από το σύνολο των φυσικών αριθμών κάνει τους δεκαδικούς αριθμούς να διαφέρουν σημαντικά από τους φυσικούς αριθμούς, παρά το ότι τόσο οι φυσικοί αριθμοί όσο και οι δεκαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούν το ίδιο σύστημα αρίθμησης, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω.

Β. Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών

Οι μαθητές/ήτριες γνωρίζουν τους δεκαδικούς αριθμούς από τις μικρότερες τάξεις. Στην Γ΄ Δημοτικού η εισαγωγή στην έννοια επιχειρείται μέσω μιας διαισθητικής προσέγγισης. Εκτενέστερη αναφορά και εμβάθυνση στους δεκαδικούς αριθμούς πραγματοποιείται στην Δ΄ τάξη (Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, 2003), όπου επιχειρείται εμπέδωση των γνώσεων για τους δεκαδικούς αριθμούς με 2 δεκαδικά ψηφία και τα δεκαδικά κλάσματα και γίνεται επεξεργασία προβληματικών καταστάσεων με δεκαδικούς αριθμούς με 2 δεκαδικά ψηφία. Επίσης, επιχειρείται επισημοποίηση, σταθεροποίηση και επέκταση των γνώσεων για τους δεκαδικούς με 3 δεκαδικά ψηφία.

Οι δραστηριότητες αυτές στο Βιβλίο Μαθηματικών Ε΄ Δημοτικού επαναλαμβάνονται και δίνεται βαρύτητα στο να αντιληφθούν οι μαθητές/ήτριες ότι τα μέρη μιας ποσότητας θα μπορούσαν να εκφραστούν σε διαφορετικές μορφές, δηλαδή ως ποσοστό, ως κλασματικό μέρος, ως δεκαδικό μέρος και ως φυσικός αριθμός (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Αναφορικά με τις πράξεις, οι μαθητές/ήτριες σταθεροποιούν τις γνώσεις τους και μαθαίνουν να κάνουν όλες τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Και για τις τέσσερις πράξεις, αξιοποιούνται και ενθαρρύνονται διάφορες μέθοδοι/στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος. Επίσης, ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές και τις μαθήτριες να κάνουν εκτιμήσεις και να επιβεβαιώνουν το αποτέλεσμα με τη χρήση της αριθμομηχανής (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011). Οι εκτιμήσεις μπορεί και πρέπει να παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτήν τη διαδικασία ανάπτυξης, καθώς αποτελούν μια πρόσφορη αφετηρία για τους υπολογισμούς με δεκαδικούς. Έτσι αποφεύγονται μηχανιστικοί κανόνες του τύπου «*στοιχίζουμε τις υποδιαστολές τη μίαν κάτω από την άλλη», «μετράμε τις θέσεις των δεκαδικών ψηφίων*» κ.λπ.

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Πολλά παιδιά δυσκολεύονται ιδιαίτερα στην κατανόηση και στον αποτελεσματικό χειρισμό των δεκαδικών αριθμών. Φαίνεται πως υπάρχει μεγάλο χάσμα ανάμεσα στην κατανόηση των φυσικών αριθμών και την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών (Brown, Hart & Küchemann, 1984) παρά το ότι χρησιμοποιούν το ίδιο σύστημα αρίθμησης. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, οι σημαντικές διαφορές στο σύνολο των φυσικών αριθμών από το σύνολο των ρητών αριθμών (βλ. ενότητα 3) δυσχεραίνουν την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών (Moss, 2005 Ni & Zhou, 2005). Για τους λόγους αυτούς προτιμήθηκε η διδασκαλία πρώτα των κλασματικών αριθμών και, στη συνέχεια, των δεκαδικών.

- Σημαντικές δυσκολίες παρουσιάζει στους μαθητές και τις μαθήτριες η υποδιαστολή, την οποία συχνά ερμηνεύουν ως σημείο διαχωρισμού ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς ή μερικές φορές την αγνοούν (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).
- Η αξία του κάθε ψηφίου σε έναν φυσικό αριθμό μεγαλώνει, καθώς προχωράμε προς τα αριστερά (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κ.λπ.). Στους δεκαδικούς όμως μετά την υποδιαστολή, ενώ και πάλι έχει μεγαλύτερη αξία το ψηφίο που βρίσκεται προς τα αριστερά, μετράμε από αριστερά προς τα δεξιά δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά κ.λπ., δηλαδή εδώ ο μαθητής και η μαθήτρια πρέπει να κατανοήσει ότι τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία θέσης από τα εκατοστά, κάτι που τους μπερδεύει με βάση αυτά που ήδη ξέρουν στους ακεραίους (Irwin, 1999).
- Αρκετά παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ισοδυναμίες του τύπου 0,35 ή 3 δέκατα και 5 εκατοστά ή 35 εκατοστά ή 7 φορές τα 5 εκατοστά κ.λπ. (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011). Ακόμη δεν κατανοούν πώς είναι δυνατόν διαφορετικά σύμβολα να αναπαριστάνουν τον ίδιο αριθμό (π.χ. 0,5 ή 0,50 ή $\frac{1}{2}$ ή 50 εκατοστά κ.λπ.) και αντιμετωπίζουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ως να ήταν διαφορετικοί αριθμοί (Khoury & Zazkis, 1994 O'Connor, 2001 Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).
- Δεν είναι λίγες ακόμη οι φορές που δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι το 0 στο τέλος κάποιου δεκαδικού αριθμού δεν παίζει κάποιο ρόλο (Sadi, 2007). Άλλα, πάλι, παιδιά μπερδεύονται και διαγράφουν το ψηφίο μηδέν ακόμη και όταν αυτό βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ψηφία ή όταν βρίσκεται πριν από τον αριθμό.
- Δυσκολίες, επίσης, εμφανίζονται και στις τέσσερις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Στην πρόσθεση και στην αφαίρεση (Rees & Barr, 1984) οι μαθητές/ήτριες δυσκολεύονται με τη σωστή χρήση της υποδιαστολής. Συχνά προσθέτουν χωριστά το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος και, στη συνέχεια, προσπαθούν να τα συνδυάσουν, για να σχηματίσουν έναν μόνον αριθμό. Επίσης, κάνουν λάθη στην κατακόρυφη ευθυγράμμιση των αριθμών, προκειμένου να χρησιμοποιήσουν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης (Sadi, 2007). Ακόμη περισσότερες είναι οι δυσκολίες στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίες δεν είναι εύκολο να γίνουν αντιληπτές ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και μοιρασιά, αντίστοιχα, όπως στους φυσικούς αριθμούς (Graeber, 1993). Για παράδειγμα, είναι πολύ δύσκολο για έναν/μία μαθητή/ήτρια να αντιληφθεί τι σημαίνει «ο αριθμός 5,23 να επαναληφθεί 0,3 φορές». Επιπλέον, πολλά παιδιά μπορεί να δυσκολεύονται σε αυτές τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, επειδή παραμένουν προσκολλημένα σε αντιλήψεις, όπως «ο πολλαπλασιασμός αυξάνει έναν αριθμό, ενώ η διαίρεση το μειώνει» (Fischbein et al., Sadi, 2007), που ισχύει πάντοτε στους φυσικούς, αλλά όχι στους δεκαδικούς αριθμούς.
- Οι στρατηγικές διάταξης των φυσικών δεν υποστηρίζουν τη διάταξη των ρητών αριθμών. Κατά συνέπεια, ένας ρητός με περισσότερα ψηφία δεν είναι απαραίτητα μεγαλύτερος

από έναν με λιγότερα, π.χ. το 3,2 είναι μεγαλύτερο από το 3,197 (Moskal & Magone, 2000 Steinle, 2004).

- Η πυκνότητα του συνόλου των ρητών αριθμών παρουσιάζεται ως δυσκολία και στους δεκαδικούς αριθμούς, αφού οι μαθητές/ήτριες δεν κατανοούν ότι ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς δεκαδικούς αριθμούς (π.χ. 1,52 και 1,53) υπάρχει πάντοτε ένας άλλος δεκαδικός αριθμός (McIntosh,1995 Steinle, 2004).

Δ. Εποπτικό υλικό

Οι μαθητές/ήτριες με τη χρήση διαφορετικών χειραπτικών αντικειμένων - μοντέλων (επιφάνειας, συνόλου, μέτρησης), αντίστοιχων της ενότητας 3, εξασκούνται στην οπτικοποίηση, στον υπολογισμό και στη δημιουργία αναπαραστάσεων των δεκαδικών αριθμών.

Κεφάλαιο 25: Δεκαδικά κλάσματα-Δεκαδικά αριθμοί

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να μετατρέπουν τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και το αντίστροφο,
- να συσχετίζουν κάθε φορά τον δεκαδικό αριθμό και το δεκαδικό κλάσμα με τη μονάδα αναφοράς,
- να αναγνωρίζουν ότι κάθε δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία είναι ένα κλάσμα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

Αναπαράγουμε με φωτοτυπικό μηχάνημα το τετράγωνο πλέγμα (10x10) του παραρτήματος, ώστε να έχουμε διαθέσιμα αναπαραστατικά μοντέλα.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1924?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1: Το αρχικό τετράγωνο αναπαριστάνει την ακέραιη μονάδα η οποία είναι όλος ο τοίχος. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό κάθε φορά οι μαθητές/ήτριες να προσδιορίζουν τη μονάδα αναφοράς.

α. Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν τι μέρος του όλου, δηλαδή του τετραγώνου, είναι βαμμένο με πράσινο χρώμα και το εκφράζουν με δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 10 και το 100. Στη συνέχεια, εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου και με δεκαδικό αριθμό πάλι και με δέκατα και με εκατοστά. Παρατηρούν και διαπιστώνουν ότι μπορούμε να εκφράσουμε το ίδιο μέρος μιας ποσότητας με δεκαδικό κλάσμα ή δεκαδικό αριθμό: $\frac{8}{10} = 0{,}8$ και $\frac{80}{100} = 0{,}80$. _Σημείωση:_ *Οι μαθητές/ήτριες είναι ενδεχόμενο να αναφερθούν στη διαπίστωση ότι «τα 0 στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού δεν επηρεάζουν την αξία του», κάτι για το οποίο γίνεται λόγος στην 3η εφαρμογή του κεφαλαίου 26.*

β. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τον μεγεθυντικό φακό και διαπιστώνουν ότι κάθε μικρό τετραγωνάκι είναι, επίσης, χωρισμένο σε 10 ίσα μέρη, οπότε όλο το αρχικό τετράγωνο, η μονάδα αναφοράς, είναι χωρισμένο σε 1.000 ίσα μέρη. Άρα οι μαθητές/ήτριες μπορούν να εκφράσουν το μέρος του τετραγώνου τόσο με δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 1.000, όσο και με δεκαδικό αριθμό.

Σημείωση: *Οι μαθητές/ήτριες κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας είναι πολύ πιθανόν να αναφερθούν στην ισότητα μεταξύ όλων των παραπάνω δεκαδικών αριθμών και δεκαδικών κλασμάτων. Αφού αναγνωρίσουμε τη διαπίστωση αυτήν, εφόσον εκφράζουν την ίδια ποσότητα (άλλωστε το γνωρίζουν οι μαθητές/ήτριες από την Δ΄ τάξη) μπορούμε να πούμε ότι θα επανέλθουμε σε αυτό αναλυτικότερα (στο 2γ), να μην επεκταθούμε και να περιοριστούμε στη διαφοροποίηση του ότι τη μια φορά εκφραζόμαστε με δέκατα, την άλλη με εκατοστά και την άλλη με χιλιοστά, όπως και στη δυνατότητα που έχουμε να το εκφράσουμε αυτό με δεκαδικό κλάσμα ή με δεκαδικό αριθμό.*

2. α. Στη δραστηριότητα αυτήν το πλέον σημαντικό είναι οι μαθητές/ήτριες να αναγνωρίσουν ότι η ακέραιη μονάδα παραμένει το ένα τετράγωνο. Με τη βοήθεια της φωτογραφίας οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι υπάρχουν και άλλοι ίδιοι τοίχοι που βάφτηκαν πράσινοι. Στη συνέχεια, χρωματίζουν το μέρος της επιφάνειας του τοίχου που καλύφθηκε με πράσινο χρώμα: $\frac{16}{10} = \frac{160}{100} = \frac{1.600}{1.000}$ και 1,6=1,60=1,600.

β. $1\frac{6}{10}$ ή $1\frac{60}{100}$ ή $1\frac{600}{1.000}$

γ. Χρησιμοποιούμε ένα διαφορετικό μοντέλο αναπαράστασης, αυτό της αριθμογραμμής, και επανερχόμαστε στη διαπίστωση από τη δραστηριότητα 1α ότι $\frac{16}{10}$=1,6 και $\frac{8}{10} = 0{,}8$, αφού βρίσκονται στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής.

Συζήτηση: Στη συζήτηση για τον τρόπο με τον οποίο μετατρέπουμε τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και το αντίστροφο πρέπει να αποφύγουμε τη μηχανιστική προσέγγιση (ένα μηδενικό ο παρονομαστής – ένα δεκαδικό ψηφίο) και να επικεντρωθούμε στην εννοιολογική, δηλαδή στο «τι εκφράζει κάθε αριθμός», ώστε να βοηθήσουμε τους μαθητές/ήτριες να κατανοήσουν ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα «εκφράζουν τις ίδιες ιδέες» και είναι εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και όχι διαφορετικά είδη αριθμών.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζεται και εδώ η γραφή του δεκαδικού αριθμού, η οποία είναι γνωστή από τη Δ΄ τάξη.

Εφαρμογή: 1. Τα κλάσματα που έχουν ισοδύναμα δεκαδικά κλάσματα μετατρέπονται εύκολα σε δεκαδικούς αριθμούς, αφού πρώτα μετατραπούν στα ισοδύναμά τους δεκαδικά κλάσματα.

2. Αντίστροφα, οι δεκαδικοί αριθμοί με συγκεκριμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μετατρέπονται εύκολα σε δεκαδικά κλάσματα. Στη συνέχεια, μπορούμε να μετατρέψουμε τα δεκαδικά κλάσματα στα ανάγωγα ισοδύναμά τους.

Αναστοχασμός: 3. *Σημείωση: Αρκετά παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ισοδυναμίες του τύπου 2,4 ή 24 δέκατα ή 240 εκατοστά.*

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: β. Το χρωματισμένο μέρος μπορεί να εκφραστεί με κλάσμα και με μεικτό αριθμό. γ. Το χρωματισμένο μέρος μπορεί να εκφραστεί με δέκατα και με εκατοστά.

4η Άσκηση: Κάποιοι αριθμοί βρίσκονται στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής.

Διερεύνηση- Επέκταση: α.1 lt=1.000ml, άρα 0,1 lt=100ml. **β.** 0,09lt=90ml, άρα 10 lt νερού.

Κεφάλαιο 26: Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Αξία θέσης ψηφίου στους δεκαδικούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να διαβάζουν μεγαλόφωνα και να γράφουν τους δεκαδικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας σωστά τους συνήθεις κανόνες γραφής τους,
- να διακρίνουν τη σημασία του καθενός από τα ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού,
- να συγκρίνουν δύο δεκαδικούς αριθμούς και να χρησιμοποιούν σωστά τα σύμβολα σύγκρισης,
- να διακρίνουν την περίπτωση στην οποία δύο δεκαδικοί έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος αλλά διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων,
- να διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς με περισσότερα από δύο δεκαδικά ψηφία από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο και αντίστροφα,
- να παρεμβάλλουν δεκαδικούς αριθμούς ανάμεσα σε άλλους δεκαδικούς ή φυσικούς αριθμούς,
- να χρησιμοποιούν δεκαδικούς αριθμούς, για να εντοπίζουν θέσεις σε αριθμογραμμή.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

Χρήσιμο είναι το σχολείο να έχει προμηθευτεί ορισμένα σετ Δεκαδικού Συστήματος (Κύβοι Dienes) που θα χρησιμοποιηθούν για την αισθητοποίηση των δεκαδικών αριθμών και για την αξία θέσης ψηφίου.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3965?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

α. Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν και εξηγούν ποια βαθμολογία είναι υψηλότερη και ποια χαμηλότερη (ποιος δεκαδικός αριθμός είναι μεγαλύτερος και ποιος μικρότερος). Επίσης, είναι σημαντικό και βοηθάει στη σύγκριση να διακρίνουν εύκολα οι μαθητές/ήτριες ποιοι αριθμοί είναι κοντά στο 0, στο $\frac{1}{2}$ ή στο 1 και, αντίστοιχα, π.χ. στο 15, στο $15\frac{1}{2}$ ή στο 16. *Σημείωση: Η σύνδεση των δεκαδικών με τα κλάσματα αξιοποιείται στη σύγκριση και τη διάταξη δεκαδικών όπως και στην προσέγγιση δεκαδικών αριθμών μέσω γνωστών αριθμών, π.χ. τα κλάσματα.*

β. Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες πώς θα τοποθετήσουν τους αριθμούς στον πίνακα σύμφωνα με την αξία θέσης των ψηφίων και όχι μηχανιστικά (με βάση την υποδιαστολή).

γ. Η ανάλυση του αριθμού σύμφωνα με το δεκαδικό του ανάπτυγμα ότι η γραφή φυσικών και δεκαδικών αριθμών στηρίζεται «στην πολλαπλασιαστική αρχή θέσης και στην πρόσθεση». *Σημείωση: Αυτό σημαίνει ότι κάθε ψηφίο του αριθμού δηλώνει το πλήθος των μονάδων της αντίστοιχης τάξης (πχ. 3εκατοντάδες (3x100=300μονάδες), 5 δέκατα (5x0,1=0,5 μονάδες). Στη συνέχεια, προσθέτουμε όλες τις μονάδες.*

δ. Οι μαθητές/ήτριες συγκρίνουν πρώτα το ακέραιο μέρος των αριθμών και, στη συνέχεια, το δεκαδικό ξεκινώντας από το ψηφίο με τη μεγαλύτερη αξία (πρώτα τα δέκατα, μετά τα εκατοστά κ.λπ.). *Σημείωση: Η συζήτηση στην τάξη για τη σχετικότητα του μεγέθους των δεκαδικών αριθμών μπορεί να συμβάλει στην εννοιολογική κατανόηση της δομής των δεκαδικών αριθμών.*

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Για το δεκαδικό ανάπτυγμα, βλέπε Δραστηριότητα διερεύνησης 1γ.

Εφαρμογή: Οι μαθητές/ήτριες έχουν διαφορετικές αριθμογραμμές, για να εργαστούν. Στην 3η διαπιστώνουν ότι οι δύο αριθμοί βρίσκονται στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής και επιβεβαιώνουν ότι 1,4=1,40, δηλαδή ότι το μηδέν στο τέλος του δεκαδικού αριθμού έχει μηδενική αξία και δεν παίζει κάποιο ρόλο. *Σημείωση: Σε συνδυασμό με τη 2η εφαρμογή και με άλλα παραδείγματα επιμένουμε ότι το 0, για να μην επηρεάζει την αξία του δεκαδικού αριθμού, θα πρέπει να είναι στο τέλος του δεκαδικού αριθμού (0,1=0,10 αλλά 0,1≠0,01). Αυτό δεν θα πρέπει οι μαθητές/ήτριες να το απομνημονεύσουν ως μηχανιστικό κανόνα, αλλά, αντιθέτως, να χρησιμοποιούν ή όχι το 0 στο τέλος των δεκαδικών αριθμών ανάλογα με το αν θέλουν να εκφράσουν το δεκαδικό μέρος σε δέκατα, εκατοστά ή χιλιοστά. Μπορούμε να διαπιστώσουμε την ισοδυναμία αυτήν και με τη μετατροπή των δεκαδικών* *αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα ($\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ ή $\frac{14}{10} = \frac{140}{100}$), ώστε οι μαθητές/ήτριες να βοηθηθούν στην κατανόηση ακόμη περισσότερο.*

Αναστοχασμός

2. Πρέπει και οι δύο αριθμοί να είναι δεκαδικοί, για παράδειγμα 3,007 και 300,7.

3. Π.χ. 3,741 ή 3,746 ή 3,7411 κ.λπ. *Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες επανέρχονται στο ζήτημα της πυκνότητας των ρητών αριθμών, το οποίο τους δυσκολεύει πολύ, δεδομένου ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει στο σύνολο των φυσικών αριθμών.*

Τετράδιο Εργασιών

2η Άσκηση: α. 1,0 ή 1, **β.** 0,91, **γ.** 0,901

3η Άσκηση: Είναι: $2\frac{1}{5}$=2,2 και $\frac{18}{8} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$.

4η Άσκηση: Μεγαλύτερος δεκαδικός αριθμός: 8,530 Μικρότερος δεκαδικός αριθμός: 0,358

1ο Πρόβλημα: Η ποσότητα είναι ίδια: 200 gr = 0,2Kg (1Kg=1.000gr.)

2ο Πρόβλημα: Οι μαθητές/ήτριες μπορεί να έχουν την εμπειρία της μέτρησης άλματος μήκους και να πουν ότι μετράμε μέχρι εκατοστά. Άρα από 4,71 έως 4,79 μέτρα. Σε περίπτωση κατά την οποία δεν γνωρίζουν πώς μετράμε τα άλματα, αυτό θα αποτελέσει αντικείμενο διερευνητικής συζήτησης. Γενικά, δεν μπορούμε να έχουμε σε ένα αποτύπωμα στην άμμο ακρίβεια μέτρησης μεγαλύτερη του χιλιοστού.

Διερεύνηση –Επέκταση

Πρατήριο Α:1,496, Πρατήριο Β:1,485, Πρατήριο Γ:1,499 και Πρατήριο Δ:1,508. **γ.** Η τιμή βενζίνης έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με την τιμή άλλων προϊόντων, γιατί, συνήθως, οι καταναλωτές αγοράζουν αρκετά λίτρα (τις περισσότερες φορές πάνω από 10 λίτρα) οπότε η διαφορά στις τιμές είναι πλέον σε λεπτά του ευρώ. Παράδειγμα: 1,485x10=14,85€, ενώ 1,486x10=14,86€. Με τον ίδιον τρόπο αγοράζουν και οι βενζινοπώλες, οι οποίοι αγοράζουν με υψηλή συχνότητα πολλούς τόνους και οι διαφορές στις τιμές γίνονται πλέον πολύ σημαντικές γι' αυτούς.

Κεφάλαιο 27: Η στρογγυλοποίηση στους δεκαδικούς αριθμούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να στρογγυλοποιούν δεκαδικούς αριθμούς,
- να εκτιμούν το αποτέλεσμα και να λύνουν προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς,
- να χρησιμοποιούν τη στρογγυλοποίηση και την εκτίμηση κάνοντας διάκριση ανάμεσα στις δύο έννοιες.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1839

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Παρατηρούμε και συζητάμε καταστάσεις της καθημερινής ζωής στις οποίες μπορούμε να κάνουμε γρήγορες εκτιμήσεις ενός αποτελέσματος. **α.** Συχνά θέλουμε να κάνουμε μια γρήγορη εκτίμηση κάποιων εξόδων μας. Η εκτίμηση της Αγγελικής θα μπορούσε να γίνει με πολλούς τροπους. Διάλεξε το: (14x2)+15=43. Άλλες εκτιμήσεις: 14+16+14=44 ή 15x3=45 κ.λπ. Επειδή στην περίπτωση αυτήν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε αν έχουμε τα απαραίτητα χρήματα ή όχι, είναι καλύτερα η εκτίμηση που θα κάνουμε να είναι αρκετά κοντά στην πραγματική τιμή και λίγο παραπάνω από αυτήν.

Οι μαθητές/ήτριες πιθανόν να αγνοούν τον λόγο για τον οποίο πολλοί έμποροι δίνουν στα προϊόντα τους τιμές που τελειώνουν σε 0,99. Πολύ συχνά οι καταναλωτές προσέχουν μόνον το ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού και όχι το δεκαδικό του μέρος. Έτσι, για παράδειγμα, την τιμή 15,99€ εκτιμούν, συνήθως, ως 15€ και όχι ως 16€, που είναι το σωστό.

β. Οι εκτιμήσεις με τη σύγκριση μεγεθών είναι πολύ σημαντική και μπορεί να χρησιμοποιειται σε όλες τις ηλικίες (εκτιμάμε για παράδειγμα το ύψος της καρέκλας, το πλάτος της πόρτας, το μήκος του πίνακα κ.λπ.). Με τον τρόπο αυτόν τα παιδιά αποκτούν καλύτερη αίσθηση του χώρου γύρω τους και του μεγέθους των αντικειμένων. Στην περιπτωσή μας το δέντρο στην εικόνα φαίνεται πως φτάνει σε ύψος λίγο πάνω από την ταράτσα. Η πολυκατοικία έχει 5 ορόφους (μαζί με το ισόγειο). Κάθε όροφος έχει ύψος περίπου 3μ. Επομένως το ύψος του πεύκου είναι περίπου 3 x 5 = 15μ. και λίγο περισσότερο, δηλαδή 16μ. περίπου. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να εξοικειωθούν με την εκτίμηση του ύψους κάθε ορόφου εκτιμώντας το ύψος του δωματίου τους με όποιον τρόπο θέλουν (π.χ. συγκρίνοντας με το ύψος τους). Η απάντηση που αναμένουμε να δώσουν είναι ότι ο Νίκος έλαβε υπόψη του «το ύψος του κάθε ορόφου».

2. β. Η τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών σε κάθε αριθμογραμμή δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές και τις μαθήτριες να διερευνήσουν τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να τους στρογγυλοποιήσουν και, στη συνέχεια, να γενικεύσουν.

- Μία πρώτη παρατήρησή τους ενδέχεται να είναι ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς (π.χ. 52 και 53) οι δεκαδικοί αριθμοί με ένα δεκαδικό ψηφίο που είναι δυνατόν να τοποθετηθούν σε αυτήν είναι οι: 52,1-52,2-52,3-52,4-52,5-52,6-52,7-52,8-52,9. Επομένως, αν σε έναν δεκαδικό αριθμό το ψηφίο στα δέκατα είναι 1, 2, 3 ή 4, ο αριθμός αυτός βρίσκεται πιο κοντά στο 52. Αν το ψηφίο στα δέκατα είναι 6,7,8 ή 9, ο αριθμός βρίσκεται πιο κοντά στο 53.

- Προκύπτει το ερώτημα σε ποιον φυσικό αριθμό βρίσκεται πιο κοντά ο δεκαδικός αριθμός 52,5 ο οποίος είναι ακριβώς στη μέση μεταξύ του 52 και του 53. Οι μαθητές/ήτριες έχουν την εμπειρία της στρογγυλοποίησης φυσικών αριθμών επομένως ίσως να μη δυσκολευτούν. Η διερεύνηση μπορεί να οδηγήσει στη διαπίστωση ότι, για να γράψουμε τα δέκατα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το 0 (52,0). Επομένως τα ψηφία 0,1,2,3,4 (5 ψηφία) στρογγυλοποιούνται αριστερά και τα ψηφία 5,6,7,8,9 (5 ψηφία) στρογγυλοποιούνται δεξιά. Άρα το 52,5 θα στρογγυλοποιηθεί στο 53.

Συζήτηση: Η εκτίμηση και στρογγυλοποίηση είναι έννοιες διαφορετικές μεταξύ τους και δεν χρειάζεται να επεκταθούμε ιδιαίτερα. Θα πρέπει όμως με τη βοήθεια παραδειγμάτων οι μαθητές/ήτριες να κατανοήσουν ότι η στρογγυλοποίηση ακολουθεί πολύ συγκεκριμένη διαδικασία, ενώ η εκτίμηση διαφοροποιείται ανάλογα με την περίπτωση. Για παράδειγμα, στο γινόμενο 9,4x2,4=22,56 η στρογγυλοποίηση στις μονάδες θα έδινε γινόμενο 9x2=18, αλλά μιαν καλύτερη εκτίμηση για το γινόμενο θα ήταν το 10x2=20. *Σημείωση: Στη συνέχεια, οι εκτιμήσεις θα βοηθήσουν πολύ τους μαθητές και τις μαθήτριες να κάνουν τις πράξεις των δεκαδικών αριθμών αποφεύγοντας μηχανιστικούς κανόνες για την τοποθέτηση της υποδιαστολής.*

Αναστοχασμός

1. Αναλύθηκε στη δραστηριότητα διερεύνησης 2β.

2. Υπάρχουν περιπτώσεις, όπως αυτή, στις οποίες δεν μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε, γιατί προφανώς το τζάμι δεν θα εφαρμόζει ακριβώς στο άνοιγμα στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί, αν γίνει η στρογγυλοποίηση.

Τετράδιο Εργασιών

2η Άσκηση: 134,281-134,282-134,283-134,284

4η Άσκηση: στις μονάδες: 4 - στα δέκατα: 4,0 ή 4 - στα εκατοστά: 3,99

1ο Πρόβλημα: 61+69+77+81=288 μ., 288x5=1.440€

Διερεύνηση - Επέκταση: Μια εκτίμηση είναι 600 : 5 = 120€. Μπορεί να προκύψουν και άλλες. Θα διευκρινίσουμε, βέβαια, ότι οι δόσεις πληρώνονται ακριβώς χωρίς στρογγυλοποιήσεις, αλλά εμείς θέλουμε μιαν εκτίμηση, για να ξέρουμε πόσα περίπου χρήματα θα πληρώνουμε κάθε μήνα.

Άλλος τρόπος θα ήταν, αφού στρογγυλοποιήσουμε το ποσό στα 595€, στη συνέχεια να σκεφτούμε το 600:5=120 και, επειδή το 595 είναι 5€ λιγότερο, να πούμε 5:5=1€. Άρα τελικά 119€ το μήνα είναι μια ακόμη καλύτερη εκτίμηση.

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να προσθέτουν και να αφαιρούν αριθμούς που περιλαμβάνουν και δεκαδικούς,
- να σταθεροποιήσουν τις συνηθισμένες τεχνικές εκτέλεσης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αριθμών που περιλαμβάνουν και δεκαδικούς,
- να χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές, για να ελέγξουν αν οι απαντήσεις τους είναι λογικές,
- να εκτιμούν το αποτέλεσμα και να λύνουν προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

Χρήσιμο είναι το σχολείο να έχει προμηθευτεί ορισμένα σετ Δεκαδικού Συστήματος (Κύβοι Dienes) που θα χρησιμοποιηθούν τόσο για την αξία θέσης ψηφίου, όσο και για τις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης δεκαδικών αριθμών.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3700?locale=el

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/3699?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Χρησιμοποιούμε υλικό Δεκαδικής Βάσης (Κύβοι Dienes), για να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς και να κάνουμε την πρόσθεση 2,565+0,805=3,370, προκειμένου να υπολογίσουμε το μήκος της διαδρομής Α. Με την ανασύνθεση των κύβων και των μερών τους οι μαθητές/ήτριες κατανοούν τη διαδικασία της πρόσθεσης. Στη συνέχεια, εύκολα γίνεται κατανοητή η κάθετη πράξη και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε, για να κάνουμε την πρόσθεση 2,905+0,805=3,710 και να υπολογίσουμε το μήκος της διαδρομής Β. *<u>Σημείωση</u>: Οι πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς θα πρέπει να αναπτυχθούν ως επέκταση της κατανόησης των υπολογισμών με φυσικούς αριθμούς. Τα αναπαραστατικά μοντέλα για την αισθητοποίηση των αριθμών είναι ιδιαίτερα χρήσιμα και βοηθούν τους μαθητές και τις μαθήτριες στην κατανόηση των πράξεων. Για τους λόγους αυτούς πρέπει να αποφευχθεί να γίνει η κάθετη πράξη χωρίς να προηγηθεί η χρήση αναπαραστατικού μοντέλου. Πολλά παιδιά μαθαίνουν να κάνουν μηχανιστικά τις κάθετες πράξεις, χωρίς όμως να κατανοούν πλήρως τη διαδικασία. Επίσης, όπως ήδη έχει αναφερθεί, οι εκτιμήσεις μπορούν και πρέπει να παίζουν σημαντικό ρόλο, ώστε να αποφεύγονται μηχανικοί κανόνες του τύπου «στοιχίζουμε τις υποδιαστολές τη μίαν κάτω από την άλλη», αλλά οι μαθητές/ήτριες, όταν κάνουν αυτήν τη διαδικασία, να κατανοούν γιατί το κάνουν.*

2. Υπολογίζουμε τη χιλιομετρική απόσταση που διένυσαν τα παιδιά χρησιμοποιώντας το υλικό Δεκαδικού Συστήματος (Κύβοι Dienes), για να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς και να κάνουμε την αφαίρεση 29,4 – 26,03. Οι μαθητές/ήτριες σχηματίζουν τον αριθμό 29,4 και, στη συνέχεια, αφαιρούν από αυτόν τον αριθμό 26,03. Παρατηρούν ότι για να αφαιρέσουν τα 3 εκατοστά θα πρέπει να μετατρέψουν το 1 δέκατο (του 29,4) σε 10 εκατοστά.

Προτείνεται, οι μαθητές και οι μαθήτριες να πειραματιστούν να βρουν διαφορετικές πιθανές διαδρομές, ώστε να καταλήξουν σε αυτή που τελικά έκαναν τα παιδιά και να μην περιοριστούν μόνο στην προτεινόμενη από το βιβλίο διαδρομή.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Οι ιδιότητες των πράξεων, όπως η αντιμεταθετική (3,2+4,3=4,3+3,2) και η προσεταιριστική (0,58+ 0,25) + 0,75 =0,58+ (0,25 + 0,75), παρουσιάζονται στους μαθητές και τις μαθήτριες μόνον μέσα από παραδείγματα.

Εφαρμογή: Είναι πολύ σημαντικό να συνηθίσουν οι μαθητές/ήτριες να κάνουν μια γρήγορη εκτίμηση του αποτελέσματος και, στο τέλος, να ελέγχουν τις πράξεις τους με βάση τις εκτιμήσεις τους, ώστε να αποφεύγονται λάθη απροσεξίας.

Αναστοχασμός

1. Αρκετά παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ισοδυναμίες του τύπου 0,1 ή 1 δέκατο. Είναι: 2,9+1 δέκατο=3.

2. Οι μαθητές/ήτριες μπορεί να σκεφτούν δύο οποιουσδήποτε δεκαδικούς αριθμούς των οποίων το άθροισμα βρίσκεται κοντά στο 9.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί οι οποίοι μπορεί να χρησιμοποιηθούν.

2η Άσκηση: Η εκτίμηση του αποτελέσματος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες να οδηγηθούν εύκολα στην ορθή τοποθέτηση της υποδιαστολής σε κάθε περίπτωση.

1ο Πρόβλημα: α. μαρκαδόρους-συρραπτικό **β.** τετράδιο-μαρκαδόρους

Διερεύνηση – Επέκταση: β. Η σήμανση δείχνει ότι απαγορεύεται η διέλευση σε μεταφορικό μέσο βάρους πάνω από 5 τόνους ή 5.000 κιλά. Τα σήματα οδικής κυκλοφορίας δείχνουν ότι στο ένα απαγορεύεται η διέλευση σε οχήματα πλάτους μεγαλύτερο από 2μ. (τα βελάκια δεξιά - αριστερά) και στο άλλο ότι απαγορεύεται η διέλευση σε οχήματα ύψους μεγαλύτερου από 3,5μ. (τα βελάκια πάνω - κάτω).

Κεφάλαιο 29: Ο πολλαπλασιασμός στους δεκαδικούς αριθμούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να πολλαπλασιάζουν δεκαδικό με φυσικό και δεκαδικό με δεκαδικό αριθμό,
- να πολλαπλασιάζουν νοερά φυσικό ή δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1.000 και με 0,1, 0,01, 0,001,
- να χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές, για να ελέγξουν αν οι απαντήσεις τους είναι λογικές,
- να εκτιμούν το αποτέλεσμα και να λύνουν προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

Αναπαράγουμε με φωτοτυπικό μηχάνημα το τετράγωνο πλέγμα (10x10) του παραρτήματος, ώστε να έχουμε διαθέσιμα αναπαραστατικά μοντέλα.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/4337

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

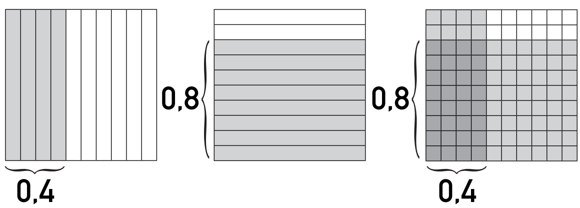
Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες δυσκολεύονται ιδιαίτερα στον πολλαπλασιασμό των δεκαδικών αριθμών, που δεν είναι εύκολο να γίνει αντιληπτός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, όπως στους φυσικούς αριθμούς. Επίσης, συχνά επιμένουν σε αντιλήψεις όπως «ο πολλαπλασιασμός αυξάνει έναν αριθμό», κάτι που ισχύει πάντοτε στους φυσικούς, αλλά δεν ισχύει πάντοτε στους δεκαδικούς αριθμούς. Η χρήση αναπαραστατικών μοντέλων, όπως και στα κλάσματα, πριν από την κάθετη πράξη θα βοηθήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό των δεκαδικών αριθμών και να αντιμετωπίσουν την όποια δυσκολία.

1. Οι μαθητές/ήτριες αξιοποιούν τις ιδέες που προτείνονται από τα παιδιά, για να πολλαπλασιάσουν τους δεκαδικούς αριθμούς 0,8 x 0,4 με διαφορετικούς τρόπους:

α. Η μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα έχει στόχο όχι μόνον να χρησιμοποιηθεί ο ήδη γνωστός αλγόριθμος πολλαπλασιασμού κλασμάτων, αλλά οι μαθητές/ήτριες να θυμηθούν όλα τα αναπαραστατικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (όχι απαραίτητα δεκαδικών κλασμάτων) και να σκεφτούν, αντίστοιχα, για τους δεκαδικούς αριθμούς που αποτελούν εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και όχι διαφορετικά είδη αριθμών.

- Με δοκιμές οι μαθητές/ήτριες, στη συνέχεια, μπορούν να διαπιστώσουν ότι η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει και στους δεκαδικούς αριθμούς (0,8x 0,4 = 0,4 x 0,8), όπως ακριβώς ισχύει και στα κλάσματα.

β. Οι μαθητές/ήτριες χρησιμοποιούν το τετράγωνο ως μοντέλο αναπαράστασης της ακέραιης μονάδας. Κατόπιν ζωγραφίζουν με κίτρινο χρώμα κάθετα τις 4 πρώτες στήλες, δηλαδή το 0,4 της ακέραιης μονάδας. Μετά ζωγραφίζουν με πράσινο οριζόντια 8 γραμμές, δηλαδή το 0,8 της ακέραιης μονάδας. Το μέρος που ζωγραφίστηκε δύο φορές, κίτρινο και πράσινο, είναι το γινόμενο 0,8x 0,4 και αναπαριστάνεται με 32 τετραγωνάκια, δηλαδή είναι το 0,32 της ακέραιης μονάδας. *Σημείωση: Το διπλανό σχήμα δείχνει την παραπάνω διαδικασία σε βήματα. Στην αρχή, έχουμε το 0,4 της ακέραιης μονάδας. Στη συνέχεια, έχουμε το 0,8 του 0,4, δηλαδή ένα μέρος του, χωρίς να ξεχνάμε ότι όλα είναι μέρη της ίδιας ακέραιης μονάδας. Επομένως ο χωρισμός οριζόντια και κάθετα σε 10 ίσα μέρη μας διευκολύνει να χωριστεί η ακέραιη μονάδα σε 100 ίσα μέρη και να μπορούμε να κάνουμε εύκολα τους υπολογισμούς μας.*



γ. Οι μαθητές/ήτριες συζητάνε τις προτάσεις του Αντρέι και του Νίκου, για να κατανοήσουν τη θέση της υποδιαστολής σε γινόμενα, όταν κάποιος από τους παράγοντες ή και οι δύο είναι δεκαδικοί αριθμοί.

Σημείωση: Η σκέψη του Νίκου να κάνει μίαν εκτίμηση του αποτελέσματος, ώστε να γνωρίζει σε ποιον αριθμό κοντά βρίσκεται το γινόμενο και, στη συνέχεια, να επιλέξει τη θέση της υποδιαστολής στο ακριβές γινόμενο, είναι ένας ασφαλής τρόπος που ενδείκνυται να παίξει σημαντικό ρόλο σε αυτήν τη διαδικασία ανάπτυξης. Ο μηχανιστικός κανόνας «μετράμε τα δεκαδικά ψηφία των παραγόντων ….κ.λπ.» θα πρέπει να αποφεύγεται (δεν είναι κατανοητός από τα παιδιά και συχνά τον ξεχνάνε και οδηγούνται σε λάθη. Επίσης, οδηγεί σε παρερμηνείες σχετικά με τα μηδενικά στο τέλος των δεκαδικών αριθμών). Η εκτίμηση του αποτελέσματος με τη χρήση φυσικών αριθμών ή φυσικού και «βολικού» δεκαδικού αριθμού βοηθά τους μαθητές και τις μαθήτριες τόσο στον ασφαλή έλεγχο των αποτελεσμάτων στους υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς, όσο και στο να αντιμετωπίζουν σφαιρικά τις απαντήσεις τους και να σκέφτονται γι' αυτές. Επίσης, η εκτίμηση προσφέρει δυνατότητα συζήτησης για την τοποθέτηση της υποδιαστολής στον πολλαπλασιασμό αλλά και στη διαίρεση.

Η σκέψη του Αντρέι, επίσης, οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα για την τοποθέτηση της υποδιαστολής με το σκεπτικό ότι, αφού κάθε παράγοντας, είναι 10 φορές μικρότερος από τον αρχικό φυσικό αριθμό, το γινόμενο, αντίστοιχα, θα είναι 100 φορές μικρότερο από το αρχικό (10x10).

- Οι μαθητές/ήτριες υπολογίζοντας με κάθετη πράξη το γινόμενο 3,4x1,06 τοποθετούν την υποδιαστολή με βάση την εκτίμηση 3x1=3, άρα το γινόμενο είναι κοντά στο 3. Επομένως 3,604 (και όχι 0,3604 ή 36,04 κ.λπ.). Επιπλέον, αφού το 3,4 είναι 10 φορές μικρότερο από το 34 και το 1,06 είναι 100 φορές μικρότερο από το 106, το γινόμενο θα είναι 1.000 φορές μικρότερο από το 3.604, δηλαδή 3,604. *Σημείωση: Παρατηρούμε ότι και οι δύο τρόποι μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν τόσο τη διαδικασία εύρεσης του γινομένου, όσο και της θέσης της υποδιαστολής σε αντίθεση με τον μηχανικό κανόνα.*

2. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι ο δεκαδικός αριθμός μεγαλώνει 10, 100 ή 1.000 φορές, όταν πολλαπλασιάζεται με τους φυσικούς αριθμούς 10, 100 ή 1.000, αντίστοιχα, και μικραίνει 10, 100 ή 1.000 φορές, όταν πολλαπλασιάζεται με 0,1 με 0,01 ή με 0,001, δηλαδή με το 1 δέκατο, εκατοστό ή χιλιοστό. Στη συνέχεια, δεδομένου ότι οι πολλαπλασιασμοί των δεκαδικών αριθμών με 10, 100 ή 1.000, είναι πολύ εύκολοι στην κατανόηση και στην πράξη, οι μαθητές/ήτριες συνδέουν το γινόμενο με την μετακίνηση της υποδιαστολής του δεκαδικού αριθμού 1, 2 ή 3 θέσεις δεξιά.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Χρησιμοποιείται η εκτίμηση του αποτελέσματος στον πολλαπλασιασμό των δεκαδικών αριθμών για τον έλεγχο των υπολογισμών μας και την τοποθέτηση της υποδιαστολής στη σωστή θέση.

Εφαρμογή: Στον β΄ τρόπο στο μοντέλο αναπαράστασης το 3,2 αναπαριστάνεται με τα χρώματα πράσινο και κίτρινο μαζί. Στη συνέχεια, παίρνουμε το 0,8 που είναι μόνον το πράσινο χρώμα. Για να βρούμε το γινόμενο, αναδιατάσσουμε τα πράσινα τετραγωνάκια, έτσι ώστε να μετρήσουμε πιο εύκολα το πλήθος τους (δημιουργούμε ολόκληρες ακέραιες μονάδες).

Αναστοχασμός

1. Τα 10 εκατοστά είναι 1 δέκατο. Επομένως το 0,1 του 2,5 είναι 0,25.

2. Αυτό συμβαίνει, επειδή ζητάμε ένα μέρος από ένα άλλο μέρος της ακέραιης μονάδας. Επομένως σε κάθε περίπτωση το γινόμενο θα είναι μικρότερο από τους δύο αριθμούς. Για παράδειγμα, 0,8x0,4=0,32 (είναι 0,32<0,8 και 0,32<0,4). *Σημείωση: Το μοντέλο αναπαράστασης που χρησιμοποιήθηκε στην 1β διερεύνηση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν γιατί συμβαίνει αυτό. Το 0,4 είναι μέρος της ακέραιης μονάδας και από αυτό, στη συνέχεια, ζητάμε πάλι ένα μέρος, το 0,8. Επομένως το γινόμενο θα είναι μικρότερο από το 0,4 και, βεβαίως, μικρότερο και από το 0,8. Αν χρησιμοποιήσουμε την αντιμεταθετική ιδιότητα και αναζητήσουμε το 0,4 του 0,8 ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.*

Τετράδιο Εργασιών

2η Άσκηση: α. x10, **β.** x1.000, **γ.** x100

1ο Πρόβλημα: Οι εκτιμήσεις του αποτελέσματος κάθε πράξης μπορεί να γίνουν νοερά.

0,85x 2 = 1,70€ και 0,52x 3,5 = 1,82€, 1,70 + 1,82 = 3,52€, 20 – 3,52 = 16,48€.

2ο Πρόβλημα: 1.565 x 0,4 = 626€

Διερεύνηση-Επέκταση: Ο πατέρας της Αγγελικής ξοδεύει περίπου 1 λίτρο για 10 χμ. Και επομένως περίπου 50 λίτρα για τα 480 χμ., δηλαδή σχεδόν ένα γέμισμα του ρεζερβουάρ, το οποίο χωράει 40-60 λίτρα. Άρα πρέπει να βρούμε πόσο κοστίζουν τα 50 λίτρα στις διάφορες δυνατές επιλογές. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να προτείνουν τις πλέον, κατά την κρίση τους, συμφέρουσες επιλογές. Σημασία έχει το σκεπτικό που αναπτύσσουν, για να δικαιολογήσουν την άποψή τους.

Επιλογή 1η: Την α΄ επιλογή, γιατί έχει την πιο φτηνή βενζίνη (1,126 €) και ο πατέρας της Αγγελικής δεν ενδιαφέρεται για καμία από τις προσφορές, αφού δεν χρειάζεται τη δερμάτινη μπάλα, το αυτοκίνητό του είναι πλυμένο και το εκπτωτικό κουπόνι δύσκολα θα το αξιοποιήσει, γιατί, αν και το πρατήριο είναι στην περιοχή του, δεν περνάει συχνά από εκεί.

Επιλογή 2η: Την β΄ επιλογή, γιατί θέλει μια δερμάτινη μπάλα να πάει δώρο στον ανιψιό του. Θα πληρώσει για τα 50 λίτρα (1,353 – 1,126)x 50 = 11,35€ περισσότερο. Αν όμως η μπάλα είναι από καλό δέρμα, είναι πολύ ακριβότερη από τα 11,35€ και επομένως συμφέρει. *Σημείωση: Αντίλογος: Το ζήτημα είναι, βέβαια, ότι συχνά το δέρμα δεν είναι πραγματικό αλλά συνθετικό, οπότε η μπάλα κοστίζει πολύ λιγότερο και από τα 11€.*

Επιλογή 3η: Τη γ΄ επιλογή, γιατί θέλει ένα πλύσιμο του αυτοκινήτου πριν από το ταξίδι. Θα πληρώσει για τα 50 λίτρα (1,319–1,126)x 50 = 9,65€ περισσότερο. Τόσο περίπου κοστίζει (8-10€) ένα πλύσιμο αυτοκινήτου πλήρες. Οπότε, συνολικά, έρχεται περίπου το ίδιο με την 1η επιλογή και ένα πλύσιμο χωριστά. Σημείωση: *Αντίλογος: Δεν διευκρινίζεται στην προσφορά αν το πλύσιμο θα είναι πλήρες, δηλαδή και από έξω και από μέσα του αυτοκινήτου ή μόνον από έξω, οπότε κοστίζει πολύ λιγότερο.*

Επιλογή 4η δεν υπάρχει, γιατί η δ΄επιλογή στο πρατήριο παραμένει ακριβότερη ακόμη και με το εκπτωτικό κουπόνι.

Κεφάλαιο 30: Η διαίρεση στους δεκαδικούς αριθμούς

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διαιρούν φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς με φυσικούς ή δεκαδικούς αριθμούς,
- να διαιρούν νοερά φυσικό ή δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1.000 και με 0,1, 0,01, 0,001,
- να χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές, για να ελέγξουν αν οι απαντήσεις τους είναι λογικές,
- να εκτιμούν το αποτέλεσμα και να λύνουν προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

Αναπαράγουμε με φωτοτυπικό μηχάνημα το τετράγωνο πλέγμα (10x10) του παραρτήματος, ώστε να έχουμε διαθέσιμα αναπαραστατικά μοντέλα.

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

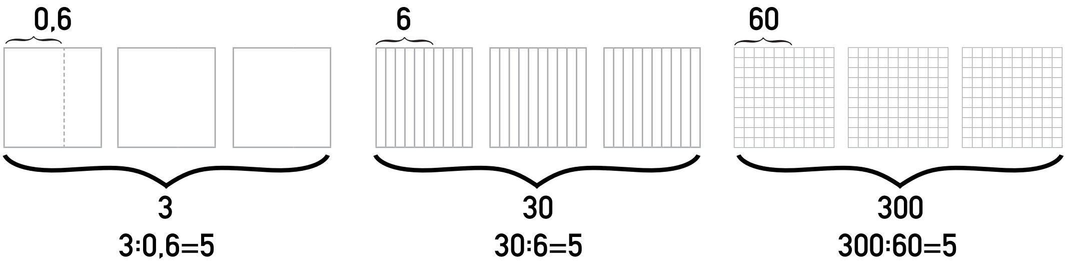
Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες δυσκολεύονται ιδιαίτερα στη διαίρεση των δεκαδικών αριθμών, που δεν είναι εύκολο να γίνει αντιληπτή ως μοιρασιά, για παράδειγμα, όταν ο Διαιρετέος είναι μικρότερος από τον διαιρέτη (π.χ. 2:8), ή όταν ο διαιρέτης είναι μικρότερος από τη μονάδα (π.χ. 2:0,4). Επίσης, συχνά επιμένουν σε αντιλήψεις όπως «η διαίρεση μειώνει έναν αριθμό», κάτι που ισχύει πάντοτε στους φυσικούς, αλλά δεν ισχύει πάντοτε στους δεκαδικούς αριθμούς. Η χρήση αναπαραστατικών μοντέλων, όπως και στα κλάσματα, πριν από την κάθετη πράξη θα βοηθήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν τη διαίρεση των δεκαδικών αριθμών και να αντιμετωπίσουν τις πιθανές δυσκολίες.

1. Οι μαθητές/ήτριες χρησιμοποιούν το τετράγωνο ως μοντέλο αναπαράστασης της ακέραιης μονάδας. Κάθε ακέραιη μονάδα είναι χωρισμένη σε 10 δέκατα. Επομένως το 2,4 αποτελείται από 2 ακέραιες μονάδες και 4 δέκατα, δηλαδή από 24 δέκατα. Χωρίζουμε τα 24 δέκατα σε 4 ίσες ομάδες (διαίρεση μερισμού) και κυκλώνουμε κάθε ομάδα. Κάθε ομάδα αποτελείται από 6 δέκατα, δηλαδή το πηλίκο είναι 0,6. Διαπιστώνουμε ότι 2,4 : 4 = 0,6.

2. α. τρόπος: Οι μαθητές/ήτριες χρησιμοποιούν το τετράγωνο ως μοντέλο αναπαράστασης της ακέραιης μονάδας. Κάθε ακέραιη μονάδα είναι χωρισμένη σε 10 δέκατα. Επομένως οι 3 ακέραιες μονάδες, αποτελούνται από 30 δέκατα. Το 0,6 είναι 6 δέκατα. Για να δούμε πόσες φορές χωράει το 0,6 στις 3 ακέραιες μονάδες, μετράμε τα 30 δέκατα ανά έξι και παρατηρούμε πόσες ομάδες των έξι θα δημιουργηθούν και αν θα περισσέψει κάτι (διαίρεση μέτρησης). Είναι: 30 : 6 = 5 ομάδες. Κυκλώνουμε κάθε ομάδα. Επομένως 3 : 0,6 = 5.

β. τρόπος: Μπορούμε να εργαστούμε με το ίδιο αναπαραστατικό μοντέλο. Το 0,6 είναι 6 δέκατα. και οι 3 ακέραιες μονάδες θα γίνουν 30 δέκατα και αντί για το 3 : 0,6 έχουμε 30 : 6 = 5. *<u>Σημείωση:</u> Ο διαιρέτης μπορεί να μετατραπεί σε φυσικό αριθμό, αν τον πολλαπλασιάσουμε με το 10, το 100 ή το 1.000. Το ίδιο όμως πρέπει να κάνουμε και με τον Διαιρετέο, ώστε να μην αλλάξει η αξία του αποτελέσματος. Επίσης, ο διαιρέτης μπορεί να μετατραπεί σε φυσικό αριθμό και, αν πολλαπλασιαστεί με έναν άλλον κατάλληλο αριθμό (στην περίπτωσή μας με το 5, είναι 0,6x 5 = 3), οπότε, αντίστοιχα, θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί και ο Διαιρετέος (3 x5 = 15) και, τελικά, είναι 15 : 3 =5.*

3. Η σκέψη της Δανάης είναι να βάζει 1 γραμμάριο σε κάθε βαζάκι, μέχρι να βάλει όλη την



ποσότητα και να δει, βέβαια, μήπως υπάρχει και κάποιο υπόλοιπο. Έχει, δηλαδή, να μοιράσει 134 γραμμάρια μαρμελάδας σε 4 βαζάκια (διαίρεση μερισμού- 4 ίσες ομάδες). Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, αν αφαιρεί από τα 134 γραμμάρια διαδοχικά τέσσερα τέσσερα γραμμάρια, δηλαδή, σαν να κάνει διαίρεση μέτρησης και να μετράει τα γραμμάρια τέσσερα τέσσερα. Με τον τρόπο αυτόν θα βρει πάλι πόσα γραμμάρια θα έχει κάθε βαζάκι. Στο τέλος, μπορεί να υπάρχει και κάποιο υπόλοιπο. Η διαδικασία αυτή, αν και χρονοβόρα, μπορεί να οδηγήσει στο σωστό αποτέλεσμα. Το 4 μπορεί να αφαιρεθεί 33 φορές από το 134 και περισσεύουν 2 γραμμάρια. Επομένως κάθε βαζάκι θα έχει 33 γραμμάρια μαρμελάδας. Για να μοιράσει και τα 2 γραμμάρια που περίσσεψαν, θα βάλει 0,5 γραμμάρια σε κάθε βαζάκι. Τελικά, κάθε βαζάκι θα έχει 33,5 γραμμάρια μαρμελάδας.

Η σκέψη του Νίκου είναι να κάνει την ίδια διαδικασία, αλλά να τη συντομεύσει όσο μπορεί. Ψάχνει να βρει ένα πολλαπλάσιο του 4 που βρίσκεται κοντά στο 134. Σκέφτεται το 120 (40, 80, 120,…). Πράγματι 4x 30 = 120. Μέχρι το 134 μένουν άλλα 14. Σκέφτεται ότι 4 x 3 = 12 και μένουν και 2. Για τα 2 γραμμάρια που μένουν σκέφτεται ότι 4x0,5=2. Άρα, τελικά, έχει 30+3+0,5=33,5 γραμμάρια μαρμελάδας σε κάθε βαζάκι.

<u>Σημείωση</u>: Είναι πολύ σημαντικό τα παιδιά να ασχοληθούν αρκετά με τις παραπάνω διαδικασίες που αφορούν στη διαίρεση των δεκαδικών αριθμών και να δοκιμάσουν στο τετράδιό τους και άλλα παραδείγματα, πριν ασχοληθούν με την κάθετη πράξη της διαίρεσης, καθώς θα τα βοηθήσουν ιδιαίτερα στην κατανόηση της διαίρεσης. Έτσι, όταν περάσουν στην κάθετη πράξη της διαίρεσης, ο τρόπος εκτέλεσής της θα έχει αρχίσει να γίνεται κατανοητός και δεν θα αποτελεί έναν ακατανόητο μηχανιστικό κανόνα που απλώς πρέπει να απομνημονευθεί.

Συγκεκριμένα, η παραπάνω σκέψη του Νίκου, στην οποία είναι προτιμότερο να φτάσουμε σταδιακά μετά τα παραπάνω αναπαραστατικά μοντέλα, συμβάλλει πολύ στην κατανόηση του μηχανισμού της κάθετης πράξης της διαίρεσης.

- Συζητάμε πώς η σκέψη του Νίκου μας οδηγεί στην κάθετη πράξη (η διαδικασία φαίνεται δίπλα). Ο πίνακας που ακολουθεί αντιπαραβάλλει τα βήματα στους δύο τρόπους, που στην ουσία είναι τα ίδια με λίγο διαφορετικές εκφράσεις. Σημείωση: Ο κανόνας «ένα ψηφίο έχει ο διαιρέτης, ένα χωρίζω από τα αριστερά του Διαιρετέου… κ.λπ.» δεν είναι κατανοητός από τα παιδιά και προτείνεται να αποφευχθεί.

134	4
-120	30
14	3
-12	
2	+0,5
	33,5

<u>Σημείωση:</u> Η εκτίμηση του αποτελέσματος της πράξης ως έλεγχος, κυρίως, για την ορθή τοποθέτηση της υποδιαστολής στο πηλίκο παραμένει και στη διαίρεση ένας ασφαλής τρόπος που μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να αποφύγουν λάθη απροσεξίας.

4. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι οι δεκαδικοί και οι φυσικοί αριθμοί μικραίνουν 10, 100 ή 1.000 φορές, όταν διαιρούνται με τους φυσικούς αριθμούς 10, 100 ή 1.000, αντίστοιχα, και, επίσης, μεγαλώνουν 10, 100 ή 1.000 φορές, όταν διαιρούνται με 0,1 με 0,01 ή με 0,001, δηλαδή με το 1 δέκατο, εκατοστό ή χιλιοστό.

Στη συνέχεια και επειδή οι διαιρέσεις των δεκαδικών αριθμών με 10, 100 ή 1.000 είναι πολύ εύκολες, οι μαθητές/ήτριες συνδέουν το πηλίκο με τη μετακίνηση της υποδιαστολής του δεκαδικού αριθμού 1, 2 ή 3 θέσεις αριστερά.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Η μετατροπή του διαιρέτη σε φυσικό αριθμό, πολλαπλασιάζοντας Διαιρετέο και διαιρέτη με τον ίδιο φυσικό αριθμό, μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Ο πολλαπλασιασμός με το 10, 100 ή 1.000 δεν είναι ο μοναδικός, αλλά είναι ο συνηθέστερος.

Εφαρμογή: Στο αναπαραστατικό μοντέλο αναδιατάσσουμε τις ακέραιες μονάδες, τα δέκατα και τα εκατοστά, έτσι ώστε εύκολα να τα χωρίσουμε σε 4 ίσες ομάδες.

Αναστοχασμός

1. Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι πράξεις αντίστροφες. Η διαίρεση με το 0,1 ($\frac{1}{10}$), το 0,01 ($\frac{1}{100}$) ή το 0,001 ($\frac{1}{1.000}$) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, αν πολλαπλασιάσουμε τον Διαιρετέο με το 10, το 100 ή το 1.000 αντίστοιχα. Επομένως στις παραπάνω περιπτώσεις το πηλίκο θα είναι μεγαλύτερο από τον Διαιρετέο. *<u>Σημείωση:</u> Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε, αν πολλαπλασιάσουμε διαιρέτη και Διαιρετέο με τον ίδιο αριθμό, π.χ. 3,45:0,1 = (3,45x10):(0,1x10)=34,5:1=34,5 είναι 34,5>3,45.*

2. Όταν ο Διαιρετέος είναι μικρότερος από τον διαιρέτη.

Τετράδιο Εργασιών

3η Άσκηση: Ζωγραφίζουμε κίτρινο το 2,4 (24 στήλες- 24 δέκατα). Χωρίζουμε σε ομάδες καθεμία από τις οποίες απαρτίζεται από 0,6 (6 στήλες- 6 δέκατα). Δημιουργούνται 4 ομάδες και δεν περισσεύει τίποτα. Άρα 2,4:0,6=4

4η Άσκηση:

Διερεύνηση – Επέκταση: 1 μπουκάλι νερού: 0,50€, 1 χυμός πορτοκαλιού: 1,20€ και 1 μπάρα

α΄ τρόπος

608	128
-512	4
96	
-64	0,5
32	
-32	+0,25
0	4,75

β΄ τρόπος

6,08	1,28
-608	128
-512	4,75
960	
-896	
640	
-640	
0	

δημητριακών: 0,95€.

Κεφάλαιο 31: Η έννοια του ποσοστού

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να εκφράζουν δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς με ποσοστά και το αντίστροφο,
- να διαβάζουν και να γράφουν ποσότητες εκφρασμένες σε ποσοστά αναγνωρίζοντας κάθε φορά τη μονάδα αναφοράς,
- να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα με ποσότητες εκφρασμένες σε ποσοστά.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

Αναπαράγουμε με φωτοτυπικό μηχάνημα τον τετράγωνο πίνακα (10x10) του παραρτήματος, ώστε να έχουμε διαθέσιμα αναπαραστατικά μοντέλα.

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Οι μαθητές/ήτριες αρκετές φορές στην καθημερινή τους ζωή έρχονται σε επαφή με αριθμούς εκφρασμένους με ποσοστά και οι εικόνες δίνουν την ευκαιρία να συζητήσουν τις ιδέες τους σχετικά με το τι αυτά εκφράζουν. Δίνουμε την ευκαιρία στους μαθητές και τις μαθήτριες να διαμορφώσουν, όσο μπορούν περισσότερο, τις απαντήσεις τους, χωρίς να τους κατευθύνουμε εξαρχής στην ορθή έκφραση.

- Ο χυμός είναι φυσικός σε ποσοστό 100%, δηλαδή κατά $\frac{100}{100}$, στα 100 μέρη του χυμού και τα 100 είναι φυσικός χυμός.
- Η εικόνα του υπολογιστή δείχνει ότι η μπαταρία του είναι φορτισμένη σε ποσοστό 91%, δηλαδή κατά $\frac{91}{100}$, αν η μπαταρία αποτελείται από 100 ίσα μέρη τα 91 είναι φορτισμένα.
- Η επιτυχία της ομάδας στα τρίποντα ήταν 80%, πέτυχε 8 στα 10 τρίποντα, δηλαδή $\frac{8}{10}$. Οι μαθητές/ήτριες στην περίπτωση αυτήν μπορεί να αναρωτηθούν αν η ομάδα σούταρε 100 τρίποντα και πέτυχε 80, δηλαδή , κάτι που δεν έχει συμβεί. Με τη συζήτηση τα παιδιά αναγνωρίζουν την ισοδυναμία $\frac{8}{10} = \frac{80}{100}$, άρα το $\frac{8}{10}$ εκφρασμένο σε ποσοστά είναι 80%.

  <u>Σημείωση:</u> Αυτό που επιθυμούμε στο επίπεδο αυτό είναι η κατανόηση των ποσοστών ως διαφορετικής γραφής των δεκαδικών κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών.

2. α. Το κυκλικό διάγραμμα είναι χωρισμένο σε 100 ίσα μέρη. Επομένως τα $\frac{45}{100}$ χρωματίζονται με μπλε χρώμα, τα $\frac{38}{100}$ χρωματίζονται με κόκκινο χρώμα και τα $\frac{17}{100}$ χρωματίζονται με κίτρινο χρώμα. **β.** Το 45% των μαθητών/ριών είναι 90 μαθητές/ήτριες ($\frac{45}{100} = \frac{90}{200}$). Ομοίως, το 38% είναι 76 μαθητές/ήτριες και το 17% είναι 34 μαθητές/ήτριες.

3. Γράφουμε αριθμούς εκφρασμένους με ποσοστά (%), με δεκαδικούς αριθμούς και με δεκαδικά κλάσματα που έχουν παρονομαστή το 100.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Η ποσότητα που εκφράζει ένα ποσοστό εξαρτάται από την τιμή στην οποία αναφέρεται, όπως συμβαίνει και στα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: 30% - 40% - 24% - 50%

3η Άσκηση: 20€ - 200 γραμμάρια - ένα τέταρτο

1ο Πρόβλημα: α. Της έμεινε περίπου το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων της, δηλαδή περίπου 140€. β. 147€ γ. Για να έχει όσο το δυνατόν περισσότερα χαρτονομίσματα, θα πρέπει αυτά να είναι χαρτονομίσματα μικρότερης αξίας, δηλαδή αξίας 5 ευρώ. Άρα 147: 5= 29 και υπόλοιπο 2. Επομένως το μεγαλύτερο πλήθος χαρτονομισμάτων που θα μπορούσε να έχει στα χρήματα που της έμειναν είναι 29 χαρτονομίσματα των 5 €.

3ο Πρόβλημα: Η μικρή συσκευασία ζυγίζει 375€. Είναι 30%x 375 = 112,5. Άρα: 375 + 112,5 = 487,5€.

4ο Πρόβλημα: 22 x 20% = 4,4€. Άρα 350 x 4,4 = 1.540 €

Διερεύνηση - Επέκταση

α. Το μπλε είναι το $\frac{1}{4}$ ή το 25% του τροχού. Επομένως η πιθανότητα να μην έρθει μπλε χρώμα, εάν γυρίσουμε το βέλος του τροχού είναι 75%. β. «αδύνατο να συμβεί»: 0%, «το ίδιο πιθανό να συμβεί τόσο όσο και να μην συμβεί»: 50%, «βέβαιο ότι θα συμβεί»: 100%.

Κεφάλαιο 32: Διαφορετικές εκφράσεις των αριθμών

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να εκφράζουν μίαν ποσότητα ή ένα μέρος αυτής με φυσικό αριθμό, με δεκαδικό αριθμό, με κλασματικό ή μεικτό αριθμό ή και με ποσοστά,
- να λύνουν προβλήματα με ποσότητες εκφρασμένες με φυσικό, δεκαδικό, κλασματικό ή μεικτό αριθμό ή και με ποσοστά.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτί για δίπλωση, ο αντίστοιχος για το κεφάλαιο πίνακας του παραρτήματος, σύνολα αντικειμένων δύο χρωμάτων (π.χ. χάντρες, μολύβια, μπαλόνια).

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Αναδεικνύονται οι ιδέες των μαθητών/ριών για τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε το μέρος της σημαίας που έχει μείνει αχρωμάτιστο. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν και να αντιγράψουν τη σημαία σε μιαν κόλλα χαρτί, να την κόψουν και με κατάλληλες διπλώσεις να διαπιστώσουν ότι το κομμάτι που έχει μείνει αχρωμάτιστο, συνολικά, είναι το $\frac{1}{2}$ της σημαίας.

α. Σε κάθε $\frac{1}{4}$ της σημαίας αχρωμάτιστο είναι το $\frac{1}{2}$, δηλαδή το $\frac{1}{8}$ της σημαίας. Συνολικά, είναι αχρωμάτιστα τα $\frac{4}{8}$ της σημαίας, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ αυτής.

Με δεκαδικούς: Η σημαία είναι χωρισμένη σε 4 ίσα μέρη. Κάθε μέρος είναι 1:4= 0,25 της σημαίας και σε καθένα από αυτά τα μέρη το 0,25:2 = 0,125 είναι αχρωμάτιστο. Συνολικά, 4 x 0,125 = 0,5 της σημαίας.

Με ποσοστά: Σε κάθε 25% της σημαίας το 50% είναι αχρωμάτιστο, δηλαδή το 12,5% (25:2=12,5). Σε όλη τη σημαία το αχρωμάτιστο μέρος είναι 4x12,5%=50% της σημαίας.

β. Το μέρος της σημαίας το οποίο ζωγράφισαν τα παιδιά κίτρινο, είναι το $\frac{1}{4}$ της σημαίας ή 0,25 ή 25%.

2. Ανάλογα με τις καταστάσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται οι αριθμοί, επιλέγουμε και τη συμβολική αναπαράστασή τους **α.** με μεικτό αριθμό, **β.** με ποσοστά, **γ.** με κλάσμα, **δ.** με δεκαδικό αριθμό, **ε.** με φυσικό αριθμό. *<u>Σημείωση:</u> Όπως έχουμε τονίσει, οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και όχι διαφορετικά είδη αριθμών και μπορούμε να εκφράσουμε μιαν ποσότητα ή ένα μέρος αυτής με φυσικό αριθμό, με δεκαδικό αριθμό, με κλασματικό ή μεικτό αριθμό ή και με ποσοστά.*

Εφαρμογή: Το πρόβλημα είναι δυνατόν να λυθεί με πολλούς τρόπους. Επίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκτός από τα κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς ή ποσοστά.

β΄τρόπος: Με ποσοστά. $\frac{1}{4}$ = 25%. 0,20 = 20%. 15% + 25% + 20% =60%. 100% - 60% = 40%.

16 : 40% = 16 : $\frac{40}{100}$ = 40 μπισκότα.

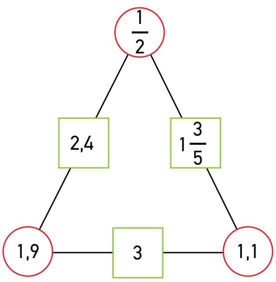
γ΄τρόπος: Με δεκαδικούς. $\frac{1}{4}$ = 0,25. 15% = 0,15. 0,15 + 0,25 + 0,20 =0,60. 1 – 0,60 = 0.40.

16 : 0,40 = 1.600 : 40= 40 μπισκότα.

Αναστοχασμός: 1. 75% = $\frac{3}{4}$. **2.** 0,08

Τετράδιο Εργασιών

2η Άσκηση:



5η Άσκηση: α. Ο αριθμός 9 είναι μια πολύ καλή εκτίμηση.

β. Κάθε ομάδα πρέπει να έχει άθροισμα κοντά στο 4,5.

<u>Σημείωση:</u> *Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να κάνουν πράξεις με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς μετατρέποντας τα σε όποιες μορφές θέλουν. Κύριος στόχος όμως είναι οι μαθητές/ήτριες να κάνουν εκτιμήσεις νοερά και με αυτόν τον τρόπο να κάνουν τους υπολογισμούς τους (π.χ. το $\frac{23}{25}$ είναι πολύ κοντά στο 1, 1,732 και 0,723 είναι κοντά στο 2,5 κ.λπ.)*

1ο Πρόβλημα: 75%x8=0,75x8=6εκ. Περίμετρος: 8+8+6+6=28εκ.

Διερεύνηση - Επέκταση: $\frac{1}{4}$ x 270 = 67,5 λίτρα, 67,5:0,750=6750:75=90 μπουκάλια, 100-40=60, 60%x90=54 μπουκάλια.

Επαναληπτικό 5

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτί για δίπλωση, ο αντίστοιχος για το κεφάλαιο πίνακας του παραρτήματος, σύνολα αντικειμένων δύο χρωμάτων (π.χ. χάντρες, μολύβια, μπαλόνια)

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

1η Άσκηση: $\frac{2}{5}$ ή $\frac{4}{10}$ = 0,40 = 40%

3η Άσκηση: π.χ. 3,107 - 4,583 - 2,299

4η Άσκηση: 0,13 < 0,31 < 1,03 < 1,30 (ή 01,3) < 3,01 < 3,10 < 10,3 < 13,0 < 30,1 < 31,0

5η Άσκηση: Πρόσθεσε τις δεκάδες με τις μονάδες. Εκτίμηση: 3+32=35

6η Άσκηση: α. 0,805. **β.** 80,5 : 2 = 40,25

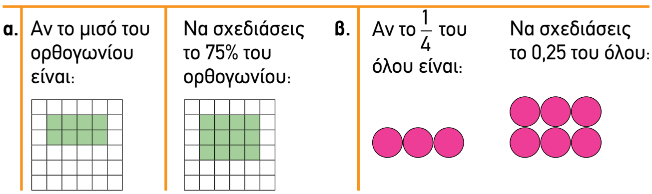
1ο Πρόβλημα: Επειδή οι μονάδες αναφοράς είναι διαφορετικές, δεν μπορούμε να συγκρίνουμε άμεσα: 72%x120=86,4 γρ. κακάου. 75%x90=67,5 γρ. κακάου.

2ο Πρόβλημα: α. Η τιμή του προϊόντος θα είχε συνολική αύξηση 15%, αν κάθε φορά η αύξηση γινόταν στην αρχική τιμή, δηλαδή 5% αύξηση στην αρχή, μετά 10% στην ίδια αρχική τιμή και μετά 15% στην ίδια αρχική τιμή.

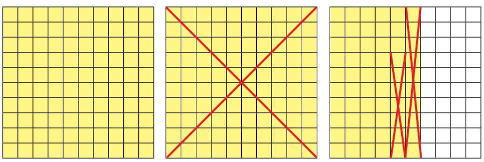
β. Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 5%, οπότε η νέα τιμή είναι μεγαλύτερη από την αρχική. Οι επόμενες 2 αυξήσεις γίνονται πάνω στις τιμές που είχε το προϊόν, όταν έγινε η αύξηση (μεγαλύτερες από την αρχική), οπότε, συνολικά, η αύξηση είναι περισσότερο από 15%.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση:



2η Άσκηση:



2,6-1,17=1,43

2ο Πρόβλημα: Το $\frac{1}{5}$ της διαδρομής είναι 2,5 χμ., άρα τα $\frac{4}{5}$ της διαδρομής είναι 4 x 2,5 = 10 χμ., 10 - 0,12 =9,88 χμ. έχει διανύσει ο τέταρτος ποδηλάτης.

3ο Πρόβλημα: α. Τα επιπλέον γραμμάρια είναι 3.500 γρ. Άρα 0,25x7=1,75€. Σύνολο 12,10+1,75=13,85€. **β.** Διάφορες λύσεις.

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Θεματική ενότητα: Αριθμοί - Άλγεβρα

Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Άλγεβρα

Α. Θεωρητικό μέρος

Ακέραιοι αριθμοί: Η κατανόηση των ακέραιων αριθμών και των πράξεων με ακέραιους αριθμούς είναι σημαντική για τη μελέτη των αλγεβρικών ιδεών.

Το σύνολο των ακέραιων αριθμών περιλαμβάνει τους φυσικούς αριθμούς και τους αντίθετούς τους αρνητικούς αριθμούς. Στην ηλικία αυτήν επιχειρείται μια πρώτη αισθητοποίηση της έννοιας των ακέραιων αριθμών από τους μαθητές και τις μαθήτριες μέσα από καθημερινές καταστάσεις που χρησιμοποιούν ακεραίους, π.χ. το θερμόμετρο, το ασανσέρ κ.λπ. (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011). Στη συνέχεια, με βάση τα μοντέλα αυτά επιχειρείται να συνειδητοποιήσουν την ανάγκη επέκτασης της αριθμογραμμής, να διατάξουν απλούς ακέραιους αριθμούς με πλαίσιο αναφοράς την αριθμογραμμή και να διερευνήσουν διαισθητικά απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις με ακέραιους αριθμούς.

Άλγεβρα: Πρόκειται για μία από τις σπουδαιότερες ενότητες των Μαθηματικών και προσφέρει: (α) τη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και (β) την ευκολότερη και αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων, μαθηματικών και μη, κυρίως μέσω της μοντελοποίησης (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011 Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, 2003). Αποτελεί τον δρόμο για τα ανώτερα Μαθηματικά, συχνά όμως γίνεται εμπόδιο για τους μαθητές και τις μαθήτριες (Kaput, 2008) που την αντιμετωπίζουν, φορμαλιστικά, ως ένα σύνολο από σύμβολα και κανόνες μόνον.

Η Άλγεβρα περιλαμβάνει α) τις ισότητες και ανισότητες, β) τις αλγεβρικές παραστάσεις και γ) τα μοτίβα/ κανονικότητες και συναρτήσεις.

Μοτίβα: Τα μοτίβα ως πρότυπα που οδηγούν στην Άλγεβρα, αποτελούν ένα θεμελιώδες κομμάτι στην σύγχρονη διδασκαλία και χρησιμοποιούνται ήδη από την προσχολική ηλικία. Η αναγνώριση των μοτίβων και η διερεύνηση για το πώς σχηματίζονται και, στη συνέχεια, γενικεύονται θα οδηγήσει στη χρήση του συμβολισμού και στην Άλγεβρα.

Β. Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών

Ακέραιοι αριθμοί: Στις προηγούμενες τάξεις δεν προβλέπεται εργασία σχετική με τους ακέραιους αριθμούς.

Άλγεβρα: α) Ισότητες και ανισότητες: Οι μαθητές/ήτριες έχουν ασχοληθεί διερευνητικά με τις έννοιες της ισότητας και της ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια και έχουν χρησιμοποιήσει τα αντίστοιχα σύμβολα, για να δηλώσουν την κατάλληλη σχέση μεταξύ αριθμών ή απλών αριθμητικών παραστάσεων. Επίσης, οι μαθητές/ήτριες γνωρίζουν να διατάσσουν αριθμούς από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο και αντιστρόφως (φυσικούς, δεκαδικούς, κλάσματα) και να συνδέουν τις ανισοτικές τους σχέσεις με τη θέση τους στην αριθμογραμμή.

β) Αλγεβρικές παραστάσεις: Οι μαθητές/ήτριες έχουν εμπλακεί σε δραστηριότητες μετασχηματισμού αριθμών για λόγους διευκόλυνσης υπολογισμών (π.χ., 7+9=7+7+2=14+2=16) και έχουν διερευνήσει ιδιότητες των πράξεων και τον ρόλο του «=» σε απλές αριθμητικές παραστάσεις (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

γ) Μοτίβα/κανονικότητες και συναρτήσεις: Οι μαθητές/ήτριες από την Α΄ Δημοτικού ενθαρρύνονται να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να περιγράφουν και να κατασκευάζουν απλές γεωμετρικές, αριθμητικές και άλλες κανονικότητες, πρώτα επαναλαμβανόμενες και κατόπιν αυξανόμενες ή μειωνόμενες.

Στο παρόν βιβλίο οι μαθητές/ήτριες αντιλαμβάνονται διαισθητικά τους ακέραιους αριθμούς μέσα από καθημερινές καταστάσεις (αισθητοποίηση). Διερευνούν τις διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου της ισότητας σε αριθμητικές ισότητες και συνδέουν αριθμούς δημιουργώντας ανισοτικές σχέσεις μεταξύ τους. Περιγράφουν και εξηγούν σύνθετα αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα/κανονικότητες.

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Ακέραιοι αριθμοί: Για μια πρώτη διαισθητική αντιμετώπιση των ακεραίων αριθμών χρησιμοποιούμε μοντέλα όπως το θερμόμετρο και το ασανσέρ, αλλά για τη διδασκαλία των πράξεων με ακεραίους αριθμούς αξιοποιούνται και άλλα μοντέλα, όπως οι έννοιες της πίστωσης και του χρέους και μάρκες ή πούλια ή κάρτες μοναδιαίας αξίας και διαφορετικών χρωμάτων [π.χ. τα μαύρα (θετικοί) και κόκκινα πούλια (αρνητικοί) αντιστοίχως].

Μια από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/ήτριες είναι ότι το σχετικό μέγεθος των ακέραιων αριθμών έρχεται σε σύγκρουση με τις εμπειρίες τους από το σύνολο των φυσικών αριθμών (Gallardo & Rojano, 1994) στη διάταξη τους.

Αναφορικά με τις πράξεις, η μοντελοποίηση της αφαίρεσης ακεραίων είναι πιο σύνθετη και οι κανόνες της μπορεί εύκολα να προκαλέσουν σύγχυση και να εφαρμοστούν λανθασμένα.

Συχνά δημιουργούνται παρανοήσεις στους μαθητές και τις μαθήτριες μεταξύ του πρόσημου του αρνητικού αριθμού και του τελεστή της αφαίρεσης (Vlassis, 2004 Kullberg, 2006) και είναι σημαντικό να διασαφηνιστεί η μεταξύ τους διαφορά.

Άλγεβρα: Τα στοιχεία και οι κανόνες της Άλγεβρας αποτελούν αφαιρέσεις των αντίστοιχων στοιχείων και κανόνων της αριθμητικής, δηλαδή αποτελούν αφαιρέσεις αφαιρέσεων και επομένως η κατανόησή τους έχει ιδιαίτερες απαιτήσεις και δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως γενικευμένη αριθμητική.

Η εκτεταμένη χρήση αλγεβρικών συμβόλων οδηγεί τους μαθητές και τις μαθήτριες (Kaput, 2008) στην ταύτιση της Άλγεβρας με σύμβολα και συμβολικούς χειρισμούς αποτελώντας έτσι σημαντικό εμπόδιο στην καλλιέργεια της αλγεβρικής σκέψης.

Επίσης, συχνά οι μαθητές/ήτριες ερμηνεύουν ένα γράμμα ως όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως συγκεκριμένο άγνωστο. Για παράδειγμα, δεν είναι λίγα τα παιδιά που πιστεύουν ότι οι εξισώσεις $\nu+4=9$ και $\mu+4=9$ έχουν διαφορετικές λύσεις.

Δυσκολίες παρατηρούνται και στην κατανόηση του συμβόλου της ισότητας, το «=», αφού συχνά θεωρείται ως ένα σημάδι για «να κάνεις κάτι» και συχνά «να δώσεις την απάντηση, έναν αριθμό» και όχι ως το σύμβολο της ισοδυναμίας μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέλους της ισότητας.

Δ. Εποπτικό υλικό

Οι μαθητές/ήτριες χρησιμοποιούν διάφορα αναπαραστατικά μοντέλα για την αισθητοποίηση των ακεραίων αριθμών, όπως το θερμόμετρο, το ασανσέρ, την αριθμογραμμή, μάρκες/μετρητές δύο χρωμάτων (θετικές - αρνητικές), αλλά και τη ζυγαριά στην ισότητα και τις ανισότητες, γεωμετρικά και αριθμητικά μοτίβα.

Κεφάλαιο 33: Οι αρνητικοί αριθμοί

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να αντιλαμβάνονται διαισθητικά τους ακέραιους αριθμούς μέσα από καθημερινές καταστάσεις (αισθητοποίηση),
- να αντιλαμβάνονται την ανάγκη επέκτασης της αριθμογραμμής, για να συμπεριλάβει αριθμούς μικρότερους από το μηδέν,
- να συγκρίνουν και να διατάσσουν ακέραιους αριθμούς και να ορίζουν τη θέση τους στην αριθμογραμμή,
- να διερευνούν διαισθητικά απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις με θετικούς και αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

αναπαραστατικά μοντέλα για την αισθητοποίηση των ακεραίων αριθμών, όπως το θερμόμετρο, το ασανσέρ, η αριθμογραμμή, μάρκες/μετρητές δύο χρωμάτων (θετικές - αρνητικές)

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1: Οι μαθητές/ήτριες, σχεδόν καθημερινά, αλληλεπιδρούν με αρνητικούς αριθμούς ή βιώνουν καταστάσεις, οι οποίες στηρίζονται σε αρνητικούς αριθμούς, όπως, για παράδειγμα, το ασανσέρ. Συζητάμε με τα παιδιά για τους αριθμούς στα κουμπιά των ανελκυστήρων που έχουν δει και αν θυμούνται τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται για το πόσους ορόφους μακριά είναι ο κάθε όροφος από το ισόγειο. Εξηγούμε στους μαθητές και τις μαθήτριες ότι το ίδιο δείχνουν οι αριθμοί και στο κτήριο της εικόνας στο βιβλίο. Οι ερωτήσεις **α, β** βοηθούν στο να επιβεβαιωθούν τα παραπάνω και αναμένουμε οι μαθητές/ήτριες να απαντήσουν με τους αριθμούς 3 και -2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, με την ερώτηση **γ** οι μαθητές/ήτριες αρχίζουν να αντιλαμβάνονται διαισθητικά την ανάγκη να διακρίνουμε με κάποιο συμβολισμό το «4 όροφοι κάτω από το ισόγειο» με το «4 όροφοι πάνω από το ισόγειο», ώστε να είναι κατανοητό πάνω στο μικρό κουμπί του ασανσέρ. Έπειτα με την **δ** ερώτηση οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να βρουν τη διαφορά των ορόφων από το τρίτο υπόγειο στον δεύτερο όροφο, που είναι 5 όροφοι. Με την **ε** ερώτηση οι μαθητές/ήτριες διερευνούν πώς μπορούν δύο φίλοι να βρίσκονται σε διαφορετικούς ορόφους, που απέχουν το ίδιο από το ισόγειο και αντιλαμβάνονται διαισθητικά ότι οι αριθμοί που είναι ίδιοι, αλλά έχουν διαφορετικό πρόσημο (π.χ. -1 με 1, -2 με 2 κ.λπ.) απέχουν το ίδιο από το μηδέν (0). *Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες αντιλαμβάνονται εδώ διαισθητικά την έννοια των αντίθετων αριθμών.*

2. Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες για τις θερμοκρασίες τις οποίες ακούμε γύρω μας ότι έχουν οι διάφορες πόλεις, ιδιαίτερα, κατά τη διάρκεια του χειμώνα. **α.** Αναμένουμε οι μαθητές/ήτριες να διαπιστώσουν ότι κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε 1°C και να ζωγραφίσουν το θερμόμετρο που δείχνει την ελάχιστη θερμοκρασία μέχρι το σημείο που απέχει 4 γραμμές κάτω από το 0 και, αντίστοιχα, το θερμόμετρο που δείχνει τη μέγιστη θερμοκρασία μέχρι το σημείο που απέχει 3 γραμμές πάνω από το 0. **β.** Αναμένουμε οι μαθητές/ήτριες εξοικειωμένοι ήδη με τη δραστηριότητα 1, αλλά και με τη βοήθεια της αρίθμησης των θερμόμετρων να προσδιορίσουν διαισθητικά ότι η ελάχιστη θερμοκρασία είναι -4°C και η μέγιστη 3°C. **γ.** Είναι φανερό ότι η διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη θερμοκρασία είναι 7°C. **δ.** Την επόμενη ημέρα η ελάχιστη θερμοκρασία, αφού κατέβηκε 2 ακόμη °C, απέχει από το 0 κατά 6 γραμμές. Άρα η ελάχιστη θερμοκρασία την ημέρα αυτήν ήταν -6°C. **ε.** Για να τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην αριθμογραμμή, διαπιστώνουμε πρώτα ότι κάθε γραμμή δείχνει απομάκρυνση από το 0 κατά 1°C. Προς τα δεξιά, αν είναι πάνω από το 0 και προς τα αριστερά, αν είναι κάτω από το 0. **στ.** $-6 < -4 < 3$.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζονται οι ακέραιοι αρνητικοί αριθμοί σε αντιστοιχία με τους ακέραιους θετικούς αριθμούς (φυσικοί αριθμοί) και το σύνολο των ακέραιων αριθμών.

Εφαρμογή: α. 3, 1, -3, 0, -2. *Σημείωση: Σημαντική είναι η κατανόηση της πρόσθεσης αντίθετων αριθμών. Αν λοιπόν έχουμε να προσθέσουμε μίαν κόκκινη μάρκα (+1) και μίαν μπλε μάρκα (-1), οι δύο μάρκες αλληλοεξουδετερώνονται κι έτσι δεν μένει τίποτα (μηδέν) (Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2005).*

β. Εφόσον οι μαθητές/ήτριες έχουν κατανοήσει την πρόσθεση αντίθετων αριθμών, αναμένουμε να κατανοούν ότι η παρουσία μιας ομάδας από μάρκες που αντιπροσωπεύει αντίθετους αριθμούς (π.χ. 2 κόκκινες και 2 μπλε μάρκες) σε ένα σύνολο από μάρκες, δεν αλλάζει την αξία του συνόλου. Επομένως γνωρίζοντας ότι 3 μπλε μάρκες είναι ο αριθμός -3, για να σχηματίσω αυτόν τον αριθμό με μάρκες και των δύο χρωμάτων, αρκεί στις 3 μπλε μάρκες να προσθέσω μίαν κόκκινη και μίαν μπλε ακόμη ή 2 κόκκινες και 2 μπλε ακόμη κ.λπ. Γενικά, κάθε συνδυασμός που έχει μπλε και κόκκινες μάρκες, έτσι ώστε οι μπλε να είναι 3 περισσότερες από τις κόκκινες, μας δίνει τον αριθμό -3.

Αναστοχασμός: 1. Ο αριθμός 3 απέχει μόνον 3 μονάδες από το μηδέν σε αντίθεση με τον αριθμό -5 που απέχει 5 μονάδες. Άρα πιο κοντά στο 0 βρίσκεται ο αριθμός 3. *Σημείωση: Εδώ δεν μας ενδιαφέρει η κατεύθυνση του κάθε αριθμού (δεξιά ή αριστερά από το μηδέν) που καθορίζει αν είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός αλλά μόνον η απόσταση. Στο Γυμνάσιο θα λέγαμε ότι πιο κοντά στο μηδέν βρίσκεται ο αριθμός με τη μικρότερη απόλυτη τιμή.* **2.** Οι αριθμοί 4 και -4 είναι αντίθετοι αριθμοί, απέχουν και οι δύο 4 μονάδες από το μηδέν. Επομένως στο μέσον της απόστασής τους πάνω στην αριθμογραμμή βρίσκεται το μηδέν. **3.** Ανάμεσα σε δύο ακέραιους αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, μικρότερος είναι αυτός που βρίσκεται πιο αριστερά.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: -13 < -10 < -7 < -2 < 4 < 5 < 9 < 16.

2η Άσκηση: 

3η Άσκηση: α. 20 μέτρα **β.** 10 μέτρα

4η Άσκηση: α. β. Θα κινηθώ προς τα αριστερά 8 μονάδες και θα φτάσω στο -5.

1ο Πρόβλημα: α. Νευροκόπι: -5 °C. **β.** Πάτρα: 9 °C. **γ.** 1. στο Νευροκόπι: 11 °C, 2. στην Πάτρα: 4 °C. **δ.** Αθήνα. **ε.** 7 °C.

Διερεύνηση - συζήτηση: α. Γιάννα: -50, Κώστας: +50, Ζωή: +250. **β.** Γιάννα: -150, Κώστας: -50, Ζωή: +150. **γ.** Σε 7 ερωτήσεις.

Κεφάλαιο 34: Γεωμετρικά και αριθμητικά μοτίβα

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να αναγνωρίζουν, διερευνούν, περιγράφουν και συμπληρώνουν γεωμετρικές, αριθμητικές και αναδρομικές κανονικότητες,
- να αναπαριστάνουν μιαν κανονικότητα με διαφορετικά μέσα (λεκτικά, αριθμητικά, εικονικά),
- να συγκρίνουν κανονικότητες μεταξύ τους,

- να διατυπώνουν τον κανόνα μιας κανονικότητας,
- να βρίσκουν κάποιον "απομακρυσμένο" όρο μιας κανονικότητας,
- να αξιοποιούν κανονικότητες και τις ιδιότητές τους, για να επιλύσουν σχετικά προβλήματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

Αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα, χειραπτικό υλικό χάντρες, κάρτες, χρωματιστοί κύβοι κ.λπ.

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4309?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. α. Οι μαθητές/ήτριες εύκολα ανακαλύπτουν ότι το τμήμα που επαναλαμβάνεται είναι τα 3 πρώτα τετραγωνάκια (τρίγωνο-κύκλος- τετράγωνο). **β.** Αναμένουμε από τους μαθητές και τις μαθήτριες να χρησιμοποιήσουν διάφορους τρόπους, για να φτάσουν στο ζητούμενο. Τελικά, βρίσκουμε το πλησιέστερο στο 20 πολλαπλάσιο του 3. Είναι το 18 (3x6=18). Άρα θα έχουμε 6 πλήρεις επαναλήψεις του μοτίβου και θα έχουμε συμπληρωμένα τα 18 από τα 20 τετραγωνάκια. Τα επόμενα τετραγωνάκια θα συμπληρωθούν με τρίγωνο και κύκλο. Επομένως το τελευταίο τετραγωνάκι της κορδέλας θα είναι διακοσμημένο με τον κύκλο.

Ο κανόνας με τον οποίο επαναλαμβάνεται το τετράγωνο σχήμα στην κορδέλα είναι +3.

2. α. Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή έχει ένα παραπάνω τενεκεδάκι. Έτσι, για παράδειγμα, για την 4η πυραμίδα τα τενεκεδάκια είναι 1+2+3+4. Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ως εξής:

Πυραμίδα	1η	2η	3η	4η	…	7η
Πλήθος σειρών	1	2	3	4	…	7
Πλήθος από τενεκεδάκια	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	…	1+2+3+4+5+6+7

β. Τα τενεκεδάκια που θα χρειαστούν για πυραμίδα με 5 σειρές είναι: 1+2+3+4+5= 15 τενεκεδάκια, για 6 σειρές είναι: 21 τενεκεδάκια και για 7 σειρές είναι: 28 τενεκεδάκια.

Ο κανόνας με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος από τενεκεδάκια που χρειάζονται για οποιαδήποτε πυραμίδα είναι: «το άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών από το 1 μέχρι τον αριθμό που δείχνει τη σειρά της πυραμίδας».

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Οι έννοιες των μοτίβων και των κανονικοτήτων αναπτύσσονται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού.

Εφαρμογή: α. τρίγωνο – ορθογώνιο - κύκλος - τετράγωνο – εξάγωνο. **β.** Το 20ο σχήμα είναι το εξάγωνο. **γ.** 6.

Αναστοχασμός: 1. Ο κανόνας για την ανάπτυξη του μοτίβου της Αγγελικής μπορεί να είναι «προσθέτω κάθε φορά τον προηγούμενο αριθμό» (3, 6, 12, …), μπορεί όμως να είναι και «κάθε φορά διπλασιάζω». Επομένως δεν είναι επαρκείς οι πληροφορίες που έχει δώσει η Αγγελική για την ανάπτυξη του μοτίβου.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: α. +4, **β.** x10, **γ.** -5.

1ο Πρόβλημα: γ. Το μοτίβο στα κίτρινα κουτάκια είναι +6. **δ.** Το μοτίβο στα μπλε κουτάκια οριζόντια είναι +2 και κάθετα είναι +7. **ε.** Ανάλογα με τη σειρά των αριθμών, προκύπτουν διάφορα μοτίβα (στήλη, γραμμή, διαγώνιες κ.λπ.)

2ο Πρόβλημα: Παρατηρώντας το μοτίβο ανακαλύπτουμε ότι το τμήμα που επαναλαμβάνεται είναι «ένα τετραγωνάκι λευκό και τρία μωβ», σύνολο 4 τετράγωνα. Επειδή το 24 είναι πολλαπλάσιο του 4, με το 24 τετράγωνο ολοκληρώνονται 6 πλήρεις επαναλήψεις. Επομένως το 24ο τετράγωνο είναι μωβ.

- Επίσης, σε κάθε επανάληψη υπάρχουν τρία μωβ τετράγωνα. Το 16ο μωβ τετράγωνο βρίσκεται στην 6η επανάληψη. Στις 5 πλήρεις επαναλήψεις υπάρχουν 15 μωβ τετραγωνάκια και, συνολικά, 5 x 4 =20 τετραγωνάκια. Επομένως το 16ο μωβ τετράγωνο είναι το αμέσως επόμενο και επειδή βρίσκεται 2ο στο τμήμα που επαναλαμβάνεται, βρίσκεται στην 22η θέση του μοτίβου. *<u>Σημείωση:</u> Οι μαθητές/ήτριες, για να μπορέσουν να απαντήσουν στις παραπάνω ερωτήσεις, σκέφτονται αλγεβρικά, ακόμη κι αν δεν χρησιμοποιούν τον τυπικό συμβολισμό, για να γράψουν τις γενικές εκφράσεις.*
- Αν το μοτίβο έχει 29 τετράγωνα, θα αποτελείται από 7 πλήρεις επαναλήψεις (4x7=28) και ένα ακόμη τετράγωνο το πρώτο της σειράς που είναι λευκό. Επομένως, συνολικά, θα υπάρχουν 7 +1 = 8 λευκά τετραγωνάκια και 3x7=21 μωβ τετραγωνάκια. *<u>Σημείωση:</u> Οι μαθητές/ήτριες ενδέχεται να διαπιστώσουν ότι, για να βρουν τις κουκίδες του επόμενου σχήματος, αρκεί να προσθέσουν τον επόμενο μονό αριθμό (1+3=4, 4+5=9, 9+7=16, 16+9=25, 25+11=36 κ.λπ.). Όμως με τον τρόπο αυτόν είναι πολύ δύσκολο να βρουν τις κουκίδες που απαιτούνται για ένα απομακρυσμένο στη σειρά σχήμα.*

Κεφάλαιο 35: Ισότητες και ανισότητες

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να χρησιμοποιούν σύμβολα και να τα αντικαθιστούν με αριθμούς σε αριθμητικές προτάσεις,

- να χρησιμοποιούν κατάλληλο σύμβολο (ισότητας - ανισότητας) για την αναπαράσταση μιας σχέσης μεταξύ αριθμών,
- να διερευνούν τις διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου «=» σε αριθμητικές ισότητες με άγνωστη ποσότητα στο πρώτο ή στο 2ο μέλος.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

ζυγός και αντικείμενα για ζύγιση

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1: Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τις ζυγαριές και διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Αναδεικνύονται οι διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθητών/ριών, για να φτάσουν στο τελικό αποτέλεσμα. **α.** Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η ζυγαριά ισορροπεί, αν έχει στον αριστερό δίσκο 2 ίδιους κύβους και στον δεξιό δίσκο 3 ίδιες σφαίρες. Επομένως ο κύβος είναι πιο βαρύς από τη σφαίρα. Κάποια παιδιά όμως μπορεί να σχολιάσουν πως: «Ό, τι είναι στον αριστερό δίσκο είναι ισοδύναμο με ό, τι βρίσκεται στο δεξιό δίσκο. Επομένως, αν αφαιρέσουμε τα μισά από τον αριστερό δίσκο (έναν κύβο), θα πρέπει να αφαιρέσουμε και τα μισά από το δεξιό δίσκο (μία και μισή σφαίρα). Άρα ένας κύβος ζυγίζει όσο μιάμιση σφαίρα.» *<u>Σημείωση:</u> Μια τέτοια προσέγγιση οδηγεί στην κατανόηση της ισότητας ως ισοδυναμία.*

β. Στη ζυγαριά Β αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να οδηγηθούν πιο εύκολα στη σκέψη που αναλύθηκε παραπάνω και να αφαιρέσουν και από τους δύο δίσκους κάτι ίδιο, δηλαδή 2 κυλίνδρους και 4 σφαίρες. Οπότε ένας κύλινδρος ισορροπεί (είναι ισοδύναμος) με δύο σφαίρες. **γ.** Κύλινδρος: 200γρ., σφαίρα: 100 γρ., κύβος: 150γρ.

2. α. Τα στερεά που βρίσκονται αριστερά είναι πιο βαριά, δηλαδή ζυγίζουν περισσότερο (>). **β.** Οι λύσεις είναι πάρα πολλές (ανάλογα με πόσα στερεά χωράνε πάνω σε κάθε δίσκο), οπότε αναμένουμε από τους μαθητές και τις μαθήτριες να προτείνουν πολλές λύσεις.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Είναι πολύ σημαντικό να κατανοηθεί από τους μαθητές και τις μαθήτριες πως το **ίσον** (=) είναι το σύμβολο της **ισότητας** και φανερώνει πως ό, τι βρίσκεται αριστερά του έχει την ίδια αξία (τιμή) με ό, τι βρίσκεται δεξιά του.

Εφαρμογή: 2. Οι ιδιότητες που χρησιμοποιούνται είναι οι: **α.** Αντιμεταθετική ιδιότητα, **β.** Μεταβατική ιδιότητα, **γ.** Προσεταιριστική ιδιότητα.

3. Πρέπει 9+□ < 16. Άρα στο □ μπορεί να πάει ένας από τους αριθμούς: 0,1,2,3,4,5,6, αφού μιλάμε μόνον για φυσικούς αριθμούς.

Αναστοχασμός: 1. Αποτελεί ένα από τα πολύ συχνά λάθη των μαθητών/ριών, οι οποίοι/ες, προσπαθώντας να αποτυπώσουν στο χαρτί τη ροή των νοερών υπολογισμών τους, δεν αναγνωρίζουν το «=» ως το σύμβολο της ισότητας.

2. Άπειρες λύσεις.

Τετράδιο Εργασιών

1ο Πρόβλημα: Η σωστή απάντηση είναι το **δ**.

2ο Πρόβλημα:

1	0,5	0,6
0,3	0,7	1,1
0,8	0,9	0,4

400	900	200
300	500	700
800	100	600

Διερεύνηση -Επέκταση: κίτρινος κύκλος: 25, μπλε εξάγωνο: 75, κόκκινος ρόμβος: 15, πράσινος κύκλος: 0,5, μωβ εξάγωνο: 1,5, πορτοκαλί ρόμβος: 2,5.

Επαναληπτικό 6

Περιγραφή εργασιών

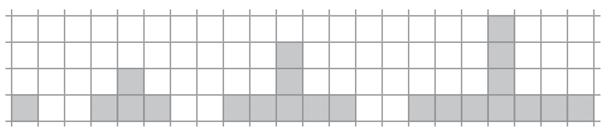
Βιβλίο μαθητή

1η Άσκηση: α. 0,001 – 0,01 – 0,1 – 1 – 10 – 100 – 1.000 **β.** 5.000 – 500 – 50 – 5 – 0,5 – 0,05 – 0,005 **γ.** 18 – 26 – 34 – 42 – 50 – 58 - 66

2η Άσκηση: Στη βάση (κάτω γραμμή) σε κάθε νέο σχήμα προσθέτουμε ένα τετραγωνάκι δεξιά και ένα αριστερά, έτσι κάθε σχήμα έχει στη βάση 1,3,5,7,… τετραγωνάκια. Η κεντρική στήλη μεταβάλλεται κατά ένα τετραγωνάκι από σχήμα σε σχήμα και έχει 0, 1,2,3, … τετραγωνάκια.

	γραμμή	στήλη	σύνολο τετραγώνων
1^{ο} σχήμα	1 + 2x0	0	1
2^{ο} σχήμα	1 + 2x1	1	4
3^{ο} σχήμα	1 + 2x2	2	7
4^{ο} σχήμα	1 + 2x3	3	10
....	....	....	
10^{ο} σχήμα	1 + 2x9	9	28

<u>Σημείωση:</u> Σε μιαν πιο σύνθετη αναζήτηση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το μοτίβο δημιουργείται με βάση τον πίνακα.



1ο Πρόβλημα:

1η σειρά	2η σειρά	3η σειρά	4η σειρά	5η σειρά	6η σειρά	7η σειρά	8η σειρά	9η σειρά	10η σειρά
30	30+(2x1)	30+(2x2)	30+(2x3)	30+(2x4)	30+(2x5)	30+(2x6)	30+(2x7)	30+(2x8)	30+(2x9)

2+4+6+8+10+12+14+16+18=90, 30x10=300, άρα σύνολο: 300+90=390.

2ο Πρόβλημα: Πρώτη πίστα: Ο ήρωας έχει κερδίσει 10 πόντους από τα κέρματα και 10 από το κλειδί, σύνολο +20 πόντους. Έχασε όμως 5 πόντους, επειδή άγγιξε τον φράχτη και 20 για το νερό, σύνολο -20 πόντους. Άρα ο παίχτης κέρδισε 20 πόντους και έχασε 20 πόντους (+20 και -20) έχει 0 πόντους.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: α. 0 ή 1, **β.** 0 ή 1, **γ.** 30, **δ.** 18, **ε.** 8, **στ.** 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9 ή 10 ή 11 ή 12 **ζ.** 7, **η.** 2.

1ο Πρόβλημα: α. Για κάθε νέο εξάγωνο προσθέτω 5 οδοντογλυφίδες, αφού τα εξάγωνα εφάπτονται στη μίαν ακμή.

Πλήθος εξαγώνων	**1 εξαγώνο**	**2 εξαγώνα**	**3 εξαγώνα**	**4 εξαγώνα**	**5 εξαγώνα**
Πλήθος οδοντογλυφίδων	6	11	16	21	26
	1+(1x5)	1+(2x5)	1+(3x5)	1+(4x5)	1+(5x5)

β. 1 + (10x5) = 51 οδοντογλυφίδες.

2ο Πρόβλημα: 191 – 95 = 96. Άρα 96:16 = 6 εβδομάδες.

3ο Πρόβλημα: α. Ο χάρτης δείχνει τις «ζώνες ώρας». Η γη είναι χωρισμένη σε ζώνες καθεμία από τις οποίες διαφέρει κατά 1 ώρα από την προηγούμενη και από την επόμενη με βάση μιαν αρχική ζώνη. *<u>Σημείωση:</u> Οι «ζώνες ώρας» ή «ωριαίες άτρακτοι» είναι περιοχές της Γης που έχουν θεσμοθετήσει την ίδια ώρα που αναφέρεται ως τοπική ώρα. Το σημείο αναφοράς των ζωνών ώρας είναι ο Πρώτος Μεσημβρινός (γεωγρ. μήκος 0°) που διέρχεται από το Αστεροσκοπείο του Γκρίνουιτς στο Λονδίνο. Οι ζώνες ώρας είναι 24 στο σύνολο με 15° εύρος η καθεμία. Πολλές χώρες όμως δεν υιοθετούν τη ζώνη που αντιστοιχεί στον μεσημβρινό που διέρχεται από εκεί, αλλά κάποιον στα ανατολικά ή τα δυτικά.* **β.** Η Αθήνα βρίσκεται στη ζώνη +2. Επομένως η διαφορά ώρας της Αθήνας από το Πεκίνο είναι -6 ώρες, από τη Μαδρίτη +2 ώρες και από το Ρίο Ντε Τζανέιρο +5 ώρες. **γ.** Αν στην Αθήνα είναι 3 μ. μ., στο Πεκίνο θα είναι 9 μ. μ., στη Μαδρίτη θα είναι 1 μ. μ. και στο Ρίο Ντε Τζανέιρο 10 π. μ.

δ. Η Αθήνα βρίσκεται στη ζώνη +2. Επομένως η διαφορά ώρας της Αθήνας από το Τόκιο είναι -7 ώρες και από το Λονδίνο +2 ώρες. Όταν το ρολόι στην Αθήνα δείχνει 10:05 π. μ., στο Τόκιο θα δείχνει 05:05 μ.μ. και στο Λονδίνο θα δείχνει 08:05 π. μ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Θεματική ενότητα: Γεωμετρία και Μετρήσεις

Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Γεωμετρία

Α. Θεωρητικό μέρος

Αρχικά, οι μαθητές/ήτριες έρχονται σε επαφή με την έννοια της κλίμακας και τον προσανατολισμό στον χώρο. Εξοικειώνονται με την αναγνώριση, περιγραφή θέσεων, σχέσεων και διαδρομών σε χάρτες και οδηγούνται στην προσέγγιση της κλίμακας και της κατασκευής τους. Κατόπιν μελετούν τα είδη των γωνιών και εργάζονται με τη μέτρησή τους. Συγκρίνουν τις γωνίες με τη χρήση διαφόρων (υλικών και μη) μέσων και τις μετρούν με τυπικές μονάδες και μοιρογνωμόνιο. Στη συνέχεια, διερευνούν τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες και τις πλευρές (ταξινομούν τα τρίγωνα με βάση τις ιδιότητες όπως αριθμός πλευρών, σύγκριση γωνιών, μήκος πλευρών κ.λπ.) καθώς και την έννοια της καθετότητας και της σχεδίασης/κατασκευής των υψών σε τρίγωνα. Οι μαθητές/ήτριες ολοκληρώνουν την ενότητα προσεγγίζοντας εκ νέου τη συμμετρία και μελετώντας τον κύκλο.

Ο προσανατολισμός στον χώρο συνδέεται με τη γλώσσα, τον εντοπισμό της θέσης, την κίνηση, την πλοήγηση, τους χάρτες και κατ' επέκταση των συντεταγμένων. Το σύστημα αναφοράς, η κλίμακα και ο πραγματικός χώρος έναντι της αναπαράστασης του χώρου αποτελούν σημαντικές αναπτυξιακές αλλαγές. Οι μαθητές/ήτριες εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστάνουν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα, συστηματοποιούν τη χρήση αριθμητικών ζευγών και, στη συνέχεια, διατεταγμένων ζευγών για την παράσταση θέσεων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011). Στην ενότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες συστηματοποιούν τον προσανατολισμό στον χώρο (τοποθετήσεις, διευθύνσεις και ορόσημα) και εισάγονται στους χάρτες προσεγγίζουν χωρικές ιδιότητες και ασκούνται σε περιβάλλοντα με τετράγωνα (πλακόστρωτο, σκακιέρες, τετραγωνισμένο χαρτί) που δομούν τον χώρο και εισάγουν πιο συστηματικές οργανώσεις, όπως είναι το σύστημα συντεταγμένων.

Β. Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών/ριών

Οι μαθητές/ήτριες έχουν αποκτήσει ήδη ορισμένες εμπειρίες στην έννοια της συμμετρίας, στις γωνίες, στα τρίγωνα, ενώ άτυπα έχουν εμπειρίες από τον προσανατολισμό στο χώρο. Οι μαθητές/ήτριες ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των σχημάτων (π.χ. τριγώνων) με βάση γεωμετρικά και μη χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων και μεγεθών, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές/ήτριες, αν και έχουν σημαντικές χωρικές δεξιότητες (γνωρίζουν βασικές έννοιες, μπορούν να προσανατολιστούν, αναπτύσσουν ορόσημα και συστήματα αναφοράς), δεν εμφανίζουν την ίδια άνεση, καθώς δοκιμάζουν να συστηματοποιήσουν αυτές τις λειτουργίες. Κατά τη διδασκαλία της γωνίας οι μαθητές/ήτριες, λόγω κυρίως του στατικού τρόπου διδασκαλίας, συσχετίζουν το «άνοιγμα» της γωνίας είτε με το τμήμα του επιπέδου που περικλείεται μεταξύ των δύο ημιευθειών είτε με το μήκος των ημιευθειών που συγκροτούν τις πλευρές της. Οι μαθητές/ήτριες είναι σημαντικό να διερευνήσουν το ζήτημα με πολλαπλές προσεγγίσεις, ώστε να αποκτήσουν πιο ώριμη μαθηματική σκέψη και να καταφέρουν να συνδέσουν τον ορισμό της γωνίας που διδάσκονται με άλλες γωνιακές σχέσεις. Επιπλέον, εμφανίζουν δυσκολίες στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων (π.χ. μοιρογνωμόνιου, γνώμονα).

Επίσης, σημειώνονται παρανοήσεις από τους μαθητές και τις μαθήτριες στην έννοια του ύψους. Πιστεύουν ότι «το ύψος είναι μία κάθετη γραμμή», «το ύψος πρέπει να σχεδιάζεται μέσα στο τρίγωνο» και «το ύψος πρέπει να χωρίζει την πλευρά σε δύο ίσα μέρη» (Cutugno & Spagnolo, 2014). Συνεπώς, υπάρχει ιδιαίτερη ανάγκη οι μαθητές/ήτριες να μπορούν να εξωτερικεύσουν και να εκφράσουν τις σκέψεις τους, ώστε να είναι εφικτή η αναδόμησή τους.

Κεφάλαιο 36: Μετράω και σχεδιάζω σε κλίμακες

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις σχεδίων ή εικόνων σε διάφορες κλίμακες,
- να σχεδιάζουν σε τετραγωνισμένο καμβά μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις σε απλές κλίμακες και να τις συνδέουν με την κατασκευή χαρτών.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτί μιλιμετρέ ή σε τετραγωνισμένο χαρτί

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-1901

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1899?locale=el

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης: 1. Με βάση το σχέδιο της κάτοψης του διαμερίσματος του αρχιτέκτονα μπορεί να ξεκινήσει η συζήτηση σχετικά με τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση.
α. Ο όρος *κλίμακα* είναι γνωστός στα παιδιά από τη Γεωγραφία, οπότε αναμένεται να αναγνωρίσουν ότι οι διαστάσεις στο σχέδιο είναι 100 φορές μικρότερες από αυτές που είναι στην

πραγματικότητα και να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να υπολογιστούν οι πραγματικές διαστάσεις του διαμερίσματος κάνοντας μεγέθυνση με βάση την κλίμακα. *Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες πρέπει να έχουν πάντοτε υπόψη τους ότι οι διαστάσεις που γράφονται πάνω στο σχέδιο είναι οι πραγματικές διαστάσεις, ενώ το ίδιο το σχέδιο βρίσκεται σε σμίκρυνση (ή μεγέθυνση). Επίσης, στη συγκεκριμένη κάτοψη καταγράφονται και τα εμβαδά, όπως γίνεται πάντοτε σε ανάλογα σχέδια, με τα οποία δεν ασχολούμαστε, αφού η κλίμακα αναφέρεται πάντοτε σε σχέση ανάμεσα σε αποστάσεις (μήκη).* **β.** Οι πραγματικές διαστάσεις του διαμερίσματος αναγράφονται στο σχέδιο. Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται να έχουν κατανοήσει ότι, αν δεν αναγράφονταν οι πραγματικές διαστάσεις στο σχέδιο, για να τις βρούμε, θα έπρεπε να μετρήσουμε με ακρίβεια, χρησιμοποιώντας τον χάρακα, κάθε διάσταση μήκους του διαμερίσματος στο σχέδιο και, στη συνέχεια, να πολλαπλασιάσουμε κάθε διάσταση με το 100.

2. Οι μαθητές/ήτριες καλούνται να προτείνουν τρόπους με τους οποίους μπορούν να σχεδιάσουν το δάπεδο της αίθουσας σχήματος ορθογωνίου με γνωστές διαστάσεις σε δύο διαφορετικές κλίμακες, δηλαδή, αντίστοιχα, δύο ορθογώνια με διαστάσεις: 6μ.:100 = 0,06μ. = 6 εκ. η μία διάσταση και 5μ.:100 = 0,05μ. = 5 εκ. η άλλη διάσταση, όταν η κλίμακα είναι 1:100 και, αντίστοιχα, 6μ.:50 = 0,12μ. = 12 εκ. η μία διάσταση και 5μ.:50 = 0,10μ. = 10 εκ. η άλλη διάσταση, όταν η κλίμακα είναι 1:50. *Σημείωση: Μπορούμε να συζητήσουμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες τις διάφορες συμβάσεις που χρησιμοποιούμε στην ελληνική γλώσσα, όταν εκφράζουμε αποστάσεις, για παράδειγμα, σε ένα ορθογώνιο διαμέρισμα τη μεγαλύτερη διάσταση ονομάζουμε μήκος και τη μικρότερη πλάτος.*

Στη συνέχεια, προτείνεται να γίνει σύγκριση μεταξύ των δύο σχεδίων της αίθουσας και να συζητηθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές τους τόσο με την αίθουσα, όσο και μεταξύ τους. *Σημείωση: Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να κάνουν περισσότερο διαισθητικές συγκρίσεις και να ανακαλύψουν τις βασικές ομοιότητες και διαφορές στα σχήματα, όπως ότι τα σχήματα μπορεί να είναι το ένα μεγαλύτερο και το άλλο μικρότερο αλλά είναι όμοια μεταξύ τους (με δεδομένο, βέβαια, δεν γνωρίζουν ακόμη λόγους και αναλογίες). Επίσης, μπορούν να διαπιστώσουν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής της κλίμακας (100>50), τόσο μικρότερη είναι η κλίμακα, δηλαδή τόσο μικρότερο θα είναι το σχέδιο που θα φτιάξουμε.*

Τέλος, είναι πιθανόν κάποια παιδιά να ανακαλύψουν ότι, αν και η μία κλίμακα είναι διπλάσια της άλλης, δεν συμβαίνει το ίδιο με τα σχέδια. Πράγματι, το ένα σχέδιο είναι τετραπλάσιο του άλλου και αυτό απαιτείται να συζητηθεί μαζί με το εμβαδό του ορθογωνίου (ενότητα 8). Ο/Η εκπαιδευτικός, βέβαια, κατά την κρίση του, επιλέγει πότε είναι ο κατάλληλος χρόνος, για να συζητηθούν ανάλογες δραστηριότητες.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Προτείνεται να αξιοποιηθεί το παράδειγμα και να δοθεί έμφαση σε κάθε απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Από το αρχικό σχέδιο προκύπτει με μεγέθυνση το τελικό, που είναι δύο φορές μεγαλύτερό του και, αντίστροφα, το αρχικό αποτελεί σμίκρυνση του τελικού και είναι δύο φορές μικρότερό του.

<u>Σημείωση:</u> Είναι σημαντικό οι μαθητές/ήτριες να αναγνωρίζουν ότι ο παρονομαστής σε μιαν κλίμακα αναφέρεται πάντοτε σε διαστάσεις του αρχικού σχεδίου (τις πραγματικές), ενώ ο αριθμητής στις αντίστοιχες διαστάσεις του τελικού σχεδίου και εκφραζόμενες, φυσικά, σε ίδιες μονάδες μέτρησης. Ακόμη θα πρέπει να τονίσουμε ότι η κλίμακα είναι καθαρός αριθμός (δεν έχει μονάδες μέτρησης).

Εφαρμογή: Η εφαρμογή αποτελεί ένα παράδειγμα εύρεσης της απόστασης δύο πόλεων σε έναν χάρτη του οποίου δίνεται η κλίμακα. Μπορεί να γίνει σύγκριση ανάμεσα στην απόσταση των δύο πόλεων σε ευθεία γραμμή στον χάρτη της εφαρμογής με τον χάρτη της Ελλάδας της τάξης και συζήτηση γύρω από το μέγεθος κάθε κλίμακας. *<u>Σημείωση:</u> Η συζήτηση για το μέγεθος κάθε κλίμακας ίσως έχει ξεκινήσει με τη δραστηριότητα 2 της διερεύνησης, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω. Επιπλέον μπορεί να συζητηθεί τι χάνουμε και τι κερδίζουμε με την αλλαγή μεγέθους της κλίμακας σε έναν χάρτη (διαφορά στην κλίμακα του παγκόσμιου χάρτη με αυτήν του οδικού χάρτη μιας πόλης).*

Αναστοχασμός

1. α και β.

2. Ο Νίκος έχει δίκιο, γιατί η κλίμακα ενός χάρτη εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στην απόσταση δύο σημείων του χάρτη προς την αντίστοιχη απόσταση στην πραγματικότητα. Σκόπιμο είναι να επισημανθεί, όπως και στην εφαρμογή, ότι πρόκειται για απόσταση σε ευθεία γραμμή και δεν σχετίζεται με τη χιλιομετρική απόσταση μεταξύ δύο πόλεων.

3. Η Δανάη έχει δίκιο, γιατί 900μ. = 90.000 εκ. και, αφού η κλίμακα είναι 1:90.000, ισχύει ότι 90.000 εκ. στην πραγματικότητα είναι 1 εκ. στο χάρτη.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Το μήκος του σώματος της μέλισσας στο αρχικό σχέδιο είναι 1 εκ. και στο τελικό 2 εκ., οπότε η κλίμακα στην οποία έγινε η μεγέθυνση είναι 2:1.

2η Άσκηση: Μήκος ευθύγραμμου τμήματος: α. 5μ. : 100 = 0,05μ. = 5 εκ., ομοίως βρίσκουμε ότι β.2,5 εκ. και γ. 1 εκ.

1ο Πρόβλημα: 18 εκ. στον χάρτη, αφού η κλίμακα είναι 1:100.000 θα είναι στην πραγματικότητα 18εκ.x 100.000 = 1.800.000 εκ., επομένως 18 χμ.

2ο Πρόβλημα: Οι διαστάσεις του γηπέδου είναι: μήκος 4x1.000 = 4.000 εκ. = 40 μ. και, αντίστοιχα, πλάτος 30 μ. και το εμβαδό του είναι: μήκος x πλάτος = 40 x 30 = 1.200 τ. μ.

3ο Πρόβλημα: Θα βρούμε πόσες φορές μικρότερη είναι μια διάσταση του σχεδίου από την αντίστοιχη πραγματική διάσταση, επομένως:

60 μ. : 6 δεκ. = 600 δεκ. : 6 δεκ. = 100.

Άρα η κλίμακα στην οποία έκαναν τη σμίκρυνση είναι 1:100.

Διερεύνηση-Επέκταση: α. μήκος 4 εκ. και πλάτος 3 εκ., β. μήκος 2 εκ. και πλάτος 1,5 εκ. Με περισσότερες λεπτομέρειες μπορούμε να σχεδιάσουμε στην κλίμακα 1: 150. *<u>Σημείωση:</u> Η συζήτηση για το τι κερδίζουμε ή τι χάνουμε σε πληροφορίες με το να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερη ή μικρότερη κλίμακα έχει συζητηθεί και με αφορμή την εφαρμογή παραπάνω.*

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να περιγράφουν τον τρόπο προσδιορισμού ενός σημείου,
- να εντοπίζουν σημεία σε τετραγωνισμένα πλαίσια, σύμφωνα με το σημείο αναφοράς, και να χρησιμοποιούν αλφαριθμητικές συντεταγμένες (π.χ. Α5, Β1),
- να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν βασικούς χάρτες σε απλές κλίμακες και υπομνήματα,
- να δίνουν θέσεις και διευθύνσεις μεταξύ συγκεκριμένων σημείων του χάρτη,
- να τοποθετούν σημεία σε συστήματα συντεταγμένων.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χάρτες, σκακιέρα

Ψηφιακά εργαλεία

http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/2830

http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/2925

http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/2876

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1: Αναδεικνύονται οι ιδέες των μαθητών/ριών για τον προσδιορισμό σημείων στην σκακιέρα. Προτρέπουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες να παρατηρήσουν τη σκακιέρα και να προσδιορίσουν τη μοναδικότητα κάθε σημείου.

α. Αξιωματικός λευκού χρώματος: (β, 7)

β. Βασιλιάς μαύρου χρώματος: οριζόντια γραμμή 2, κατακόρυφη στήλη ε→ (ε, 2)

γ. Το Άλογο μαύρου χρώματος

δ. Όχι. Πρέπει να γνωρίζουμε και τη θέση του στην κατακόρυφη στήλη.

2: Στη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες διερευνούν τις συντεταγμένες σημείων και προσδιορίζουν διάφορες θέσεις. Συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες για τη θέση στην οποία βρίσκεται το εκκλησάκι και ότι αυτό είναι το σημείο αναφοράς μας, το (0,0) καθώς και για τα σημεία του ορίζοντα (Ανατολή, Δύση, Βορράς, Νότος). *__Σημείωση:__ Σε κάθε χάρτη είναι πάντοτε σχεδιασμένο σε κάποιο σημείο ένα βέλος, που δείχνει την κατεύθυνση του Βορρά.*

α. Η Δανάη έχει δίκιο.

β. Το σημείο Β είναι το (3,6). Τρία τετράγωνα ανατολικά και 6 τετράγωνα βόρεια. *__Σημείωση:__ Οι αριθμοί βρίσκονται πάνω στις κατακόρυφες και οριζόντιες γραμμές και δείχνουν συγκεκριμένα σημεία. Αν τεθεί το ερώτημα τι γίνεται με τα ενδιάμεσα σημεία, θα αναφέρουμε ότι θα μπορούσαμε να έχουμε πιο πυ-*

κνές τις οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές (ανά 10 ή 5μ.) προσεγγίζοντας αυτό που γίνεται στους χάρτες. Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια κάθε σημείο.

γ. Τότε στο κιόσκι θα βρισκόταν το σημείο (0,0) και επομένως θα άλλαζε και ο προσδιορισμός της θέσης των σημείων Α και Β. *Σημείωση: Στο σημείο αυτό, αν οι μαθητές/ήτριες θελήσουν να υπολογίσουν τις νέες θέσεις, θα διαπιστώσουν ότι το Α είναι στη θέση (1,2) και το Β στη θέση (4,-1). Οι μαθητές/ήτριες ίσως δεν σκεφτούν την επέκταση της αριθμογραμμής στον άξονα προς τα αριστερά και προς τα κάτω από το σημείο αναφοράς με αρνητικούς αριθμούς, μπορεί να πουν για τη θέση Β: 4 τετράγωνα ανατολικά και 1 τετράγωνο νότια. Στην εφαρμογή υπάρχει αντίστοιχη δραστηριότητα.*

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Παρουσιάζεται ο τρόπος προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων (δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες/αριθμογραμμές). Επίσης, παρουσιάζεται η σημασία του σημείου αναφοράς, δηλαδή του σημείου (0,0), για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου. *Σημείωση: Δεν αναφέρουμε την έννοια «συντεταγμένες», που θα αναλυθεί πλήρως στην ΣΤ΄ τάξη σε συνδυασμό και με το γεωγραφικό πλάτος και γεωγραφικό μήκος.*

Εφαρμογή: Με τη βοήθεια του χάρτη, οι μαθητές/ήτριες διερευνούν σημεία και συσχετίζουν τις έννοιες που έχουν μάθει με τον προσδιορισμό θέσης. *Σημείωση: Ο προσανατολισμός στον χάρτη θα μπορούσε να γίνει χωρίς τη βοήθεια των αρνητικών αριθμών, αλλά με το πρόθεμα Ν (νότια) και Δ (Δυτικά). Η χρήση των αρνητικών αριθμών, που πλέον είναι γνωστοί στους μαθητές και τις μαθήτριες, ως θέση πάνω στην αριθμογραμμή και ως απόσταση από το 0, προδιαθέτει τους μαθητές και τις μαθήτριες για τη χρήση των αλγεβρικών συντεταγμένων σε μεγαλύτερες ηλικίες.*

1. α. Τα σημεία Σ και Π απέχουν μεταξύ τους 1.800 μ. οριζόντια και 600 μ. κατακόρυφα. β. 600 μ. βόρεια και 1.800 μ. δυτικά.
2. Τα παιδιά είχαν δίκιο. *Σημείωση: Στην περίπτωση αυτήν παρουσιάζεται και ένας άλλος χάρτης, για να γίνει εμπέδωση ότι η προσδιορισμός της θέσης γίνεται πάντοτε ως προς ένα σημείο αναφοράς. Άρα, αν αλλάξει το σημείο αναφοράς, αλλάζουν και οι αριθμητικές τιμές που προσδιορίζουν τη θέση.*

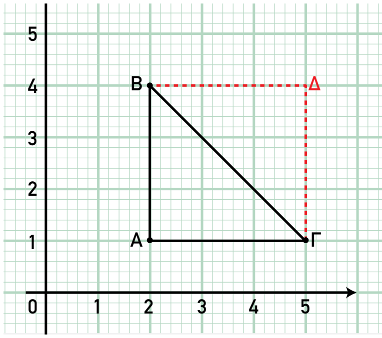
Αναστοχασμός: Οι μαθητές/ήτριες είναι πιθανόν να αναρωτηθούν πώς θα αντιμετωπίσουν το ερώτημα. Είναι χρήσιμος ο σχεδιασμός σε έναν χάρτη και η συζήτηση πάνω σε αυτόν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αφού η πρώτη τιμή του διατεταγμένου ζεύγους δείχνει την οριζόντια θέση και η τιμή 2 βρίσκεται πριν από την τιμή 9, η πόλη που βρίσκεται στη θέση (2,9) είναι πιο δυτικά από αυτήν που βρίσκεται στη θέση (9,2).

Τετράδιο Εργασιών

1ο Πρόβλημα: α. (0, 0), **β.** Σπηλιά, **γ.** Βράχια, **δ.** Γεφύρι, **ε.** Λίμνη, **στ.** (1, 2), **ζ.** (4, 4), **η.** Υπάρχουν διάφορες διαδρομές που μπορούν να επιλέξουν οι μαθητές/ήτριες, αρκεί να γνωρίζουν ότι η θέση του θησαυρού σε σχέση με το κάστρο είναι 3 τετράγωνα δυτικά και 2 τετράγωνα νότια. Άρα μία διαδρομή είναι αυτή, άλλη διαδρομή είναι 2 τετράγωνα νότια και 3 τετράγωνα δυτικά κ.λπ. Θα μπορούσε κάποια διαδρομή να έχει εμπόδια και να πρέπει να κάνουν παράκαμψη. Πάντως, αυτό που πρέπει να γνωρίζουν είναι σε ποια θέση θέλουν να φτάσουν σε σχέση με εκείνη στην οποία βρίσκονται.

2ο Πρόβλημα: Στα ερωτήματα **α, β, γ** η προσέγγιση είναι ανοιχτή. Μπορεί να επιλέξουν ως σημείο αναφοράς νότια και δυτικά ή στο μέσο του ορθογωνίου. Ανάλογα χρειάζεται να αξιολογηθούν οι απαντήσεις. Στο ερώτημα **δ** το σημείο είναι το (4, 4).

3ο Πρόβλημα: α, β. Πρόκειται για ορθογώνιο τρίγωνο.



γ. Η θέση του σημείου Δ είναι (5, 4).

Διερεύνηση- Επέκταση: α1. Ωκεανία, Αυστραλία, **α2.** Αμερική, Καναδάς, **β. 2** τετράγωνα βόρεια και 6 τετράγωνα δυτικά. *Σημείωση: Με αφορμή τη δραστηριότητα μπορεί να γίνει συζήτηση σχετικά με την κατασκευή των χαρτών, τον προσδιορισμό θέσης μέσω δορυφόρων (GPS) κ.λπ. Η μερκατορική προβολή είναι από τις πρώτες που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή χαρτών. Τα τοπογραφικά όργανα, που χρησιμοποιούνται για την αποτύπωση της γης σε σχέδια και χάρτες, μετράνε αποστάσεις και γωνίες που σχηματίζουν τα σημεία του εδάφους που θέλουμε να αποτυπώσουμε με άλλα σταθερά σημεία του εδάφους. Τα σταθερά αυτά σημεία παλαιότερα βρίσκονταν σε κορυφές βουνών και λόφων, για να υπάρχει ορατότητα τόσο μεταξύ τους, όσο και προς όλες τις κατευθύνσεις της γύρω περιοχής. Για να μην καταστρέφονται, κατασκεύαζαν ένα κολωνάκι ύψους περίπου 80 εκ. και διαμέτρου 30 εκ. και στο μέσον της κορυφής του ήταν το σταθερό σημείο. Στην Ελλάδα τα κολωνάκια αυτά τα κατασκεύαζε η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού. Σήμερα τα κολωνάκια αυτά, αν και χρησιμοποιούνται ακόμη, στην ουσία έχουν αντικατασταθεί από τους δορυφόρους και η θέση προσδιορίζεται με τα GPS (συσκευές πλοήγησης).*

Κεφάλαιο 38: Είδη γωνιών

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να ταξινομούν τις γωνίες ως προς την ορθή και να τις διακρίνουν σε ορθές, οξείες και αμβλείες,
- να αναγνωρίζουν ότι δεν συσχετίζεται το «άνοιγμα» της γωνίας με το μήκος των ημιευθειών που συγκροτούν τις πλευρές της,
- να αναγνωρίζουν ότι η γωνία είναι το τμήμα του επιπέδου που περικλείεται μεταξύ των δύο ημιευθειών που συγκροτούν τις πλευρές της.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

κύκλος παραρτήματος, γνώμονας, ρολόι

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1: Καταγράφονται όλες οι απόψεις των μαθητών/ριών σχετικά με τις ομοιότητες και διαφορές που παρατηρούν στις γωνίες, χωρίς να αποκλείουμε τις ενδεχόμενες παρανοήσεις τους. *Σημείωση: Συχνά οι μαθητές/ήτριες αντιλαμβάνονται τη γωνία ως δυο τεμνόμενες ημιευθείες και όχι ως τμήμα του επιπέδου.* α. Στη συνέχεια, εντοπίζονται τα ζεύγη που έχουν ίδιο άνοιγμα. β. Χρησιμοποιώντας τον γνώμονα ή βάσει των κριτηρίων που έχουν ήδη αναπτύξει, απαντούν στο ερώτημα.

2: Μια συχνή παρανόηση των μαθητών/ριών είναι ότι το μέγεθος των γωνιών (το άνοιγμά τους) εξαρτάται από το μήκος των πλευρών τους. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/ήτριες είναι σημαντικό να αποσαφηνίσουν ότι το «άνοιγμα» της γωνίας είναι ανεξάρτητο από το μήκος των ημιευθειών που συγκροτούν τις πλευρές της. Η μεγαλύτερη γωνία είναι αυτή που έχει μεγαλύτερο άνοιγμα και όχι πλευρές με μεγαλύτερο μήκος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση διαπιστώνουμε, συγκρίνοντας με τη βοήθεια του γνώμονα, ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Διακρίνονται οι γωνίες ως προς το άνοιγμα. *Σημείωση: Καλό είναι να εξηγηθούν και λεξιλογικά οι λέξεις οξεία (<οξύς) και αμβλεία (<αμβλύς).*

Εφαρμογή: Με τη βοήθεια ενός χαρτονιού που είναι σε μορφή κύκλου, οι μαθητές/ήτριες κατασκευάζουν το εργαλείο και διαπιστώνουν ότι κατασκεύασαν μίαν ορθή γωνία. Χρησιμοποιούν το εργαλείο αυτό ως ορθή γωνία, αντί για τον γνώμονα, και εντοπίζουν τα τρία είδη γωνιών σε αντικείμενα της τάξης τους.

Αναστοχασμός: Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να συζητήσουν το πρώτο ερώτημα και να εργαστούν σε ομάδες για το 2ο και 3ο ερώτημα.

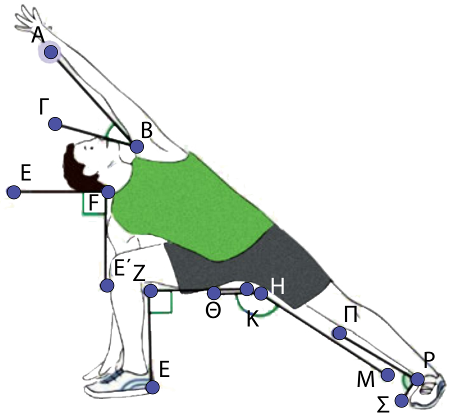
1. Χρησιμοποιώντας τον γνώμονα ή οποιοδήποτε εργαλείο έχει μίαν ορθή γωνία (κύκλος της εφαρμογής, σελίδα Α4). Η οξεία γωνία είναι μικρότερη της ορθής και η αμβλεία γωνία μεγαλύτερη από την ορθή.
2. Η σελίδα Α4 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και έχει 4 ορθές γωνίες. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όπως και το εργαλείο που κατασκευάσαμε με τον κύκλο, αντί για τον γνώμονα, για να διαπιστώσουμε τα είδη των γωνιών σε σχέση με την ορθή.
3. Η φράση «Άνοιξε περισσότερο την πόρτα» σημαίνει ότι θέλουμε το άνοιγμα της γωνίας που σχηματίζεται να είναι μεγαλύτερο.

1η Άσκηση: αμβλεία, οξεία, ορθή. *<u>Σημείωση:</u> Συνηθίζουμε στο εσωτερικό του ανοίγματος της γωνίας να διαγράφουμε ένα μικρό τόξο, αλλά, όταν πρόκειται για ορθή γωνία, αντί για τόξο, χρησιμοποιούμε το σχήμα της ορθής γωνίας.*

2η Άσκηση: Στο ερώτημα **α** οι μαθητές/ήτριες μπορεί να επιλέξουν διαφορετικές γωνίες **β.** 10. *<u>Σημείωση:</u> Επειδή ακόμη οι μαθητές/ήτριες δεν έχουν διδαχτεί τις μη κυρτές γωνίες, ασχολούμαστε μόνον με τις εσωτερικές γωνίες και όχι τις εξωτερικές. Το ίδιο κάνουμε και στην ευθεία γωνία των 180°, υπολογίζουμε, δηλαδή, μόνον αυτήν που βρίσκεται στο πάνω ημιεπίπεδο και όχι και την εξωτερική.*

3η Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τον γνώμονα οι γωνίες μπορεί να χαραχτούν. Είναι σημαντικό να αξιοποιηθεί ο γνώμονας.

1ο Πρόβλημα: Στα ερωτήματα **α** και **β.** η προσέγγιση είναι ανοικτή. Υπάρχουν ορισμένες οξείες και ορθές γωνίες. Επίσης, μπορεί να εντοπιστεί μία αμβλεία γωνία.



2ο Πρόβλημα: α. Επειδή μελετάμε αποκλειστικά γωνίες μικρότερες της ευθείας (βλ. σημείωση, άσκηση 2), η απάντηση είναι πέντε.

Στο ερώτημα **β** υπάρχουν πολλές λύσεις. Οι μαθητές/ήτριες μπορεί να επιλέξουν διαφορετικές γωνίες.

Διερεύνηση- Επέκταση: α. οξεία, **β.** ορθή, **γ.** οξεία, **δ.** αμβλεία

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να ονοματίζουν μια γωνία,
- να αναγνωρίζουν την ευθεία γωνία,
- να χρησιμοποιούν το μοιρογνωμόνιο για να μετρήσουν, να συγκρίνουν και να κατασκευάσουν γωνίες μέχρι 180°.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

διαφανές χαρτί, μοιρογνωμόνιο

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1: α. Οι μαθητές/ήτριες μελετούν τα δύο σχήματα και καταγράφουν τις παρατηρήσεις τους. Οι γωνίες έχουν μία κορυφή και δύο πλευρές. **β.** Οι μαθητές/ήτριες συμπληρώνουν τον πίνακα ακολουθώντας την προσέγγιση που ήδη υπάρχει. Συμπεραίνουν ότι μπορούν να ονοματίσουν κάθε γωνία με ένα μικρό γράμμα της αλφαβήτας στο εσωτερικό της ή τρία κεφαλαία γράμματα, από τα οποία πάντοτε το μεσαίο γράμμα είναι η κορυφή της.

Σχήμα 1	Σχήμα 2
$\hat{\omega}$	$\hat{\theta}$
$\widehat{ΑΒΓ}$	$\widehat{ΠΡΣ}$

2: Στη δραστηριότητα αυτήν οι μαθητές/ήτριες μπορούν να εργαστούν σε ομάδες και να παρουσιάσουν τα αποτελέσματά τους όσον αφορά στη σύγκριση δύο γωνιών.

α΄ τρόπος: α. Με συζήτηση προκύπτει ότι, για να συγκρίνουμε δυο γωνίες, πρέπει με κάποιον τρόπο να τοποθετήσουμε τη μία γωνία επάνω στην άλλη με την κορυφή και τη μία πλευρά τους να συμπίπτουν (αποτυπώνουμε τις δυο γωνίες σε διαφανές χαρτί ακολουθώντας την πρόταση του Νίκου). β. Η γωνία $\hat{\theta}$ είναι μεγαλύτερη.

β΄ τρόπος: α. Μπορούμε, επίσης, να συγκρίνουμε τις δυο γωνίες με τη βοήθεια της τυπικής μονάδας μέτρησης της γωνίας που είναι η μοίρα (ο). Σχήμα 1: 90 ίσα μέρη ή 90° και Σχήμα 2: 120 ίσα μέρη ή 120° **β.** Η γωνία $\hat{\theta}$ είναι μεγαλύτερη. **γ.** Είτε μετρήσουμε με το μπλε, κόκκινο ή πράσινο κύκλο η μέτρησή μας θα είναι η ίδια. *<u>Σημείωση:</u> Τα παιδιά διαπιστώνουν και εδώ ότι το μήκος των πλευρών των γωνιών δεν έχει σημασία, αφού το άνοιγμα παραμένει το ίδιο με όποιον κύκλο και αν μετρήσουν.*

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Επεξηγείται η διαδικασία μέτρησης των γωνιών και ο τρόπος με τον οποίο ονοματίζεται μία γωνία.

Εφαρμογή: Με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου οι μαθητές/ήτριες προσεγγίζουν το ζήτημα της μέτρησης της γωνίας.

Αναστοχασμός

1. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να καταγράψουν τις απόψεις τους και να καταλήξει η τάξη σε κάποιο συμπέρασμα. *Σημείωση: Η διπλή κλίμακα μέτρησης στα μοιρογνωμόνια οδηγεί κάποιες φορές σε λάθη στις μετρήσεις.*

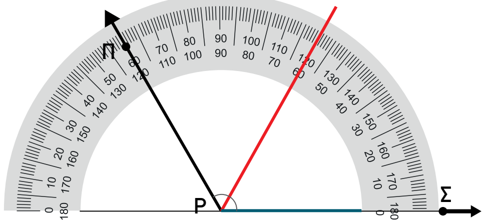
2. Οι μαθητές/ήτριες εργάζονται ατομικά.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: 50°, 140°

2η Άσκηση: 90°, 180°, 35°

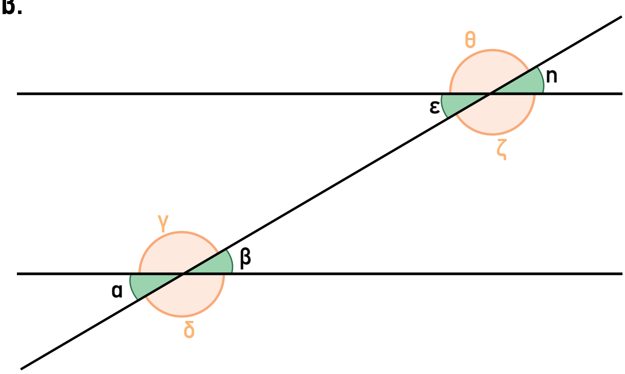
3η Άσκηση: Χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο, οι μαθητές/ήτριες κατασκευάζουν τις δύο γωνίες.



4η Άσκηση: Αρχικά, να μετρηθεί η γωνία. Στη συνέχεια, να γίνει η κατάλληλη διαίρεση. Κατόπιν, να γίνει η μέτρηση.

1ο Πρόβλημα: α. Το πλήθος των γωνιών που θα εντοπίσουν οι μαθητές/ήτριες μπορεί να διαφέρει. Στο πλαίσιο του προβλήματος είναι σημαντικό να διακρίνουν, αρχικά, τις 8 γωνίες που σχηματίζονται από τις 2 παράλληλες και την ευθεία που τις τέμνει.

β.



γ. Να γίνει η σύγκριση με το διαφανές χαρτί. Ίσες γωνίες είναι οι $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\varepsilon}, \hat{\eta}$ και $\hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\zeta}, \hat{\theta}$.

δ. 4 οξείες και 4 αμβλείες. Να γίνει η μέτρηση με το μοιρογνωμόνιο και η σύγκριση με τον γνώμονα.

ε. Τα ζεύγη γωνιών που σχηματίζουν μαζί γωνία 180° είναι: 1. $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}$ 2. $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$ 3. $\hat{\gamma}, \hat{\beta}$ 4. $\hat{\beta}, \hat{\delta}$ 5. $\hat{\varepsilon}, \hat{\theta}$ 6. $\hat{\theta}, \hat{\eta}$ 7. $\hat{\eta}, \hat{\zeta}$ 8. $\hat{\zeta}, \hat{\varepsilon}$.

στ. Υπάρχουν τα ακόλουθα: 1. $\hat{\gamma}, \hat{\delta}$ 2. $\hat{\zeta}, \hat{\theta}$

Διερεύνηση- Επέκταση: α. Αποδεκτή απάντηση και για τα δύο είναι κάτω από 90° και μέχρι 60°, **β.** 50° και 50°.

Κεφάλαιο 40: Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να διακρίνουν ότι κάθε τρίγωνο έχει τρεις γωνίες και τρεις πλευρές,
- να διαπιστώνουν ότι κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες,
- να διαπιστώνουν ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180° και να το εξηγούν,
- να διακρίνουν τα τρίγωνα σε οξυγώνια, ορθογώνια και αμβλυγώνια.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτόνι, ψαλίδι, μοιρογνωμόνιο, γνώμονας

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1: Καταγράφονται όλες οι απόψεις των μαθητών/ριών σχετικά με τις ομοιότητες και διαφορές που παρατηρούν στα τρίγωνα.

α. 1η ομοιότητα: Όλα τα τρίγωνα έχουν τρεις γωνίες και 2η ομοιότητα: Όλα τα τρίγωνα έχουν τουλάχιστον δυο οξείες γωνίες.

β.

	Τρίγωνα	**Είδος γωνιών**
1η ομάδα	ε,ζ,θ	Τα τρίγωνα έχουν ορθή γωνία.
2η ομάδα	α,η	Τα τρίγωνα έχουν αμβλεία γωνία.
3η ομάδα	β,γ,δ	Τα τρίγωνα έχουν τρεις οξείες γωνίες.

2: Οι μαθητές/ήτριες σχεδιάζουν τα δικά τους τρίγωνα και μετά με ψαλίδι κόβουν τις τρεις γωνίες, τις οποίες τοποθετούν τη μία δίπλα στην άλλη. Από την τοποθέτηση μπορούν να παρατηρήσουν ότι σχηματίζουν μία ευθεία γωνία (180°). Επομένως $\hat{\theta} + \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180°$. *Σημείωση: Η συζήτηση που θα ακολουθήσει επανέρχεται στην εφαρμογή που ακολουθεί παρακάτω. Στις συζητήσεις αυτές προτείνεται να προσεχτούν τα ακόλουθα σημεία. α. Είναι πιθανόν να μην σχηματίζουν οι γωνίες ευθεία σε όλα τα κατασκευασμένα από τους μαθητές και τις μαθήτριες τρίγωνα εξ αιτίας ατελειών στο κόψιμο. Β. Ακόμη κι αν αυτό συμβαίνει σε όλα τα τρίγωνα που σχεδίασαν, αυτό δεν παύει να είναι γνώση εμπειρικής προέλευσης η οποία δεν διασφαλίζει ότι αυτό, πράγματι, ισχύει «όλα τα τρίγωνα». γ. Μπορούμε να ζητήσουμε από τα παιδιά να σχεδιάσουν στο σπίτι τους και άλλα τρίγωνα και να τα μετρήσουν με το μοιρογνωμόνιο και την επόμενη ημέρα να ανακοινώσουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους στην τάξη. Είναι πιθανόν κάποια παιδιά να μας πουν ότι βρήκαν 178° ή 181° κ.λπ. Τα αποτελέσματα αυτά μας δίνουν τη δυνατότητα να συζητήσουμε για την ακρίβεια των οργάνων αλλά και για την ακρίβεια* *με την οποία γίνονται οι μετρήσεις. δ. Μπορούμε, στη συνέχεια, να χρησιμοποιήσουμε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και σε ελάχιστο χρόνο να διαπιστώσουμε ότι το άθροισμα των γωνιών στα τρίγωνα είναι πάντοτε 180ο. Ο/Η εκπαιδευτικός μπορεί να κρίνει αν χρειάζεται να προϊδεάσει τους μαθητές και τις μαθήτριες ότι στο Γυμνάσιο θα διαπιστώσουν με μαθηματική απόδειξη (θεώρημα Θαλή) πως το άθροισμα των γωνιών στα τρίγωνα είναι πάντοτε 180°.*

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Η αναγνώριση δύο βασικών στοιχείων του τριγώνου, το άθροισμα των γωνιών του και η διάκριση των τριγώνων σε οξυγώνια, ορθογώνια και αμβλυγώνια αποτελούν τις έννοιες του κεφαλαίου.

Εφαρμογή: Με τη χρήση κατάλληλου γεωμετρικού οργάνου (π.χ. γνώμονα) να χαράξουν ένα τρίγωνο και να πραγματοποιήσουν τις μετρήσεις με το μοιρογνωμόνιο. Η εφαρμογή έχει ενδιαφέρον, για να αναδειχτεί ότι οι μετρήσεις με το μοιρογνωμόνιο ενδέχεται να έχουν απώλειες. Η συζήτηση μπορεί να εστιάσει σε αυτό το θέμα, αλλά στο τέλος της χρειάζεται να αναδειχθεί η διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε, για να προσδιοριστεί ότι οι τρεις γωνίες κάθε τριγώνου σχηματίζουν μία ευθεία γωνία, δηλαδή έχουν άθροισμα 180°. *Σημείωση: Τα ερωτήματα στο ε έχουν αναλυθεί εδώ παραπάνω, στη σημείωση για τη δραστηριότητα διερεύνησης 2.*

Αναστοχασμός

1. Η απάντηση είναι αρνητική, αφού κάθε αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη από 90° και δεν μπορεί ένα τρίγωνο να έχει 2 γωνίες που έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από 180°.

2. α. οξυγώνιο, β. ορθογώνιο, γ. αμβλυγώνιο.

3. Κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες, αφού κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία γωνία ορθή ή αμβλεία. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να καταλήξουν στο παραπάνω συμπέρασμα και με δική τους επιχειρηματολογία.

Τετράδιο Εργασιών

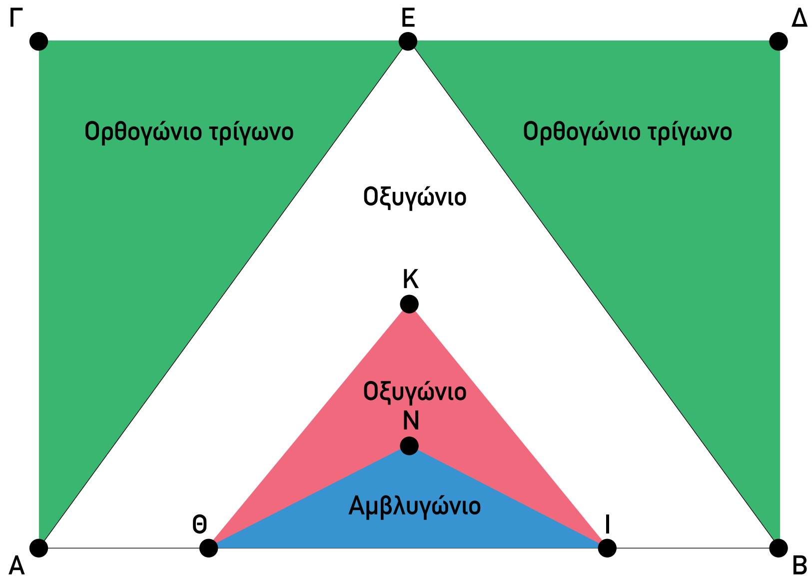
1η Άσκηση: Το αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει 1 αμβλεία γωνία και 2 οξείες. Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει 1 ορθή γωνία και 2 οξείες. Το οξυγώνιο τρίγωνο έχει 3 οξείες γωνίες.

2η Άσκηση: α. ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, οξυγώνιο. **β.** στο πρώτο τρίγωνο 45° και 45°, στο δεύτερο τρίγωνο οι γωνίες πρέπει να μετρηθούν και στο τρίτο τρίγωνο η γωνία είναι 60°.

1ο Πρόβλημα: Το ΑΒΔ είναι ορθογώνιο τρίγωνο. Το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°. Οι δύο γωνίες του τριγώνου έχουν άθροισμα 90° + 40° = 130°. Άρα η $\widehat{ΒΑΔ}$ είναι 180° - 130° = 50°. Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι επίσης ορθογώνιο. Οι δύο γωνίες του τριγώνου έχουν άθροισμα 90° + 65° = 155°. Άρα η $\widehat{ΑΓΔ}$ είναι 180° - 155° = 25°.

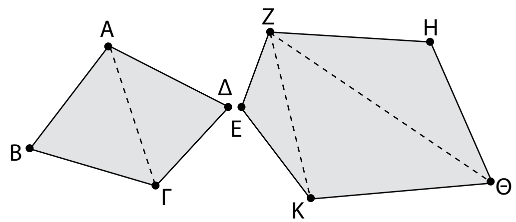
2ο Πρόβλημα: Αφού η $\hat{\alpha}$ είναι τετραπλάσια της $\hat{\gamma}$, θα είναι 4 x 25° = 100°. Οι δύο γωνίες μαζί είναι 25° + 100° = 125°. Επομένως η $\hat{\beta}$ θα είναι 180° - 125° = 55°. Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

3ο Πρόβλημα: Είναι χρήσιμο να βάλουν σημεία για να μπορούν να περιγραφούν τα τρίγωνα. Ορθογώνια: $\widehat{A\Gamma E}$, $\widehat{E\Delta B}$. Οξυγώνια: $\widehat{AEB}$, $\widehat{\Theta K I}$. Αμβλυγώνιο: $\widehat{\Theta N I}$



4ο Πρόβλημα: Να χαράξουν οι μαθητές/ήτριες με κατάλληλα γεωμετρικά όργανα τα σχήματα.

Διερεύνηση- Επέκταση: Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να εργαστούν με δύο τρόπους. <u>α΄ τρόπος:</u> Χωρίζουν το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα φέρνοντας τη διαγώνιο. Κάθε τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών 180^o. Άρα $2 \times 180^o = 360^o$. <u>β΄ τρόπος:</u> Ακολουθούν τη διαδικασία που προσδιορίστηκε για την εύρεση του αθροίσματος των πλευρών τριγώνου. Κόβουν τις γωνίες και τις βάζουν τη μία δίπλα στην άλλη και βρίσκουν το συνολικό άθροισμα.



Παρόμοια εργάζονται με το πεντάγωνο. Άρα $3 \times 180^o = 540^o$.

Κεφάλαιο 41: Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να διακρίνουν τα τρίγωνα ως προς τις πλευρές τους σε ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά,
- να περιγράφουν ιδιότητες των ισόπλευρων, ισοσκελών και σκαληνών τριγώνων,
- να σχεδιάζουν τρίγωνα με τη βοήθεια μοιρογνωμόνιου.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτόνι, κόλλες Α4, ψαλίδι, μοιρογνωμόνιο, γνώμονας, 3 με 4 καλαμάκια για κάθε μαθητή/ήτρια

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

α. Να χρησιμοποιηθούν σελίδες μεγέθους Α4 και να κατασκευαστεί το τετράγωνο. Ως απάντηση στο α1 αναμένεται να προσδιοριστεί ότι οι πλευρές ΑΖ και ΑΒ είναι ίσες. α2. Με τη δίπλωση αναμένεται να αναδειχθεί ότι οι γωνίες είναι ίσες. Επίσης, μπορεί να ελεγχθεί η ισότητα με μέτρηση.

β. Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να εργαστούν με το ερώτημα αυτό. Ως απάντηση στο β1 αναμένεται να προσδιοριστεί ότι οι πλευρές είναι ίσες. β2. Με τη δίπλωση αναμένεται να αναδειχθεί ότι οι γωνίες είναι ίσες.

γ. Η δίπλωση του τριγώνου χρειάζεται να γίνει δύο τουλάχιστον φορές. Η πλευρά ΗΔ να συμπέσει με την πλευρά ΗΕ και, στη συνέχεια, η πλευρά ΗΔ να συμπέσει με την ΕΔ. Δεν απαιτείται τρίτη σύγκριση. Ως απάντηση στο γ1 αναμένεται να προσδιοριστεί ότι οι πλευρές είναι ίσες. γ2. Με τη δίπλωση αναμένεται να αναδειχθεί ότι οι γωνίες είναι ίσες.

Με ερώτημα της μορφής «τι παρατηρήσαμε σε κάθε σύγκριση» επιχειρείται να δοθούν από τους μαθητές και τις μαθήτριες οι έννοιες ισόπλευρο και ισοσκελές. Στη συνέχεια, μπορεί να συζητηθεί η περίπτωση στην οποία ένα τρίγωνο δεν έχει καμίαν πλευρά ίση με τις άλλες και να αναφερθεί ότι ένα τέτοιο τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό. *<u>Σημείωση:</u> Παράλληλα, αναδεικνύονται και οι ιδιότητες των τριγώνων αυτών ως προς τις γωνίες. Τα ισόπλευρα έχουν όλες τις γωνίες ίσες, τα ισοσκελή δύο γωνίες ίσες, τα σκαληνά όλες τις γωνίες άνισες. Επίσης, υπογραμμίζεται ότι ένα ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να είναι και ορθογώνιο. Τέλος, η συζήτηση σε συνδυασμό με τις απαντήσεις στα ερωτήματα α2 και β2, θα αναδείξει ποιες είναι οι ίσες γωνίες σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο.*

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Η αναγνώριση των τριγώνων ως προς τις πλευρές και οι ιδιότητες αυτών των τριγώνων είναι οι βασικές μαθηματικές έννοιες της ενότητας.

Εφαρμογή: Η κατασκευή είναι χρήσιμο να γίνει με βάση τα 5 βήματα.

Αναστοχασμός

1. Η απάντηση μπορεί να προκύψει βάσει του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου και της ιδιότητας ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες.

2. Η απάντηση είναι θετική και μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της κατάλληλης χάραξης ενός σκαληνού τριγώνου.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Το σκαληνό τρίγωνο έχει 3 πλευρές άνισες. Το ισοσκελές τρίγωνο έχει 2 πλευρές ίσες. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει 3 πλευρές ίσες.

2η Άσκηση: ΑΒΓ: ισόπλευρο, ΔΕΖ: σκαληνό, ΗΘΚ: σκαληνό, ΛΜΝ: ισοσκελές

3η Άσκηση: 1ο βήμα: Σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 εκ.

2ο βήμα: Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στο σημείο Α και την ένδειξη 0 της κλίμακας του μοιρογνωμόνιου που θα χρησιμοποιήσουμε πάνω στην πλευρά ΑΒ και προς τα δεξιά.

3ο βήμα: Βρίσκουμε στην κλίμακα το 45^o και βάζουμε μία τελεία. Ενώνουμε την τελεία με το σημείο Α. Σχηματίζουμε με τον τρόπο αυτό μια γωνία 45^o.

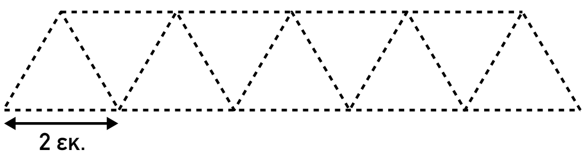
4ο βήμα: Κατασκευάζουμε με τον ίδιο τρόπο μία γωνία 45^o τοποθετώντας το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στο σημείο Β και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στα βήματα 2 και 3.

5ο βήμα: Προεκτείνουμε τις δύο πλευρές των γωνιών, μέχρι να συναντηθούν στο σημείο Γ. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ.

Το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

1ο Πρόβλημα: Αφού ο Αντρέι θέλει να σχεδιάσει ισοσκελές τρίγωνο, χρειάζεται οι δύο πλευρές του τριγώνου να είναι ίσες. Άρα η τρίτη πλευρά θα είναι είτε 3 εκατοστά, είτε 5 εκατοστά.

2ο Πρόβλημα: Μπορούμε να προσθέτουμε στο σχήμα τρίγωνα, μέχρι να βρούμε την επιθυμητή περίμετρο. Με ένα τρίγωνο η περίμετρος είναι 6 εκ. Με δύο τρίγωνα η περίμετρος είναι 8 εκατοστά. Με τρία τρίγωνα η περίμετρος είναι 10 εκατοστά. Με τέσσερα τρίγωνα η περίμετρος είναι 12 εκατοστά. Με πέντε τρίγωνα η περίμετρος είναι 14 εκατοστά. Άρα θα χρειαστούν εννέα τρίγωνα. *<u>Σημείωση:</u> Υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος. Για παράδειγμα, παρατηρώντας το σχήμα μπορεί να ανακαλυφθεί το μοτίβο. Άλλος τρόπος: Παρατηρώντας το σχήμα μπορεί να ανακαλυφθεί ότι για κάθε νέο τρίγωνο προστίθεται, τελικά, μόνον μία νέα πλευρά. Επομένως αφαιρούμε από τα 22 εκ. την περίμετρο του αρχικού τριγώνου 22 – 6 =16 εκ. Τα 16 εκ. είναι το σύνολο από τα μήκη των πλευρών που προστέθηκαν, στη συνέχεια, στην περίμετρο (μία κάθε φορά για κάθε τρίγωνο). Επομένως θα χρειαστούν 16 : 2 = 8 τρίγωνα επιπλέον. Επειδή έχουμε και το αρχικό*



Πλήθος τριγώνων	περίμετρος (εκ.)	κανόνας
1 τρίγωνο	6	(2x3)
2 τρίγωνο	8	(2x3) + (1x2)
3 τρίγωνο	10	(2x3) + (2x2)
4 τρίγωνο	12	(2x3) + (3x2)
5 τρίγωνο	……	……
9 τρίγωνο	22	(2x3) + (8x2)

τρίγωνο, στο σύνολο θα χρειαστούμε 9 τρίγωνα.

Διερεύνηση- Επέκταση: α. Οι μαθητές/ήτριες χρειάζεται να έχουν κόψει αρκετά καλαμάκια. Κάποια από αυτά είναι χρήσιμο να έχουν το ίδιο μήκος. **β.** Η διερεύνηση έχει ενδιαφέρον και μπορεί να επιτευχθεί με παιγνιώδη τρόπο αφήνοντας τους μαθητές και τις μαθήτριες να πειραματιστούν με τα κομμένα καλαμάκια. Επιλέγοντας καλαμάκι του οποίου το μήκος είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μηκών των άλλων δύο, οι μαθητές/ήτριες θα αναδείξουν ότι δεν μπορούν να κατασκευάσουν τρίγωνο με αυτά τα μήκη πλευρών. Παράδειγμα αποτελεί η προσπάθεια κατασκευής τριγώνου με πλευρές 3, 4 και 9 εκ.

Κεφάλαιο 42: Καθετότητα - ύψη τριγώνου

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να αναγνωρίζουν κάθετες ευθείες και να περιγράφουν τι είναι,
- να σχεδιάζουν κάθετες ευθείες με τη χρήση γνώμονα,
- να εξηγούν την έννοια της απόστασης,
- να μπορούν να σχεδιάζουν την απόσταση σημείου από ευθεία και την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών.
- να αναγνωρίζουν τα ύψη του τριγώνου,
- να σχεδιάζουν τα ύψη τριγώνου.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

γνώμονας

Ψηφιακά εργαλεία

http://aesop.iep.edu.gr/node/20634/5184

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να συζητήσουν σε ζεύγη ή ομάδες και να εκτιμήσουν ποια είναι η μικρότερη απόσταση από τη στάση λεωφορείου στο Cine Paris. Στη συνέχεια, καταγράφουν τις απόψεις τους σε χαρτί και συζητούν το ζήτημα στη ολομέλεια. <u>*Σημείωση:*</u> *Η αναμενόμενη απάντηση στην εκτίμηση είναι να ακολουθήσουν τη διαδρομή από την οδό Ανατολής. Οι οδοί*

Ανατολής και Σμύρνης οδηγούν στον κινηματογράφο. Το Cine Paris απέχει από τα άκρα των δύο οδών το ίδιο, επομένως η επιλογή σχετίζεται με το ποια από τις δύο οδούς είναι συντομότερη. Αναφορικά με τις δύο οδούς, διαπιστώνουν με τη βοήθεια του γνώμονα ότι η οδός Ανατολής που είναι κάθετη στην οδό Παναχαϊκού είναι η συντομότερη οδός. Μπορούν να επιβεβαιώσουν με τον χάρακα ότι η κάθετη είναι η συντομότερη διαδρομή.

2. Οι μαθητές/ήτριες μελετούν τις οδηγίες και ακολουθούν τα βήματα, ώστε να βρουν την απόσταση ενός σημείου Α από μίαν ευθεία. Είναι χρήσιμο να αναδειχτεί η έννοια του ευθύγραμμου τμήματος και η διαφοροποίησή του από την ευθεία. *Σημείωση: Ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται το τμήμα της ευθείας που ορίζεται από δύο σημεία ως άκρα.*

3. Η παρατήρηση των μαθητών/ριών κατά την σχεδίαση των αποστάσεων είναι χρήσιμη, ώστε να υποστηριχθεί ο σχεδιασμός και η σωστή χρήση του γνώμονα. Οι μαθητές/ήτριες μπορεί να παρατηρήσουν ότι όλες οι αποστάσεις διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Βασικές Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Οι μαθητές/ήτριες διδάσκονται στο κεφάλαιο αυτό την έννοια των καθέτων, την απόσταση σημείου από ευθεία και τι σηματοδοτεί καθώς και τα ύψη των τριγώνων.

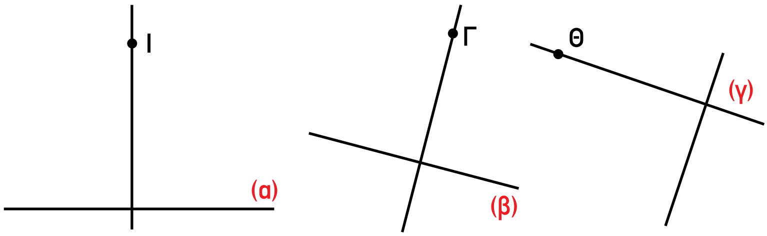
Εφαρμογή: Προσεγγίζεται η χάραξη των υψών σε ένα τρίγωνο (στην περίπτωση της εφαρμογής πρόκειται για αμβλυγώνιο τρίγωνο), όπου δύο από τα ύψη βρίσκονται εκτός τριγώνου. Η αξιοποίηση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας προσφέρεται για την καλύτερη προσέγγιση των υψών. Οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν ότι τα ύψη του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το προτεινόμενο σενάριο (βλέπε Ψηφιακά εργαλεία) μπορεί να συνεισφέρει στη συνολική αποτύπωση του ζητήματος. *Σημείωση: Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές/ήτριες τη δυνατότητα προέκτασης των πλευρών, για να φέρουν την κάθετη από ένα σημείο που βρίσκεται εκτός των ευθειών προς αυτές, αφού η κάθετη χαράσσεται ως προς την ευθεία και όχι ως προς το ευθύγραμμο τμήμα. Επίσης, το σημείο από το οποίο διέρχονται τα τρία ύψη βρίσκεται εντός του τριγώνου, αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, εκτός του τριγώνου, αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο και στην κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου, αν αυτό είναι ορθογώνιο.*

Αναστοχασμός: Οι απαντήσεις στα ερωτήματα μπορούν να προκύψουν μέσα από την εμπλοκή των μαθητών/ριών με το προαναφερόμενο σενάριο (βλέπε Ψηφιακά εργαλεία). *Σημείωση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο οι δύο κάθετες πλευρές αποτελούν και ύψη του τριγώνου.*

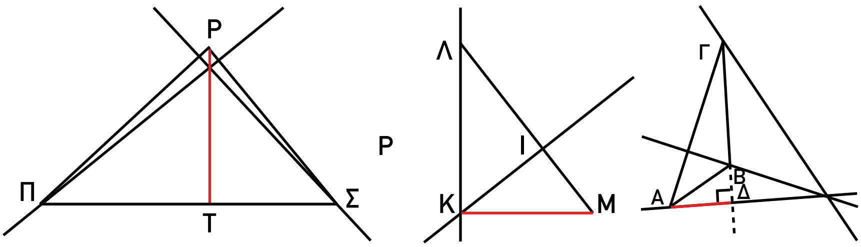
Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Γ, Ε, Π.

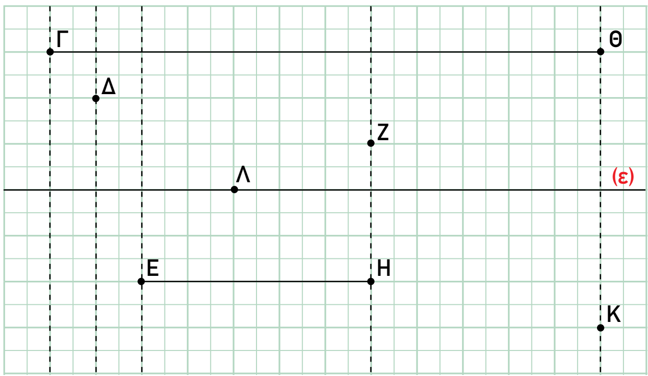
2η Άσκηση:



3η Άσκηση:



1ο Πρόβλημα:



α. Τα σημεία Γ, Κ και Θ, τα σημεία Δ, Η και Ε.

β. Το σημείο Λ.

Τα σημεία Γ και Θ καθώς και τα σημεία Ε και Η.

Διερεύνηση- Επέκταση: α. Ο κεντρικός αγωγός ύδρευσης είναι παράλληλος με τη γραμμή που ορίζει τα όρια των σπιτιών (οικοδομική γραμμή), επομένως τα σπίτια απέχουν εξίσου από τον αγωγό. Υπάρχουν όμως διαφορές ως προς τον τρόπο τοποθέτησης των σωλήνων που ενώνουν τα σπίτια με τον αγωγό. Ο σωλήνας που έχει χρησιμοποιήσει ο πρώτος κατασκευαστής έχει τοποθετηθεί κάθετα, επομένως έχει μικρότερο μήκος από τους υπολοίπους και άρα μικρότερο κόστος.

β. Είναι πιο συμφέρον να τοποθετούνται κάθετα.

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να εξηγούν τι είναι ο άξονας συμμετρίας,
- να εντοπίζουν τους άξονες συμμετρίας ενός επίπεδου σχήματος,
- να κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να περιγράφουν τη διαδικασία,
- να χρησιμοποιούν την αξονική συμμετρία στη διερεύνηση τριγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων,
- να σχεδιάζουν σε διάφορους καμβάδες ίσα σχήματα περιγράφοντας τους μετασχηματισμούς που τα συνδέουν.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

μιλιμετρέ χαρτί, διαφανές χαρτί

Ψηφιακά εργαλεία

http://aesop.iep.edu.gr/node/20634/5184

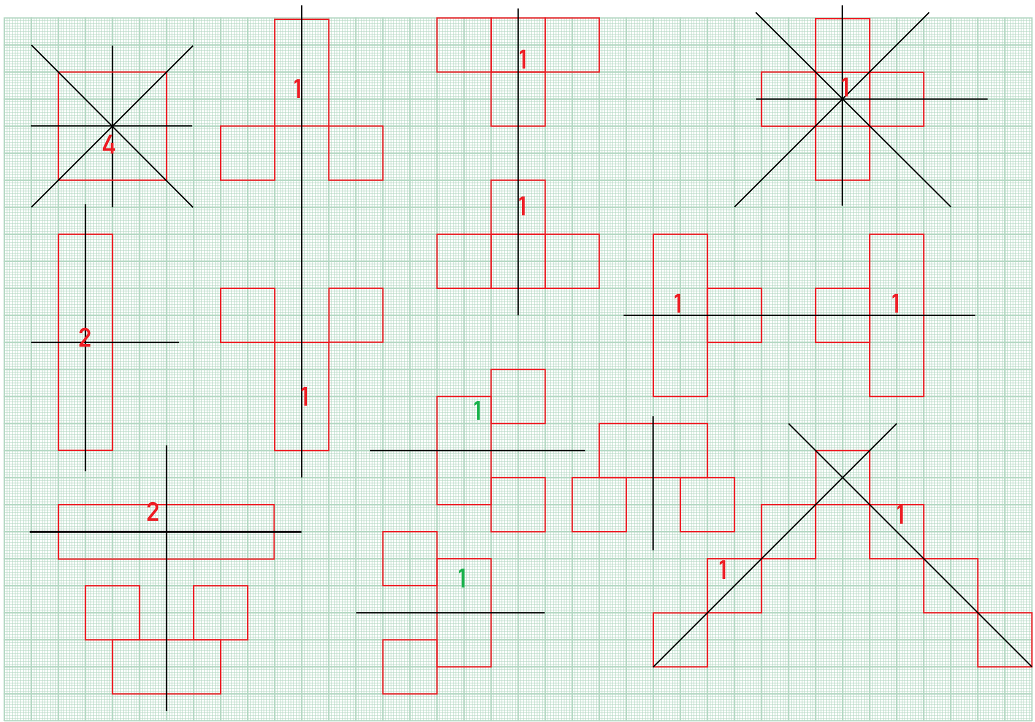
Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

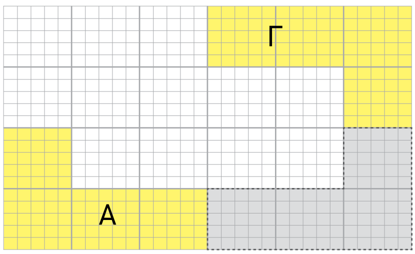
Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν, με τον τρόπο με τον οποίον εργάστηκαν στη δραστηριότητα 1 στο κεφάλαιο 41, να κατασκευάσουν με τέσσερα φύλλα Α4 τα τέσσερα τετράγωνα που χρειάζονται. *Σημείωση: Είναι προτιμότερο να τα έχουν έτοιμα από το σπίτι τους, για να εξοικονομήσουμε χρόνο.*

Οι μαθητές/ήτριες μπορεί να εργαστούν σε ομάδες ή και ατομικά. Υπάρχουν τουλάχιστον 16 διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των 4 τετραγώνων, έτσι ώστε το συνολικό σχήμα να είναι συμμετρικό ως προς άξονα με έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Κάποιες από τις επιλογές των μαθητών/ριών μπορεί να είναι οι ακόλουθες.



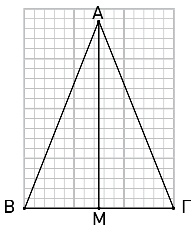
2. Οι μαθητές/ήτριες διερευνούν και προς την άλλη κατεύθυνση με τη βοήθεια του μιλιμετρέ χαρτιού βρίσκουν τους άξονες συμμετρίας, οι οποίοι οδηγούν στο μετασχηματισμό, όπως δείχνει η διπλανή εικόνα.



Στη συζήτηση που θα ακολουθήσει, αν έχουμε χρόνο, μπορούμε να εξετάσουμε τις αλλαγές του αρχικού σχήματος, αν θέλουμε το συμμετρικό του ως προς άξονα συμμετρίας μια τυχαία ευθεία έξω από το σχήμα. Το ίδιο το σχήμα δεν έχει άξονα συμμετρίας.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Ο άξονας συμμετρίας, το συμμετρικό ενός σχήματος καθώς και η εύρεσή του αποτελούν τις μαθηματικές έννοιες και διεργασίες του κεφαλαίου.

Εφαρμογή: Προσεγγίζεται η εύρεση του συμμετρικού ενός σχήματος. Η δίπλωση αποτελεί σημαντική διεργασία που χρειάζεται να είναι σε θέση να αξιοποιήσουν οι μαθητές/ήτριες. Επιπρόσθετα, η απόσταση από τον άξονα συμμετρίας και η εύρεσή της είναι χρήσιμο να εφαρμοστεί, ώστε να μπορούν οι μαθητές/ήτριες να περιγράφουν χαρακτηριστικά των συμμετρικών σχημάτων.



Αναστοχασμός

1. Ο σχεδιασμός ενός ισοσκελούς τριγώνου θα βοηθήσει στην εύρεση της κορυφής. Με δίπλωση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η ζητούμενη κορυφή είναι το σημείο όπου τέμνονται οι δύο ίσες πλευρές (σημείο της μεσοκαθέτου).

2. Με τη χρήση διάφορων ορθογωνίων τριγώνων (η αξιοποίηση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας θα ήταν χρήσιμη), οι μαθητές/ήτριες μπορούν να πειραματιστούν και να ελέγξουν αν μπορεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο να έχει άξονα συμμετρίας. Το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας.

3. Με τον κατάλληλο σχεδιασμό, θα παρατηρήσουν οι μαθητές/ήτριες ότι αποτελούν ύψη του τριγώνου.

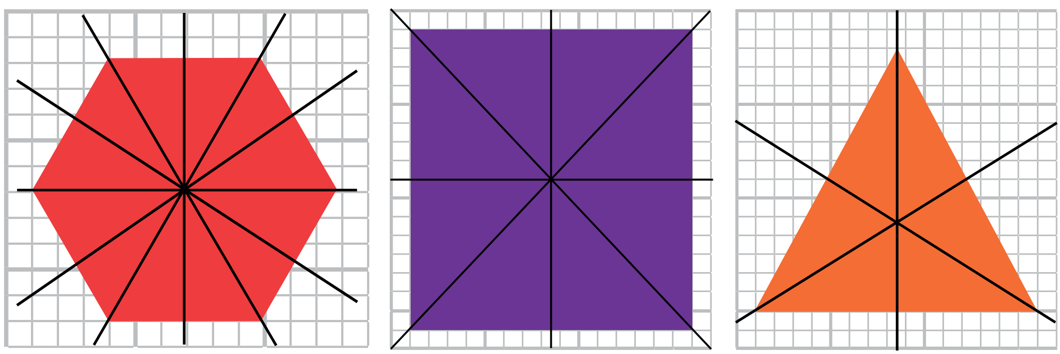
Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση:

α. ΑΥΤΙ, ΟΧΗΜΑ, ΑΞΙΑ, ΛΥΠΗ κ.λπ.

β. ΗΘΙΚΟ, ΘΕΟΣ, ΘΕΣΗ κ.λπ.

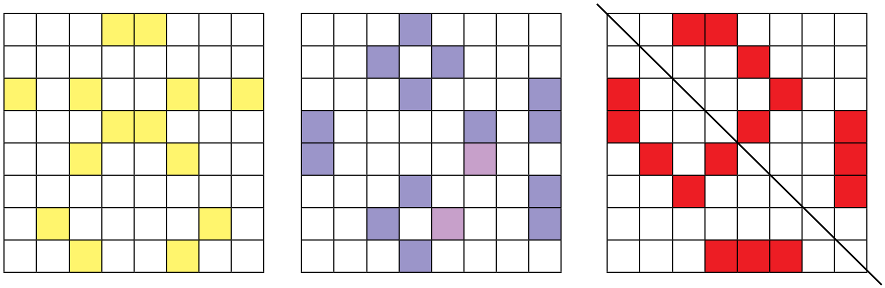
2η Άσκηση:

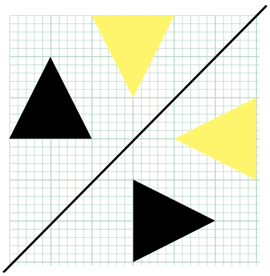


6 άξονες συμμετρίας, 4 άξονες συμμετρίας, 3 άξονες συμμετρίας

1 άξονα συμμετρίας, 1 άξονα συμμετρίας, 4 άξονες συμμετρίας

3η Άσκηση:





1ο Πρόβλημα:

Η περιγραφή του τρόπου εργασίας των μαθητών/ριών έχει ιδιαίτερη αξία, καθώς αναδεικνύει τον βαθμό στον οποίον μπορούν να αξιοποιήσουν και να εφαρμόσουν αυτά που διδάχτηκαν στο κεφάλαιο.

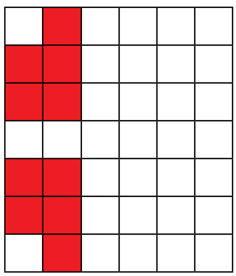
2ο Πρόβλημα:

α. Το σχήμα Α και το σχήμα Γ

β. Με διαφανές χαρτί, να αντιγράψουν οι μαθητές/ήτριες τα σχήματα και να πραγματοποιήσουν τον σχετικό έλεγχο.

Διερεύνηση- Επέκταση: α. Το Δ, γιατί, αν διπλώσουμε το σχήμα ως προς οριζόντιο άξονα συμμετρίας, θα προκύψει το σχήμα Δ.

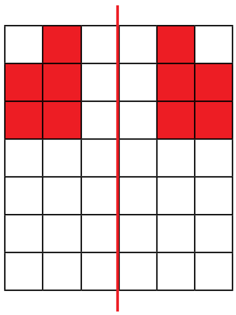
A



Δ

β. Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο.

A



Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να ονομάζουν τα κύρια στοιχεία του κύκλου,
- να αναγνωρίζουν την περιφέρεια, την ακτίνα και τη διάμετρο κύκλων,
- να υπολογίζουν το μήκος κύκλου,
- να εξηγούν τον αριθμό π.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτόνι με κύκλο, μεζούρα, κομμάτι σπάγγου

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

1. Οι μαθητές/ήτριες εργάζονται με τον κύκλο και ακολουθούν τα βήματα που προτείνει η διερεύνηση.

α. πράσινη: διάμετρος, κόκκινη: ακτίνα, σημείο Ο: κέντρο κύκλου

β. Η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας. Η μέτρηση της μπλε γραμμής μας δίνει το μήκος του κύκλου.

2. α. Οι μαθητές/ήτριες εντοπίζουν σχήματα του κύκλου σε αντικείμενα της τάξης και κάποιοι/ες με τη μεζούρα, ενώ κάποιοι/ες άλλοι/ες με ένα κομμάτι σπάγγου κάνουν μετρήσεις.

β. Στη συνέχεια, συμπληρώνουν τον πίνακα. Στην τελευταία στήλη κάνουν με τη βοήθεια αριθμομηχανής (είτε στο πλαίσιο της τάξης, είτε στο πλαίσιο της ομάδας) τις κατάλληλες διαιρέσεις και βρίσκουν το πηλίκο μήκος κύκλου: διάμετρος.

γ. Στο τελευταίο βήμα τοποθετούν το αποτέλεσμα στην ευθεία με στόχο να διαπιστώσουν ότι το αποτέλεσμα είναι κοντά στον αριθμό 3,14.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Οι μαθητές/ήτριες συναντούν τις έννοιες: κέντρο κύκλου, ακτίνα, διάμετρος, μήκος κύκλου, ο αριθμός π.

Εφαρμογή:

1. μήκος κύκλου =3,14 x 2 x 3 = 3,14 x 6 = 18,84 εκ.

2. δ =15,7 : 3,14 άρα : δ = 5 εκ. Οπότε α= 5 : 2=2,5 εκ.

Αναστοχασμός

1. Επειδή το μήκος κύκλου εξαρτάται από τη διάμετρο, κάθε κύκλος με διαφορετική διάμετρο έχει και διαφορετικό μήκος κύκλου. Επειδή η ακτίνα είναι η μισή της διαμέτρου, δύο κύκλοι με διαφορετικό μέγεθος ακτίνας δεν μπορεί να έχουν το ίδιο μήκος κύκλου.

2. Το π είναι με προσέγγιση εκατοστού 3,14. Άρα, ο αριθμός π δεν είναι 3,14.

3. Άπειρες

1η Άσκηση:

	1ος κύκλος	2ος κύκλος	3ος κύκλος	4ος κύκλος
ακτίνα	2,5 εκ.	2,1 μ.	3,5 εκ.	5 εκ.
διάμετρος	5 εκ.	4,2 μ.	7 εκ.	10 εκ.
μήκος κύκλου	15,7 εκ.	13,18 μ.	21,98 εκ.	31,4 εκ.

1ο Πρόβλημα: Αφού η διάμετρος είναι 20 εκ., θα χρειαστεί ο υπολογισμός του μήκους του κύκλου.

μήκος κύκλου =π x δ=3,14 x 20=62,8 εκ.

2ο Πρόβλημα: Από το μήκος του κύκλου του μπλε στεφανιού θα υπολογιστεί η ακτίνα: μήκος κύκλου =π x δ, δ = μήκος κύκλου : π = 238,64 : 3,14 = 76 εκ. Κατά συνέπεια, η ακτίνα είναι: α = 76 :2 = 38 εκ.

Αφού η ακτίνα του κόκκινου στεφανιού είναι 8 εκ. μικρότερη, θα είναι: 38 – 8 = 30 εκ.

Άρα για το κόκκινο στεφάνι: μήκος κύκλου = π x ακτίνα x 2 = 3,14 x 30 x 2 = 188,4 εκ.

Διερεύνηση- Επέκταση: α. Αφού η ακτίνα του παρτεριού είναι 1,2 μ., το μήκος του κύκλου που σχηματίστηκε είναι:

μήκος κύκλου = π x ακτίνα x 2 = 3,14 x 1,2 x 2 = 7,536 μ. περίπου ή 753,6 εκ.

Επειδή κάθε τούβλο έχει πλάτος 10 εκ., θα χρειαστούν 76 τούβλα. *Σημείωση: Αν οι μαθητές/ήτριες δώσουν και κάποιες άλλες απαντήσεις με πιο "ανοιχτό" περιεχόμενο, θα είναι αποδεκτές, αρκεί η επεξήγηση να είναι επαρκής. Για παράδειγμα, ανάμεσα στα τούβλα υπάρχει 0,5 εκ. λάσπη, για να κολλήσουν. Άρα στα 76 περίπου τούβλα ή λάσπη θα έχει πάχος περίπου 76 x 0,5 = 38 εκ., δηλαδή το πάχος που έχουν περίπου 3,5 τούβλα. Έτσι, τα τούβλα θα είναι περίπου 73.*

β. 1. Το μήκος του κύκλου του κορμού είναι 75 εκ..

Κατά συνέπεια, δ = μήκος κύκλου : π = 75 : 3,14 = 23,88 εκ..

Η ακτίνα θα είναι 23,88 : 2= 11,94 εκ. Επειδή κάθε χρόνο αυξάνεται κατά 0,4 εκ., η ηλικία του δέντρου θα είναι 11,94 : 0,4 = 30 έτη περίπου.

2. Θα πρέπει να υπολογίσουμε την ακτίνα του κύκλου του κορμού του δέντρου σε ύψος περίπου 1,5 μ. από το έδαφος και, στη συνέχεια, να διαιρέσουμε με το 0,4 εκ., για να υπολογίσουμε την ηλικία του δέντρου κατά προσέγγιση. Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με το μήκος του κύκλου : 6,28. Άρα η ηλικία του δέντρου είναι ίση με το μήκος κύκλου διά του γινομένου 6,28 x 0,4 = 2,512. Επομένως, για να βρούμε την ηλικία του δέντρου, διαιρούμε το μήκος του κύκλου με το 2,5 περίπου. *Σημείωση: Αν το δέντρο είναι ανάμεσα σε άλλα δέντρα και μοιράζεται με αυτά τα απαραίτητα στοιχεία του εδάφους για την ανάπτυξή του, η τελευταία εύλογα απαιτεί περισσότερο*

χρόνο. Με τη μέτρηση σε εκατοστά του μήκους του κύκλου του κορμού και τη διαίρεσή του με τον αριθμό 1,25, υπολογίζεται κατά προσέγγιση η ηλικία του δέντρου.

3. Από τις καιρικές συνθήκες. Η υγρασία και η σωστή θερμοκρασία είναι ευνοϊκές σε αντίθεση με την ξηρασία ή τις χαμηλές ή πολύ υψηλές θερμοκρασίες

4. Η δενδροχρονολόγηση ενός κομμένου δέντρου μας δείχνει, ανάλογα με τους κύκλους, αν στην αρχή της ζωής του είχε κάποια εμπόδια (οι κύκλοι δεν είναι ο ένας μέσα στον άλλον), αν υπήρχε περίοδος παγετού (εξαρτάται από τα σκισίματα) και αν είχε αργή ανάπτυξη (πυκνοί κύκλοι).

Επαναληπτικό 7

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

χαρτόνι με κύκλο, μεζούρα, κομμάτι σπάγκου

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

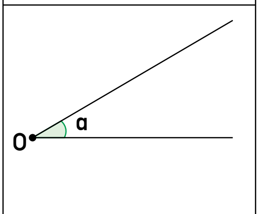
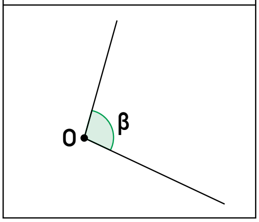
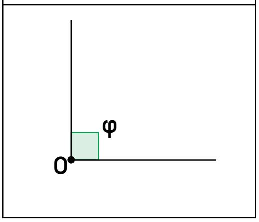
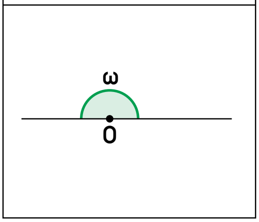
1ο Πρόβλημα: α. (1, 3), β. (3, 2), γ. 1 μπροστά και 1 πάνω, (1, 1)

δ. 2 μπροστά και 2 πάνω, (2, 2)

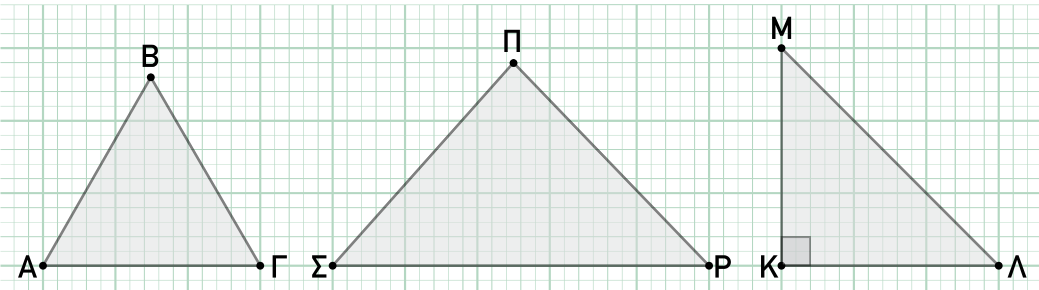
Η Δανάη είναι καλύτερα να βάλει **Χ** στο (1, 2), ώστε να κόψει την πορεία του Αντρέι και να είναι έτοιμη να φτιάξει 4 **Χ**.

2ο Πρόβλημα: 214 χλμ.

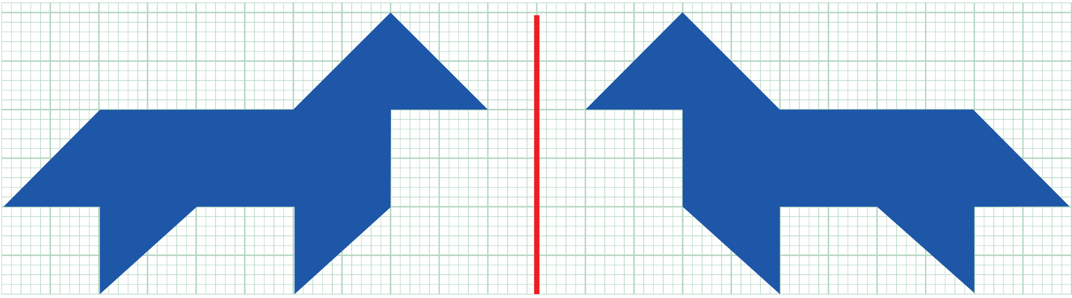
3ο Πρόβλημα:

γωνία 30°	γωνία 100°	γωνία 90°	γωνία 180°
			

4ο Πρόβλημα:



5ο Πρόβλημα:



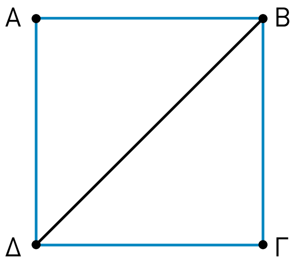
Τετράδιο Εργασιών

				γωνίες (πλήθος)			Είδος τριγώνου	
Τρίγωνο	**γωνίες σε μοίρες (°)**			**Οξείες**	**Ορθές**	**Αμβλείες**	**ως προς τις γωνίες**	**ως προς τις πλευρές**
ΑΒΓ	75°	40°	65°	3	0	0	οξυγώνιο	σκαληνό
ΔΕΖ	130°	25°	25°	2	0	1	αμβλυγώνιο	ισοσκελές
ΗΘΙ	60°	60°	60°	3	0	0	οξυγώνιο	ισόπλευρο
ΚΛΜ	90°	45°	45°	2	1	0	ορθογώνιο	ισοσκελές
ΝΞΟ	30°	70°	80°	3	0	0	οξυγώνιο	σκαληνό

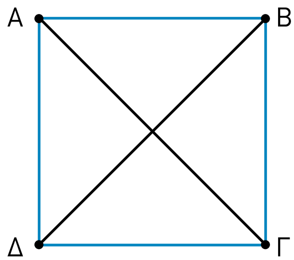
1ο Πρόβλημα: Η διαδρομή θα είναι:

(-7,1) → (-6,1) → (-5,1) → (-4,1) → (-4,0) → (-3,0) → (-2,0) → (-1,0) → (0,0)

2ο Πρόβλημα:



α. Δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα

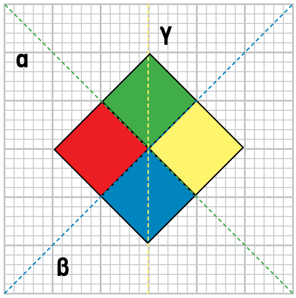


β. Τέσσερα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα

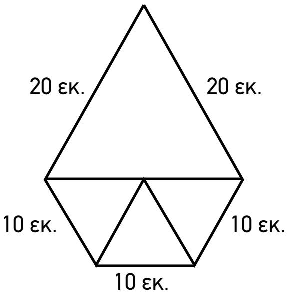
3ο Πρόβλημα: Η διάμετρος είναι 60 εκ. Το μήκος του κύκλου θα είναι 3,14 x 60 = 188,4 εκ. Κατά συνέπεια, σε μίαν πλήρη περιστροφή θα διανύσει 188,4 εκ.

Σε 100 πλήρεις περιστροφές θα διανύσει 100 x 188,4 = 18.840 εκ. ή 188,4 μ.

4ο Πρόβλημα: Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι άξονες συμμετρίας. Με άξονα συμμετρίας τον α κατασκευάζεται το πράσινο τετράγωνο. Με άξονα συμμετρίας τον β κατασκευάζεται το μπλε τετράγωνο. Με άξονα συμμετρίας τον γ κατασκευάζεται το κίτρινο τετράγωνο.



5ο Πρόβλημα: Επειδή η πλευρά του μικρού ισόπλευρου τριγώνου είναι 10 εκ., η πλευρά του μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου είναι 20 εκ. Κατά συνέπεια, η περίμετρος θα είναι:



20 + 10 + 10 + 10 + 20 = 70 εκ.

Ενότητα 8
Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία - Μετρήσεις
Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα: Γεωμετρία - Μετρήσεις

Α. Θεωρητικό μέρος

Οι μονάδες μέτρησης είναι μία ανθρώπινη επινόηση και μπορεί να πάρουν οποιαδήποτε μορφή, εφόσον διαθέτουν συνεκτικότητα και γενικευμένη αποδοχή. Οι μονάδες του μετρικού συστήματος εμφανίστηκαν πρώτη φορά στη Γαλλία τον 18ο αι. και ήταν υποχρεωτικό να έχουν επιστημονική βάση. Στις μέρες μας έχει καθιερωθεί το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, στο οποίο οι μονάδες μέτρησης είναι βασισμένες σε δυνάμεις του 10, δηλαδή αποτελεί ένα δεκαδικό σύστημα έκφρασης συμβατικών μονάδων μέτρησης φυσικών μεγεθών μέτρων και σταθμών. Η γνώση των μονάδων του μετρικού αυτού συστήματος προϋποθέτει την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και της αξίας θέσης. Οι μετρήσεις περιλαμβάνουν εκλεπτυσμένες ιδέες και τεχνικές και ταυτόχρονα παρέχουν τα κατάλληλα πλαίσια για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν σε πολυψήφιους αριθμούς αλλά και διαφορετικές μορφές αριθμών (Hopkins et al., 2013).

Μία μέτρηση είναι ένας αριθμός που υποδηλώνει σύγκριση μεταξύ του χαρακτηριστικού του αντικειμένου που μετριέται και του ίδιου χαρακτηριστικού μιας δεδομένης μονάδας μέτρησης. Η μονάδα θα πρέπει να διαθέτει το χαρακτηριστικό που μετριέται. Η χρήση των άτυπων μονάδων μέτρησης, αν και συνηθίζεται στις μικρές τάξεις, είναι σημαντική σε οποιοδήποτε επίπεδο, καθώς διευκολύνει τα παιδιά στο να επικεντρωθούν στην ιδιότητα που μετριέται, βοηθά στη διάκριση μεταξύ μέτρησης και μονάδων μέτρησης, καθώς και στη μετάβαση στις τυπικές μονάδες μέτρησης, ενώ είναι ευχάριστες για τα παιδιά. Έτσι, στις μετρήσεις ενδείκνυται να αρχίζουμε με άτυπες μονάδες και σταδιακά να προχωρούμε στη χρήση τυπικών μονάδων κι εργαλείων μέτρησης. Η κατασκευή απλών οργάνων μέτρησης από τα παιδιά αυξάνει τις πιθανότητες κατανόησης του πώς μετρά ένα όργανο μέτρησης (Van de Walle, 2005).

Αναφορικά με τις τυπικές μονάδες μέτρησης, είναι σημαντικό οι μαθητές/ήτριες να εξοικειωθούν με αυτές, ώστε να έχουν μια γενική ιδέα για το μέγεθος των συνηθέστερα χρησιμοποιούμενων μονάδων και του χαρακτηριστικού που μετράνε, να καταστούν ικανοί να επιλέγουν την κατάλληλη μονάδα μέτρησης για κάθε περίπτωση και να γνωρίζουν τις σχέσεις μεταξύ των συνηθέστερα χρησιμοποιούμενων μονάδων (Van de Walle, 2005).

Β. Προηγούμενες γνώσεις μαθητών/ριών

Οι μαθητές/ήτριες, μέσα από τις εμπειρίες τους στη μέτρηση διαφόρων χαρακτηριστικών στην καθημερινή τους ζωή και τις προηγούμενες τάξεις, αναμένεται να έχουν προχωρήσει στην ανάδειξη κάθε χαρακτηριστικού, να έχουν εξοικειωθεί με την επιλογή και χρήση τόσο άτυπων όσο και τυπικών μονάδων μέτρησης, καθώς, επίσης, και με τη διαδικασία "κάλυψής" του με αυτές τις μονάδες (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Οι μαθητές/ήτριες στο Βιβλίο Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού αναγνωρίζουν και ταξινομούν σχήματα (επίπεδα και στερεά) με βάση τις ιδιότητές τους (αριθμός κορυφών, πλευρών, μήκος πλευρών) και τα σχεδιάζουν σε διάφορους καμβάδες. Επιπλέον, επεκτείνουν την αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων ως εδρών στερεών, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετραγώνου-κύβου, κύκλου - σφαίρας) και σχεδιάζουν αναπτύγματα στερεών.

Συνδέουν, επίσης, συνεχή χαρακτηριστικά όπως το μήκος, η επιφάνεια ή ο όγκος με διακριτά τυπικά μεγέθη που αποτελούν τις μονάδες και αντιστοιχούν τη σύνδεση αυτή με έναν αριθμό. Η νοητική διαδικασία της σύνδεση αυτής πραγματοποιείται βαθμιαία μέσα από πραγματικές καταστάσεις σύγκρισης, επικάλυψης, μέτρησης των επαναλήψεων, των επιστρώσεων ή των γεμισμάτων, όπως και η προσέγγιση των τύπων με τη δόμηση του χώρου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Για τον υπολογισμό της περιμέτρου λαμβάνονται υπόψη γεωμετρικές ιδιότητες των υπό μελέτη σχημάτων και διερευνάται η σχέση πλευρών και περιμέτρου. Για τον υπολογισμό της μάζας χρησιμοποιούν ζυγούς σύγκρισης. Τέλος, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ ώρας, λεπτού και δευτερολέπτου και επιλύουν σχετικά προβλήματα.

Γ. Πιθανές δυσκολίες

Οι δυσκολίες των παιδιών αφορούν: α) στην κατανόηση της μέτρησης, γενικά, ως μιας «κάλυψης» ενός μετρήσιμου μεγέθους με κάποια τυπική ή άτυπη μονάδα μέτρησης, β) στη διατήρηση ενός μεγέθους σε σχέση με το μέτρο του, γ) στη σχέση περιμέτρου και εμβαδού και δ) στη χρήση τυπικών οργάνων μέτρησης (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Δ. Εποπτικό υλικό

γαλλικό μέτρο, διάστικτοι πίνακες, τετραγωνισμένο χαρτί, χάρακας, γεωμετρικά στερεά, κύβοι Dienes, κυβικό μέτρο, ζυγό σύγκρισης, σταθμά ζύγισης

Κεφάλαιο 45: Μονάδες μέτρησης του μήκους

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να γνωρίζουν τη βασική μονάδα μέτρησης του μήκους και ποια είναι η σχέση της με τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά της,
- να μετρούν μήκη με τα συνήθη εργαλεία/όργανα μέτρησης του μήκους,
- να αναγνωρίζουν τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης και να μετρούν με αυτές,
- να εκφράζουν τα αποτελέσματα μέτρησης με διαφορετικές μορφές αριθμών (και να εκτελούν απλές πράξεις με συμμιγείς αριθμούς),
- να χρησιμοποιούν την κατάλληλη μονάδα μέτρησης σε οικείες καταστάσεις,
- να λύνουν σχετικά προβλήματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

μέτρο, μετροταινία, διαβαθμισμένος κανόνας, τρίγωνα κ.λπ. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να κόψουν χάρτινες λωρίδες και να τις χρησιμοποιήσουν ως άτυπες μονάδες μέτρησης.

Ψηφιακά εργαλεία:

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8443

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Τα παιδιά καλούνται να παρατηρήσουν ότι οι αριθμοί στο σκίτσο της βιβλιοθήκης εκφράζουν τις διαστάσεις της, δηλαδή το πλάτος, το βάθος και το ύψος της, οι οποίες δίνονται σε μέτρα και εκατοστά. Σκόπιμο είναι να επισημανθεί ότι οι τρεις παραπάνω διαστάσεις είναι μήκη ευθύγραμμων τμημάτων, καθώς και ό, τι στην καθημερινή μας ζωή ονομάζουμε αυθαίρετα ως μήκος ή πλάτος μία διάσταση. Μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο αριθμός που εκφράζει το αποτέλεσμα της σύγκρισής του με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο θεωρούμε μονάδα μέτρησης. Στο σημείο αυτό μπορεί να γίνει λόγος για άτυπες (παλάμη, πόδια) και τυπικές (ίντσες κ.λπ) μονάδες μέτρησης του μήκους, καθώς και για την αναγκαιότητα ορισμού της βασικής μονάδας μέτρησης του μήκους (του μέτρου), των πολλαπλασίων και των υποδιαιρέσεών του. Οι διαστάσεις της βιβλιοθήκης μπορεί να εκφραστούν σε δεκαδικούς, σε κλασματικούς και σε συμμιγείς αριθμούς και όχι μόνον σε φυσικούς αριθμούς. Η σύγκριση των διαστάσεων μεταξύ των δύο βιβλιοθηκών μπορεί να γίνει, αν εκφράζονται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης, οπότε γίνεται λόγος για τις μετατροπές από τη μια μονάδα στην άλλη.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Απαραίτητο είναι να επισημανθεί το παράδειγμα του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος α ως μονάδας μέτρησης.

Εφαρμογή: Η εφαρμογή αποτελεί αφορμή για συζήτηση σχετικά με το τι είναι περίμετρος, που ήταν αντικείμενο διδασκαλίας σε προηγούμενες τάξεις. Η περίμετρος της αυλής του σχολείου είναι: 200 + 90 + 45 + 20 + 110 + 20 + 45 + 90 = 620 μ.

Αναστοχασμός

1. Η Δανάη ξέχασε δίπλα στον αριθμό 5 να γράψει τη μονάδα μέτρησης (εκ.).

2. Διαιρούμε με το 1.000, γιατί 1 χμ.= 1.000 μ.

3. Η μονάδα μέτρησης των διαστάσεων του βιβλίου των Μαθηματικών είναι το εκατοστό εκφρασμένη σε φυσικό αριθμό αλλά και οποιαδήποτε άλλη μονάδα μέτρησης εκφρασμένη σε κλασματικό ή δεκαδικό αριθμό.

4. Α. δεκαδικός, Β. συμμιγής, Γ. δεκαδικό κλάσμα /κλασματικός αριθμός, Δ. μεικτός, Ε. φυσικός. ΣΤ. δεκαδικός σε διαφορετική μονάδα μέτρησης.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: ομοιότητα: όργανα μέτρησης του μήκους, διαφορά: το δεύτερο μετρά και χιλιοστά, οπότε δίνει τη δυνατότητα να μετρήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια.

2η Άσκηση: φυσικός: 174 – 123 = 51 χιλ ή 5,1 εκ., δεκαδικός: 0,051 μ. ή 0,51 δεκ., κλασματικός: $\frac{51}{1.000}$, συμμιγής: 5 εκ. 1 χιλ.

3η Άσκηση: Οι αριθμοί που λείπουν στις ισότητες είναι: 750 χιλ., 320.020 εκ., 12 χμ., 5.020 μ., 2.100.000 εκ., 2.500 εκ., 36 μ., 1.500.000 δεκ., 0, 035 χμ., 8.000.100 δεκ.

4η Άσκηση: 9.000 μ. < 30 χμ., $\frac{105}{10}$ μ. < 105 μ., 45 εκ. = 0,45 μ., 0,3 μ. > 3 εκ., 300 εκ. < 3μ. 10 εκ., 345 χμ. > 34.500 δεκ., 300 δεκ. > 3.000 χιλ., 31.456.001 μ. < 31 χμ., 4 μ. 6 εκ. 2 χιλ. < 4,64 μ., 75 εκ. = 7,5 δεκ.

1ο Πρόβλημα: Ο όρος "Ημιμαραθώνιος" δεν είναι κυριολεκτικός, γιατί είναι 42.195:2 =21.097,5 μ., δηλαδή 21.097,5-21.000= 97,5μ., δηλαδή μικρότερος του μισού του Μαραθωνίου.

2ο Πρόβλημα: α. Το μήκος ακτών της Κάσου είναι 50 x 1.000 = 50.000 μ. και η απόστασή της από το λιμάνι του Πειραιά: 255 x 1.852 = 472.260 μ.

3ο Πρόβλημα: Η περίμετρος της κηρήθρας της εικόνας είναι 30 (ο αριθμός των πλευρών) x 5 χιλ.=150 χιλ. = 15 εκ.

Διερεύνηση-Επέκταση: Το νήμα αποτελεί μίαν άτυπη μονάδα μέτρησης του μήκους, η οποία μπορεί, στη συνέχεια, να συγκριθεί με τη βασική μονάδα μέτρησης και τις υποδιαιρέσεις της.

Κεφάλαιο 46: Γεωμετρικά σχήματα - Η περίμετρος

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να υπολογίζουν την περίμετρο σχημάτων χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες,
- να διερευνούν τη σχέση πλευρών και περιμέτρου επίπεδων σχημάτων,
- να αναγνωρίζουν σχήματα που είναι μέρη ενός σύνθετου σχήματος.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

μέτρο, μετροταινία, διαβαθμισμένος κανόνας, τρίγωνα κ.λπ. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να κόψουν χάρτινες λωρίδες και να τις χρησιμοποιήσουν ως άτυπες μονάδες μέτρησης.

Ψηφιακά εργαλεία:

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8446http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8551

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητες διερεύνησης

Τα παιδιά διερευνούν τις γραμμές της ζωγραφιάς και γίνεται συζήτηση για ευθείες, καμπύλες, τεθλασμένες γραμμές, απλές και κλειστές. Στη συνέχεια, σχεδιάζουν στο χαρτί με τις τελείες γραμμές που οδηγούν στο σχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων. Γίνεται συζήτηση για τη διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση το πλήθος των κορυφών τους, δηλαδή σε τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο, εξάγωνο κ.λπ., γενικά για τα πολύγωνα και την περίμετρο κάθε πολυγώνου.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Προτείνεται να αξιοποιηθούν τα παραδείγματα και να δοθεί έμφαση στη διάκριση των κανονικών πολυγώνων.

Εφαρμογή: Ύστερα από την εύρεση της περιμέτρου κάθε κανονικού πολυγώνου, προκύπτει ότι για τον υπολογισμό της περιμέτρου ενός κανονικού πολυγώνου, πολλαπλασιάζουμε το μήκος της πλευράς του επί το πλήθος των πλευρών του.

Αναστοχασμός

1. Το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο είναι κανονικά πολύγωνα, γιατί έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες.

2. Η Δανάη δεν έχει δίκιο, γιατί υπάρχουν εξάγωνα που δεν έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες.

3. Το ορθογώνιο δεν είναι κανονικό πολύγωνο, γιατί μόνον οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, ενώ ο ρόμβος, γιατί μόνον οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

4. Ο Νίκος μπορεί να υπολογίσει το μήκος της πλευράς κάθε εξαγώνου ως εξής: τετραγώνου: 24 : 4 = 6 εκ., ισόπλευρου τριγώνου: 24 : 3 = 8 εκ. και κανονικού εξαγώνου: 24 : 6 = 4 εκ., γιατί και τα τρία αυτά πολύγωνα είναι κανονικά.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Κανονικά πολύγωνα είναι όλα εκτός από το Γ.

2η Άσκηση: Τα πολύγωνα είναι: Α. εξάγωνο, Β. ρόμβος, Γ. τετράπλευρο, Δ. τρίγωνο και Ε. τετράγωνο.

1ο Πρόβλημα: Επειδή 12 εκ. : 2= 6 εκ. και 6 -2 = 4 εκ., το μήκος του ορθογωνίου είναι 4 εκ.

2ο Πρόβλημα: Το μήκος κάθε πλευράς του είναι 36,36 μ. : 6 = 6,06 μ.

3ο Πρόβλημα: Το μήκος της εξωτερικής πλευράς της πλατείας είναι: 400μ. : 4 = 100μ.

Το μήκος της πλευράς της παιδικής χαράς είναι 100 – 2 x (2 + 1,5) = 93μ. και η περίμετρός της 4 x 93= 372 μ.

4ο Πρόβλημα: Το μήκος της πλευράς του κόκκινου μέρους του χαλιού είναι 10 : 4 = 2,5 μ. και του κίτρινου 6 : 4 = 1,5 μ. Επειδή η περίμετρος του μπλε μέρους είναι 1,5 + 1,5 + 2,5 + 2,5 = 8 μ. και του πράσινου, 1,5 + 1,5 + 2,5 + 2,5 = 8 μ., το μήκος της πλευράς όλου του χαλιού 1, 5 + 2, 5 = 4μ. και η περίμετρός του 4 x 4 = 16 μ.

Διερεύνηση – Επέκταση: Στη συζήτηση επισημαίνονται οι βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και συμπληρώνεται ο εννοιολογικός χάρτης.

Πολύγωνα είναι το τρίγωνο, το πεντάγωνο, το εξάγωνο και το τετράπλευρο.

Τετράπλευρα είναι το παραλληλόγραμμο και το τραπέζιο.

Επειδή τα παραλληλόγραμμα διακρίνονται: α. ως προς τις γωνίες: ορθογώνιο και τετράγωνο – ρόμβος και β. ως προς την ισότητα των πλευρών: τετράγωνο και ρόμβος-ορθογώνιο, είναι σωστές και οι δύο τοποθετήσεις στον χάρτη.

Κεφάλαιο 47: Μονάδες μέτρησης της επιφανείας

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να πραγματοποιούν απλές μετατροπές μονάδων μέτρησης της επιφάνειας
- να αναγνωρίζουν τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης της επιφάνειας και να μετράνε με αυτές,
- να εκφράζουν τα αποτελέσματα μέτρησης με διαφορετικές μορφές αριθμών (και να εκτελούν απλές πράξεις με συμμιγείς αριθμούς),
- να χρησιμοποιούν την κατάλληλη μονάδα μέτρησης σε οικείες καταστάσεις,
- να επιλύουν σχετικά προβλήματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

φύλλα Α4 μιλιμετρέ, φύλλα με τετράγωνα, διαβαθμισμένος κανόνας κ.λπ. Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να κόψουν σε χαρτί μιλιμετρέ τετραγωνικά δεκατόμετρα και, στη συνέχεια, να φτιάξουν ένα τετραγωνικό μέτρο.

Ψηφιακά εργαλεία:

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8442

Περιγραφή εργασιών

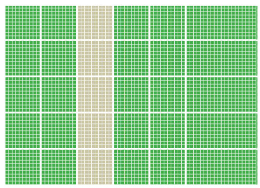
Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Γίνεται συζήτηση, προκειμένου να διαχωριστεί ή έννοια της επιφάνειας και του εμβαδού από το μήκος και την περίμετρο, ενώ στο τετραγωνισμένο χαρτί που είναι ένα τετραγωνικό δεκατόμετρο, σχεδιάζονται οι υποδιαιρέσεις του. Τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν από πόσα τ.εκ. και πόσα τ.χιλ. αποτελείται το τ.δεκ. κ.λπ. και με βάση αυτά να συζητήσουν για τη βασική μονάδα μέτρησης της επιφάνειας και τη σχέση της με τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις της.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Όπως και στην περίπτωση του μήκους, επισημαίνεται ότι το εμβαδό είναι ο αριθμός που εκφράζει το αποτέλεσμα της σύγκρισης ενός επίπεδου σχήματος με ένα άλλο που θεωρείται μονάδα μέτρησης. Το παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί καλύτερα με την ερώτηση: Ποιες μπορεί να είναι οι διαστάσεις της σκιασμένης επιφάνειας, εμβαδού 6 τ.εκ., οπότε αναμένεται να γίνει συζήτηση για το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, που ήταν αντικείμενο διδασκαλίας στη Δ΄ τάξη.

Εφαρμογή: Η εφαρμογή αποτελεί ένα παράδειγμα επίλυσης προβλήματος υπολογισμού εμβαδού με μετατροπή μονάδων. Το οικόπεδο μπορεί, ενδεικτικά, να σχεδιαστεί όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα.



Αναστοχασμός

1. Η Δανάη ξέχασε να γράψει δίπλα στον αριθμό τη μονάδα μέτρησης.

2. Κατά τη μετατροπή των τ.μ. σε τ.χμ., διαιρούμε με το 1.000.000 γιατί 1 τ.μ.- 1.000.000 τ.χιλ.

3. Για να μετρήσουμε την επιφάνεια του δαπέδου ενός σπιτιού, χρησιμοποιούμε, συνήθως, το τ.μ.

4. Οι μορφές των αριθμών είναι: Α. δεκαδικός, Β. συμμιγής, Γ. κλασματικός, Δ. κλασματικός, Ε. φυσικός

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Χρήσιμο είναι να επισημανθεί ότι το τετράγωνο αποτελεί άτυπη μονάδα μέτρησης και ότι πρόκειται για μετρήσεις με άτυπες μονάδες μέτρησης. Σχήμα 1: 9 τετράγωνα, Σχ.2: 8 τετράγωνα, Σχ.3: 14 τετράγωνα, Σχ.4: 8 τετράγωνα, Σχ.5: 18 τετράγωνα, Σχ.6: 15 τετράγωνα, Σχ.7: 10 τετράγωνα, Σχ.8: 8 τετράγωνα.

2η Άσκηση: 9.300 τ. χιλ., 36.009 τ.εκ., 16 στρέμ., 250 τ.μ., 2.100 τ.εκ., 4,8 στρέμ., 360 τ.εκ., 800.010.000 τ.μ.

3η Άσκηση:12.000 τ.μ.= 12 στρέμ., $\frac{408}{100}$ τ.μ. < 405 τ.μ., 75 τ.εκ. > 750 τ.χιλ., 0,9 τ.μ. > 9 τ.δεκ., 300 τ.εκ. = 3τ. δεκ., 345 τ. χμ. > 34.500 στρέμ., 6 τ.μ. 4 τ.εκ. < 6,04 τ.μ., 95 τ.μ. = 0,095 στρέμ.

1ο Πρόβλημα: Η επιφάνεια του ενός χωραφιού είναι 16-3= 13 στρέμ., 13 : 2 = 6,5 στρέμ. και η τιμή πώλησής του 6.500 x 2,35 = 15.275 € και του άλλου 6,5 + 3 = 9,5 στρέμ. και η τιμή πώλησής του 9,5 x 2,35=22,325€

2ο Πρόβλημα: Το 1/40 της πλατείας είναι 640 τ.μ. : 40 = 16 τ.μ.= 1600 τ.δεκ. και το ορθογώνιο παρτέρι έχει εμβαδό 640 : 32= 20τ.μ.=2.000 τ.δεκ.

3ο Πρόβλημα: Ανάλογα με τη μονάδα μέτρησης, η επιφάνεια είναι Α.8x8= 64 τετράγωνα. Β. 64x2=128 τρίγωνα καθένα από τα οποία είναι το μισό του μικρού τετραγώνου, Γ. 128x2 = 256 τρίγωνα καθένα από τα οποία είναι το μισό του μισού του μικρού τετραγώνου.

Διερεύνηση - Επέκταση

α. Το τρίγωνο που αποτελεί τη μονάδα μέτρησης αποτελείται από 4,5 τετράγωνα, οπότε: Α=36:4,5=8, Β.9:4,5=2, Γ.18:4,5=4, Δ.45:4,5=10 και β.Α.0,36τ.δεκ, Β. 0,09 τ.δεκ., Γ.0,18τ.δεκ., Δ.0,45τ.δεκ.

Κεφάλαιο 48: Εμβαδό τετραγώνου, ορθογωνίου και ορθογώνιου τριγώνου

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να υπολογίζουν τα εμβαδά τετραγώνων, ορθογωνίων και ορθογώνιων τριγώνων χρησιμοποιώντας τις γραμμικές τους διαστάσεις,
- να επιλύουν σχετικά προβλήματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

φύλλα Α4 μιλιμετρέ, φύλλα με τετράγωνα, διαβαθμισμένος κανόνας κ.λπ.

Ψηφιακά εργαλεία: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8439,

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8444

Τάγκραμ: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8554

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Αρχικά, χρήσιμο είναι να διερευνηθεί με ποιον τρόπο μπορεί να αξιοποιηθεί η μονάδα της εικόνας, έτσι ώστε να προσδιοριστεί η τετραγωνική μονάδα η οποία θα χρησιμοποιηθεί ως μονάδα μέτρησης. Τα παιδιά σχεδιάζουν και διερευνούν πώς μπορούν να υπολογίσουν τα εμβαδά τετραγώνου, ορθογωνίου και ορθογώνιου τριγώνου με μονάδα μέτρησης την τετραγωνική μονάδα, ενώ, στη συνέχεια, μπορούν να μετρήσουν με τον διαβαθμισμένο κανόνα και να υπολογίσουν τα αντίστοιχα εμβαδά σε τ.εκ. Σε προηγούμενες τάξεις έχουν προηγηθεί δραστηριότητες που αποδίδουν νόημα στον υπολογισμό του ορθογωνίου με πολλαπλασιασμό των μηκών των πλευρών του. Αναφορικά με τον υπολογισμό του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου, χρησιμοποιείται η ανάλυσή του σε ορθογώνια τρίγωνα, οπότε οι μαθητές/ήτριες διαπιστώνουν την ισότητα των δύο τριγώνων με μετασχηματισμό και υπολογίζουν το εμβαδό σε σχέση με το εμβαδό του αντίστοιχου ορθογωνίου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Τα παραδείγματα μπορεί να αξιοποιηθούν, για να δοθεί έμφαση και στις άτυπες μονάδες μέτρησης.

Εφαρμογή: Η εφαρμογή είναι ένα πρόβλημα υπολογισμού της περιμέτρου ενός τετραγώνου γνωστού εμβαδού: μήκος πλευράς 6 μ. και περίμετρος 4x6= 24 τμ.

Αναστοχασμός

1. Το αποτέλεσμα του Νίκου δεν είναι σωστό, γιατί η περίμετρος δεν μετριέται σε τ.εκ

2. Οι διαστάσεις του μπορεί να είναι Α, Β και Γ.

3. Η περίμετρός του είναι Δ.

4. Κάθε τέτοιος υπολογισμός είναι λανθασμένος.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: 28 μ.- 46 τ.μ., 4 εκ.- 12 τ.εκ., 8 δεκ.- 56 τ.δεκ., 6 χιλ.- 54 τ.χιλ., 15μ.- 54μ.

2η Άσκηση: 20 μ.- 25 τ.μ., 6 εκ.- 36 τ.εκ., 28 δεκ.- 49 τ.δεκ.

3η Άσκηση: 6 τ.μ., 8 εκ., 5 δεκ.

1ο Πρόβλημα: Το μήκος της πλευράς του δημοτικού σχολείου είναι 8 + 3 =11μ., οπότε η περίμετρός του είναι 4 x 11= 44 μ. και το εμβαδό του 11 x 11= 121 τ.μ.

2ο Πρόβλημα: Όπως υπολογίστηκε στην εφαρμογή, τα τετράγωνα έχουν πλευρά 3, 4 και 5 μονάδες, αντίστοιχα, οπότε η πλευρά του τετραγώνου είναι 3+4+5=12 μονάδες, το εμβαδό του 12 x 12 = 144 μονάδες και το εμβαδό της χρωματισμένης επιφάνειας 144-9-16-25=94 τετραγωνικές μονάδες.

3ο Πρόβλημα: Το εμβαδό του δαπέδου είναι 15x12=180 τ.μ., κάθε πλακάκι έχει εμβαδό 25 x 25 = 625 τ. εκ.= 0,0625 τ.μ., οπότε θα χρειαστούν 180 : 0,0625 = 2.880 πλακάκια, τα οποία κοστίζουν: (1.440 x 9) + (1.440 x 7,80) =12.960 € (τα μαύρα) + 11.232 € (τα λευκά) = 24.192€.

4ο Πρόβλημα: Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι 8x3= 24 τ.εκ., του μεγάλου τριγώνου 24:2=12 τ.εκ., του μικρού τριγώνου 9:2=4,5 τ.εκ., οπότε το εμβαδό του σχήματος είναι 24 + 12 +12+ 4,5+4,5=57 τ.εκ.

Διερεύνηση – Επέκταση: Τα σχήματα που μπορούν να σχηματίσουν τα παιδιά είναι, ενδεικτικά, ρόμβοι, τρίγωνα μεγάλα, τρίγωνα μικρά κ.λπ.

Κεφάλαιο 49: Γεωμετρικά στερεά - Ο όγκος

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να υπολογίζουν το πλήθος των κύβων διάφορων (ορθογώνιων) κατασκευών,
- να αναλύουν στερεά σε δομικές μονάδες (κύβους).

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

κύβοι, κουτιά κ.λπ.

Ψηφιακά εργαλεία: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8936

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8941

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Αρχικά, μπορεί να γίνει συζήτηση για τις δύο και τις τρεις διαστάσεις, τα αναπτύγματα, τη διάκριση γεωμετρικών στερεών και γεωμετρικών σχημάτων. Το γεωμετρικό στερεό που αντιστοιχεί στο μπαούλο είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μπορούμε να μετρήσουμε τον χώρο του εσωτερικά τοποθετώντας ίσους κύβους, χωρίς να περισσεύει καθόλου χώρος. Επιπλέον, μπορεί να μετρηθεί και με τουβλάκια σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πάλι με την προϋπόθεση ότι δεν περισσεύει καθόλου χώρος εσωτερικά. Με αυτόν τον τρόπο η συζήτηση οδηγείται στην κυβική μονάδα.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Προτείνεται να δοθεί έμφαση στο παράδειγμα σύνθεσης και ανάλυσης του γεωμετρικού στερεού (ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου) με αφετηρία την κυβική μονάδα.

Εφαρμογή: Αποτελεί παράδειγμα της ανάλυσης ενός σύνθετου γεωμετρικού στερεού σε απλούστερα, με βάση την οποία μπορεί να υπολογιστεί ο όγκος του σε κυβικές μονάδες. Ο όγκος του είναι 12 + 16 + 23 = 51 κυβικές μονάδες.

Αναστοχασμός

1. Γεωμετρικά στερεά που η μία τουλάχιστον έδρα τους είναι: α τετράγωνο είναι ο κύβος, το ορθογώνιο, τετράγωνη πυραμίδα και β κυκλικός δίσκος είναι ο κώνος, ο κύλινδρος.

2. Έχει δίκιο, γιατί οι απέναντι έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσες.

3. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σφαίρα για τη μέτρηση του όγκου, γιατί πολλές σφαίρες, για παράδειγμα βόλοι, δεν μπορεί να γεμίσουν τον χώρο αφήνοντας πολλά κενά.

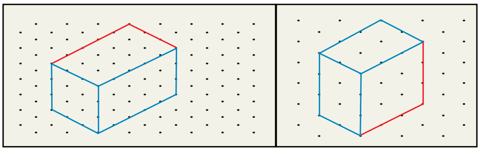
Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: Τα γεωμετρικά στερεά που σχηματίζουν τα αναπτύγματα είναι: κύβος, κώνος, πυραμίδα και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

2η Άσκηση: Ο κύβος του Ρούμπικ αποτελείται από 3 x 9 = 27 κυβικές μονάδες.

3η Άσκηση: Οι κυβικές μονάδες από τις οποίες αποτελούνται τα παρακάτω γεωμετρικά στερεά είναι: 6, 8, 7 και 7 αντίστοιχα.

4η Άσκηση:



1ο Πρόβλημα: Η μέτρηση των κυβικών μονάδων μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 8x 8 x 3 = 192 κυβικές μονάδες.

2ο Πρόβλημα: Επειδή ο όγκος του κιβωτίου είναι 3 x 3 x 3 = 27 κυβικές μονάδες, χωράει ακόμη 27 – 10 = 17 κυβικές μονάδες.

3ο Πρόβλημα: Είναι βαμμένες: α. σε μίαν έδρα τους 6 κυβικές μονάδες, β. σε δύο έδρες τους 12 κυβικές μονάδες και γ. σε τρεις έδρες τους 8 κυβικές μονάδες.

Διερεύνηση-Επέκταση: Ομοιότητες: ίδια στρατηγική, διαφορά: δισδιάστατο και τρισδιάστατο.

Κεφάλαιο 50: Μονάδες μέτρησης του όγκου και της χωρητικότητας

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να υπολογίζουν τον όγκο και τη χωρητικότητα ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων με βάση τις γραμμικές τους διαστάσεις χρησιμοποιώντας τυπικές μονάδες και τις υποδιαιρέσεις τους,
- να πραγματοποιούν απλές μετατροπές μονάδων μέτρησης του όγκου,
- να μετρούν τον όγκο με τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης,
- να εκφράζουν τα αποτελέσματα μέτρησης με διαφορετικές μορφές αριθμών,
- να χρησιμοποιούν την κατάλληλη μονάδα μέτρησης σε οικείες καταστάσεις,
- να επιλύουν σχετικά προβλήματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

κύβοι, διαβαθμισμένος κανόνας κ.λπ.

Ψηφιακά εργαλεία:

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8445

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8437

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Αρχικά, τα παιδιά μπορούν να υπολογίσουν από πόσα κ.εκ. και πόσα κ.χιλ. αποτελείται το κ.δεκ. κ.λπ. και με βάση αυτά να συζητήσουν για τις μετατροπές από την κάθε μονάδα μέτρησης σε μεγαλύτερη ή σε μικρότερή της.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Πρόσφορο είναι να αξιοποιηθούν τα παραδείγματα.

Εφαρμογή: Ο όγκος κάθε κύβου είναι 2x 2 x 2 =8 τ.εκ., όγκος του κουτιού είναι 6x10 x 12 = 720 τ.εκ., οπότε το κουτί χωράει 90 κύβους.

Αναστοχασμός

1. Η Δανάη δεν έχει δίκιο, γιατί 30 ml = 0,03λ.

2. Χρειάζεται κάθε μέρα να πίνει 2.000: 250 = 8 ποτήρια νερού.

3. Επειδή μήκος επί πλάτος = εμβαδό βάσης, εμβαδό βάσης επί ύψος = όγκος, άρα 35 x 8 = 280 κ.εκ.

5.Ο όγκος μετριέται σε φλιτζάνια τσαγιού στις συνταγές μαγειρικής κ.λπ.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: 120 κ.εκ., 2 μ., 7 δεκ.

2η Άσκηση: 9 τ.εκ. - 27 κ.εκ., 5 δεκ.- 125 κ.δεκ., 4 μ. - 64 κ.μ.

3η Άσκηση: Η αντιστοίχιση βασίζεται στις ισότητες: 13.014 ml = 13 L 14 ml, 7.268 ml = 7L 268 ml, 7.185 L = 7L 185 ml, 8.015L 7l 15ml.

4η Άσκηση: 4L > 399mL, 356L 250mL < 400L, 40.000 mL > 4L, 1,157L > 1L 15mL, 826L 100mL = 826,1L, 825L 1mL = 825.001mL

5η Άσκηση: 6.000 κ.δεκ., 9.000.000 κ.εκ., 12.000 κ.εκ., 12.000.000 κ.χιλ., 0,00001 κ.δεκ., 45 L, 0,000009 κ.μ., 275 L=275.000 mL.

6η Άσκηση: Οι σωστές απαντήσεις είναι: Α. 250 mL, Α. 5mL, Α. $\frac{1}{20}$ mL, Α. 10 L.

1ο Πρόβλημα: Η χωρητικότητα του ενυδρείου είναι 40 x 20 x 25 = 20.000 κ.εκ., οπότε γεμίζει με 20 λίτρα νερού.

2ο Πρόβλημα: Η Δανάη βάζει 30 ml ελαιόλαδου σε κάθε σαλάτα, οπότε με 1,5 λ. μπορεί να φτιάξει 1,5 λ.= 1.500 ml, 1.500: 30 = 50 σαλάτες.

3ο Πρόβλημα: Η χωρητικότητα της δεξαμενής είναι 2 x 1,5 x 1,2 = 3,6 κ.μ.= 3.600 λίτρα. Σε έναν μήνα θα περιέχει 3.600 -900= 2.700 λίτρα, οπότε 2,7 κ.μ.: 3 τ.μ.(το εμβαδό της βάσης) =0,9 μ., Άρα η στάθμη του πετρελαίου κατέβηκε 1,2-0,9=0,3μ. = 30 εκ.

Διερεύνηση – Επέκταση: κουτάλι του γλυκού 5 mL, αναμίκτης-κόφτης 2 L, Δοχείο νερού 1,5 λίτρο, ογκομετρικός κύλινδρος 500 mL, κουτάλι της σούπας 15 mL, φλιτζάνι τσαγιού 250 mL.

Κεφάλαιο 51: Μονάδες μέτρησης της μάζας

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται :

- να πραγματοποιούν απλές μετατροπές μονάδων μέτρησης της μάζας,
- να χρησιμοποιούν ζυγούς για τη μέτρηση της μάζας,
- να εκφράζουν τα αποτελέσματα μέτρησης με διαφορετικές μορφές αριθμών, (και να εκτελούν απλές πράξεις με συμμιγείς αριθμούς),
- να επιλύουν σχετικά προβλήματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

ζυγός σύγκρισης, σταθμά, διάφοροι ζυγοί, κανταράκι (δυναμόμετρο) κ.λπ.

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Τα πορτοκάλια στον ζυγό σύγκρισης έχουν όλα την ίδια μάζα, οπότε αναμένεται τα παιδιά να υπολογίσουν ότι η μάζα καθενός είναι 0,25 κ. Η περιγραφή της εικόνας μπορεί να αποτελέσει αφορμή, για να γίνει συζήτηση για τον ζυγό σύγκρισης με ίσους βραχίονες και την ισορροπία του, τη μάζα, τη διάκρισή της από το βάρος (δύναμη), τα όργανα μέτρησης της μάζας και του βάρους, καθώς και τη χρήση των όρων αυτών στην καθημερινή ζωή.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Χρήσιμο είναι να επισημανθεί ότι η μάζα, μία έννοια γνωστή στα παιδιά από τη Φυσική, διακρίνεται από το βάρος, αν και στο παρελθόν στα Μαθηματικά τις έχουν διδαχτεί ως ταυτόσημες έννοιες.

Εφαρμογή: Οι μαθητές/ήτριες μπορούν να αναγνωρίσουν και να γράψουν τους αριθμούς που εκφράζουν το μέρους του κιλού που αντιστοιχεί σε καθένα από τα σταθμά της εικόνας.

Αναστοχασμός

1. Μεγαλύτερη είναι η μάζα της σακούλας Β, γιατί 129.000 γρ.= 1,29 κ.

2. Η μάζα των μακαρονιών της συνταγής είναι 460 γρ. = 0,46 κ.

3. Ο Νίκος έχει δίκιο, γιατί η μάζα είναι σταθερή, ενώ το βάρος μεταβάλλεται από τόπο σε τόπο.

4. Για να ζυγίσουμε ένα σώμα, το τοποθετούμε στη μίαν πλευρά του ζυγού σύγκρισης και στην άλλη μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα ή περισσότερα σώματα γνωστής μάζας, όπως τα σταθμά.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: α. Ένας κύβος ζυγίζει όσο 11 βόλοι. β. Ένας κύβος ζυγίζει όσο 3 βόλοι. γ. Ένα πορτοκάλι ζυγίζει όσο 22 βόλοι. δ. Ένας κύβος ζυγίζει όσο $3\frac{1}{2}$ πορτοκάλια.

2η Άσκηση: Οι αριθμοί που λείπουν, για να είναι σωστές οι ισότητες, είναι: 18.000 γρ., 48 κ., 126.000.000 mg, 1 κ., 1.200 γρ., 0,529 κ., 2.480 γρ., 0,000745 κ., 45.500 mg, 18.750.000 mg.

3η Άσκηση: 5.000 γρ. < 6 κ., 36 κ. = 36.000 γρ., 9.000 γρ. > 8 κ., 10.000 mg< 12 γρ., 2.500 γρ. = 2,5 κ., 3.000.000 mg < 3,1 κ., 4,5 τόν. = 4.500.000 γρ., 3 τόν. 500κ. 200 γρ. > 3.500 κ.

4η Άσκηση: Ένα τρίγωνο ζυγίζει όσο 6 βόλοι, επομένως ένας κύβος ζυγίζει όσο 4 βόλοι. Ένα άδειο φλιτζάνι ζυγίζει όσο 8 βόλοι και ένα μισογεμάτο φλιτζάνι ζυγίζει όσο 17 βόλοι, επομένως ένα γεμάτο φλιτζάνι ζυγίζει όσο 18 βόλοι.

1ο Πρόβλημα: Α. Για τη διπλάσια δόση χρειάζονται: 8 αυγά, 500 γρ. ζάχαρη, 0,500 γραμ. βούτυρο, $\frac{1}{2}$ κ. αλεύρι, 50 γρ.κακάο, 6 κ.σ. γάλα, 2 βανίλιες σε σκόνη. Β. Για τη μισή δόση: 2 αυγά, 125 γρ. ζάχαρη, 0,125 γρ. βούτυρο, $\frac{1}{8}$ κ. αλεύρι, 12,5 γρ. κακάο, 1κ,5 κ. σ. γάλα, 1 βανίλια.

2ο Πρόβλημα: Αφού δύο ίδια μολύβια ζυγίζουν όσο μία γόμα, ένα μολύβι ζυγίζει όσο μισή γόμα και η μιάμιση γόμα ζυγίζει 45 γρ. Επομένως η μία γόμα ζυγίζει 45 : $\frac{3}{2}$ = 30 γρ. κι ένα μολύβι 15 γρ.

3ο Πρόβλημα: Το β΄ κιβώτιο ζυγίζει $116\frac{13}{20}$, το γ΄ ζυγίζει $111\frac{18}{20}$ και τα τρία ζυγίζουν $336\frac{19}{20}$ κ.

Διερεύνηση – Επέκταση

Ένα μπουκάλι γεμάτο και το μισό περιεχόμενο ζυγίζουν όσο 18 βόλοι. Αφού το άδειο μπουκάλι ζυγίζει 6 βόλους, το ενάμισι περιεχόμενο ζυγίζει όσο 18-6=12 βόλοι. Το περιεχόμενο ενός γεμάτου μπουκαλιού ζυγίζει όσο 12: $\frac{3}{2}$ = 8 βόλοι. Ένα γεμάτο μπουκάλι ζυγίζει όσο 8+6=14 βόλοι. Η συζήτηση μπορεί να επεκταθεί στο απόβαρο και το καθαρό βάρος.

Κεφάλαιο 52: Μονάδες μέτρησης του χρόνου

Στόχοι - Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές/ήτριες αναμένεται:

- να πραγματοποιούν μετατροπές μονάδων μέτρησης του χρόνου,
- να χρησιμοποιούν το ρολόι, αναλογικό και ψηφιακό, όπως και το χρονόμετρο,
- να συγκρίνουν χρονικά διαστήματα με ακρίβεια δευτερολέπτου,
- να εκφράζουν τα αποτελέσματα μέτρησης με διαφορετικές μορφές αριθμών και να εκτελούν απλές πράξεις με συμμιγείς αριθμούς,
- να επιλύουν σχετικά προβλήματα.

Εποπτικό υλικό – Διδακτικά εργαλεία

αναλογικό, ψηφιακό ρολόι, χρονόμετρο, ημερολόγια μηνιαία, ετήσια, εβδομαδιαία κ.λπ.

Περιγραφή εργασιών

Βιβλίο μαθητή

Δραστηριότητα διερεύνησης

Τα παιδιά παρατηρούν το ψηφιακό ρολόι που δείχνει ώρες, λεπτά και δευτερόλεπτα και γίνεται συζήτηση αναφορικά με το κάθε πότε αλλάζει καθένα από τα ψηφία του. Επίσης, επειδή γνωρίζουν τις υποδιαιρέσεις της ώρας, αναμένεται να βρουν ποια ψηφία μπορεί να είναι σε κάθε θέση όπως και τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο αριθμό που μπορεί να δείξει το ψηφιακό ρολόι. Η ένδειξη του ψηφιακού ρολογιού μπορεί να γραφτεί σε μορφή συμμιγούς αριθμού. Με βάση αυτήν μπορούν να σχεδιαστούν οι τρεις δείκτες στο αναλογικό ρολόι. Επισημαίνεται ότι ο ωροδείκτης δεν βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τον αριθμό παρά μόνον όταν η ώρα είναι ακριβώς.

Η συζήτηση πάνω στην αφίσα της οικολογικής οργάνωσης για την προστασία του θαλάσσιου οικοσυστήματος δίνει τη δυνατότητα σύγκρισης χρονικών διαρκειών.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες: Στα παραδείγματα ενδείκνυται να δοθεί έμφαση στις σχηματικές μετατροπές, καθώς στη μέτρηση του χρόνου αλλάζουν οι αριθμοί με τους οποίους πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε κάθε φορά.

Εφαρμογή: Ανάλογα με την ώρα, αλλάζει και η θέση του ωροδείκτη.

Αναστοχασμός

1. Το χρονόμετρο είναι ένα όργανο μέτρησης του χρόνου και μετρά χρονική διάρκεια, δηλαδή τον χρόνο ξεκινώντας από το 0. Θα μπορούσε επίσης να γίνει λόγος και για το χρονόμετρο των μουσικών οργάνων (που μετράνε ρυθμό = επαναλαμβανόμενο χρόνο/χτυπήματα κάθε τόσο).

2. Η Δανάη δεν έχει δίκιο γιατί, όταν το ρολόι δείχνει 20:00, η ώρα είναι 20-12=8 μ.μ. και όχι 9 μετά το μεσημέρι.

3. Ο Νίκος έχει δίκιο γιατί, όταν η ώρα είναι τρεις παρά τέταρτο ($\frac{1}{4}$), το ρολόι δείχνει 2 και 45 λεπτά, δηλαδή $2\frac{3}{4}$ ($\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ = μία ώρα, δηλαδή 60 λεπτά).

4. Από το χτίσιμο του Παρθενώνα έχουν περάσει: 500 π.Χ. ως 2000 μ.Χ.= 2,5 χιλιετίες. Σωστό είναι το Γ.

5. Προτείνεται να επισημανθεί ότι οι διάφορες μορφές των αριθμών χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις όχι μόνον του χρόνου αλλά και των άλλων μεγεθών.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: 5 ημέρες, 2 ημέρες και 12 ώρες, 6 μήνες, 12 εβδομάδες και 2 ημέρες, 6 χρόνια, 3 χρόνια και 3 μήνες, 6 αιώνες, 5 αιώνες και 90 χρόνια.

2η Άσκηση: $\frac{1}{60}$λ., $\frac{1}{3600}$ ώρ., $\frac{1}{1440}$ ημ., $\frac{1}{2}$ ώρ., $\frac{1}{4}$ ώρ., $\frac{3}{4}$ ώρ., $\frac{1}{7}$ εβδ., $\frac{1}{3}$ μην., $\frac{1}{2}$ μην., 45 ημ., 900 ημ., 350 έτ.

3η Άσκηση

α. 8.400 δευτερόλεπτα< 240 λεπτά < 9 ώρες < 1 ημέρα

β. $\frac{1}{6}$ μην. < 12 ημέρες< 3 εβδομάδες < 1 έτος

γ. 7.200 δευτερόλεπτα < 3 ώρες <$\frac{1}{2}$ ημ.<3.600 λεπτά

δ. 1.440 ώρες < 70 ημέρες < 3 μήνες <$\frac{1}{2}$ χρ.

Ε. μία τριακονταετία <μισός αιώνας < 75 έτ. < 2,5 αι.

1ο Πρόβλημα: Η συνολική χρονική διάρκεια είναι: 10λ.11δ.+ 10λ.4δ. + 10λ.29δ.+ 8λ.37δ. = 38 λ.81 δ. = 39λ.21δ. Από τις 8:00 μ.μ. ο Νίκος άκουσε το cd την πρώτη φορά ως τις 8 : 39 : 21, τη δεύτερη ως τις 9 : 18 : 42 και την τρίτη ως τις 9 : 58 :03. Από την τέταρτη φορά: 10 : 15 : 00 – 9 : 58 : 03 = 16λ. 57δ., 9 : 58 :03 + 16 : 57 + 10 : 11 = 6λ. 46δ.

2ο Πρόβλημα: Η διάρκεια των 4 περιόδων είναι 4 x 10 = 40 λεπτά και η διάρκεια των διαλειμμάτων 1+ 1 +15 = 17 λεπτά, επομένως η συνολική διάρκεια του αγώνα είναι: 40 + 17= 57 λεπτά. Αφού ο αγώνας άρχισε στις 20:00 και δεν υπάρχουν καθυστερήσεις, θα τελειώσει στις 20: 57.

3ο Πρόβλημα: α. Η διάρκεια των μαθημάτων είναι 45 + 40 + 45 + 45 + 40 + 40= 135 + 120 =255 λ., δηλαδή 255 : 60 = 4 ώρες. 15λ. β. Η διάρκεια των διαλειμμάτων είναι 20 + 15 + 10 = 45 λ.

Διερεύνηση – Επέκταση: Επωφελές είναι οι μαθητές/ήτριες να εργαστούν με βάση ένα ημερολόγιο στο οποίο θα αναφέρονται όλες οι αργίες. Έχει ενδιαφέρον να συζητηθεί γιατί κάθε χρονιά δεν έχει το ίδιο πλήθος ημερών στις οποίες τα παιδιά πηγαίνουν στο σχολείο.

Επαναληπτικό 8

Βιβλίο μαθητή

Ασκήσεις: Τα μεγέθη και οι αντίστοιχες μονάδες μέτρησης είναι: επιφάνεια- τ.μ., μήκος - μ., όγκος- κ.μ., χρόνος - ώρ., μάζα - κ.

Η μονάδα μέτρησης είναι για: την απόσταση ανάμεσα σε δύο πόλεις η Γ. χμ., την επιφάνεια ενός χαλιού η Β. τ.μ., τον όγκο μιας ντουλάπας: Γ. κ.μ., τη χωρητικότητα μιας πισίνας: Δ. l, τη διάρκεια ενός αγώνα ποδοσφαίρου: Γ. λεπ., την ηλικία ενός πλάτανου: Γ. έτ.

1ο Πρόβλημα: Η Δανάη θα χρειαστεί, για να τυλίξει το κουτί, 25 +25 +10 + 10 = 70 εκ. κορδέλας.

2ο Πρόβλημα: Η περίμετρος είναι 16 x 12 = 192 εκ. και το εμβαδό 12 x 12 = 144, 11 x 144 = 1.584 τ.εκ.

3ο Πρόβλημα: Ο όγκος της εξέδρας είναι: 2 x 9 x 8 = 144 κ. μονάδες, 8 x 9 x 3 = 216, 216 + 144= 360 κυβικές μονάδες.

4ο Πρόβλημα: Η χωρητικότητα της πισίνας είναι 8 x 6 x 4.5 = 216 κ.μ.. Τα $\frac{5}{6}$ της χωρούν 216 x $\frac{5}{6}$ = 180 κ.μ. νερού, οπότε ο κύριος Γιώργος, για να τα γεμίσει ξοδεύει 180 x 2,7 = 486€.

5ο Πρόβλημα: Η Μαρία γεννήθηκε στις 30 Δεκεμβρίου 2016.

Τετράδιο Εργασιών

1η Άσκηση: παγωτό χωνάκι: σφαίρες-κώνος, σπίτι: κύβος-πυραμίδα.

2η Άσκηση: Οι μετατροπές στις οποίες πολλαπλασιάζουμε με το 100 είναι οι α, β και δ, ενώ αυτές στις οποίες διαιρούμε με το 100 είναι οι α και δ.

3η Άσκηση: Κάθε στερεό αποτελείται, αντίστοιχα, από 12, 48 και 30 κυβικές μονάδες.

4η Άσκηση: Η σειρά των στερεών, από το μεγαλύτερο στο μικρότερο, με βάση το πλήθος των κυβικών τους μονάδων, είναι: στερεό Α (64)>στερεό Β (32)> στερεό Δ (21)> στερεό Γ (13) και στερεό Δ (10).

5η Άσκηση: Οι όγκοι των στερεών είναι 343 κυβικές μονάδες, 36 κ.εκ., 80κ.μ.

1ο Πρόβλημα: α. περίμετρος βάσης= 8 + 8 + 8 + 8 = 32 εκ., β. εμβαδό βάσης = 8 x 8 =64 τ.εκ., γ. 64 x 3 = 192 κ.εκ.

2ο Πρόβλημα: Επειδή 22- (2 x 3)= 16 εκ., το πλάτος του είναι 16 : 4 = 4 εκ., το μήκος του 4 + 3 = 7 εκ., επομένως το εμβαδό του είναι 7 x 4 = 28 τ.εκ.

3ο Πρόβλημα: Η χωρητικότητα της δεξαμενής είναι 5x4x3=60κ.μ., επομένως, για να γεμίσει, χρειάζονται 60.000:100=600 λεπτά = 10 ώρες.

4ο Πρόβλημα: Αφού η περίμετρος κάθε τετραγώνου είναι 8 εκ., η πλευρά του είναι 8 : 4 = 2 εκ. Το εμβαδό κάθε τετραγώνου είναι 2 x 2 = 4 τ. εκ. Επομένως η περίμετρος του νέου σχήματος είναι 4 + 2 + 4 + 2 + 4x (2 + 2)= 28 εκ. και το εμβαδό του 8x 6 – 4 x 4 = 48 -16=32 τ.εκ.

5ο Πρόβλημα: Τάγκραμ: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/8554

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bentley, P.J. (2010). *Το βιβλίο των αριθμών. Τα μυστικά των αριθμών και πώς δημιούργησαν τον κόσμο μας.* Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα.

Brown, M., Hart, K., & Küchemann, D. (1984). *Place-value and decimals.* NFER-NELSON Publishing Company.

Charalambous, C.Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics, 64*(3), 293.

Cutugno, P., & Spagnolo, F. (2014). Misconceptions about triangle in Elementary school. *Diakses tanggal,* 24.

Fazio, L., & Siegler, R. (2011). Teaching Fractions. Educational Practices Series-22. *UNESCO International Bureau of Education.*

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S., & Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education, 16,* 3-17.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 159–165). North American Chapter, Baton Rouge, LA.

Graeber, A.O. (1993). Misconceptions about multiplication and division. *Arithmetic Teacher, 40,* 7.

Hopkins, C., Pope, A., & Pepperell, S. (2013). *Understanding primary mathematics.* David Fulton Publishers.

Irwin, K.C. (1999). Difficulties with decimals and using everyday knowledge to overcome them. *Set, 2*, 110-113.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/ Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Khoury, H.A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Pre-service teachers' concepts. *Educational studies in Mathematics, 27*(2), 191-204.

Kullberg, A. (2006). *From learning study to design study.* Paper presented at the EARI SIG 9 Biennial Workshop, University of Hong Kong.

Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding.* New York: Routledge.

Lamon, S.L. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics* (pp. 146–165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 261-288). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

McIntosh, A. (1995). Mental Computation in School Mathematics: *Preference, Attitude and Performance of Students in Years 3, 5, 7, and 9.* Mathematics, Science and Technology Education Centre (MASTEC), Edith Cowan University, Perth, Western Australia, Australia.

Mokros, J., & Russell, S.J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20-39.

Moskal, B.M., & Magone, M.E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational studies in mathematics, 43*(3), 313-335.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: Teaching rational number. In J. Bransford & S. Donovan (Eds.), *How children learn: History, science and mathematics in the classroom* (pp. 309–350). Washington, DC: National Academies Press.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40,* 27–52.

O'Connor, M.C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics,* 46, 143-185.

Rees, R. & Barr, G. (1984). *Diagnosis and prescription: Some common maths problems.* London: Harper and Co.

Sadi, A. (2007). Misconceptions in Numbers, *UGRU Journal,* 5, 1-7.

Saxe, G.B., Shaughnessy, M.M., Shannon, A., Garcia de Osuna, J., Chinn, R., & Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number Line. In W.G. Martin, M.E. Strutchens, & P.C. Elliott (Eds.), *The learning of mathematics: Sixty-ninth yearbook* (pp. 221-237). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steinle, V. (2004). Detection and remediation of decimal misconceptions. In B. Tadich, S. Tobias, C. Brew, B. Beatty, & P. Sullivan (Eds.), *Towards excellence in mathematics* (pp. 460-478). Brunswick: The Mathematical Association of Victoria.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models, and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282). Oxford, UK: Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(5), 453-467.

Van de Walle, A.J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδα-*

σκαλία, Εκδόσεις Τυπωθήτω-Γεώργιος Δαρδανός, Αθήνα.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction,* 14(5), 469-484.

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., & Σπύρου, Π. (2004). *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών* (Τόμοι 1-2). Intercollege Press, Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά-Κωνσταντίνου, Α., & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα; Στο Ε. Φτιάκα, Α. Γαγάτσης, Η. Ηλία, & Μ. Μοδέστου (Επιμ.). *9ο συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου με θέμα: Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο. Προτεραιότητες και Προοπτικές* (σ. 99-110). Κύπρος.

Εφημερίδα της Κυβερνήσεως (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ),* ΦΕΚ 303, Τεύχος Β΄, 13/03/2003.

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2017). Οδηγός Εκπαιδευτικού για την Περιγραφική Αξιολόγηση στο Δημοτικό. Τεύχος Β΄. Ανακτήθηκε από http://iep.edu.gr/el/component/k2/content/39-pilotiki-efarmogi-tis-perigrafikis-aksiologisis

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, LeaderBooks, Αθήνα.

Κουλουμπαρίτση, Α. (2018). *Αξιολογώ και Μαθαίνω, Πρακτικός Οδηγός για τη Διαμορφωτική Αξιολόγηση του Μαθητή στην Τάξη.* Εκδόσεις Γρηγόρης.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – *Νέο πρόγραμμα σπουδών.* Υποέργο 1: «Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και οδηγών για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». Επιστημονικό Πεδίο: Μαθηματικά. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση. Ανακτήθηκε από http://ebooks.edu.gr/new/ps.php

Τριανταφυλλίδης, Τ. & Σδρόλιας, Κ. (2005). *Βασικές Μαθηματικές Έννοιες.* Τυπωθήτω, Αθήνα.

Φεσάκης, Γ., Καφούση, Σ. & Μαλισόβα, Ε. (2017). Οι διαισθητικές αντιλήψεις των παιδιών Νηπιαγωγείου, Δημοτικού και Γυμνασίου στο πρόβλημα του αθροίσματος των δύο ζαριών με τη βοήθεια ενός μικρόκοσμου. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 6,* 11 - 37.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2004). *Διδακτική των Μαθηματικών.* Τυπωθήτω – Δάρδανος, Αθήνα.

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Κωδικός Βιβλίου: 0-10-0213
ISBN 978-960-06-5894-1

ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών & εκδόσεων

(01) 000000 0 10 0213 3